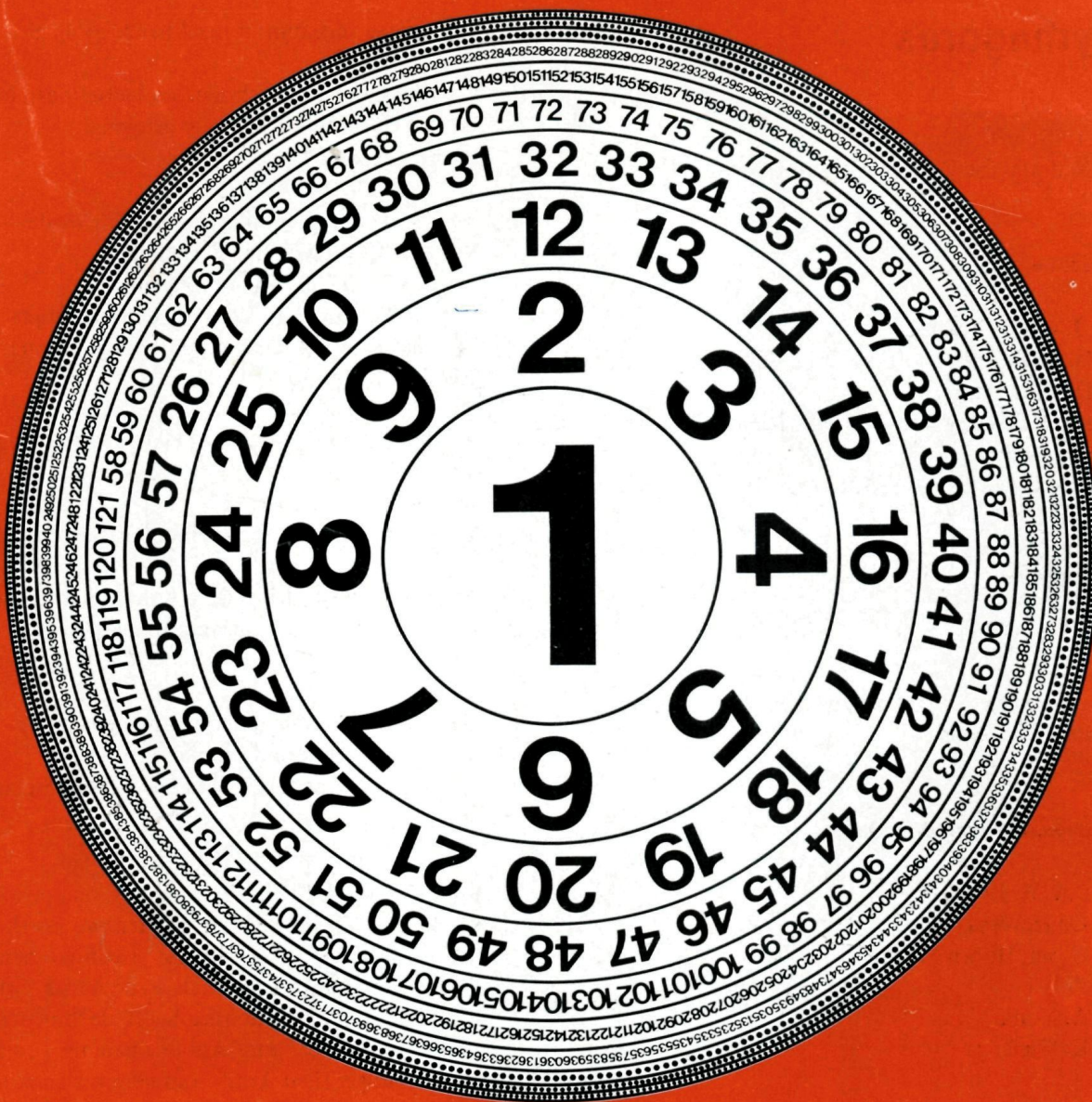




Verschijnt vier keer per jaar

Wiskundetijdschrift voor jongeren

Pythagoras



2 Jaargang 22 november 1982

Wolters-Noordhoff

Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Redactie

- f Dr. J. van de Craats
R. U. Math. Inst., Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
g Ir. H. M. Mulder
Geersbroekseweg 27, 4851 RD Nieuw Ginneken.
Δ Drs. H. N. Pot
Tournoyveld 67, 3443 ER Woerden.

Secretariaat

- ★ Bruno Ernst
Stationsstraat 114, 3511 EJ Utrecht.
Aan dit adres kunnen bijdragen voor Pythagoras worden gezonden.

Medewerkers van de redactie

Drs. A. W. Boon
W. Ganzevoort
M. C. van Hoorn
W. Pijls
G. A. Vonk
D. K. Wielenga

Pythagoras verschijnt 4 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 9,20 per jaargang.
Voor anderen f 13,50.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen.
Voor België bij J. B. Wolters - Leuven, Blijde Inkomststraat 50, Leuven; postchecknummer 000-000 8081-30.

Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt.
Maximaal 10 gratis abonnementen per school.

Abonnees wordt dringend verzocht met betalen te wachten tot hun een acceptgirokaart wordt gezonden.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

Bij de voorplaat Er zijn oneindig veel positieve hele getallen, deze verzameling duiden we kortheidshalve aan met $\mathbb{N}$. Op de omslag zie je een voorstelling van $\mathbb{N}$ op een eindige oppervlakte: de eerste cirkel heeft de straal 1, de eerste ring heeft de breedte 0,7, de tweede $0,7 \times 0,7$ etc. Als je oneindig voortlopende meetkundige rijen kunt sommeren, dan kun je zelf berekenen, dat de 'oneindigste' ring precies 3,37 van het middelpunt af ligt. Als je zin hebt om te puzzelen, kun je met deze figuur je gang gaan. Bepaal bijv. eens waar precies het getal 354957 ligt. (Als je de 0 mist kun je die in het centrum van de eerste cirkel denken.)



Inhoud

- f Onmogelijk? 20
- ★ Platlanders 22
- f Pythagoras Olympiade, nieuwe opgaven 25
- Tweespraak tussen Punt en Lijn 26
- ↳ Gebroken en toch recht 30
- Pythagoras Olympiade, oplossingen 32



In 1981 werd in Oostenrijk een wiskundecongres gehouden; bij die gelegenheid werd deze postzegel uitgegeven: de onmogelijke kubus.

Pythagoras 19

°Onmogelijk?

Heb je het vignet van de Nederlandse Wiskunde Olympiade wel eens goed bekeken? Het is een paar jaar geleden ontworpen door Marc van Leeuwen, een deelnemer die niet alleen bij onze nationale, maar ook bij de Internationale Wiskunde Olympiade prijzen in de wacht wist te slepen. Marc wilde met het vignet op twee manieren iets onmogelijks laten zien, namelijk een gelijkzijdige driehoek met drie rechte hoeken!

Onmogelijk, want zoals je weet is de som van de hoeken van elke driehoek 180° , en bij drie rechte hoeken kom je op 270° , dat is 90° te veel.

Maar bij de meetkunde op de bol is het anders, en dat zie je in het midden van het vignet. Er staat een cirkel met daarin witte en zwarte stukken. Met enige fantasie kun je je indenken dat het een plaatje is van een bol die verdeeld is in acht stukken door middel van drie grote cirkels, zeg maar de evenaar, en twee cirkels door de noordpool en de zuidpool. Die acht stukken zijn afwisselend wit en zwart gekleurd. In het vignet zie je één zo'n zwart 'oktant', en ook de punten van de drie aangrenzende zwarte oktanten. Elk oktant wordt begrensd door drie grote cirkels die elkaar loodrecht snijden. En daarmee heb je dan een 'driehoek' met gelijke 'zijden' en drie rechte hoeken.



Fig. 1. Twee gelijkzijdige driehoeken met rechte hoeken.

