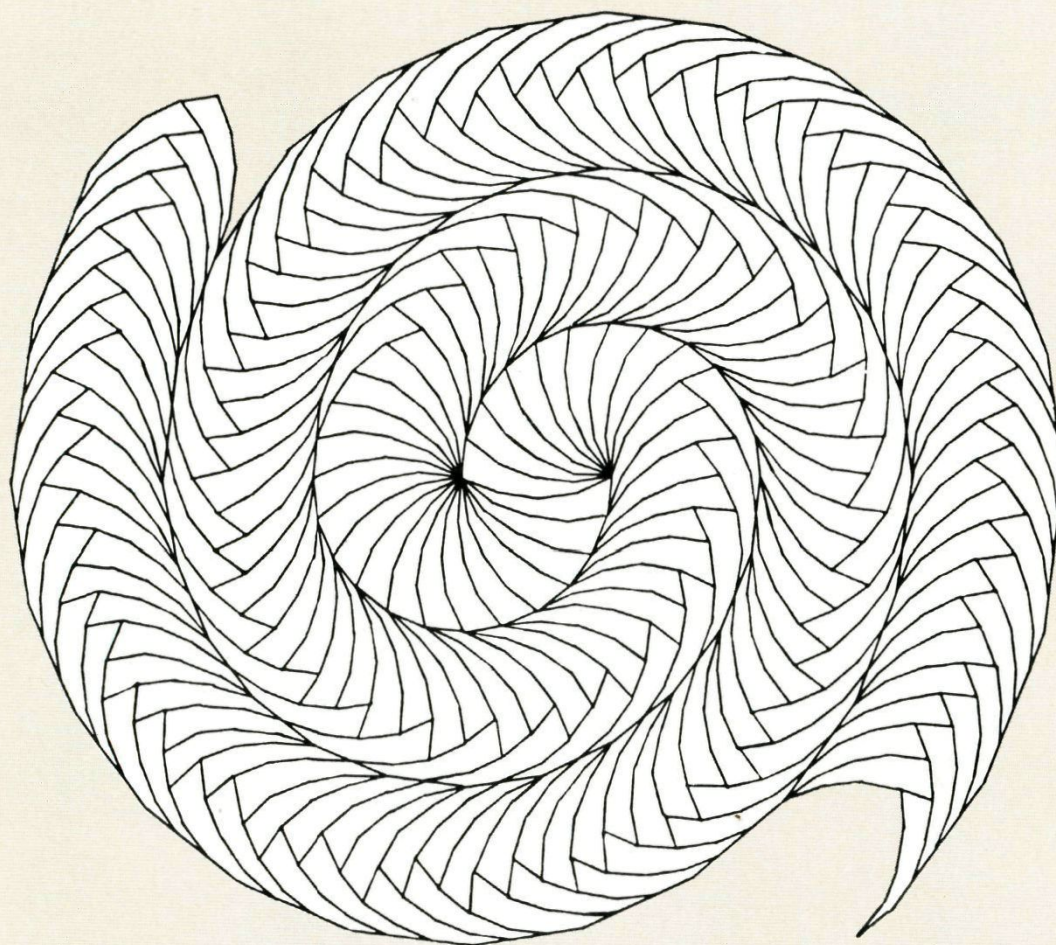




5

jaargang 21 / maart 1982

**wiskundetijdschrift
voor jongeren**

wolters-noordhoff



verschijnt 5 × per schooljaar

Pythagoras

3, 14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510
 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679

82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128
 48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196

44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165 27120 19091
 45648 56692 34603 48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273

72458 70066 06315 58817 48815 20920 96282 92540 91715 36436
 78925 90360 01133 05305 48820 46652 13841 46951 94151 16094

33057 27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548
 07446 23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381 83011 94912

98336 73362 44065 66430 86021 39494 63952 24737 19070 21798
 60943 70277 05392 17176 29317 67523 84674 81846 76694 05132

00056 81271 45263 56082 77857 71342 75778 96091 73637 17872
 14684 40901 22495 34301 46549 58537 10507 92279 68925 89235

42019 95611 21290 21960 86403 44181 59813 62977 47713 09960
 51870 72113 49999 99837 29780 49951 05973 17328 16096 31859

50244 59455 34690 83026 42522 30825 33446 85035 26193 11881
 71010 00313 78387 52886 58753 32083 81420 61717 76691 47303

59825 34904 28755 46873 11595 62863 88235 37875 93751 95778
 18577 80532 17122 68066 13001 92787 66111 95909 21642 01989

De verhouding cirkelomtrek : middellijn in duizend decimalen.

Even stevig doorturven laat zien dat de frequentie waarmee de cijfers 0 t.e.m. 9 in deze reeks voorkomen, aardig overeenkomt met wat je in een reeks van duizend toevalscijfers zou verwachten. Makkelijker is het om na te gaan in hoeverre een dergelijke overeenkomst ook geldt voor opvolgende tweetallen en drietallen gelijke cijfers.

Opvallende bijzonderheden bij deze eerste duizend decimalen zijn de *tien verschillende* cijfers die volgen op de 60e decimaal, en de *zes gelijke* cijfers na de 761e.

Meer over π op blz. 112.

BIJ DE VOORPLAAT

Een ongewoon patroon voor een tegelvloer.

Deze figuur overtuigt je er mogelijk van dat een legpuzzel met uitsluitend identieke stukjes toch best erg boeiend kan zijn. Nog twee andere varianten met dezelfde stukjes staan op blz. 111.

° Mooie machtsommen

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

$$6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3$$

$$15^4 = 14^4 + 9^4 + 8^4 + 6^4 + 4^4$$

$$12^5 = 11^5 + 9^5 + 7^5 + 6^5 + 5^5 + 4^5$$

$$28^6 = 23^6 + 22^6 + 21^6 + 20^6 + 18^6 + 16^6 + 15^6 + \\ + 13^6 + 12^6 + 9^6 + 7^6 + 6^6 + 5^6 + 4^6 + 2^6 + 1^6$$

$$102^7 = 90^7 + 85^7 + 83^7 + 64^7 + 58^7 + 53^7 + 35^7 + 12^7$$

Getallenrelaties zoals hierboven hebben waarschijnlijk niet méér belang dan dat ze wellicht je nieuwsgierigheid wat prikkelen: Hoe zijn zulke relaties te vinden? Zijn er nog meer? Wat zijn de eenvoudigste? Dit stukje maakt hier een paar opmerkingen over.

De bovenste is overbekend. Maar ook de tweede lijkt de moeite van het onthouden zeker waard!

De splitsingen van 15^4 en van 12^5 zijn rechtstreeks met je rekendoosje te controleren. Voor de controle van 28^6 en van 102^7 zul je ook wel wat papier nodig hebben.

Voor wat betreft nog hogere exponenten kennen we alleen nog de gigantische splitsingen van 1827^8 in 127 achtstemachten, en van 9339636^9 in 90 negendemachten.

Bij de lagere exponenten zijn er veel meer van dergelijke splitsingen bekend. We geven er hieronder nog een aantal. Daarbij is soms nog één grondtal door een letter vervangen, waarmee we je willen uitdagen dit getal zelf te bepalen.

Welke splitsing is het 'mooist'?

Je kunt hier verschillende maatstaven voor aanhouden:

1. In de gegeven voorbeelden is steeds *het te splitsen getal zo laag mogelijk* gekozen. (Gelijke termen rechts sluiten we uit, zoals in: $3^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2$.)

2. Een andere maatstaf is, om te zoeken naar *een splitsing in een minimum aantal termen*.

Bij de derdemachten is geen reductie mogelijk, maar bij de vierdemachten kan er wél een term af. Bijvoorbeeld in (bepaal zelf a):

$$a^4 = 315^4 + 272^4 + 120^4 + 30^4.$$

Of het voor vierdemachten ook in 3 termen kan, is niet bekend. (Wel als we ook *afrekken* toelaten, bijvoorbeeld: $158^4 = 134^4 + 133^4 - 59^4$.)

Bij vijfdemachten blijken er zelfs twee termen af te kunnen:

$$b^5 = 133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5.$$

Deze splitsing is in 1966 (per computer, wat dacht je!) gevonden. Er werd een twee eeuwen oud vermoeden van Euler mee weerlegd, die meende dat het aantal termen in een dergelijke splitsing altijd *minstens* zo groot is als de exponent. Hier zijn er echter maar 4 termen, bij een exponent 5.

3. Ook kun je nog zoeken naar splitsingen met *opeenvolgende grondtallen*, en dan liefst nog vanaf grondtal 1. Voorbeelden:

$$c^2 = 24^2 + 23^2 + 22^2 + \dots + 2^2 + 1^2$$

$$d^2 = 28^2 + 27^2 + 26^2 + \dots + 19^2 + 18^2$$

$$e^3 = 14^3 + 13^3 + 12^3 + 11^3$$

$$f^3 = 69^3 + 68^3 + 67^3 + \dots + 7^3 + 6^3$$

(Goed te gebruiken zijn hier de formules $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = [(2n+3)n + 1]n/6$, $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = [(n+2)n + 1]n^2/4$, zie 'Somformules', jrg. 20-3.)

Meervoudige splitsingen

Voorbeelden:

$$65^2 = 63^2 + 16^2 = 60^2 + 25^2 = \\ = 56^2 + 33^2 = 52^2 + 39^2.$$

$$g^3 = 106^3 + 38^3 + 24^3 = 104^3 + 51^3 + 13^3 = \\ = 96^3 + 72^3 + 12^3 = 90^3 + 72^3 + 54^3 = \\ = 89^3 + 82^3 + 15^3.$$

Enkele van deze splitsingen zijn niet 'primitief', d.w.z. dat ze nog te vereenvoudigen zijn door het uitdelen van een gemeenschappelijke factor.

Oneindig veel

Het vinden van al deze splitsingen is ten dele uiterst moeilijk, maar soms toch ook vrij eenvoudig. De manier om oneindig

veel heeltallige oplossingen te vinden voor de vergelijking $z^2 = x^2 + y^2$ is vrij bekend, we geven die hier niet.

Van de vergelijking $t^3 = x^3 + y^3 + z^3$ zijn oneindig veel (maar niet alle!) heeltallige oplossingen te vinden door in de formule

$$a^3 (a^3 + b^3)^3 = b^3 (a^3 + b^3)^3 + \\ + a^3 (a^3 - 2b^3)^3 + b^3 (2a^3 - b^3)^3$$

voor a en b gehele getallen in te vullen.

Probeer b.v. $(a, b) = (2, 1)$ of $(a, b) = (2, -1)$. Of misschien kun je er een hele serie door de computer laten uitrekenen. De juistheid van de formule is eenvoudig aan te tonen door het uitschrijven van de machten.

Negatieve en gebroken exponenten

Voor de exponent -1 geldt nog bijvoorbeeld

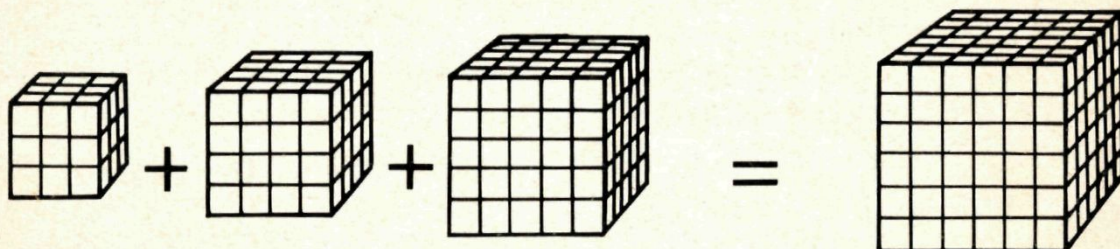
$$2^{-1} = 3^{-1} + 6^{-1}$$

Maar voor andere negatieve exponenten lijken geen splitsingen te bestaan.

Daarentegen is het met *gebroken* exponenten geen kunst. Probeer maar.

$$18^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}$$

$$54^{\frac{1}{3}} = 16^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$$





Pythagoras Olympiade

Nieuwe opgaven (oplossingen inzenden vóór 21 juni 1982).

- PO 43. Bewijs dat voor elk natuurlijk getal n geldt dat tenminste één van de vijf getallen $17^n, 17^{n+1}, 17^{n+2}, 17^{n+3}, 17^{n+4}$,
uitgeschreven in het tientallig stelsel, begint met het cijfer 1.
- PO 44. Als d en n positieve gehele getallen zijn, noemt men d een *deler* van n als voor zeker geheel getal k geldt dat $n = k \cdot d$. Onder $s(n)$ verstaat men de som van alle delers van n . Zo is bijv. $s(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$.
Zijn er positieve gehele getallen n waarvoor geldt $s(n) = 1982$? Of $s(n) = 1980$?
Geef in beide gevallen òf tenminste één zo'n getal n , òf een bewijs dat zo'n getal n niet bestaat.
(Opmerking: een 'oplossing' die bestaat uit simpelweg alle mogelijkheden afchecken m.b.v. een zakcomputer komt niet voor punten in aanmerking!)
- PO 45. Elvie en Tini proberen met een zuivere munt zoveel mogelijk malen kruis te gooien. Elvie gooit 11 maal, Tini 10 maal, maar Elvie mag maar 10 van haar 11 worpen meetellen (ze mag zelf aan de hand van de resultaten na afloop beslissen welke worpen ze meetelt).
Wie de meeste malen kruis heeft, wint, en bij gelijke aantallen wint Tini.
Wie heeft de beste kansen, en hoe groot is haar kans om te winnen?

