



Verschijnt vier keer per jaar

Wiskundetijdschrift voor jongeren

Pythagoras



4 Jaargang 22 februari 1983

Wolters-Noordhoff

Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Redactie

- f Dr. J. van de Craats
R. U. Math. Inst., Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
✚ Ir. H. M. Mulder
Geersbroekseweg 27, 4851 RD Nieuw Ginneken.
△ Drs. H. N. Pot
Tournoysveld 67, 3443 ER Woerden.

Secretariaat

- ★ Bruno Ernst
Stationsstraat 114, 3511 EJ Utrecht.
Aan dit adres kunnen bijdragen voor Pythagoras worden gezonden.

Medewerkers van de redactie

Drs. A. W. Boon
M. C. van Hoorn
W. Pijls
G. A. Vonk
D. K. Wielenga

Pythagoras verschijnt 4 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 9,20 per jaargang.
Voor anderen f 13,95.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen.
Voor België bij J. B. Wolters - Leuven, Blijde Inkomststraat 50, Leuven; postchecknummer 000-000 8081-30.

Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt.
Maximaal 10 gratis abonnementen per school.

Abonnees wordt dringend verzocht met betalen te wachten tot hun een acceptgirokaart wordt gezonden.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

Bij de voorplaat Op het eerste gezicht een stel spiralen. Maar dat zijn het niet. Er is wel *iets* dat twee spiralen vormt. Is er een wetmatigheid te ontdekken waarmee de figuur nog verder naar het centrum opgevuld kan worden? Is er nog een uitbreiding naar buiten mogelijk?

Een mooie figuur... en als je wilt is er veel aan te puzzelen; we vonden hem in 't Russische jeugdtijdschrift voor exacte wetenschappen KWANT.



Inhoud

✓ De Quadro-kubus 52

△ Schuilmuurkamers 55, 60

△ De Pentapuzzel 56, 61

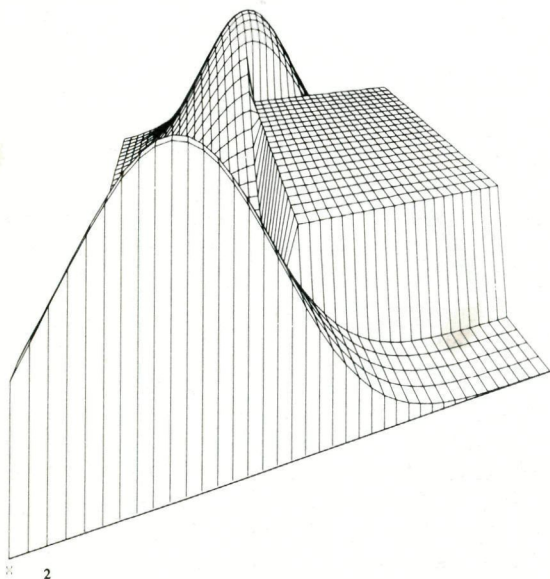
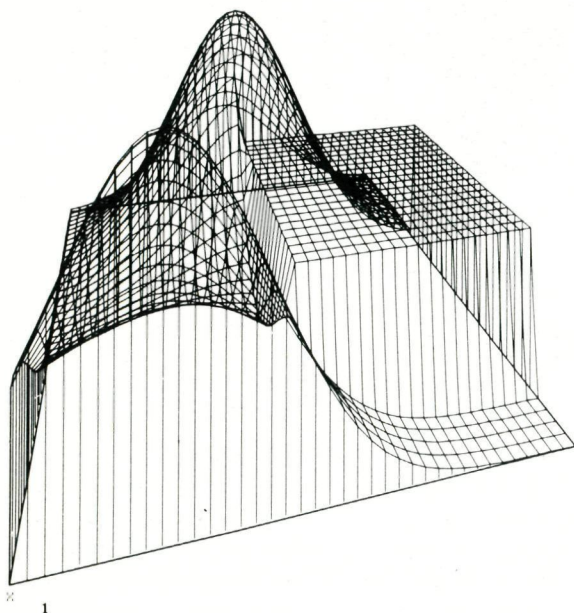
★ Platlanders 58

Pythagoras Olympiade 61

△ Alles wat u zegt kan tegen u gebruikt worden! 62

△ Een kwadratendriehoek 62

Correspondentie 63



Computers kunnen de fraaiste figuren voor ons tekenen. We moeten ze in hun taal dan wel precies zeggen wat ze moeten doen.