De balkendriehoek

In de tweede 'onmogelijke' driehoek staan de woorden Nederlandse Wiskunde Olympiade. Het is een mooi voorbeeld van de macht van een tekenaar om met platte plaatjes de indruk van ruimtelijke figuren te wekken. Het lijkt net of er balkjes getekend zijn. Gewone rechte balkjes die haaks op elkaar staan. Maar de tekening houdt ons voor de gek, want drie van die balkjes kunnen nooit op die manier een driehoek vormen. Maar waarom kun je het dan toch zo tekenen? In fig. 2 hebben we het nog erger gemaakt. Deze tekening stond al eens eerder in *Pythagoras* (nr. 5 van jaargang 20). Het lijkt wel of je de driehoek van die plaat zó in elkaar kunt zetten! En aan de balkjes is echt niets mis. Een timmerman zou er geen moeite mee hebben. Elke verbinding apart is ook volkomen in orde. Dat zie je als je zo'n stuk even uit de tekening licht (fig. 3). Maar het geheel klopt niet. Twee verbindingen samen zou nog wel lukken, maar bij de derde gaat het mis (fig. 2).

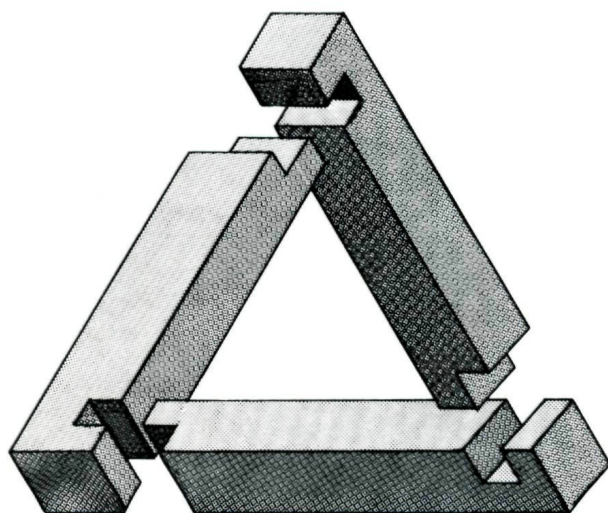


Fig. 2. Een onmogelijke staafjesdriehoek.

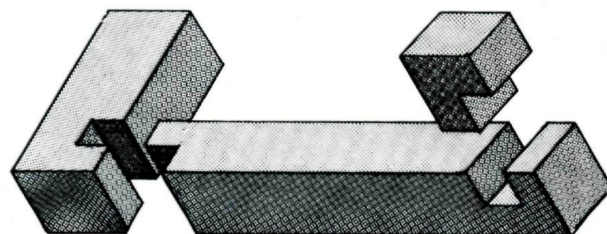


Fig. 3. Met twee verbindingen gaat het nog goed.

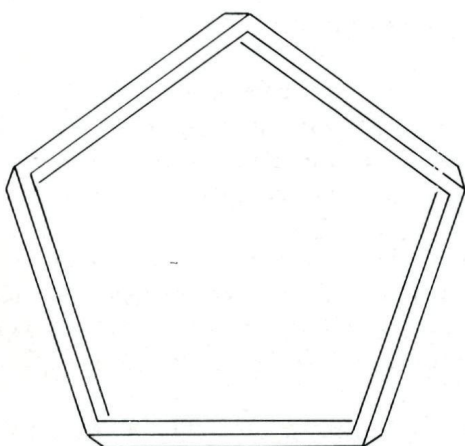
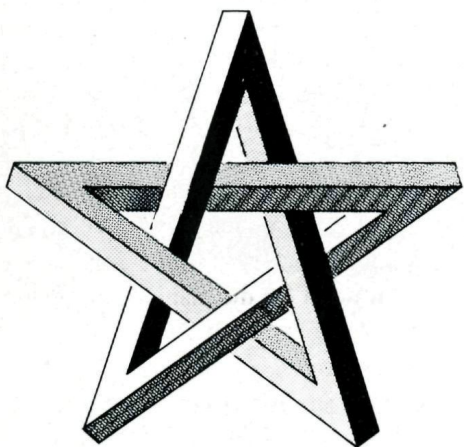
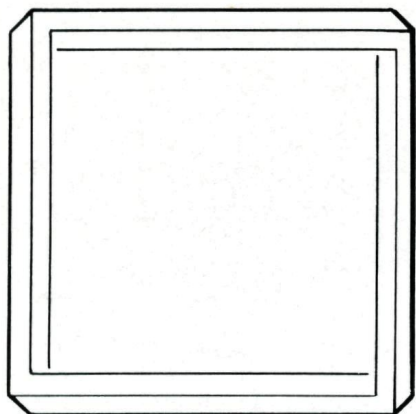


Fig. 4. Een onmogelijk vierkant en twee onmogelijke vijfhoeken.

Nog meer onmogelijkheden

In fig. 4 zie je nog drie variaties. Een onmogelijk vierkant en twee onmogelijke vijfhoeken. Althans onmogelijk als we ze willen zien als ruimtelijke figuren die uit rechte balken bestaan.

De gevlochten vijfpuntige ster vinden we het mooist. Met wat verbeeldingskracht kun je je indenken dat elke punt apart een rechte, haakse balkverbinding is, maar als je je blik dan verder over de figuur laat dwalen dan zie je dat er toch niets van deugt. De teken-truc in optima forma!

Echte zeshoeken

Op de zeshoek van fig. 5 is nu eens niets aan te merken. Hij kan echt gemaakt worden. Er zijn inderdaad 'regelmatige' zeshoeken met zes rechte hoeken en zes even lange zijden. Natuurlijk niet plat, maar ruimtelijk. En er zijn zelfs twee wezenlijk verschillende soorten. De ene zie je in fig. 5, de andere in fig. 6. Maar die van fig. 5 vinden we toch wat 'regelmatiger' dan die van fig. 6. Zie je waarom?

We hebben die zeshoeken ook gemaakt van stukken plastic elektriciteitsbuis en rechte 'elleboogjes'. In fig. 7 zie je het resultaat. De 'niet zo regelmatige' zeshoek kun je uitbouwen tot een achthoek, een tienhoek, enzovoorts.

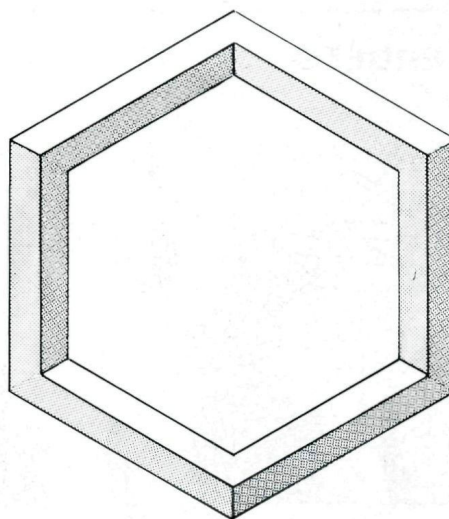


Fig. 5. Een regelmatige zeshoek met rechte hoeken.

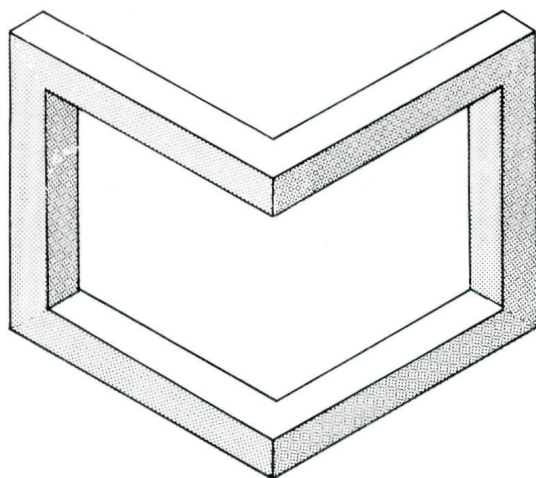


Fig. 6. Nog een zeshoek met rechte hoeken.

Het raadsel van de zevenhoek

Maar nu een vraag. Zou er ook zo'n soort zevenhoek bestaan? Dat wil zeggen een gesloten figuur gemaakt van *zeven* even lange rechte buizen en zeven rechte elleboogjes? Nog anders gezegd: bestaat er in de ruimte een *zevenhoek met gelijke zijden en zeven rechte hoeken*?

Wat denk je? In het volgende nummer de oplossing!