Wedstrijdvoorwaarden en prijzen

- * Leerlingen van het voortgezet/secundair onderwijs kunnen hun oplossing van een of meer opgaven insturen aan: *Pythagoras Olympiade, Brederode 29, 2261 HG Leidschen-dam (NL)*. Let op de inzendtermijn en zorg voor voldoende frankering.
- * Vermeld op elk (éénzijdig beschreven) vel: naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas. Elke oplossing moet op een nieuw vel beginnen.
- * Oplossingen dienen gemotiveerd en volledig uitgewerkt te zijn, met verklarende tekst in goed lopende zinnen. Slechts goed leesbare inzendingen worden bekeken.
- * Wie een aan zichzelf geadresseerde en als brief gefrankeerde open enveloppe meezendt, ontvangt na de inzendtermijn onze oplossingen.
- * Per opgave worden onder de goede oplosers twee prijzen t.w.v. f 10/Bfr 150 verloot.
- * De opgaven van één jaargang vormen samen de *ladderwedstrijd*. De drie inzenders van de meeste goede oplossingen krijgen elk een prijs t.w.v. f 25/Bfr 400.
- * De beste tien van de ladderwedstrijd die niet in een examenklas zitten, krijgen een uitnodiging voor de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Zij hoeven zich dus niet via de eerste ronde te klasseren.

°De zuurstok- Superkubus

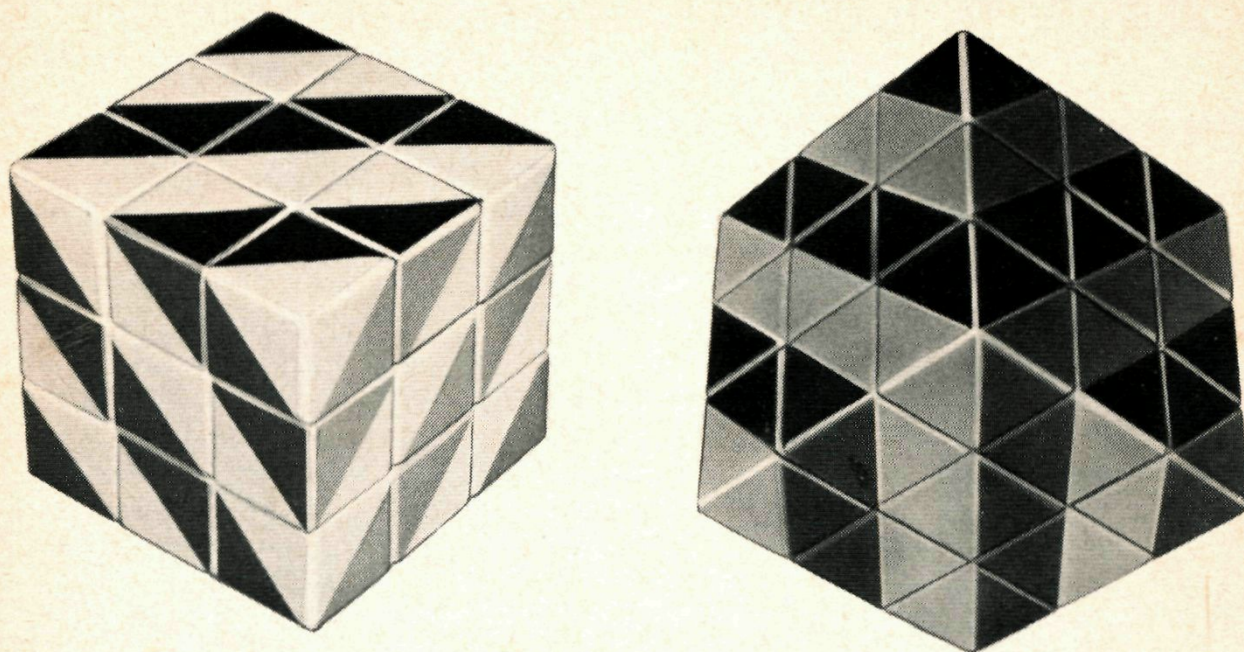


Fig. 1. De vierkleuren-zuurstok-Superkubus van twee kanten bekeken (de 'witte' strepen rechts hebben dezelfde kleur als de 'licht-grijze' strepen links).

Alweer een variant op de Kubus van Rubik! Deze keer met *vier* kleuren. Elk van die kleuren vult een kwart van de gehele kubusoppervlakte, dus anderhalf zijvlak. Daarom is deze Superkubus niet te maken door de plakkertjes van een gewone Kubus af te peuteren, te verknippen en weer anders op te plakken. Je zou dan immers maar van elke kleur één zijvlak aan oppervlakte hebben. Dus op naar de kantoorboekhandel om plakband in vier kleuren te kopen.

Superkubus

Als je de plakkertjes op je kubus zet vol-

gens het patroon van fig. 2 heb je een echte Superkubus: als na een poosje draaien dit zelfde patroon weer terugkomt, is het *zeker* dat alle blokjes (ook de middenblokjes) weer op hun oorspronkelijke plaats zitten, én in hun oorspronkelijke stand.

Bij een gewone Kubus hoeft dit laatste

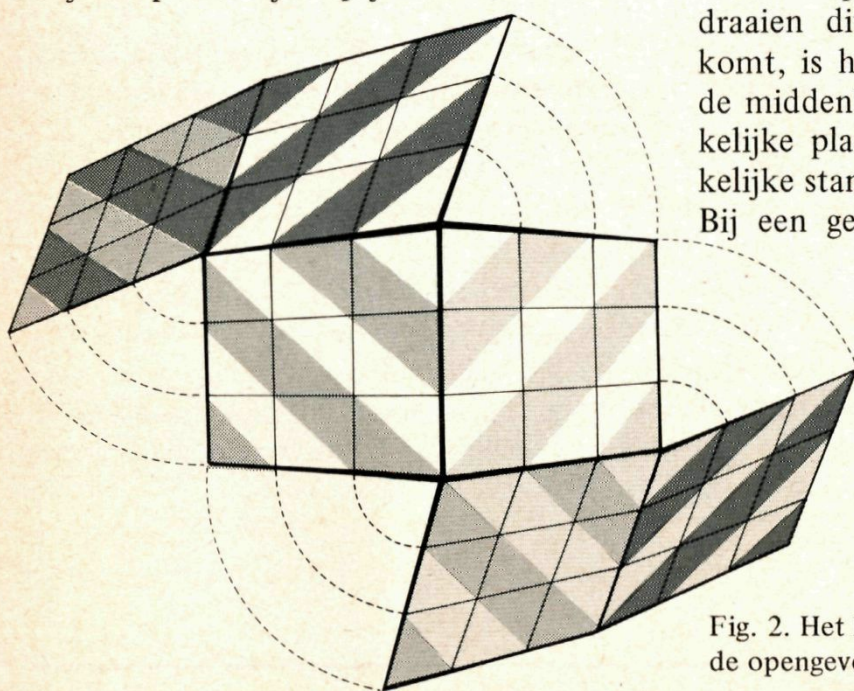


Fig. 2. Het kleurenpatroon op de opgevouwen kubus.

niet zo te zijn. Er is een draai-serie die één centrumblokje omdraait, terwijl dit aan de (effen) kleur van het blokje niet te zien is. En bij de zg. Subsuperkubus (zie *Pyth.* 214 blz. 82) is het mogelijk om paren blokjes 'onzichtbaar' van plaats te laten wisselen.

Zuurstokpatronen

Precieze bestudering van fig. 2 laat zien dat *alle* blokjes verschillend gekleurd zijn. De schuingestrepte zuurstokpatronen vertellen ons van alles over het getal VIER:

- Er zijn zes manieren om uit *vier* kleuren er *twee* te kiezen. Elke combinatie komt voor op precies één zijvlak (en dus op precies één middenblokje).
- Er zijn twaalf ribbeblokjes. Bij de gewone kubus zitten er *twee* kleuren op zo'n blokje, maar bij deze zijn het er *drie*. Eén kleur vult twee halve zijvlakjes, de andere twee vullen er elk een. Alle mogelijke combinaties komen daarbij precies één maal voor: er zijn vier mogelijkheden voor de 'dubbele' kleur. Heb je die eenmaal gekozen, dan kun je nog twee 'enkele' kleuren uit de drie overblijvende kleuren kiezen. Dat kan op drie manieren. In totaal zijn er dus vier-maal-drie = twaalf mogelijkheden, en die komen ook allemaal op de ribbeblokjes voor.

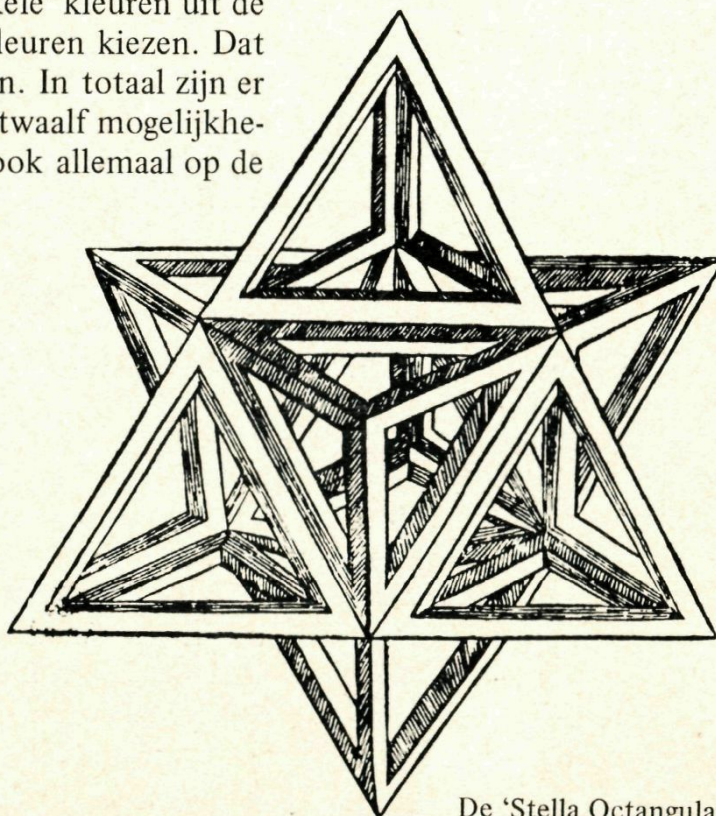
- Tenslotte de hoekblokjes. Je ziet dat er twee soorten zijn. Vier van de acht vertonen *drie* kleuren, telkens twee aan twee tegen elkaar (uit *vier* kleuren kun je er op *vier* manieren *drie* kiezen). Bij de andere vier hoekblokjes zien we rond het hoekpunt ook nog de vierde kleur.

Twee spiegelvarianten

Met vier kleuren (bijv. rood, geel, groen en zwart) en het patroon van fig. 2 kun je nog *twee verschillende* Superkubussen maken: houd je er één voor een spiegel, dan zie je in de spiegel de andere! Als je namelijk met een hoekblokje begint, zeg van de eerste soort, en je neemt bijv. de kleuren rood, geel en groen, dan kun je ze er *linksom*, of *rechtsom* op plakken. Heb je eenmaal die keuze gemaakt, dan ligt de hele verdere verdeling vast.

Viervlakken

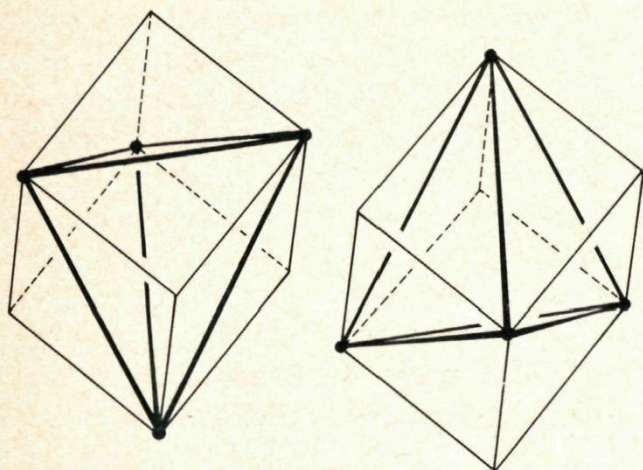
De vier hoekpunten van de ene soort zijn ook de hoekpunten van een *regelmatig*



De 'Stella Octangula'.

viervlak, een 'tetraëder'. (De bekende draaipriamide heeft dezelfde vorm).

De andere vier hoekpunten bepalen net zo een tweede regelmatig viervlak. Die twee viervlakken steken door elkaar heen, samen vormen ze een figuur die vroeger de *Stella Octangulis* (achtpuntige ster) genoemd werd. De prachtige tekening ervan op de vorige bladzijde, is vervaardigd door Leonardo da Vinci.



De twee regelmatige vlakken in een kubus.

°° Met drie kleuren

We besluiten met een opgave. Zoek een patroon voor de kubus met *drie* kleuren (zeg rood/wit/blauw) dat aan de volgende voorwaarden voldoet:

- Elk vierkant vlakje is tweekleurig diagonaal verdeeld, net als bij het bovenstaande vierkleuren geval.
- Het resultaat is een Superkubus. Wel komen nu noodzakelijkerwijs identiek gekleurde middenblokjes voor; deze kunnen echter nooit van plaats wisselen.

Resultaten (in de vorm van een gekleurde kubusbouwplaat) zijn welkom bij de redactie. We zijn benieuwd of er nog mooiere oplossingen mogelijk zijn dan de ene die we al hebben.

Als je een patroon bedacht hebt, kun je van twee gewone kubussen twee van zulke driekleuren-zuurstok-Superkubussen maken door uitwisselen van de helft van de zes kleuren.

°° De sleepkromme

Denk op een horizontaal vel papier twee loodrechte assen getekend. Een potloodje staat rechtop in een punt A van de X -as, op een afstand a rechts van de oorsprong. Dicht boven de punt zit om het potlood een dun draadje geknoopt, dit draadje volgt de X -as en eindigt in de oorsprong.

We verplaatsen nu dit draadeind langs de Y -as omhoog, waarbij het potlood over het papier getrokken wordt (we hebben het potlood verboden om te vallen!). Op het papier ontstaat zo een bepaalde kromme lijn die we de 'sleepkromme' zullen noemen. We bekijken of er over die kromme het een en ander te zeggen valt.