Boven zie je zo'n computertekening. De computer kan deze driedimensionale figuur vanuit verschillende hoeken laten zien en zelfs lijnen die verborgen zijn achter delen van de figuur, zelf verwijderen. Het resultaat van een bewerking die de 'verborgen lijnen' ook niet tekent zie je in de onderste figuur.

°De Quadro-kubus

Hij bestaat echt. Hier en daar kun je hem voor veel geld kopen: de Magische $4 \times 4 \times 4$ -Kubus! Op het exemplaar dat wij hebben, staat 'Master Rubik's Cube' en 'Made in Hong-Kong'. Hij draait soepel. Het mechanisme is zo mogelijk nog ingenieuzer dan dat van de gewone kubus. Als je hem openmaakt, zie je een soort centrale bol. De vier-maal-zes middenblokjes (vier van elke kleur) hangen in sleuven in die bol, en de andere blokjes — acht hoekblokjes en twee-maal-twaalf ribbeblokjes — houden elkaar met uitsteeksel vast, ongeveer net zo als bij de gewone kubus.

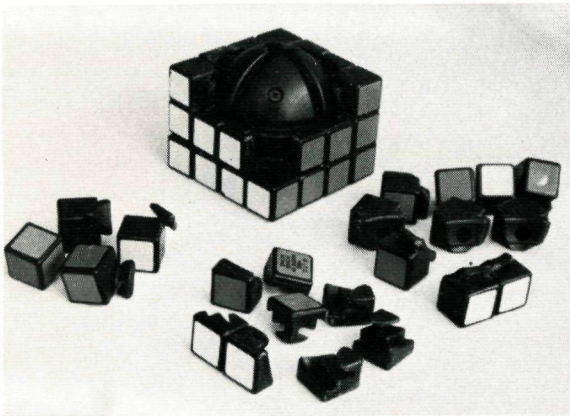


Fig. 1.

Als puzzel is deze *Quadro-kubus* een stuk lastiger dan de gewone $3 \times 3 \times 3$ -kubus. Je komt voor allerlei nieuwe problemen te staan. Maar als je op de gewone kubus uitgekeken bent, dan is dit weer een enorme nieuwe uitdaging. Eigenlijk bevat de *Quadro-kubus* nog minstens twee andere puzzels. Draai je vanuit de beginstand alleen de zes buitenste vakken, dan is het ding niets anders dan een vermomming van de gewone $3 \times 3 \times 3$ -kubus. En als je alleen langs de drie middelste snijvlakken draait, heb je een versie van de $2 \times 2 \times 2$ -kubus te pakken. Maar die twee puzzels zullen voor onze lezers wel geen geheimen meer hebben; we hebben er vorig jaar ruime aandacht aan besteed.

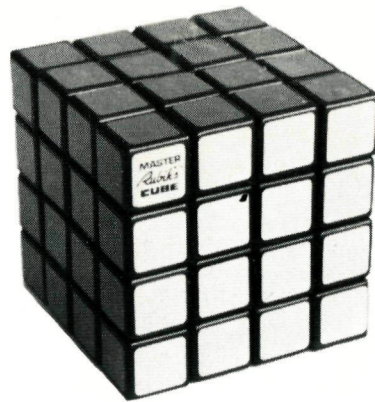


Fig. 2.

Oplossen

Als je de *Quadro-kubus* wilt oplossen, kun je natuurlijk proberen laag voor laag schoon te krijgen. Maar misschien is het ook een goed idee om naar de vermomming van de $3 \times 3 \times 3$ -kubus toe te werken. Die kunnen we immers de baas. Het lijkt dus verstandig om eerst te proberen ervoor te zorgen dat de vier centrale blokjes van elk zijvlak van één kleur zijn. Dat is niet zo erg moeilijk; iedereen moet dat in korte tijd voor elkaar kunnen krijgen. Welke kleuren er naast en tegenover elkaar moeten komen, kun je aan de hoekblokjes zien.