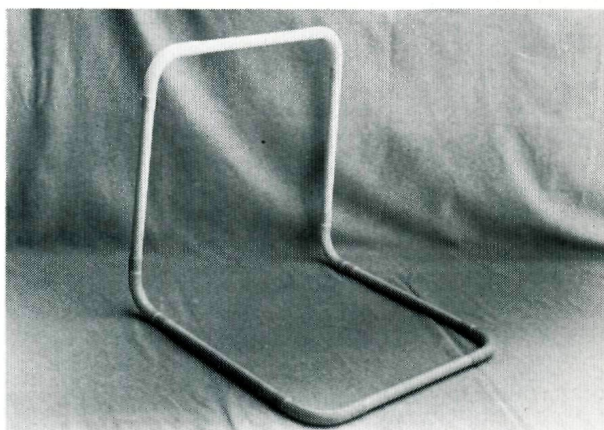
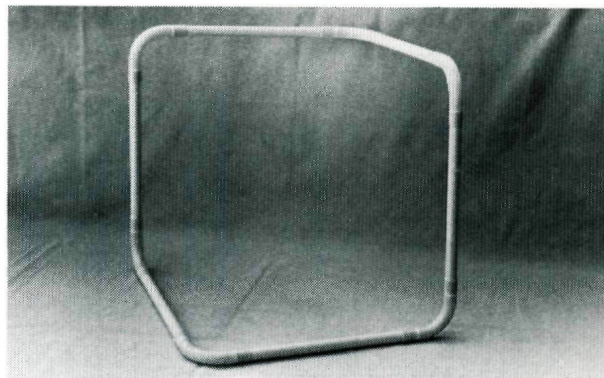
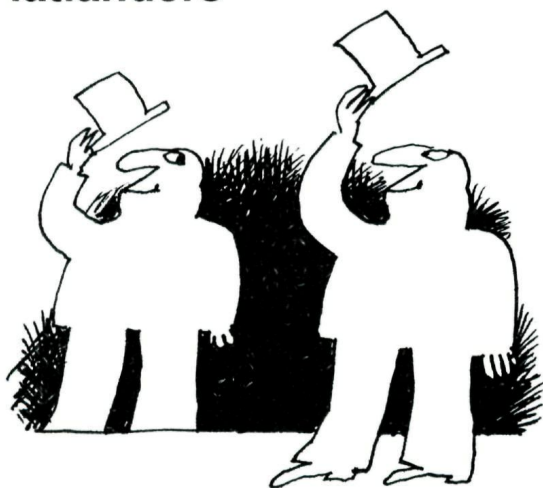


Fig. 7. Twee gelijkzijdige zeshoeken met rechte hoeken, gemaakt van stukjes elektriciteitsbuis.

°Platlanders



Geheimzinnige lichten

Ondertussen zijn er weer nieuwe bijzonderheden aan het licht gekomen over onze Platlander die in het vorige nummer van een vlak naar een bol was verplaatst. In het begin was het nogal geheimzinnig, zelfs griezelig.

Onze Platlander stond voor zijn raam en zag een aantal Platlanders zijn tuin binnenkomen. Ze hadden bouw materiaal, zoals lijnen, punten en voorgespannen driehoeken, bij zich en begonnen een huis te bouwen in zijn tuin.

Hij ging naar buiten en riep: 'Hé, wat moet dat?' Het hielp niet, niemand luisterde. Hij ging toen naar de mensen toe en . . . deed een heel vreemde ontdekking. De mensen waren geen mensen, maar schimmen, waar je doorheen kon lopen.

En het huis was al even etherisch: je zag het, maar kon het niet betasten. Zijn ogen vertelden hem: er wordt een huis in mijn tuin gebouwd, maar alle andere zintuigen ontkenden het bestaan van dat huis.

Na wat tussen de volkomen ongevaarlijke schimmen gelopen te hebben, ging onze Platlander weer naar binnen en bekeek rustig de werkzaamheden. Toen het huis klaar was, werd er een naam op geschilderd: — . . . — . . . — . . . —¹⁾.

Onze Platlander leefde nu voortaan in een heel interessante omgeving: er liepen mensen door zijn huis, belden bij het schimmenhuis aan en werden binnengelaten. Daarna waren ze verder onzichtbaar, en dat bleven ze ook als je naar het huis ging en door de niet-tastbare muren heenwandelde.

Daarachter was niets bijzonders meer te zien.

Maar alles went, ook de aanwezigheid van een andere wereld door je eigen wereld heen.

Ongeveer een half jaar later werd het raadsel zo goed als opgelost. Onze Platlander maakte een verre reis; kwam in een hem totaal onbekende streek en . . . daar stond een huis dat als twee druppels water leek op het fantoom-huis in zijn tuin. De overeenkomst was frappant: zelfs de naam die erop stond was dezelfde. Onze Platlander ging naar het huis. Dit was een echt huis, geen huis waar je doorheen kon lopen. Hij besloot aan te bellen en om inlichtingen te vragen.

Een dame deed open en riep verrast naar binnen: 'Jan, onze tegenvoeter, de landmeter, komt op bezoek,' en tot onze Platlander: 'Welkom, hoe lang heeft u erover gedaan?'

Het werd voor onze Platlander een allergezelligste én een leerzame dag. In het begin viel hij van de ene verbazing in de andere: Hoe kenden deze mensen hem? Hoe kwam het, dat een tweede exemplaar van hun huis in zijn tuin te zien was?

De vriendelijke Platland-fysicus Dr. Nix was ietwat verwonderd over deze vragen: 'Maar dat is toch logisch, u bent toch onze tegenvoeter! Kom eens mee.' Ze gingen naar het raam.

Dr. Nix schoof het gordijn opzij en . . . daar zag onze Platlander zijn eigen huis!

'Wist u niet dat wij het beeld van onze tegenvoeters (dat zijn de mensen die zich op maximale afstand van ons bevinden) altijd vlak bij ons zien, als het uitzicht

niet belemmerd wordt? Wij hebben juist deze plaats voor ons huis gekozen om het ruime uitzicht.

Het is zelfs zo, dat wij onszelf van achteren kunnen zien op heel heldere dagen. Het is maar een zwak beeld, maar op een dag als vandaag is het zeker te zien; komt u maar mee naar de tuin.'

In de tuin naast het huis heeft onze Platlander toen zichzelf van achteren gezien. Vlakbij, een heel zwak beeld maar toch duidelijk en scherp.

'Ja, dat komt door het uitermate ruime uitzicht op deze plaats. Over deze verschijnselen, die wij dagelijks zonder verbazing zien, heeft Professor Stein een interessante theorie, die hij vanavond voor een groot publiek voordraagt. Mogen wij u meenemen als onze gast?'

De lezing van Prof. Stein

De lezing van Prof. Stein was druk bezocht.

Hij stond bekend als een der diepste denkers over het wezen van Platland. Hoewel hij een theoreticus was, verraste hij de Platlandse geleerden dikwijls door onvermoede praktische gevolgtrekkingen uit zijn zuiver abstracte bespiegelingen.

'Geachte aanwezigen', zo begon de professor zijn lezing, 'het is een bekend verschijnsel, dat men op plaatsen met een vrij uitzicht soms vlak bij zich bewoners van onze wereld ziet, waarvan we weten, dat ze zich zéér ver van ons af bevinden. Een verschijnsel dat niet zo dikwijls voorkomt, maar dat de meesten van u toch wel eens hebben ervaren, is het zwakke beeld dat men van zichzelf vlakbij kan zien. Deze verschijnselen zijn tot nu toe zonder verklaring gebleven. Wij hebben dit altijd waargenomen en aanvaard als een elementaire eigenschap van ons heelal'.

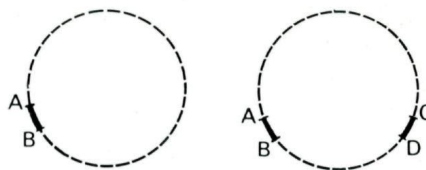
Onze Platlander luisterde intens. Dit was geheel nieuw voor hem. Hij had het verschijnsel nog geen half jaar geleden voor het eerst ontdekt en van geen enkel college had hij er vroeger iets over gehoord en in geen enkel boek er wat van gelezen.

¹⁾ Je begrijpt, dat Platlanders geen gewoon schrift kunnen lezen. Ze lezen en schrijven morse-tekens en zijn daar zeer vaardig in.



Fig. 1.

Fig. 2.



'Een door mij onlangs gepubliceerde theorie is in staat beide verschijnselen te begrijpen. Kort gezegd komt het hierop neer: ons platland is gekromd. Dit kunt u zich niet voorstellen. We moeten daarom naar een vergelijking zoeken.