Wat voor kromme?

Om de beschrijving van wat er gebeurt te vereenvoudigen duiden we de punt van het potlood aan met P , en het andere draadeind met Q .

In het begin, als Q nog niet ver van de oorsprong vandaan is, zal P zich nog weinig van A verwijderen. Later komt P wat meer op gang.

Het potlood wordt voortdurend getrokken in de richting van Q ; de richting van de kromme die getekent wordt, wijst dus op elk moment in de richting van Q . De afstand tussen P en Q blijft daarbij steeds gelijk aan de oorspronkelijke afstand a . Wat volgt hieruit voor de vorm van de kromme?

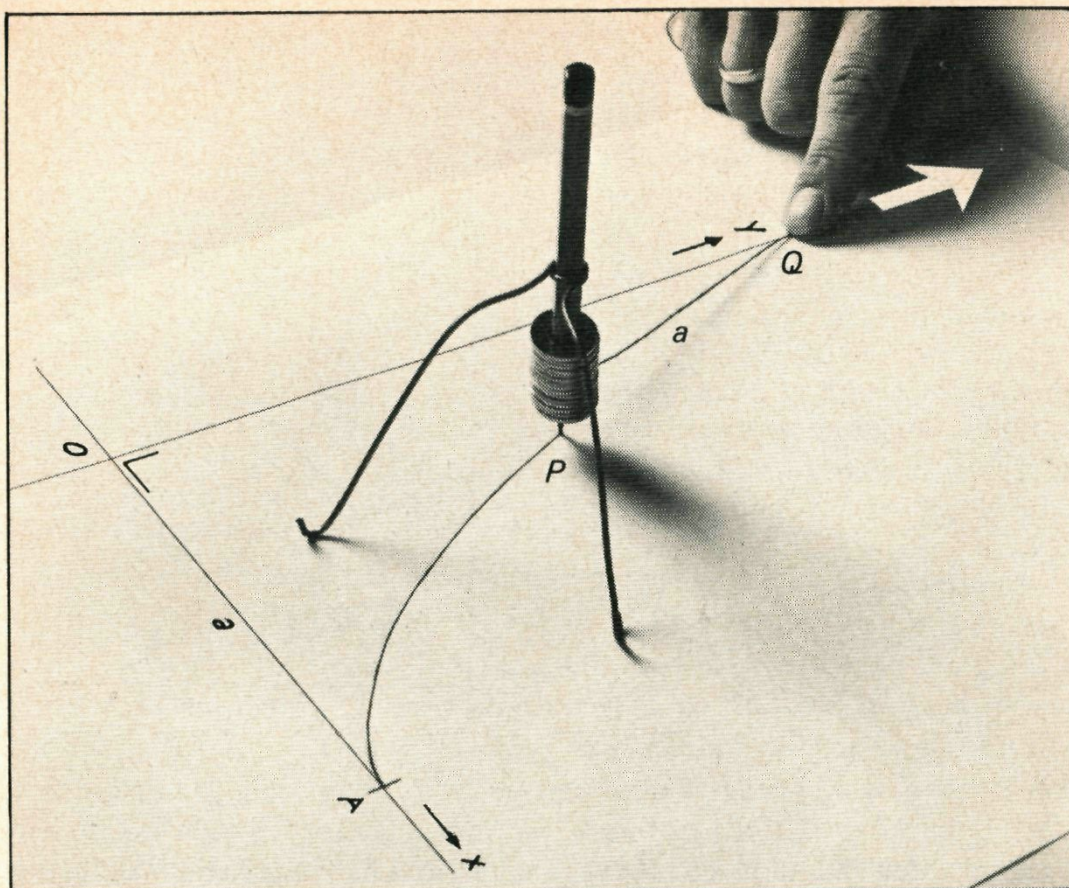


Fig. 1. Het tekenen van een sleepkromme. (De ijzeren ringetjes onder aan het potlood zorgen ervoor dat de wrijving van de twee steunpoten over het papier klein is t.o.v. die van de schrijvende potloodpunt.)

Punt P beweegt zich steeds naar links en omhoog. Eerst minder steil, later met een steeds toenemende steilheid. De Y -as wordt daarbij steeds dichter genaderd maar in geen enkel punt volledig bereikt. De Y -as is dus een asymptoot van de kromme.

Moeilijker is het om in te zien wat de vorm is in de buurt van A . Wordt de kromme daar door de X -as vloeiend geraakt, of vertrekt de kromme direct onder een eindige hoek met de X -as? En hoe groot is dan wel die hoek?

Denk hier eerst over na. Wat vind je?

Punt P begint pas echt goed en wel te bewegen als Q al op enige afstand van O af is. En op dat moment verloopt de baan ook onder een eindige hoek schuin omhoog.

Van de andere kant kan je intuïtie je toch aan het twijfelen brengen: waarom zou de

beginhoek wél bijv. 2° of 12° zijn, en waarom níét 1° of 10° ? Als er één hoek als speciale voorkeurshoek uit de bus moet komen, denk je in eerste instantie waarschijnlijk toch aan 0° (dus met een grafiek die raakt aan de X -as). Andere 'mooie' hoeken als 30° of 45° , komen duidelijk niet in aanmerking.

In plaats van zoals hierboven op ons gevoel te blijven redeneren, zoeken we wat wiskundig gereedschap uit de kist. In de hoop dat dát ons wat meer macht zal geven.

We zagen al dat punt P steeds naar links boven beweegt. Dat wil zeggen dat elke verticale lijn (tussen O en A) juist éénmaal door P wordt gepasseerd. En dat wil weer zeggen dat de kromme lijn is op te vatten als de grafiek van een functie. En wel een functie van de horizontale coördinaat, de x , met als domein het interval

$\langle 0, a \rangle$. We kunnen nu zoeken naar het formule-voorschrift voor die functie. En dááruit kan m.b.v. weer een andere instrument, de differentiaalrekening, iets gezegd worden over de raaklijnrichtingen van de grafiek.

In de wiskunde-tang

De gegevens die we tot nu toe over de sleepkromme hebben, zijn nog eens weer-gegeven in fig. 3. We geven de naam f aan de functie die de sleepkromme als grafiek heeft. Omdat we weten dat de waarde van de afgeleide functie f' , gelijk is aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn, volgt uit deze figuur

$$f'(x) = -\frac{QP'}{PP'} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \quad (1)$$

Om nu ook f zelf te vinden, moeten we deze functie f' primitiveren. Je hebt misschien al eens ervaren dat deze techniek in het algemeen veel minder soepel verloopt dan het omgekeerde, het differentiëren. We laten hier dan ook niet alle

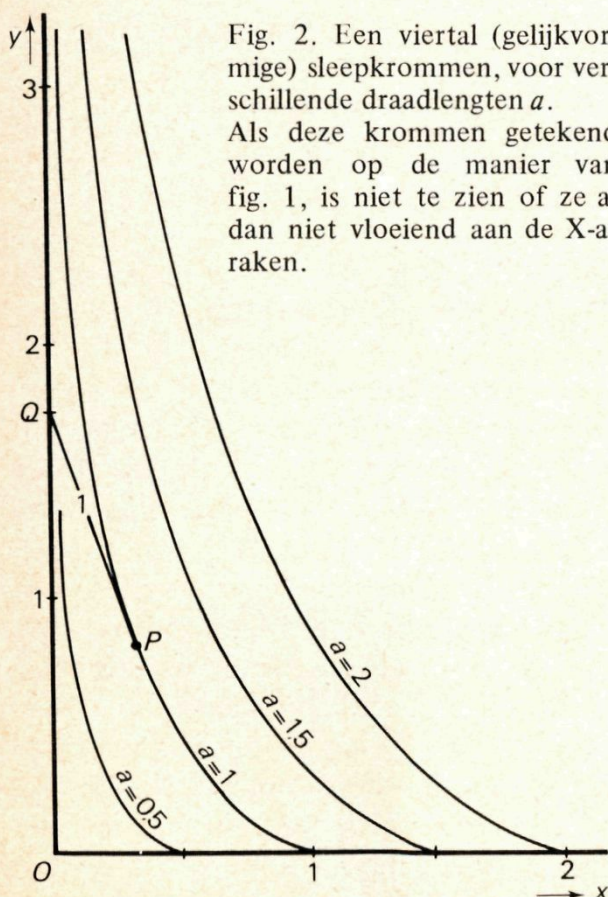


Fig. 2. Een viertal (gelijkvormige) sleepkrommen, voor verschillende draadlengten a .

Als deze krommen getekend worden op de manier van fig. 1, is niet te zien of ze al dan niet vloeiend aan de X-as raken.

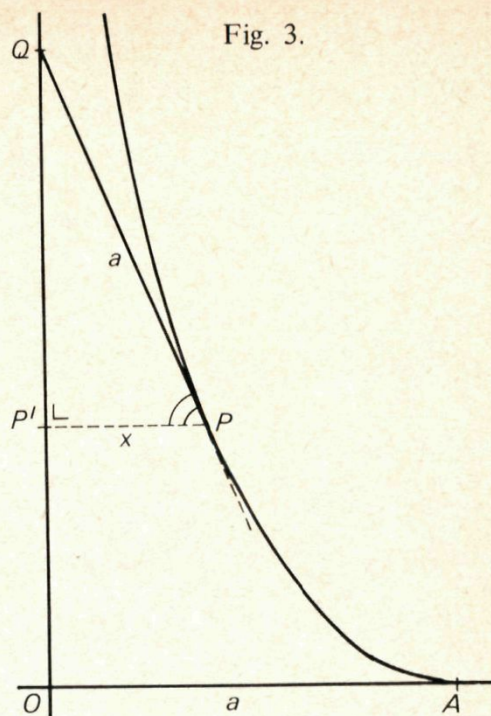


Fig. 3.

trucjes en foefjes zien die leiden tot een uitdrukking voor f . Het resultaat is:

$$f: x \rightarrow -\sqrt{a^2 - x^2} + a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

De vwo-bovenbouwers mogen proberen dit te controleren door terug-differentiëren.

De raaklijn-kwestie

De hier gevonden functie f is overigens *niet* noodzakelijk om een antwoord op de raaklijn-vraag te krijgen. Formule (1) is voldoende.

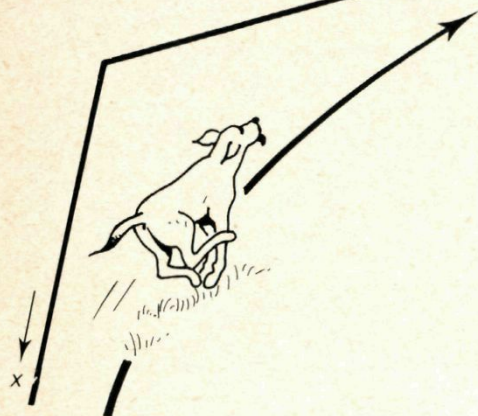
Want de helling van de kromme in het rechter-eindpunt A vinden we door in te vullen $x = a$:

$$\text{r.c. in } A = f'(a) = -\frac{\sqrt{a^2 - a^2}}{a} = -\frac{0}{a} = 0.$$

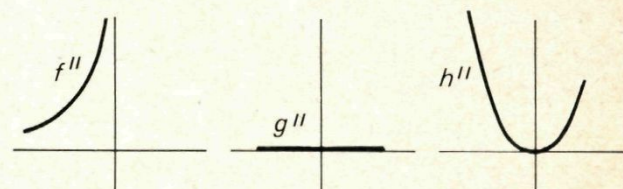
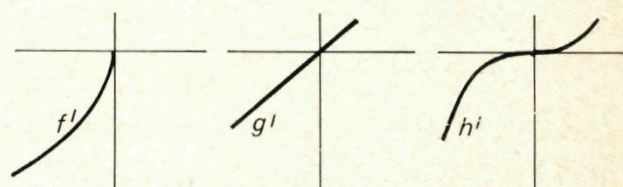
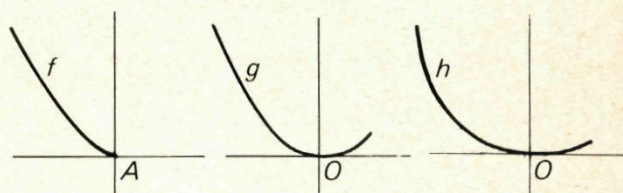
Dus de X-as raakt inderdaad!! (Eigenlijk is het maar hálf raken, omdat f rechts van A niet bestaat.)

De moeilijkheden die we eerder tegenkwamen om dit resultaat ook intuïtief aan te voelen, kunnen nog als volgt verklaard worden.

Fig. 4. De hond die vanuit het veld de op het rechte pad rijdende fietser achterna gaat, volgt ook een 'sleepkromme'. Aangenomen dat het de fietser lukt om de hond op een constante afstand van zich vandaan te houden.



Je kunt zelf nog wel nagaan waarin het soort raken dat we hier ontmoeten, verschilt van het raken aan de X-as van de grafiek van $x \rightarrow x^2$, en van dat van de grafiek van $x \rightarrow x^4$. (Let op het verschil tussen de afgeleide functies in de buurt van het raakpunt.)



f : sleepkromme

$g: x \rightarrow x^2$

$h: x \rightarrow x^4$

We bekijken de functie (1) nog wat nauwkeuriger in de buurt van $x = a$. Wat weet je daar van z'n grafiek?

Dit zou je kunnen onderzoeken door de functiewaarden in een aantal punten, bijv. $x = 0,95a / 0,96a / \dots / 0,99a$ uit te rekenen. (Kies daarbij $a = 1$.)

Of je kunt f' nog eens differentiëren,

$$(\text{tot: } f'': x \rightarrow \frac{a^2}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}}),$$

waaruit geconcludeerd kan worden dat f' in $x=a$ een *verticale* raaklijn heeft ($f''(a) = \infty$).