Stelt u zich eens wezentjes voor die slechts lengte bezitten, die dus niet lang en breed zijn, zoals wij. En denkt u zich eens in, dat deze wezentjes een lijn-wereld bewonen (fig. 1).

Het wezentje AB kan zich slechts voor- en achteruit verplaatsen.

Het kan niet van de lijn af en weet zelfs niet dat er buiten zijn lijn ook nog iets is. Die lijn is zijn heelal.

Nu kan deze lijn ofwel recht ofwel gekromd zijn.

Wij kunnen dat zien. Maar onze lijnlander, zoals wij het wezentje zullen noemen, weet daar niets van.

Stel nu eens, dat dit lijnland een cirkel is (fig. 2).

Dan zou lijnlander AB zich van achteren kunnen zien.

Immers een lichtstraal volgt in zijn *heelal* de cirkel.

Een lichtstraal, die van B uitgaat, wordt dus in A ook gezien.

Als er nog een tweede wezen in lijnland is, bijv. CD, dan zal AB altijd CD kunnen zien.

Iets dergelijks zou in ons Platland waar kunnen zijn.

Als ons heelal gekromd is en zoals de cirkel 'in zichzelf terugkeert', dan zou dit de eenvoudigste verklaring zijn van de ons allen zo bekende optische verschijnselen'.

Dit alles werd onze Platlander te machtig. 'Nu begrijp ik het', schreeuwde hij door de zaal. 'U hebt gelijk Professor, ik kan het u verzekeren, want ikzelf kom uit een ander soort Platland dan de aanwezigen hier.

Beslist, uw wereld is gekromd en de mijne was het niet. En ik heb er bewijzen voor!'

Er ging een gemurmel op uit de zaal en de familie Nix zat beschaamd voor zich te kijken. Achter hen fluisterde iemand: 'Dadelijk gebeurt er iets ergs, ik voel het, die man is volslagen krankzinnig'.

Er was even een opschudding in de zaal. Er kwam een

verpleegster met een glaasje water en een arts, die de raad gaf: 'wat rust nemen'.

Had onze Platlander gelijk?

Laten we de eigenaardige optische verschijnselen, die Prof. Stein trachtte te verklaren, eens vanuit ons ruimtestandpunt bezien:

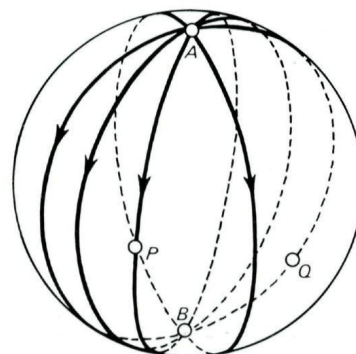


Fig. 3.

Als lichtstralen van A op de bol uitgaan, en als deze lichtstralen geheel in het boloppervlak moeten verlopen (voor deze 'platte' wereld moeten wij deze veronderstelling wel maken), volgen ze groot-cirkels op de bol, zoals de meridianen op de globe die van de noordpool uitgaan.

Maar al deze lichtstralen komen dan in het tegenpunt van A (B) weer samen en vormen daar dus een beeldpunt van A.

Een Platlander in P zal heel ver weg A zien, maar een Platlander in Q zal heel dichtbij stralen van B zien uitgaan. Hij ziet dus een beeld van A vlak bij zich.

Waarom een Platlander in A een beeld van zichzelf vlakbij ziet, is ook duidelijk. Dit wordt gevormd als de lichtstralen elkaar voor de tweede maal weer in A snijden. Natuurlijk moet dit beeld theoretisch precies met A samenvallen, zodat een Platlander zichzelf juist *niet* zou kunnen zien.

Dat hij het wel kan, moet wel aan een of andere onregelmatigheid van het biljartbaloppervlak liggen.

We kunnen er nog een, voor de Platlander interessante, opmerking aan toevoegen. Stellen we eens dat de lichtsnelheid in dit Platland 3 cm per jaar is, en dat de bol een omtrek van 9 cm heeft. Dan zal hij zichzelf kunnen zien op de plaats waar en zoals hij drie jaar geleden was.

Voor ons 'ruimtelanders' is er ook een interessante conclusie. Het zou kunnen zijn, dat onze ruimte gekromd is; iets wat wij ons onmogelijk kunnen voorstellen evenmin als de Platlanders zich de bolvorm van hun heelal kunnen voorstellen.

Toch hebben zij in hun heelal aanwijzingen te over dat hun ruimte gekromd moet zijn: Er bestaan in hun land geen evenwijdige lijnen; de som van de hoeken van de driehoek is geen 180° ; de π die in cirkelberekeningen voorkomt is variabel; lichtstralen, die steeds 'rechtdoor' gaan komen toch na enige tijd weer terug; hun heelal moet een eindige oppervlakte hebben. Wanneer onze ruimte gekromd zou zijn, dan moeten er ook voor ons dergelijke verschijnselen zijn, die daarop wijzen.

Pythagoras Olympiade



Nieuwe opgaven (oplossingen inzenden vóór 1 februari 1983).

PO 49.

Gegeven is een rechthoekige driehoek met zijden van gehele lengte. De lengte van de schuine zijde is p , de oppervlakte van de driehoek is q .

Bewijs dat elk van de vier vergelijkingen

$$x^2 + p x + q = 0$$

twee *gehele* wortels heeft.

(Bij de bekende 3-4-5-driehoek (oppervlakte 6) krijg je bijvoorbeeld de vergelijkingen

$$x^2 + 5x + 6 = 0, \text{ wortels } -2, -3$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0, \text{ wortels } -6, +1$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0, \text{ wortels } +2, +3$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0, \text{ wortels } +6, -1.)$$

PO 50.

Als n een geheel getal groter dan 1 is, dan stelt men

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}.$$

a. Bewijs: als je s_n schrijft als een onvereenvoudigbare breuk, dan is de teller van die breuk oneven.

b. Bewijs dat s_n voor geen enkele n een natuurlijk getal kan zijn.

PO 51.

Iemand wil een vierkante vloer van $4 \times 4 \text{ m}^2$ betegelen met vierkante tegels van $20 \times 20 \text{ cm}^2$ in vier verschillende kleuren op zo'n manier dat nergens twee gelijk gekleurde tegels met een zijde of een hoekpunt tegen elkaar komen te liggen. Bepaal alle manieren waarop dit mogelijk is.

Wedstrijdvoorwaarden en prijzen

- * Leerlingen van het voortgezet/secundair onderwijs kunnen hun oplossing van een of meer opgaven insturen aan: *Pythagoras Olympiade, Brederode 29, 2261 HG Leidschendam (NL)*. Let op de inzendtermijn en zorg voor voldoende frankering.
- * Vermeld op elk (éénzijdig beschreven) vel: naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas. Elke oplossing moet op een nieuw vel beginnen.
- * Oplossingen dienen gemotiveerd en volledig uitgewerkt te zijn, met verklarende tekst in goed lopende zinnen. Slechts goed leesbare inzendingen worden bekeken.
- * Wie een aan zichzelf geadresseerde en als brief gefrankeerde open enveloppe meezendt, ontvangt na de inzendtermijn onze oplossingen.
- * Per opgave worden onder de goede oplosers twee prijzen t.w.v. f 10/Bfr 150 verloot.
- * De opgaven van één jaargang vormen samen de *ladderwedstrijd*. De drie inzenders van de meeste goede oplossingen krijgen elk een prijs t.w.v. f 25/Bfr 400.
- * De beste tien van de ladderwedstrijd die niet in een examenklas zitten, krijgen een uitnodiging voor de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Zij hoeven zich dus niet via de eerste ronde te klasseren.

°Tweespraak tussen Punt en Lijn

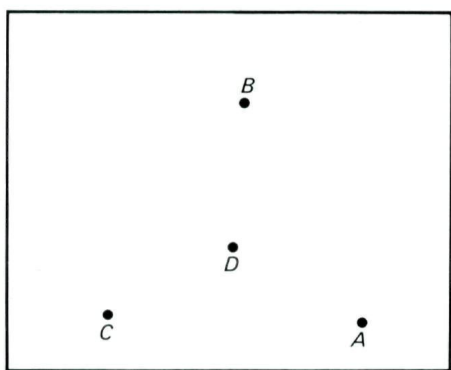
F. v.d. Blij

Het lijkt een spel, maar er is geen winnaar. Zo ooit dan gaat het hier om het spel en niet om de knikkers. We noemen het maar een tweespraak tussen Punt en Lijn.