Dit laatste is ook zónder differentiëren wel in te zien, als we (1) schrijven als

$$x \rightarrow -\frac{\sqrt{a+x}}{x} \cdot \sqrt{a-x}.$$

De eerste factor is in de buurt van $x = a$ een matig variërende functie, maar van de tweede factor ($\sqrt{a-x}$) loopt de grafiek in a verticaal. (Net als van de standaardwortelfunctie $x \rightarrow \sqrt{x}$ in 0.)

De helling van f is dus precies in A weliswaar 0, maar direct links van A neemt die helling 'onmiddellijk' scherp toe!

Ongelofelijk?

Aan volhouders leggen we nog de vraag voor om uit te zoeken hoe het zit met de andere punten van het trekdraadje. Het eindpunt P begint rakend aan de X-as, het eindpunt Q volgt vanaf het begin een baan loodrecht daarop. Maar wat te zeggen van de baan van een knoepje halverwege? Begint die onder 0° ? / 45° ? / 90° ??

Nader onderzoek geeft het op het eerste gezicht misschien ongeloofelijke resultaat dat alle punten verticaal vertrekken, uitgezonderd het horizontaal vertrekkende eindpunt P !

° Acht veertien twintig

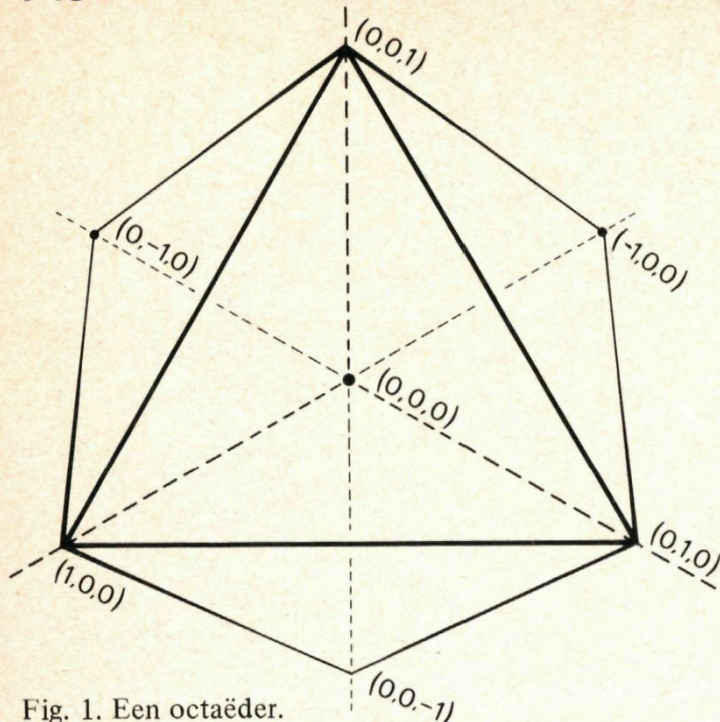


Fig. 1. Een octaëder.

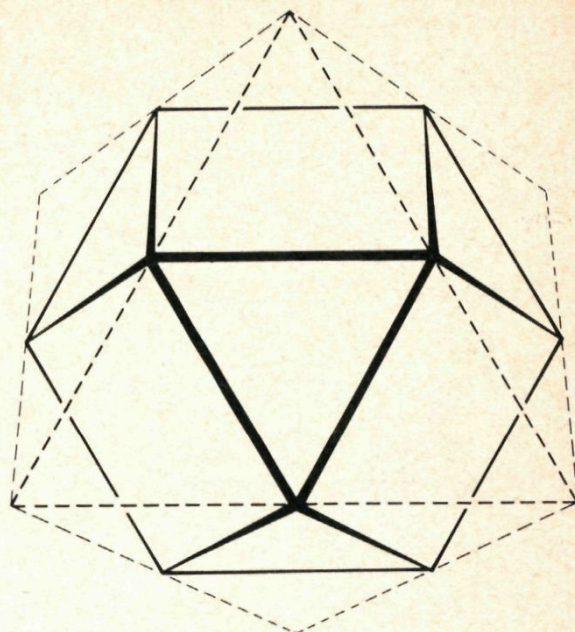


Fig. 2. Een halfregelmatig veertienvlak in een octaëder.

Wel eens gehoord van een *octaëder*? Je mag ook zeggen *regelmatig achthvlak*. Op de volgende manier ontstaat er een. Neem een rechthoekig coördinatenstelsel in de ruimte, en verbind de zes punten met coördinaten $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ en $(0, 0, \pm 1)$. Je krijgt dan acht driehoeken, één in elk 'octant', en samen omsluiten ze een regelmatig achthvlak. Er zijn inderdaad acht vlakken, en verder zes hoekpunten en twaalf ribben. We gaan er een beetje mee spelen.

Wat krijg je als je de middelpunten van de twaalf ribben met elkaar verbindt? Het wordt een figuur met acht driehoeken en zes vierkanten als zijvlakken. Een zg. *half-regelmatig veertienvlak*. Halfregelmatig omdat er twee soorten zijvlakken zijn. Bij regelmatige veelvlakken moeten alle vlakken, alle ribben en alle hoeken onderling gelijk zijn. Bij dit veertienvlak zijn wél alle ribben gelijk; en bij elk hoekpunt komen twee vierkanten en twee driehoeken op dezelfde manier bij elkaar.

De verwoede kubusdraaiers zullen dat veertienvlak wel kennen, want er is een kubusvariant met deze vorm. Als puzzel is dat veertienvlak overigens precies gelijk aan de gewone kubus; de acht extra kleuren maken de zaak echter wel minder overzichtelijk.

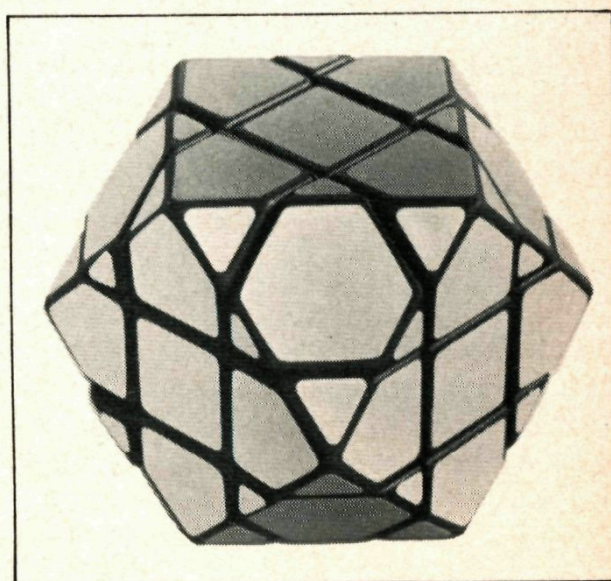


Fig. 3. Een veertienkleurige 'Kubus'.

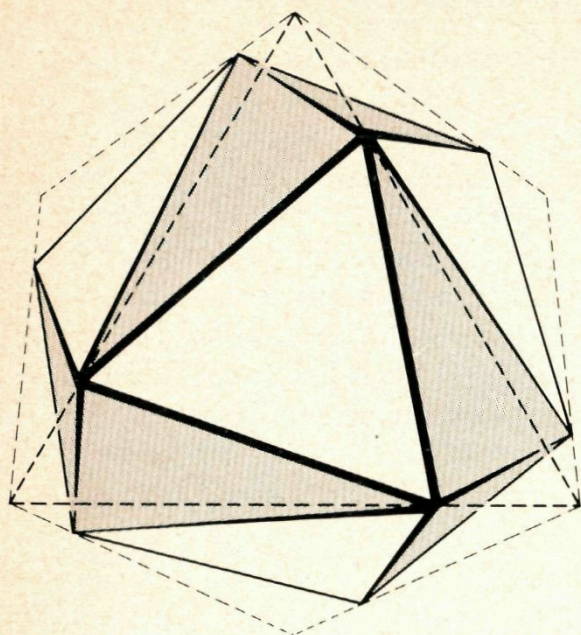


Fig. 4. Alle ribben zijn in een vaste verhouding verdeeld.

De icsaëder

Als we de ribben niet halveren maar in een andere vaste verhouding verdelen, kunnen we dat zó doen, dat er nog steeds acht gelijkzijdige driehoeken blijven bestaan. Maar de vierkanten worden verstoord. De vier hoekpunten liggen niet meer in één vlak. Er ontstaat telkens een 'geknikte ruit', die op twee manieren in twee driehoeken kan worden verdeeld. We hebben in fig. 4 steeds één zo'n verdeling gekozen en wel op een consequente manier, zodat er toch nog een zekere regelmaat behouden blijft.

Door wat te experimenteren zie je dat bij een bepaalde verhouding elke geknikte ruit op die manier in twee *gelijkzijdige* driehoeken kan worden verdeeld. Dan zijn er dus acht-plus-(twee-maal-zes) = twintig gelijkzijdige driehoeken. En allemaal zijn ze even groot, want alle zijden zijn even lang. De figuur is weer helemaal regelmatig (fig. 5). Het is het *regelmatig twintigvlak*, of, in geleerdere termen, de *icsaëder*. Met twaalf hoekpunten en dertig ribben.

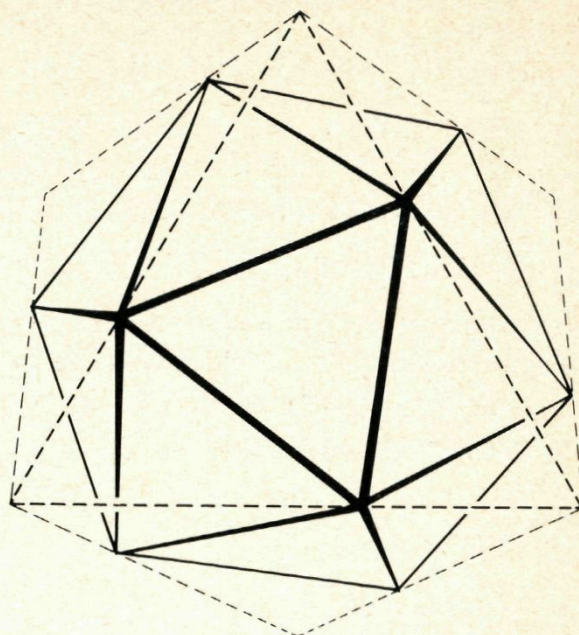


Fig. 5. Een icsaëder in een octaëder.

°° Bij welke verhouding?

Hoe moeten we de verhouding kiezen waarin de ribben van de octaëder moeten worden verdeeld om een icsaëder te krijgen? Dat rekenen we even uit. Als we die verhouding stellen op $(a : 1-a)$, dan vinden we als coördinaten van enige hoekpunten (zie fig. 6): $P = (a, 0, 1-a)$,

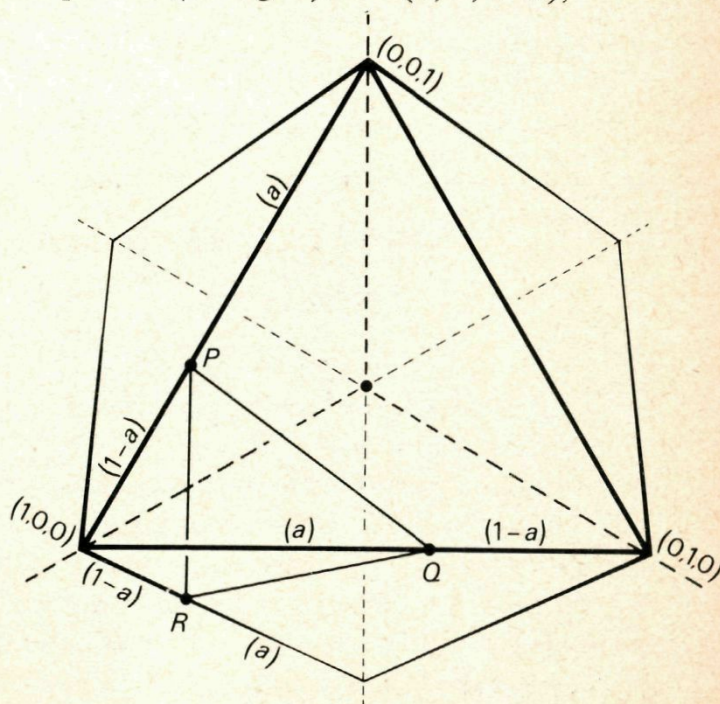


Fig. 6. Bij welke a geldt: $PQ = PR$?

$Q = (1-a, a, 0)$ en $R = (a, 0, a-1)$.

De voorwaarde $PQ = PR$ leidt tot de vergelijking

$$(2a-1)^2 + a^2 + (1-a)^2 = (2-2a)^2$$

met als (positieve) oplossing

$$a = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1), \text{ zodat}$$

$$a : 1-a = (\sqrt{5} + 1) : 2.$$

Deze verhouding staat wel bekend als de *gulden snede*. Als we a op deze wijze kiezen, worden inderdaad *alle* ribben even lang, en ontstaat de icosaëder.

Overigens . . .

Er waren zes 'geknikte ruiten', en elk ervan is met een diagonaal in twee gelijkzijdige driehoeken verdeeld. In fig. 6 is PR zo'n diagonaal. Zoek de overige vijf ook eens op, en neem van al die zes diagonalen het *middelpunt*. Wat krijg je voor een figuur als je die zes middelpunten verbindt? En zouden er bij een *andere* ribbe, bijv. PQ , op net zo'n manier ook vijf andere ribben horen? Welke? Ga zo zelf maar eens verder op ontdekkingsreis door het rijk van octaëders en icosaëders.

°° Altijd deelbaar door 504

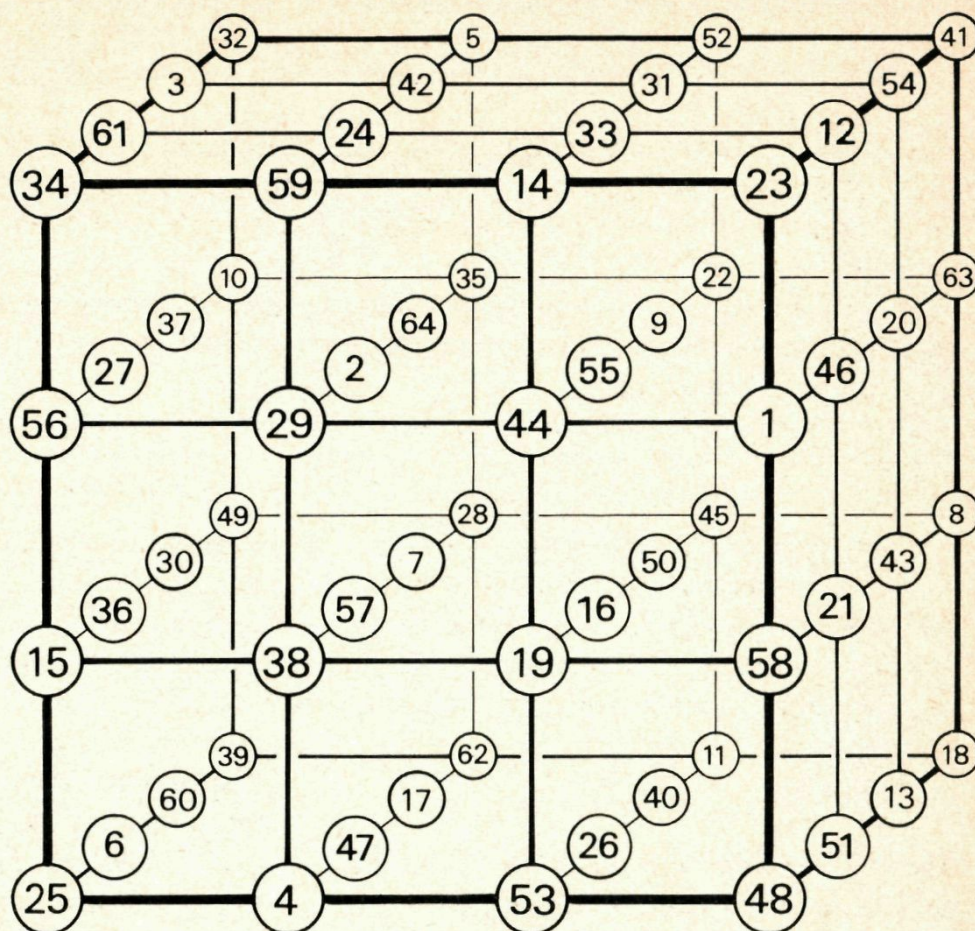
- | | |
|-----------------------------------|--|
| – Kies een natuurlijk getal | (bijvoorbeeld 7) |
| – Bereken de derdemacht | $(7^3 = 343)$ |
| – Vermenigvuldig met beide burens | $(342 \times 343 \times 344 = 40353264)$ |
| – Deel door 504 | (?, probeer zelf) |

*Als je geen fout maakt blijkt
deze deling juist òp te gaan!*

Voor startgetallen a onder de tien kun je met een rekendoosje de deelbaarheid van $(a^3-1)(a^3)(a^3+1)$ door 504 gemakkelijk vaststellen. Dit resultaat lijkt op het eerste gezicht verrassend. Zou het voor grotere startgetallen ook blijven gelden? De titel hierboven zegt van wel. Heb je er enig idee van, hoe dat te verklaren is?

(Aanwijzing: $504 = 7 \times 8 \times 9$. Onderzoek afzonderlijk de deelbaarheid door 8, door 9 en door 9, van $(a^3-1)(a^3)(a^3+1) = P$, voor alle mogelijke getallen a .)

°De toverkubus van Krijgsman



Van 1 tot en met 64

De getallen 1 t.e.m. 64 zijn verdeeld over de roosterpunten van een vier-bij-vier-bij-vier kubus zoals in de afbeelding aangegeven. Controleer eerst maar of je ze alle 64 kunt vinden. Ze staan schijnbaar ordeloos verspreid, maar de schijn bedriegt hier wel héél sterk.

Kijk maar eens alleen naar de getallen in het vóórvlak van de kubus. Ze vormen juist een zg. *tovervierkant*: de vier horizontale rijen, de vier verticale kolommen, én de beide diagonalen, geven ieder voor zich opgeteld een som van 130.

Twaalf tovervierkanten

Voor het achtervlak van de kubus geldt hetzelfde. En ook voor de twee ermee evenwijdige vlakken ertussenin! (Heb je de véértig optellingen al even gecontroleerd?) Er staan dus *vier* tovervierkanten achter elkaar.

De inzender van deze fraaie vondst, *Thomas Krijgsman* uit Zaandijk, was hier echter nog niet mee tevreden. Hij heeft er ook nog maar even voor gezorgd dat elk van de vier *horizontale* lagen (het bovenvlak, het ondervlak en de twee vlakken ertussen) een tovervierkant is.

En om de zaak compleet te maken zijn ook — wat dacht je — het linkerzijvlak, het rechterzijvlak en de twee ertussen, tovervierkanten. Allemaal met dezelfde constante som van 130. Je kunt blijven controleren tot je een ons weegt, maar het klopt allemaal echt! In totaal op *tweeënzeventig* manieren.

(Over de achtergronden van zulke 'Magic cubus' is het een en ander te vinden in: W. W. Rouse Ball en H. S. M. Coxeter, *Mathematical Recreations & Essays*.)

°°Spiraaltegelpatronen

Kijk eens naar de twee spiraalfiguren hiernaast en naar die op het omslag.

Deze tekeningen wekken de indruk dat de patronen oneindig voortgezet kunnen worden. En wel zonder ook maar ergens een gaatje of kiertje open te laten. Zou dat inderdaad echt kunnen?

Ook lijkt het er op dat *alle* puzzelstukjes (de *tegels*) identiek zijn qua vorm en grootte; alleen liggen ze ongeveer afwisselend al dan niet op hun kop.

De vraag is nu natuurlijk:

Is dit inderdaad allemaal zuiver passend? En wat is dan wel de exacte vorm van één zo'n tegel?

Als je de patronen nauwkeurig onderzoekt is dit niet eens zo'n erg moeilijke vraag. De hoekgrootten blijken op mooie getallen uit te komen, en ook over de lengte van de zijden is iets heel eenvoudigs te zeggen.

Zoeken maar!

Als je de maten van de vorm gevonden hebt, is te controleren dat op alle plaatsen de tegels precies aansluiten.

Hoe bedenkt iemand het!

Nog een heel andere vraag

De afbeeldingen van de spiraalpatronen hadden met wat grijs-tinten en arceringen nog wat leuker aangekleed kunnen worden. Maar dit versieren is juist met opzet overgelaten aan de lezer-puzzelaar.

We vragen je in elk van de drie gevallen te zoeken naar het *minimale aantal benodigde kleuren*. (Zó, dat gelijkgekleurde tegels hoogstens puntcontact hebben.)

En dan verder, om die kleuren zó te gebruiken dat er een zo regelmatig mogelijke kleurenpatroon ontstaat.

Pas op: begin niet direct in de figuren in dit tijdschrift te kleuren! Zoek doorschijnend papier, of maak een paar fotokopieën.

Weer een iets andere vraag is, om de laatst benodigde kleur voor *zo min mogelijk* tegels te gebruiken. Wat is in elk van de drie gevallen het minimaal aantal tegels in die kleur?

Nog andere varianten!

De patronen die je hier ziet gaan uit van een negenhoekige tegel. Hetzelfde soort patronen blijkt echter óók mogelijk met een *zeven*hoekige tegel (ook zo'n scheef torentje), met hoeken die allemaal veelvouden van 20° zijn.

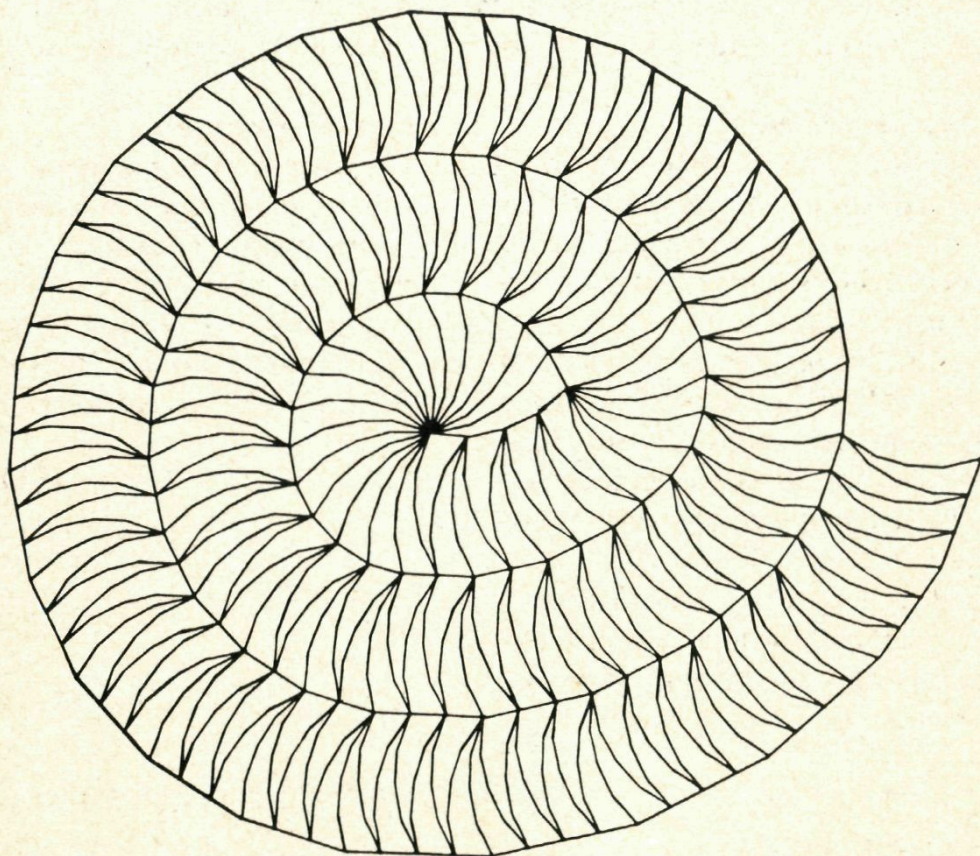
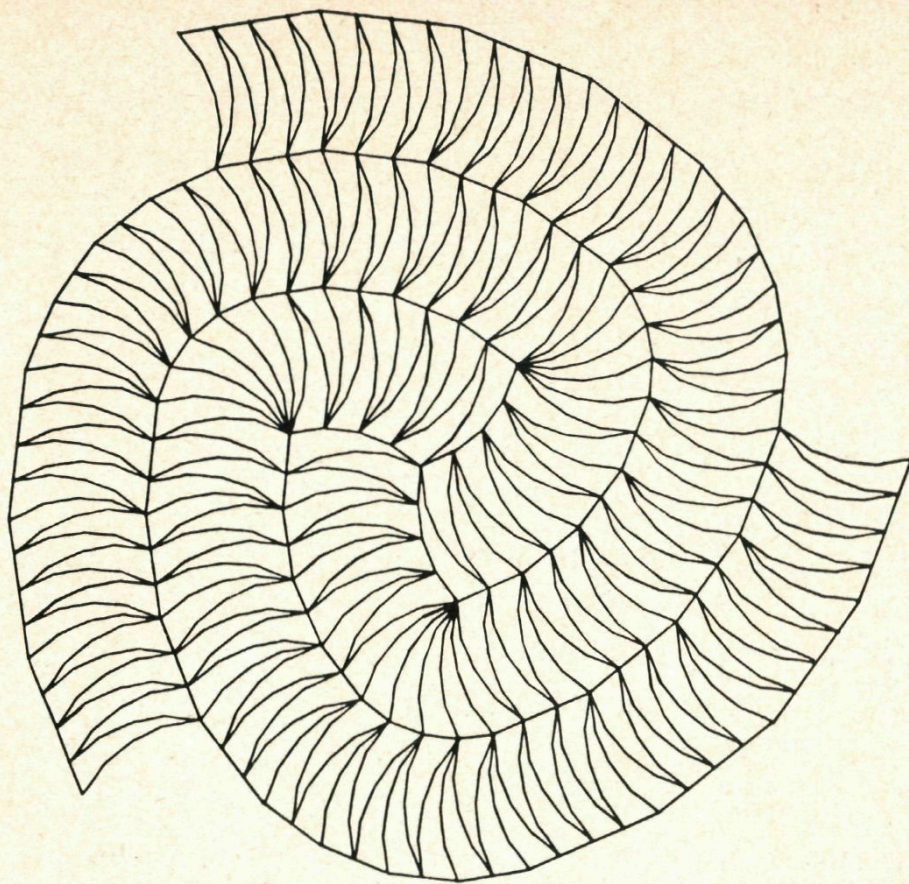
En eveneens met een *vijf*hoekig torentje en veelvouden van 30° .

Op dit terrein zou je zelf nog veel meer kunnen onderzoeken:

- Welke soorten spiralen zijn er met de verschillende tegels mogelijk?
- Zijn vier- of meer-armige spiralen ooit mogelijk?
- Lukt het ook met dergelijke tegels met 11, 13, 15 etc. zijden?

Als je er ook nog een regelmatig kleuring bij bedenkt, moeten er de prachtigste platen van te maken zijn!

P.S. Wie is er zo goed thuis in programmeren, dat hij zo'n figuur door een computergestuurde 'plotter' kan *laten* tekenen?