P begint met op een (niet te klein) stuk papier een (niet te groot) aantal punten te tekenen. Bijvoorbeeld vier punten zoals in figuur 1. Hij tekende ze niet zo maar: ABC is een gelijkzijdige driehoek, D is het middelpunt ervan.

Nu is de beurt aan L. Met een liniaal trekt hij alle lijnen die door (ten minste) twee van de punten (A, B, C, D) gaan. Het zijn zes lijnen, we krijgen zo figuur 2.

Fig. 1.



Nu is de beurt weer aan P. De zojuist door L getekende lijnen geven (nieuwe) snijpunten, deze geeft P nu namen E, F en G (fig. 3).

L op zijn beurt gaat weer met de liniaal trekken door alle nu getekende punten. Veel staan er al, maar EF, FG en GE zijn drie nieuwe (fig. 4). Maar nu kan P weer nieuwe punten namen gaan geven: H, I en J .

Het is nu wel duidelijk dat het zo als maar door blijft gaan.

Hoe gaat het als je de beginpunten anders kiest? Als P begint met twee of drie punten kan L één of drie lijnen tekenen en dan is het afgelopen. Als P vier punten tekent, die de hoekpunten van een vierkant zijn, kan L de vier zijden en de twee diagonalen van het vierkant tekenen. P kan daarna het snijpunt van de diagonalen een naam geven. Maar dan is het spel weer afgelopen.

Fig. 2.

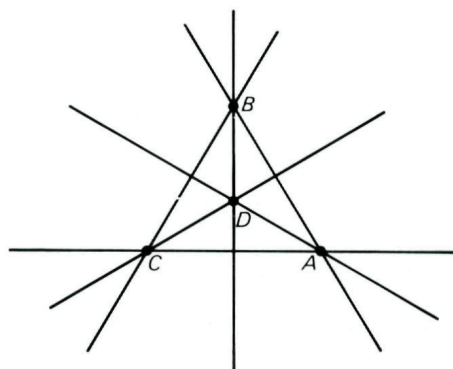


Fig. 3.

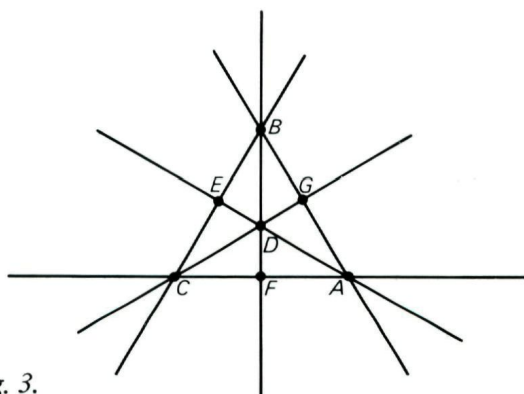
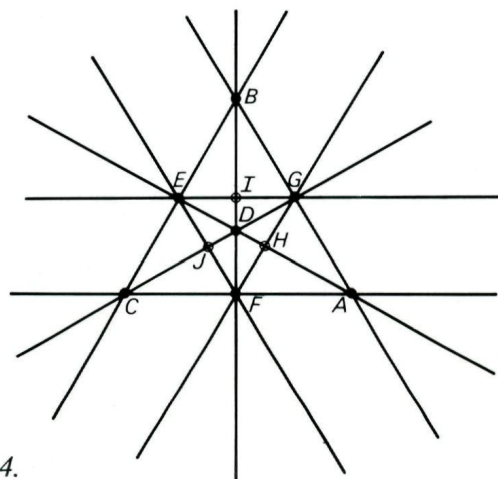


Fig. 4.



Je zou het zelf eens kunnen proberen op een velletje ruitjespapier met $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(1, 1)$, $D(0, 1)$. Houdt het nu op of gaat het door? Probeer nog maar wat mogelijkheden zelf uit; ik noem nog: $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(1, 1)$, $D(-1, 1)$.

Hoewel we wat plaatjes geven, raden we je toch aan nu echt zelf te gaan tekenen en eventueel daarna te vergelijken met de volgende figuren. Je moet nu maar eens beginnen met vier helemaal willekeurige punten. Het is natuurlijk vervelend als er lijnen komen, die niet evenwijdig zijn maar elkaar een eindje buiten het papier snijden. Dan maar een extra velletje eraan plakken. Of de beginpunten iets anders kiezen, zodat de snijpunten net wel op papier komen.

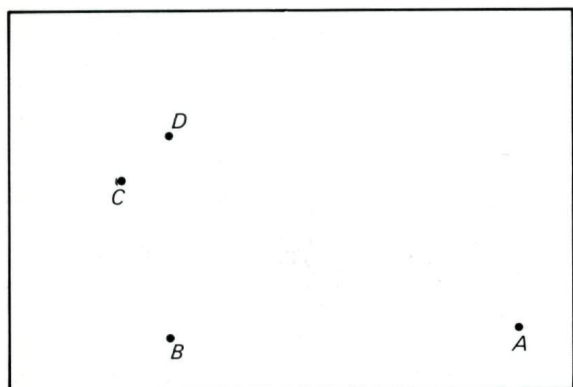


Fig. 5.

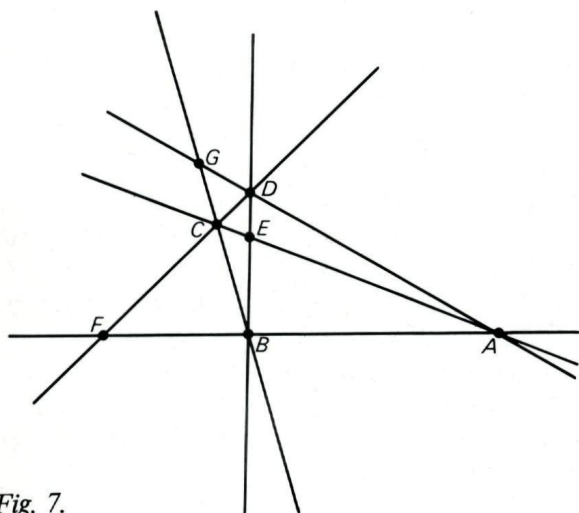


Fig. 7.

Wij laten in de volgende figuren een voorbeeld zien, beginnend met vier punten A, B, C, D , zo maar getekend in het vlak (fig. 5). In figuur 6 heeft L de zes lijnen door AB, AD, BC, BD en CD getrokken. In figuur 7 zien we de drie nieuwe punten E als snijpunt van AC en BD ; F als snijpunt van AB en CD en ten slotte G als snijpunt van AD en BC . Dan is de beurt weer aan L en hij kan drie nieuwe lijnen trekken door E en F , door F en G en door E en G (fig. 8). In figuur 9 zien we het werk van P weer; er zijn heel wat nieuwe punten aangegeven: H, I, J, K, L en M . We zouden ze alle precies kunnen beschrijven. H is het snijpunt van AB met EG ; I het snijpunt van AD met EF enzovoort.

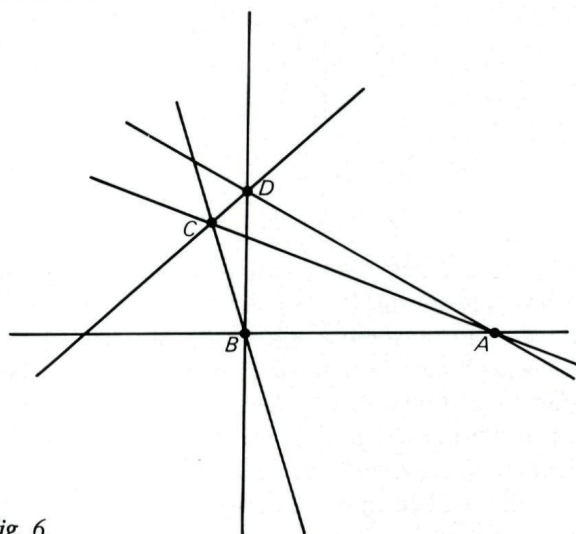


Fig. 6.

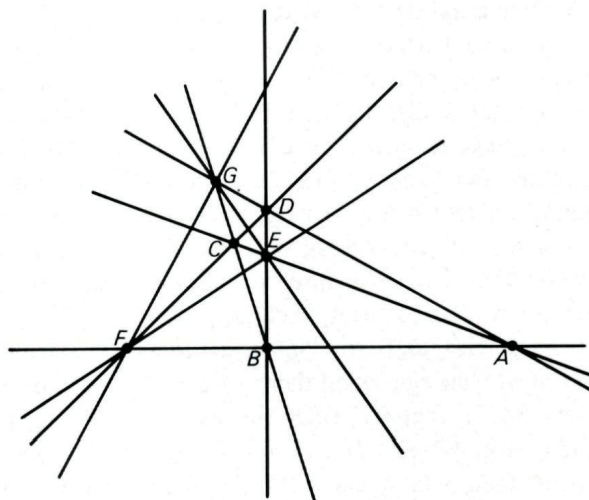


Fig. 8.

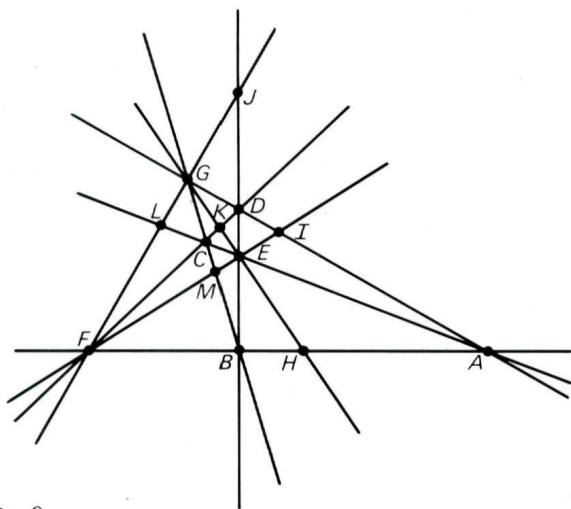


Fig. 9.

We gaan nog één ronde verder. Er zijn nu heel wat nieuwe lijnen, steeds door twee punten te trekken. Kreeg je tot nu toe ook alle punten nog op je vel tekenpapier? Maar in mijn geval lijken er nu allerlei bijzonderheden op te treden. De punten H, I, J lijken op één rechte lijn te liggen; H, M en L net zo; J, K en M idem en ook I, K en L . In figuur 10 stippelden we deze merkwaardige lijnen door drie nieuwe punten per lijn. Gebeurde dat in jouw tekening ook? Zouden die drietallen altijd op een rechte lijn liggen?

We proberen het nog eens met vier punten, A, B, C en D , die hoekpunten van een vierkant zijn. In figuur 11 zien we het resultaat als na P ook L geweest is en zes lijnen getekend heeft. Voor P is er nu een moeilijk ogenblik: het punt E is duidelijk, maar AB en CD snijden elkaar niet meer — of ligt er ergens heel, heel ver naar links (of naar rechts), ver buiten het papier, toch een punt F ? Evenzo kan je dromen over een punt G heel, heel hoog (of heel, heel laag). Als zulke verafgelegen punten F en G zouden bestaan, zou het spel nog niet afgelopen zijn, want dan kon L nu de lijnen door E evenwijdig met AD en BC en de lijn door E evenwijdig met AB en CD trekken. In figuur 13 hebben we het toch maar gedaan. Dan kan P nu weer punten namen gaan geven; net als vroeger (in fig. 9) noemt

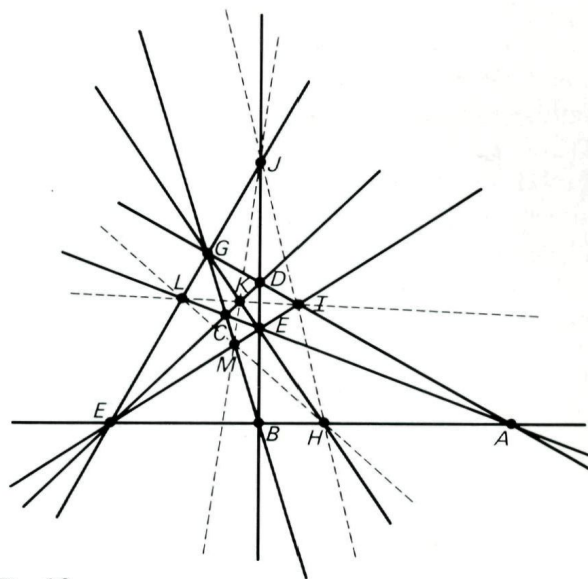


Fig. 10.

hij het snijpunt van AB met EG (als je begrijpt wat ik bedoel) H , het snijpunt van AD met EF (...) I , enzovoort. Zo ontstaan de punten H, I, K, M op het vel papier (fig. 14). En het ligt voor de hand, zoals in figuur 15 gebeurd is, nu de stippellijnen maar weer te tekenen. Nu liggen er maar twee punten op iedere stippellijn!

Of is het feit dat HM, IK en AC nu evenwijdig zijn net zo bijzonder als dat HM, IK en AC door één punt L gaan in figuur 10?

Meetkunde, enkel met punten en rechte lijnen, zonder het meten van hoeken of lijnstukken, zonder passer of coördinaten, kan best al wel moeilijke problemen geven.

Voor de goede kijkers nog een laatste opmerking. Zou $ABCD$ in figuur 6 niet de perspectivische schets van een vierkant kunnen zijn? Zodat (in fig. 7) F en G op de horizon liggen? Als je het papier zo draait dat FG 'horizontaal' loopt zou je het haast kunnen geloven. Maar dan is figuur 11 de ware gedaante van de perspectieftekening in figuur 6. Maar ook 12 van 7, 13 van 8, 14 van 9 en 15 van 10. Maar nu gaat het ons wel wat (teveel) duizelen...

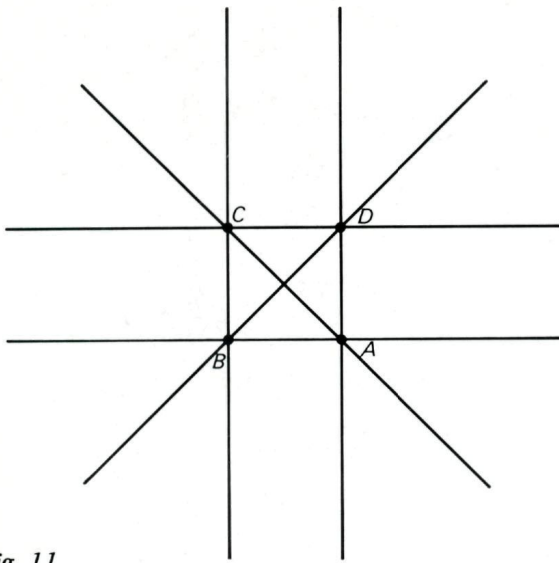


Fig. 11.

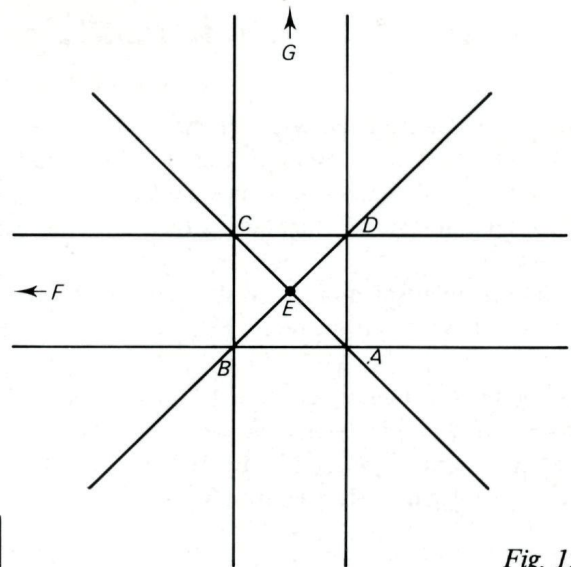


Fig. 12.