°° Reeksformules voor π -machten

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

$$\pi^2 = 6 [1 + 2^{-2} + 3^{-2} + \dots]$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 2 [1 + 3^{-2} + 5^{-2} + \dots]$$

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 = \frac{1}{2} [1 - 3^{-3} + 5^{-3} - \dots]$$

$$\pi^4 = 90 [1 + 2^{-4} + 3^{-4} + \dots]$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 = 6 [1 + 3^{-4} + 5^{-4} + \dots]$$

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 = \frac{3}{10} [1 - 3^{-5} + 5^{-5} - \dots]$$

$$\pi^6 = 945 [1 + 2^{-6} + 3^{-6} + \dots]$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^6 = 15 [1 + 3^{-6} + 5^{-6} + \dots]$$

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^7 = \frac{45}{244} [1 - 3^{-7} + 5^{-7} - \dots]$$

$$\pi^8 = 9450 [1 + 2^{-8} + 3^{-8} + \dots]$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^8 = \frac{630}{17} [1 + 3^{-8} + 5^{-8} + \dots]$$

Met elk van deze formules zijn de decimalen van π te bepalen. En wel door maar een voldoende aantal van de steeds kleiner wordende termen in de optelling mee te nemen.

De convergentie-snelheid

Je ziet snel dat dit 'steeds kleiner worden' bij de onderste formules zeer veel sneller gaat dan bij de bovenste. De praktische bruikbaarheid zal dus van de onderste formules het grootst zijn.

Om een goed idee te krijgen van hoeveel dat scheelt, pak je je machientje maar even. Neem in elke formule een gelijk aantal termen (b.v. drie) en vergelijk de resulterende decimale benaderingen van π met elkaar.

(Een rekendoosje dat niet met elke exponent kan machtsverheffen, is nog wel goed te gebruiken voor de 2e-, 4e- en 8e-machts-formules. Bedenk:

$$\boxed{x^8} = \boxed{x^2} \boxed{x^2} \boxed{x^2} \quad \text{en}$$

$$\boxed{\sqrt[8]{x}} = \boxed{\sqrt{x}} \boxed{\sqrt{x}} \boxed{\sqrt{x}} .)$$

Nog meer reeksen

De formules in de derde kolom blijken heel eenvoudig af te leiden uit die in de eerste kolom. (Wie hier een hint voor nodig heeft kan even achterin kijken.) Op zo'n soort manier kun je zelf onbeperkt veel van dergelijke reeksen afleiden.

Bijvoorbeeld ook de volgende serie

$$\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 = 1 + 5^{-2} + 7^{-2} + 11^{-2} + 13^{-2} + 17^{-2} + 19^{-2} + 23^{-2} + 25^{-2} + \dots$$

$$\left(\frac{\pi}{3}\right)^4 = \frac{6}{5} [1 + 5^{-4} + 7^{-4} + 11^{-4} + 13^{-4} + \dots]$$

$$\left(\frac{\pi}{3}\right)^6 = \frac{120}{91} [1 + 5^{-6} + 7^{-6} + 11^{-6} + 13^{-6} + \dots]$$

$$\left(\frac{\pi}{3}\right)^8 = \frac{1008}{697} [1 + 5^{-8} + 7^{-8} + 11^{-8} + 13^{-8} + \dots]$$

Produkt-formules

Dit steeds verder 'uitdunnen' van de somreeksen leidt in de limiet tot formules waarin de oneindige som is vervangen

door een oneindig produkt.

Ook deze produktformules kun je weer onderzoeken op snelheid van convergentie.

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{23}{24} \cdot \frac{29}{28} \cdot \dots$$

$$\pi^2 = 6 \cdot \frac{1}{1-2^{-2}} \cdot \frac{1}{1-3^{-2}} \cdot \frac{1}{1-5^{-2}} \cdot \frac{1}{1-7^{-2}} \cdot \frac{1}{1-11^{-2}} \cdot \dots$$

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+3^{-3}} \cdot \frac{1}{1-5^{-3}} \cdot \frac{1}{1+7^{-3}} \cdot \frac{1}{1+11^{-3}} \cdot \dots$$

$$\pi^4 = 90 \cdot \frac{1}{1-2^{-4}} \cdot \frac{1}{1-3^{-4}} \cdot \frac{1}{1-5^{-4}} \cdot \dots$$

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1+3^{-5}} \cdot \frac{1}{1-5^{-5}} \cdot \frac{1}{1+7^{-5}} \cdot \dots$$

$$\pi^6 = 945 \cdot \frac{1}{1-2^{-6}} \cdot \frac{1}{1-3^{-6}} \cdot \frac{1}{1-5^{-6}} \cdot \dots$$

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^7 = \frac{45}{244} \cdot \frac{1}{1+3^{-7}} \cdot \frac{1}{1-5^{-7}} \cdot \frac{1}{1+7^{-7}} \cdot \dots$$

$$\pi^8 = 9450 \cdot \frac{1}{1-2^{-8}} \cdot \frac{1}{1-3^{-8}} \cdot \frac{1}{1-5^{-8}} \cdot \dots$$

Iets over de herkomst

De hier gepresenteerde formules zijn het resultaat van wat diepergaand wiskundig gepuzzel, in de theorie van de zg. *Fourierreeksen*.

De in de formules voorkomende coëfficiënten lijken op het eerste gezicht nogal onregelmatig. Toch zit daar natuurlijk wel een bepaalde wetmatigheid achter: deze coëfficiënten bevatten als factor de 'getallen van Bernoulli' (in de formules met *even* exponenten) en de 'getallen van Euler' (bij *oneven* exponenten). Over het eerste soort getallen is vorig jaar al eens iets opgemerkt, zie het artikel 'Somformules' in Pythagoras 20-3 en 20-5.

Een produktreeks voor 2

Een opvallend resultaat vind je nog door in de gelijkheid

$$2 = \frac{1}{8} \frac{(\pi^2)}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}$$

de hierboven gegeven produktreeksen voor π^2 en $\frac{\pi}{4}$ in te vullen.

Als je dit uitschrijft en zover mogelijk vereenvoudigt, zie je de volgende produktreeks voor 2 verschijnen:

$$2 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{12}{11} \cdot \dots$$

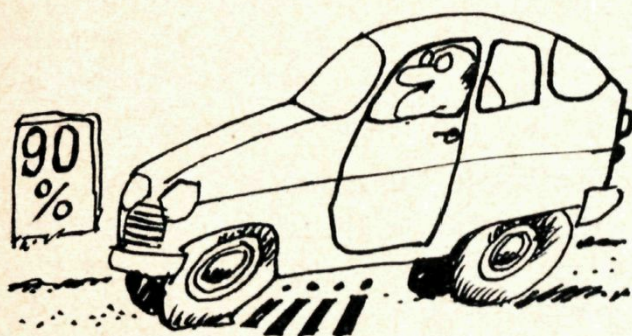
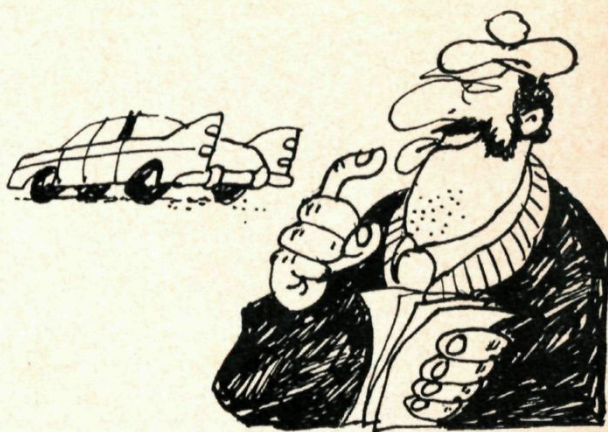
In elk van de breuken teller en noemer bij elkaar tellen geeft de (oneven) priemgetallen 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... Verder is de teller steeds de *even* 'helft' en de noemer de *oneven* 'helft' van hun priemsom.

Je hebt hiermee een superingewikkelde manier om via veel toetswerk op je rekendoosje een ruwe benadering te vinden voor de grootte van het getal 2!

°Procentsommen - rotsommen !?

- I Kobus Kneus, handelaar in *n*-de hands auto's, kocht op een morgen twee wagens, voor verschillende bedragen. Dezelfde middag raakte hij ze met wisselend succes weer kwijt, nu beide voor dezelfde prijs. Op de ene maakte hij daarbij een winst van 10%, maar op de andere leed hij juist 10% verlies.

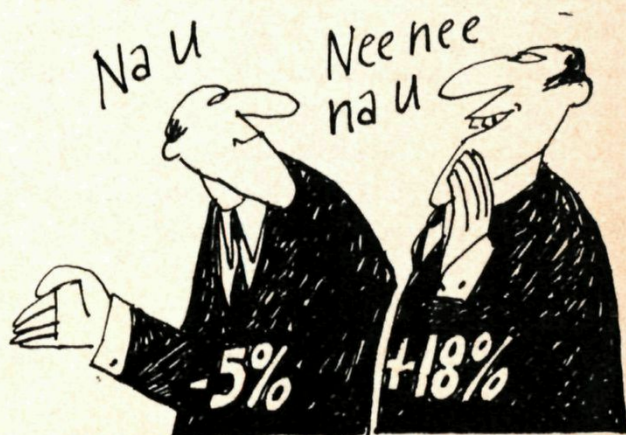
Betekende deze handel voor Kobus winst of verlies?



- II Een verhoging van de benzineprijs met 10% deed de heer Z. Uinig besluiten vanaf dat moment ook 10% minder kilometers te gaan rijden. Scheelde hem dat in z'n portemonnee, of niet?

- III Een autoverhuurder berekent mij altijd over de dagprijs eerst de BTW van 18%, en over dat totaal een vaste-klantenkorting van 5%.

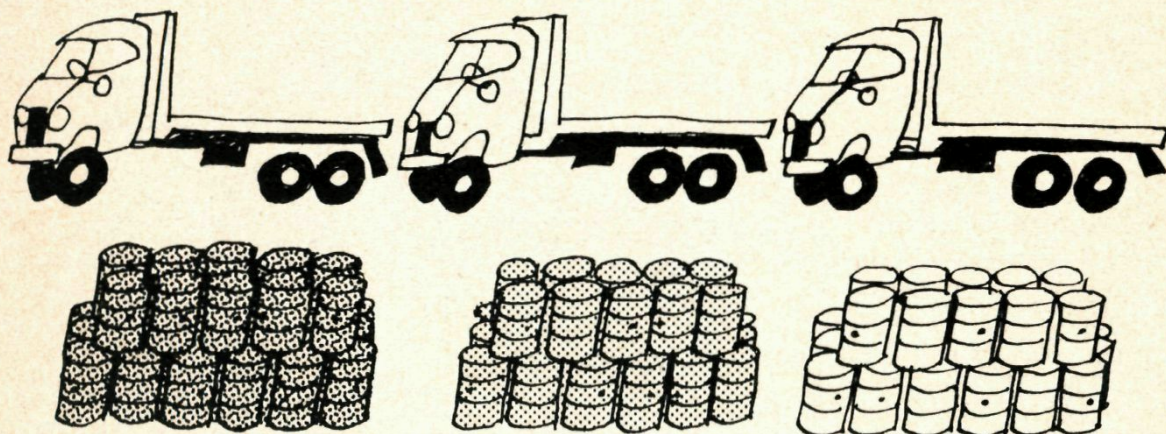
Een keer was er een invaller, die volhield dat de correcte manier van berekenen is: eerst de korting toepassen op de kale prijs, en pas over dat verlaagde bedrag de BTW bepalen. Was ik daar blij mee?



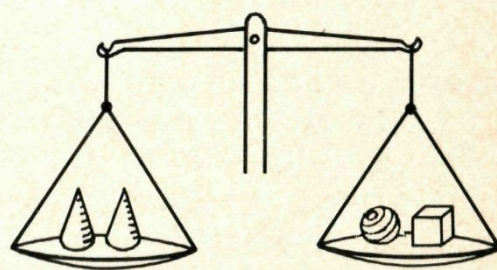
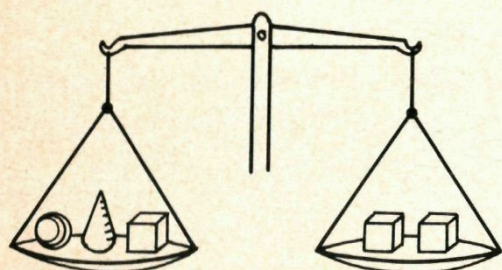
°Drie gelijke vrachten

Drie vrachtwagens moeten worden geladen met: k volle vaten, k halfvolle vaten en k lege vaten. En wel zo, dat elke wagen een even zware last krijgt.

Voor welke aantallen k is er een oplossing voor dit probleem?
(Lege vaten wegen natuurlijk ook niet niks.)



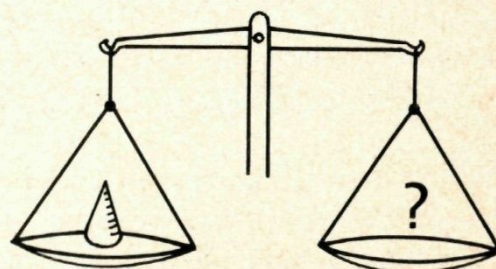
°Bewaar het evenwicht



De massa's van de torentjes, balletjes en kubusjes zijn zodanig dat er in de beide gegeven situaties evenwicht is.

Vraag: Waarmee is één torentje in evenwicht?

Het lukt zelfs op twee manieren! Probeer de antwoorden langs de kortste weg uit de gegevens af te leiden.



°° Op onderzoek met je rekendoosje

We willen je hier het een en ander laten onderzoeken aan een niet al te alledaagse getallenrij. Als beginterm nemen we $t_1 = 2$. En alle volgende termen worden stuk voor stuk bepaald door de formule

$$t_{n+1} = 10 \log t_n.$$

Dus

$$t_2 = 10 \log 2$$

$$t_3 = 10 \log t_2 = 10 \log (10 \log 2)$$

enz.