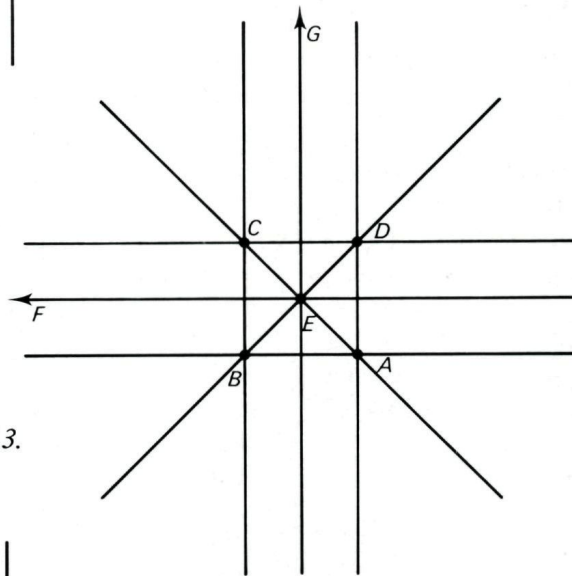


Fig. 13.

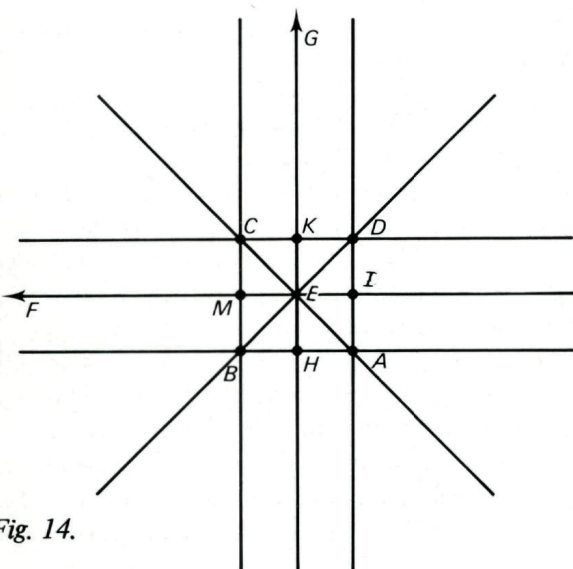


Fig. 14.

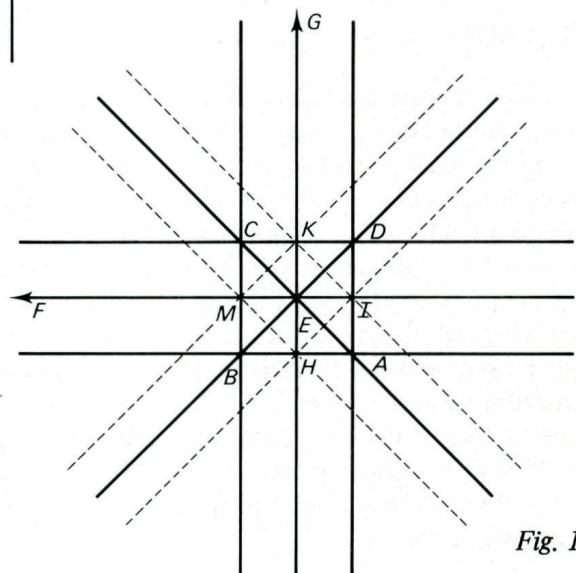


Fig. 15.

°°Gebroken en toch recht

In de wasbak van een gootsteentje is aan de binnenkant een kettinkje vastgezet (fig. 1). Dat hangt dan verder over de rand van de bak omlaag te bungelen. Aan het eind daarvan hangt een stop om de wasbak af te sluiten.

Wat ons op zeker moment fascineerde was de vraag: door welke wetten gedreven gaat de ketting zo hangen?

Of, is te voorspellen hoe de ketting zijn weg over de gootsteenrand kiest? Als we de ketting wegtrekken naar de stand $SPQR$ gaat hij uit zichzelf terug naar de aangegeven stand. Maar waarom?

Vereenvoudiging

Omdat de randen van de bak afgerond zijn, verwaarlozen we de wrijving.

De spankracht in de ketting wordt veroorzaakt door het gewicht van de stop. Het gewicht van het kettinkje zelf verwaarlozen we weer.

Verder ontwerpen we een model om beter vat op het probleem te krijgen. We vervangen daartoe de rand van de bak door een halve kubus (fig. 2). Dat lijkt er sprekend op.

Voorwaarden

De zwaartekracht zal ongetwijfeld een overheersende rol spelen. Immers als er geen zwaartekracht was, zou de ketting in elke denkbare stand willen blijven staan. Daarom ook zal het stuk QR zeker verticaal omlaag gaan, dus loodrecht op de horizontale rand EF .

Misschien denken we nu verder dat het stuk PQ zo kort mogelijk moet worden. Maar dat blijkt al direct niet het geval te zijn. Als we het stuk PQ iets naar voren trekken en dan weer loslaten, glijdt de ketting uit zichzelf weer naar achteren.

Tegelijk zien we dat bij dat naar voren trekken het gewicht bij R iets omhoogkomt.

Dat geeft ons een nieuwe tip: de stop moet zo laag mogelijk komen.

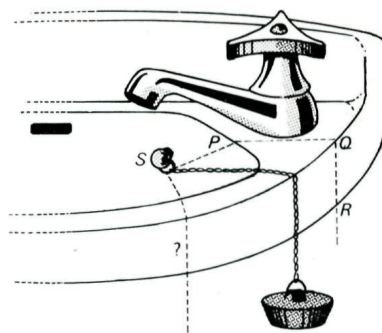


Fig. 1. Gootsteenbak met ketting en stop.

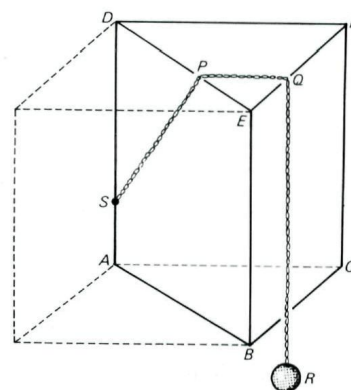


Fig. 2. Gootsteenrand vervangen door halve kubus.

We moeten dus een verbinding van S naar de rand EF realiseren die zo kort mogelijk is!

Krachten bij de rand

Hoe zit het met de krachten bij een punt op de rand waar de ketting een knik maakt?

Als er geen wrijving is zullen de spankrachten in de ketting links en rechts van zo'n punt gelijk zijn.

Om de situatie beter te overzien klappen we beide vlakken rond de rand in elkaars verlengde (fig. 3) en tekenen aan weerszijde de werkende krachten.

F_1 en F_2 zijn de beide even grote spankrachten. Elk wordt ontbonden in een component F' , gericht langs de rand en een component F'' loodrecht daarop.

De beide krachten langs de rand zullen, indien F_1 en F_2 niet in elkaars verlengde liggen, verschillend van grootte zijn, zoals in fig. 3a is getekend. Maar in dat

Fig. 3a.

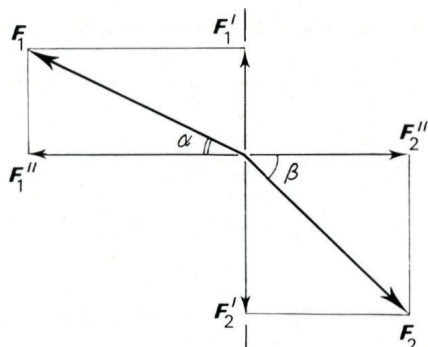


Fig. 3. Krachten bij een rand.

geval zal de ketting, bij het ontbreken van wrijving, over de rand gaan schuiven.

In een toestand van evenwicht moeten ze elkaar dus opheffen en dat betekent dat de spankrachten niet alleen even groot, maar ook nog tegengesteld moeten zijn als de werkvlakken in elkaars verlengde liggen. Dat is in fig. 3b getekend en zo is de werkelijkheid.

In de uitgeklapte vlakken moet de ketting bij de rand dus gewoon rechtdoor lopen.

En deze voorwaarde geeft ons nu vlug de oplossing van het vraagstuk.

Gebroken en toch recht

De ketting van fig. 2 loopt langs twee verticale vlakken en een horizontaal vlak.

In fig. 4 hebben we die drie vlakken weer in een uitslag getekend.

Als we het beginpunt van de ketting S ergens op ribbe AD aangeven, dan kunnen we nu eenvoudigweg een loodlijn vanuit S op de ribbe BC zetten en we hebben dan daarmee de loop van de ketting geconstrueerd.

En zo wordt dan de gebroken rechte $SPQR$ — in de uitslagfiguur — keurig een rechte lijn!

Nog een voorbeeld

In fig. 5 ten slotte hebben we het beginpunt S op de onderrand AC geplaatst en weer in de uitslagfiguur de loop van de ketting aangegeven.

Fig. 3b.

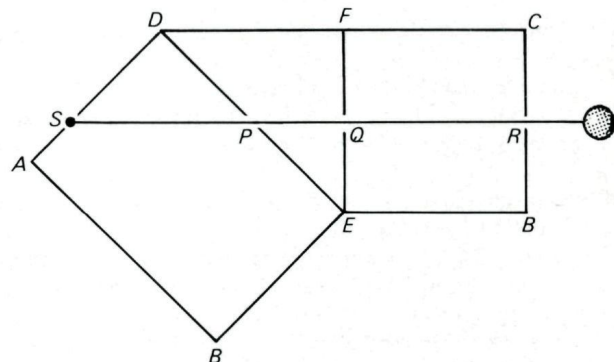
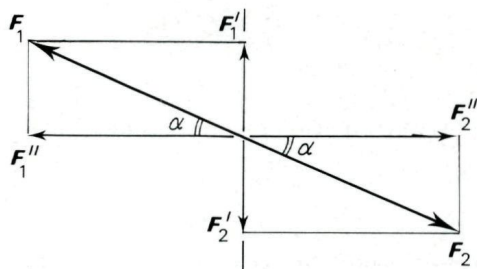


Fig. 4. Uitgeklapte halve kubus.

In die figuur is af te lezen dat de constructie mislukt als S te veel in de richting van C wordt genomen. De ketting zal dan van de punt bij E afglijden.

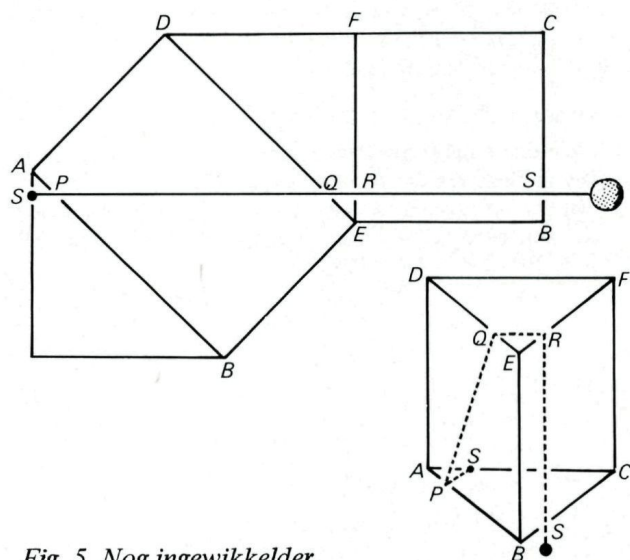


Fig. 5. Nog ingewikkelder.

Pythagoras Olympiade



Oplossingen en prijswinnaars van de opgaven PO 37 - 39.

PO 37.

Bewijs dat het kwadraat van een natuurlijk getal niet kan eindigen op vier of meer gelijke cijfers, tenzij die cijfers nullen zijn (in het tientallig stelsel).

Oplossing van *Harry Oosterveen* (6-vwo, Menso Alting College, Hoogeveen):

Stel $n^2 = p \cdot 10000 + r \cdot 1111$ voor zekere natuurlijke getallen p, r met $r \in \{1, 2, \dots, 8, 9\}$. Het laatste cijfer van een kwadraat is altijd 0, 1, 4, 5, 6 of 9, dus r is een van die getallen.

Stel n is oneven, dus $n = 2k - 1$, dan is $n^2 = 4k^2 - 4k + 1 = p \cdot 10000 + r \cdot 1111$ dus $4(k^2 - k) = p \cdot 10000 + r \cdot 1111 - 1$. Dan zou $r \cdot 1111 - 1$ een viervoud moeten zijn, maar de in aanmerking komende waarden $r = 1, 5$ en 9 voldoen niet.

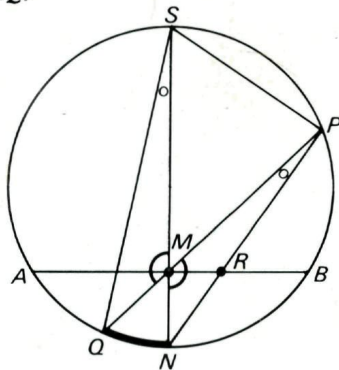
Stel n is even, dus $n = 2k$. Dan is n^2 een viervoud, en omdat 10000 ook een viervoud is, moet $r \cdot 1111$ het ook zijn. $r = 6$ valt dus af.

Zou gelden $r = 4$, dan was (delen door 4) $k^2 = p \cdot 2500 + 1111$, dus dan was k^2 een viervoud + 3. Maar een kwadraat kan alleen maar een viervoud of een viervoud + 1 zijn, dus dit is onmogelijk. Alleen $r = 0$ blijft dus over.

Er waren 18 inzendingen, allemaal correct. De prijswinnaars zijn *Victor Allis* (5-gymn., Herman Wesselinkcollege, Aalsmeer) en *Henk Kreuze* (5-vwo, Menso Alting College, Hoogeveen). Een eervolle vermelding krijgt *Rob de Jeu* (6 vwo, OSG Albert Einstein, Hoogvliet).

PO 38.

Op cirkel c liggen twee verschillende punten A en B . M is het midden van het lijnstuk AB , en N is het midden van één van de twee cirkelbogen AB . Op de andere cirkelboog ligt een punt P . PM snijdt c nogmaals in Q . PN snijdt AB in R . Bewijs dat $RN > MQ$.



Oplossing van *Steven van Enk* (5-vwo, Chr. Lyceum, Veenendaal):

Noem het midden van de andere cirkelboog S . Omdat hoek SPN recht is, geldt $\cos SNP = \frac{PN}{SN} = \frac{MN}{RN}$, dus $RN = \frac{MN}{PN} \cdot SN$ (1).

Verder zijn de driehoeken QMS en NMP gelijkvormig, want de hoeken bij M zijn gelijk, en de hoeken bij S en P staan allebei op boog QN , dus die zijn ook gelijk.

Bijgevolg is $\frac{MQ}{SQ} = \frac{MN}{PN}$, dus $MQ = \frac{MN}{PN} \cdot SQ$ (2).

SN is een middellijn van de cirkel, dus $SN \geq SQ$. Met (1) en (2) geeft dit $RN \geq MQ$.

Er waren 15 inzendingen, waarvan 10 correct. De prijswinnaars zijn *Ronald Heijnen* (6-vwo, OLV Lyceum, Breda) en *Steven van Enk*.

Eervolle vermelding verdienen de oplossingen van *Victor Allis* en *Rob de Jeu*.

PO 39.

Bepaal alle paren positieve gehele getallen (m, n) waarvoor geldt $2^m = 3^n + 1$.

Oplossing van *Menke Ubbens* (4-ath., RSG Magister Alvinus, Sneek):

Stel n is even: $n = 2p$. Dan $2^m = 3^n + 1 = 3^{2p} - 1 + 2$ dus $2^m = (3^p - 1)(3^p + 1) + 2$.

Omdat 3^p oneven is, is $(3^p - 1)(3^p + 1)$ een viervoud, dus 2^m is géén viervoud, dus m is kleiner dan 2.

Stel n is oneven: $n = 2q + 1$, dan is $2^m = 3^n + 1 = 3 \cdot 3^{2q} - 3 + 4 = 3 \cdot (3^q - 1)(3^q + 1) + 4$. Omdat $3^q - 1$ en $3^q + 1$ beide even zijn en 2 verschillen, is één van beide een viervoud, en hun produkt is dus een achttvoud.

$2^m = 3 \cdot (3^q - 1)(3^q + 1) + 4$ is dus géén achttvoud, en daarom is m kleiner dan 3.

We behoeven in alle gevallen dus slechts $m = 1$ of $m = 2$ te bekijken, en invullen geeft dan als enige positieve oplossing $(m, n) = (2, 1)$.

Er waren 15 inzendingen, waarvan 13 correct. De prijswinnaars zijn *Auke Zijlstra* (5-ath., RSG Leeuwarden) en *Rob de Jeu*. *Rob de Jeu* en *Rutger Noot* (5-g Gymn. Haganum Den Haag) verdienen een eervolle vermelding voor hun oplossingen in het tweetallig stelsel.