Om hier wat interessants aan te zien heb je een rekendoosje nodig, met een log-knop. Je kunt daarmee numerieke benaderingen vinden voor de termen:

$$t_1 = 2; t_2 \approx 3,01; t_3 \approx 4,79; t_4 \approx 6,80; \\ \dots; t_8 \approx 9,84; t_9 \approx 9,93; t_{10} \approx 9,96; \\ \text{enzovoort.}$$



De groei lijkt er verderop wat uit te zijn. En de vraag dringt zich op: is deze groei inderdaad begrensd? En waar ligt die grens, precies bij 10?

We zullen je hierna nog veel meer vragen voorzetten. Ze zijn bedoeld om je, samen met je doosje, zelf aan het werk te zetten. Deze keer dienen ze niet als inleiding op een stuk uitleg waarin alle onderliggende geheimen ontsluit worden. In dit geval is het zelf uitproberen en naar regelmaat zoeken waarschijnlijk veel boeiender dan het doorlezen van een verhaal waarin alles al staat voorgekauwd.

Dus gelijk de volgende vraag

Begin eens met $t_1 = 20$, en cijfer verder op je doosje volgens dezelfde formule $t_{n+1} = 10 \log t_n$.

Het 'convergeren' naar een limiet blijkt nu een stuk sneller te gaan.

Begin ook nog eens met $t_1 = 10$.

Volgende vraag

Begin met $t_1 = 1,37$ en ga weer verder volgens hetzelfde recept. Je moet nu iets vreemds zien gebeuren na een term of zes!

Ra, ra. Hoe zou dat zitten met die begintermen? Wat is er te zeggen over de grens tussen convergeren en 'de mist in gaan'.

Volgende vraag

Neem dezelfde begintermen als in de voorgaande drie gevallen, maar gebruik nu om verder te komen de formule

$$t_{n+1} = 7 \log t_n.$$

Welke grenswaarden treden er nu op?

Volgende vraag

Hoe lopen de zaken met de formule

$$t_{n+1} = 6 \log t_n?$$

En met

$$t_{n+1} = 5 \log t_n?$$

In de coëfficiënt vóór $\log t_n$ lijkt ook een zekere grens voor te komen. Kun je die grens enigszins nauwkeurig bepalen? (Voor bovenbouwbollebozen: kun je ook formeel bewijzen dat die grens ligt bij $e \cdot \ln 10$? En ga na dat bij deze grens de enige convergerende beginterm $t_1 = e$ is.)

De negatieve kant

Wie de zaak ook nog van de negatieve kant wil bekijken, zal merken dat alles dan weer heel anders loopt.

Neem als formule

$$t_{n+1} = -\log t_n$$

en als startwaarden achtereenvolgens $t_1 = 5; 4; 3; 2; 1; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,1$.

Zijn de knoppen van je doosje nog heel? Ook gemerkt dat het bij $t_1 = 0,4$ even erg spannend werd, maar toch nog mis liep? Misschien dat een start dicht in de buurt van 0,4 nog wat anders geeft? Kijk daarbij wanneer de rij stijgend begint, en wanneer dalend. In natuurkundig jargon

zou je spreken van een *labiele* evenwichtsstand.

Volgende

Neem

$$t_{n+1} = -0,75 \log t_n$$

en

$$t_1 = 0,7; 0,6; 0,2; 0,1.$$

Hier is een echte *stabiele* stand te vinden, probeer maar met $t_1 = 0,3456$.

Tenslotte

Ook hier kun je weer zoeken naar de negatieve coëfficiënt van $\log t_n$ in de formule, waarbij de labiele en de stabiele situatie aan elkaar grenzen.

(Weer voor de bollebovenbouwbozen: probeer af te leiden dat die grens ligt bij $(-\ln 10)/e$. De bijbehorende startterm is hier $t_1 = 1/e$.)

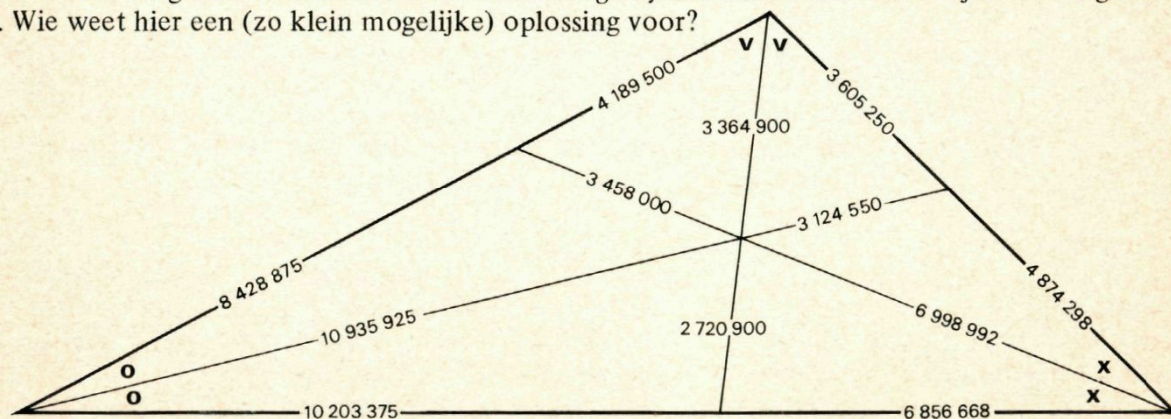
Aan wie de moed had tot hier aan toe te lezen zeggen we dat achterin nog twee plaatjes staan die misschien de zaken wat kunnen verhelderen.

Correspondentie

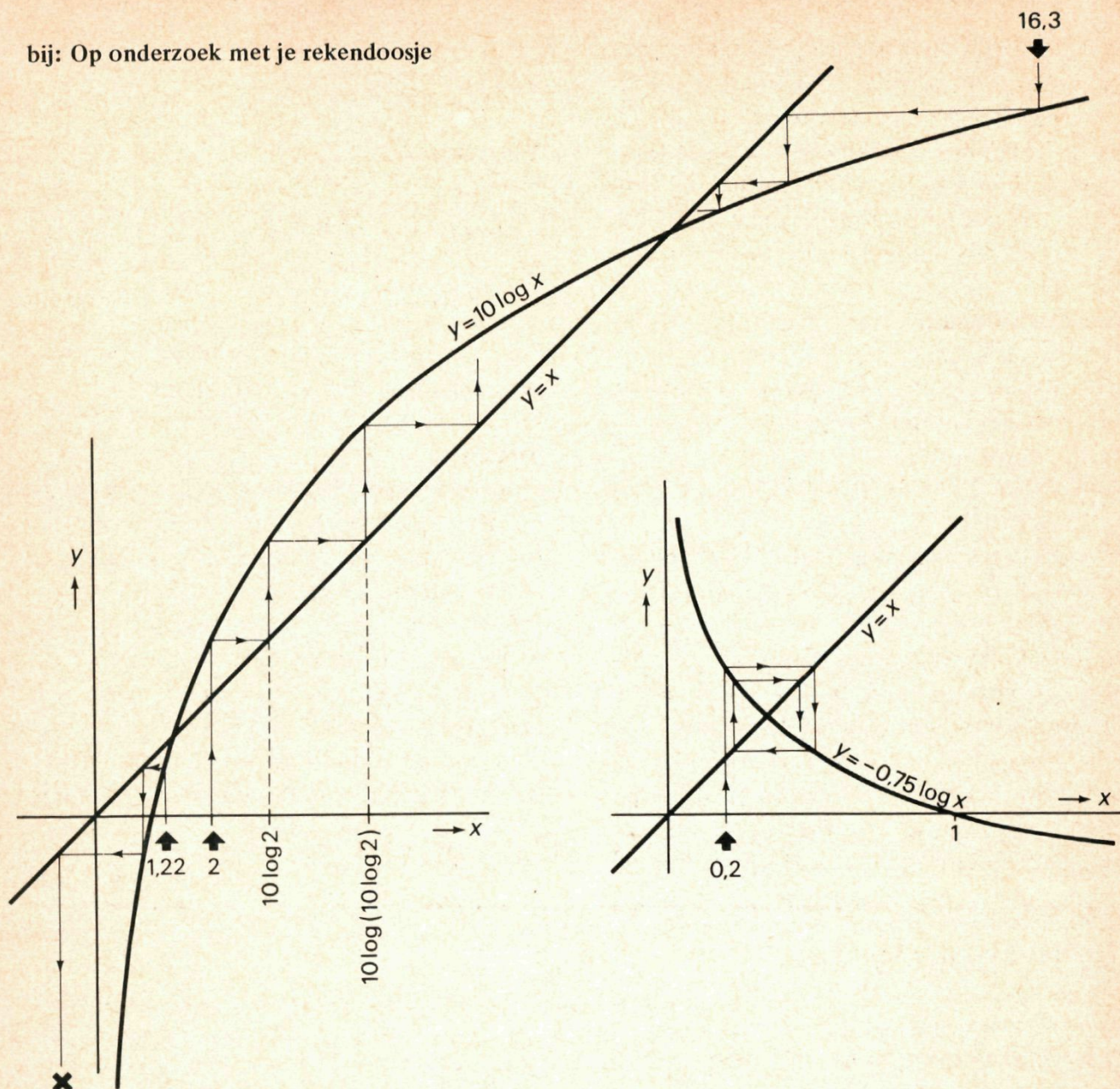
Helemaal geheel (Pyth. 21-4, blz. 78)

De vorige aflevering gaf een figuur met drie zwaartelijnen in een driehoek, met geheeltallige lengten voor alle twaalf lijnstukken. Hetzelfde blijkt óók te kunnen met drie *bissectrices*: zie de figuur. Door ontbinden in factoren van de grote getallen kun je nagaan dat de zijde-lengten van de driehoek zich verhouden als 84 : 125 : 169. Het is ons overigens niet bekend of er geen kleinere (niet gelijkbenige) driehoek bestaat met dezelfde eigenschap.

Blijft nog over de vraag naar een driehoek met drie *hoogtelijnen* waarin alle twaalf lijnstukken geheeltallig zijn. Wie weet hier een (zo klein mogelijke) oplossing voor?



bij: Op onderzoek met je rekendoosje



Pythagoras Olympiade

Oplossingen en prijswinnaars van de opgaven PO 31–33

- PO 31.** Zoals bekend kan men de Magische Kubus van Rubik demonteren, waarbij de 8 hoekblokjes en de 12 ribbeblokjes vrijkomen, en daarna op tal van verschillende manieren weer in elkaar zetten. Door een fabricagefout ontstond een kubus met twee aangrenzende zijvlakken geheel in één kleur. Hoeveel, wat kleur betreffende onderscheidbare, resultaten zijn er mogelijk wanneer deze foute kubus na demonteren weer in elkaar wordt gezet?

Oplossing van Robert Sanders, 6-vwo RSG, Meppel.

De acht hoekblokjes zien er verschillend uit, dus er zijn $8!$ permutaties en 3^8 oriëntaties mogelijk voor de hoekblokjes. Van de twaalf ribbeblokjes zijn er twee paren die er hetzelfde uit zien. Het aantal permutaties voor de ribbeblokjes is dus $\frac{1}{4} \cdot 12!$. Er is één ribbeblokje dat aan beide zijden dezelfde kleur heeft, dus er zijn 2^{11} verschillende oriëntaties voor de ribbeblokjes mogelijk. In totaal zijn er dus $3^8 \cdot 8! \cdot \frac{1}{4} \cdot 12! \cdot 2^{11} = 64\,878\,004\,911\,734\,784\,000$ mogelijkheden.

Er waren 92 inzendingen waarvan 51 correct. Prijswinnaars: *Herman van der Molen*, 5-vwo Fivelcollege, Delfzijl, en *Edward Weening*, 6-vwo Twickelcollege, Hengelo.

- PO 32.** Gegeven zijn een balans en vijf gouden munten. Men weet dat drie van de vijf munten even zwaar zijn. En ook dat de vierde evenveel zwaarder is, als de vijfde lichter is. Men legt telkens vier van de vijf munten op de balans, twee op elke schaal. De weegschaal is dan óf in evenwicht, óf weinig uit balans, óf veel uit balans. Hoeveel wegingen zijn minimaal nodig om zeker te weten welke de zwaardere munt is en welke de lichtere. Motiveer je antwoord.

Oplossing van Jan de Boer, 4-vwo RSG Magister Alvinus, Sneek (enigszins bekort).

Stel de gewichten $x+k$, $x-k$, x , x en x . Met twee wegingen kunnen we altijd uitmaken welk gewicht $x+k$, en welk gewicht $x-k$ is (k positief). De wegingen zijn:

1. A B tegen C D en 2. A C tegen B E.

Voor het resultaat van 1. zijn er drie mogelijkheden:

- 1a. *Balans*. Bij de tweede weging kan de balans dan niet in evenwicht zijn; blijft over:

- *weinig-naar-rechts*: dan is $C = x-k$, $D = x+k$; – *veel-naar-rechts*: dan is $B = x+k$, $A = x-k$;
- *weinig-naar-links*: dan is $C = x+k$, $D = x-k$; – *veel-naar-links*: dan is $B = x-k$, $A = x+k$.

- 1b. *Weinig-uit-balans*, stel naar *rechts* (indien naar *links* dan gaat het vervolg analoog). De tweede weging kan nu niet ook *weinig-naar-rechts* opleveren; blijft over:

- *balans*: dan is $B = x-k$, $E = x+k$; – *veel-naar-rechts*: dan is $A = x-k$, $E = x+k$;
- *weinig-naar-links*: dan is $D = x+k$, $E = x-k$; – *veel-naar-links*: dan is $C = x+k$, $E = x-k$.

- 1c. *Veel-uit-balans*, stel naar *rechts* (indien naar *links* dan gaat het vervolg analoog). De tweede weging kan nu niet ook *veel-naar-rechts* opleveren; blijft over:

- *balans*: dan is $C = x+k$, $A = x-k$; – *weinig-naar-rechts*: dan is $D = x+k$, $A = x-k$;
- *weinig-naar-links*: dan is $B = x-k$, $D = x+k$; – *veel-naar-links*: dan is $B = x-k$, $C = x+k$.

Er waren 93 inzendingen, waarvan 28 correct. Een veel gemaakte fout was dat men één geval aangaf waarin met twee wegingen kan worden volstaan. Het gaat er echter om in *alle* gevallen met zekerheid de zwaardere en de lichtere munt aan te kunnen wijzen. Prijswinnaars: *Wim Geerts*, 5-vwo Rythoviuscollege, Eersel, en *Bart de Smit*, 4-vwo Barleus Gymnasium, Amsterdam.

- PO 33.** Boven een tafel hangen enige lampen die elk een cirkelvormige lichtkring op tafel geven (niet noodzakelijk even groot). De kringen sluiten een donker gebied in, waar een enigszins lichtschuw spinnetje zit dat niet durft te komen op door meer dan één lamp beschenen plaatsen. Hoe kan met zo weinig mogelijk lampen het spinnetje belet worden te ontsnappen? Bewijs ook dat de spin met minder lampen altijd weg kan komen.

Oplossing: de meeste inzenders konden wel een insluiting vinden met vijf cirkels. Het gaf echter veel meer moeilijkheden om een bewijs te vinden dat het niet met minder dan vijf cirkels kan. Hier is de manier waarop het gedaan werd door *Rutger Noot*, 5-vwo Gymnasium Haganum, Den Haag.

Stel dat er een opsluiting is met n lampen. Kies de oorsprong waar het spinnetje zit (dat is dus ergens in het donkere ingesloten gebied). Kies een willekeurige lichtcirkel uit, en neem de X-as vanuit de oorsprong door het middelpunt van die cirkel. De Y-as (loodrecht op de X-as) gaat niet door die eerste lichtcirkel. Om het spinnetje te beletten in positieve richting over de Y-as te ontsnappen, zijn dus nog twee lichtcirkels nodig die elkaar gedeeltelijk op de positieve Y-as moeten overlappen.

Omdat de oorsprong donker is, ligt de gehele negatieve Y-as buiten die twee cirkels (en buiten de eerste cirkel). Om het spinnetje te beletten daarlangs te ontsnappen, zijn er nog minstens twee cirkels nodig, waarmee het totale aantal benodigde cirkels dus minstens vijf moet zijn.

Tenslotte gaf Rutger met een tekening aan hoe zo'n opsluiting met vijf cirkels er uit zou kunnen zien.

Er waren 86 inzendingen, waarvan slechts 34 volkomen correct. Een veel gemaakte fout was nog dat men één van de cirkels over het spinnetje heen liet schijnen, maar in de opgave staat dat dat niet mag. Overigens, de kleuring van de illustratie bij deze opgave was niet helemaal goed, maar daardoor heeft niemand zich van de wijs laten brengen. Prijswinnaars: *Ronnie Beerens*, 6-vwo dr. Mollercollege, Waalwijk, en *Menke Ubbens*, 4-vwo RSG Magister Alvinus, Sneek.

Antwoorden en oplossingen

bij: Priempalindromen in de tachtiger jaren (zie vorige afl.)

Drievouden zijn: 1980891, 1983891, 1989891,
en 1877781, 1882881.

De kleinste deler van 1985891 is 29; de kleinste deler van 1875781 is 109.

bij: Altijd deelbaar door 504

Deelbaar door 8. Als a even is, dan bevat a^3 drie factoren 2. Als a oneven is, zijn beide burens van a^3 even terwijl één ervan een viervoud is. Dus voor elke a is P deelbaar door $2^3 = 8$.

Deelbaar door 7. Onderscheid zeven gevallen. Als a een 7-voud is dan is a^3 , en dus ook P , deelbaar door 7.

Als $a = 7\text{-voud}+1$ of $a = 7\text{-voud}+2$ of $a = 7\text{-voud}+4$, dan blijkt (a^3-1) deelbaar door 7 (want bijvoorbeeld: $(7\text{-voud}+4)^3 - 1 = (7\text{-voud}+16)(7\text{-voud}+4) - 1 = (7\text{-voud}+2)(7\text{-voud}+4) - 1 = (7\text{-voud}+8) - 1 = 7\text{-voud}!$).

Evenzo blijkt voor $a = 7\text{-voud}+3$ of $a = 7\text{-voud}+5$ of $a = 7\text{-voud}+6$ de factor (a^3+1) juist een 7-voud.

Deelbaar door 9. Onderscheid hier: $a = 3\text{-voud}$ (dan a^3 deelbaar door 9), $a = 9\text{-voud}+1$ / $+4$ / $+7$ (met a^3-1 deelbaar door 9) en $a = 9\text{-voud}+2$ / $+5$ / $+8$ (met a^3+1 deelbaar door 9).

bij: Spiraaltegelpatronen

Vorm. Uit de wijze waarop de tegels in de bijzondere punten in het midden van de spiralen op elkaar aansluiten, is in elk van de drie figuren af te leiden dat slechts één tegelvorm voldoet. Namelijk een veelhoek met negen gelijke, rechte zijden, en met hoeken van $60^\circ - 105^\circ - 165^\circ - 165^\circ - 165^\circ - 15^\circ - 195^\circ - 195^\circ - 195^\circ$.

Kleuring. Voor de één-armige en de drie-armige spiraal zijn drie kleuren voldoende. Bijvoorbeeld als volgt:

1e Manier. De posities van de tegels zijn te verdelen in twee groepen bestaande uit onderling rechtstreeks congruente posities (linksbuigende en rechtsbuigende 'torentjes'). De linksbuigende tegels hebben nergens een gemeenschappelijke grenslijn en kunnen dus allemaal dezelfde kleur krijgen. Voor de kleuring van de rechtsbuigende tegels zijn dan nog verschillende systemen mogelijk.

2e Manier. Eén kleur wordt uitsluitend gebruikt voor de eerste (de binnenste) tegel van elk van de spiraalarmen. De hele rest kan dan, strikt afwisselend, in de beide andere kleuren worden gekleurd. (Bij de drie-armige spiraal moeten ook de drie op-één-na-binnenste tegels in kleur overeenkomen.)

Voor de twee-armige spiraal, de figuur op het omslag, zijn vier kleuren nodig. Ook de verdere voortzetting van het patroon moet hier genoeg aan hebben, want de beroemde 'vierkleurenstelling' zegt dat vier voor elk patroon voldoende is.

De vierde (laatste) kleur blijkt in de omslag-figuur op minimaal 4 plaatsen nodig te zijn. Wie het beter kan stuurt z'n resultaat maar op!

(De spiraalfiguren zijn ontleend aan de opstellenbundel 'The Mathematical Gardner', door D. A. Klarner.)

bij: Drie gelijke vrachten

Het probleem is oplosbaar voor elk aantal k groter dan 1. Bijvoorbeeld als volgt:

Als k even is, neemt één wagen uitsluitend alle halfvolle vaten;

als k oneven is, neemt één wagen 1 vol vat, 1 leeg vat, en op 2 na alle halfvolle vaten.

In beide gevallen is de rest van de vaten dan gelijk te verdelen over de beide andere wagens.

bij: Reeksformules voor π -machten

Als voorbeeld geven we hier eerst de afleiding van de formule voor $(\pi/2)^2$ uit die voor π^2 :

$$\pi^2 = 6 [1 + 2^{-2} + 3^{-2} + 4^{-2} + \dots]. \text{ Beide leden maal } 2^{-2}, \text{ en aftrekken}$$

$$2^{-2} \cdot \pi^2 = 6 [2^{-2} + 4^{-2} + 6^{-2} + 8^{-2} + \dots]$$

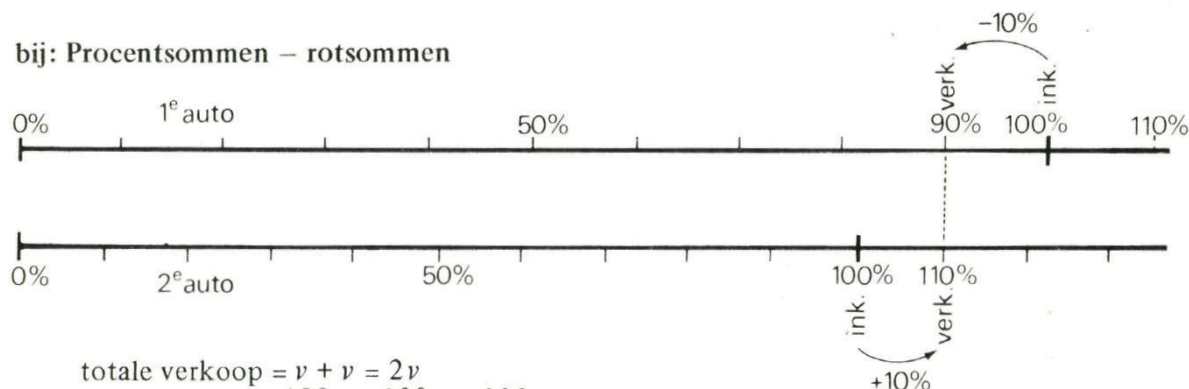
$$(1 - 2^{-2}) \pi^2 = 6 [1 + 3^{-2} + 5^{-2} + 7^{-2} + \dots] \quad \Rightarrow (\pi/2)^2 = 2 [1 + 3^{-2} + 5^{-2} + \dots]$$

Of ook: $\pi^2 = 6 \cdot \frac{1}{1-2^{-2}} \cdot [1 + 3^{-2} + 5^{-2} + \dots]$. Uit deze laatste formule kunnen we op dezelfde manier als hierboven de termen laten wegvallen die nog een *drievoud* als grondtal hebben (3^{-2} , 9^{-2} , Beide leden maal 3^{-2} , aftrekken, en beide leden van het verschil delen door $(1-3^{-2})$, geeft:

$$\pi^2 = 6 \cdot \frac{1}{1-2^{-2}} \cdot \frac{1}{1-3^{-2}} \cdot [1 + 5^{-2} + 7^{-2} + 11^{-2} + \dots].$$

Evenzo kunnen de nog resterende veelvouden van 5, van 7, van 11, etc. uit de sommatie, worden vervangen door één overeenkomstige factor er voor. Deze factoren gaan dan juist de opeenvolgende *priemgetallen* bevatten; en wel voorafgegaan door een teken dat tegengesteld is aan dat in de sommatie.

bij: Procentsommen – rotsommen



$$\text{totale verkoop} = v + v = 2v$$

$$\text{totale inkoop} = \frac{100}{90}v + \frac{100}{110}v = \frac{200}{99}v \approx 2,02v.$$

De handel betekende dus verlies.

(De situatie is wat makkelijker voorstelbaar bij vervanging van 10% door 50%.)

$$\text{II Kosten vóór} = a \text{ km} \times b \text{ ct/km} = ab \text{ cent}$$

$$\text{Kosten ná} = \frac{90}{100}a \text{ km} \times \frac{110}{100}b \text{ ct/km} = 0,99ab \text{ cent.}$$

In de nieuwe situatie geeft heer Uinig 1% minder aan benzine uit.

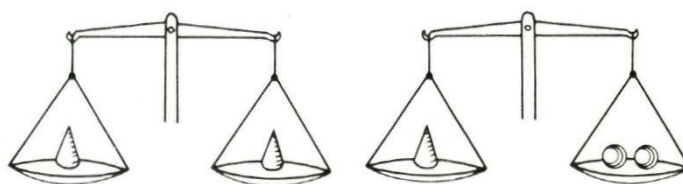
$$\text{III} \quad (\text{Dagprijs} \times \frac{118}{100}) \times \frac{95}{100} = \text{dagprijs} \times 1,121$$

$$(\text{Dagprijs} \times \frac{95}{100}) \times \frac{118}{100} = \text{dagprijs} \times 1,121. \quad \text{Het maakt dus niks uit!}$$

bij: Bewaar het evenwicht

Het tweede antwoord ontstaat uit het *kruislings* samennemen van de beide gegeven evenwichtsstanden.

(uit: *Mathematical Pie*)



Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Redactie

- ∫ Dr. J. van de Craats, R.U. Math. Inst., Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
- ★ Bruno Ernst, Stationsstraat 114, 3511 EJ Utrecht.
- < W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn.
- ⚡ Ir. H.M. Mulder, Geersbroekseweg 27, 4851 RD Nieuw Ginneken.

Secretariaat

- △ Drs. H.N. Pot, Tournoyveld 67, 3443 ER Woerden.
- Aan dit adres kunnen bijdragen voor Pythagoras worden gezonden.

Medewerkers van de redactie

W. Ganzevoort, M.C. van Hoorn, W. Pijls, G.A. Vonk, D.K. Wielenga.

Verdere gegevens

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 9,20 per jaargang.

Voor anderen f 13,95

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen.

Voor België bij J.B. Wolters - Leuven, Blijde Inkomststraat 50, Leuven;
postchecknummer 000-000 8081-30

Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt. Maximaal 10 gratis abonnementen per school.

Abonnees wordt dringend verzocht met betalen te wachten tot hun een acceptgirokaart wordt gezonden.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

Inhoud

- | | |
|---|---------------------------------------|
| △ Mooie machtensommen 97 | △ Procentsommen – |
| Pythagoras Olympiade PO 43-45 99 | rotsommen!? 114, 121 |
| ∫ De zuurstok-Superkubus 100 | △ Drie gelijke vrachten 115, 120 |
| ⚡ De sleepkromme 102 | △ Bewaar het evenwicht 115, 121 |
| ∫ Acht . . . veertien . . . twintig 106 | △ Op onderzoek met je rekendoosje 116 |
| △ Altijd deelbaar door 504 108, 120 | Correspondentie 117 |
| De toverkubus van Krijgsman 109 | Oplossingen PO 31-33 118 |
| △ Spiraaltegelpatronen 110, 120 | |
| △ Reeksformules voor | |
| π -machten 112, 121 | |