De ribbeblokjes Nu de ribbeblokjes. Van elke soort zijn er twee, en de kunst is om alle tweetallen bij elkaar te krijgen zonder dat je de eerder bereikte resultaten, de egaal gekleurde centra van de zijvlakken, weer verknoeit. Dat is al wat moeilijker, maar het is toch nog lang geen heksentoer. Het kost alleen wat tijd. En mocht het je echt niet lukken, dan kun je onze eerste *nuttige serie* misschien gebruiken. Let wel, je hoeft je nu nog niet te bekommeren om de plaats van de te stellen ribbeblokjes. Het gaat er alleen maar om dat de gelijk gekleurde paren ook netjes naast elkaar komen te zitten.

Laten we aannemen dat je het voor elkaar hebt gekregen. Je kunt dan de *Quadro-kubus* verder gaan fatsoeneren door alleen de zijkanten te draaien. Doe maar net of het een gewone $3 \times 3 \times 3$ -kubus is.

Eén op vier Er is een kans van één op vier dat je nu je Quadro-kubus helemaal schoon krijgt. Gefeliciteerd als je dat geluk hebt! Maar in drie van de vier gevallen loop je op het einde wat vast. Je krijgt dan een stand die bij de gewone kubus niet voor kan komen! Er zit bijvoorbeeld één zo'n stel ribbeblokjes omgeklapt. Of er zijn twee hoekblokjes verwisseld. Of twee van die stellen ribbeblokjes. En daarmee zit je dan in de problemen. De Quadro-kubus is echt wezenlijk moeilijker dan de gewone kubus!

Het zit hem er natuurlijk in dat je ook *middenschijven* kunt draaien. Zulke draaiingen tasten de hoekblokjes niet aan, maar wel de centrale blokjes en de ribbeblokjes. In die blokjes zitten de moeilijkheden dus verborgen, en het is daarom verstandig er maar vast voor te zorgen dat alle hoekblokjes goed zitten. Met bekende standaard-truuks voor de gewone kubus kun je dan bereiken dat je óf alleen nog maar twee stellen ribbeblokjes moet verwisselen (fig. 3a), óf één stel moet omklappen (fig. 3b), óf allebei die handelingen moet zien te verrichten. Elders vind je aanwijzingen om uit deze problemen te komen.

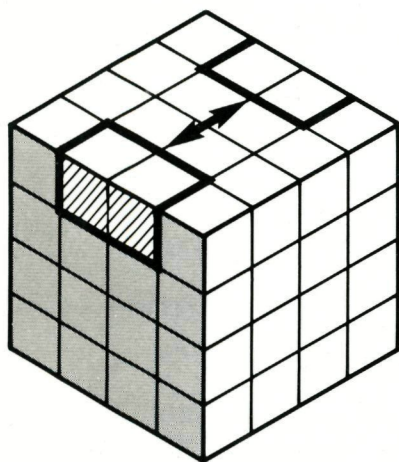


Fig. 3a. Twee verwisselde stellen ribbeblokjes.

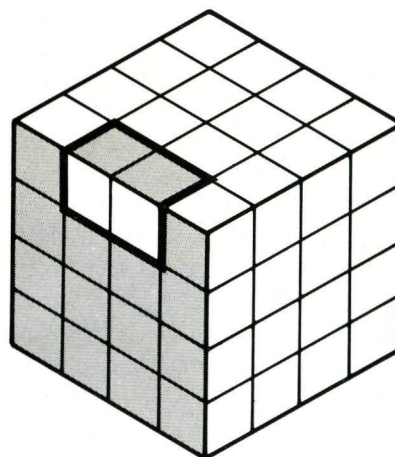


Fig. 3b. Een omgeklapt stel ribbeblokjes.

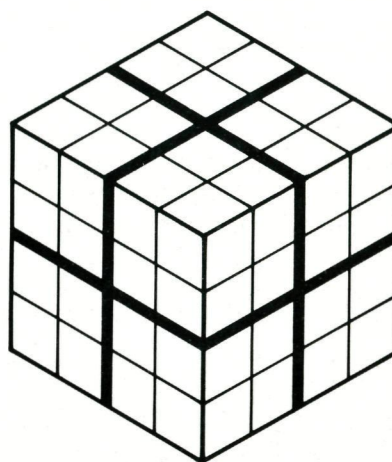


Fig. 4. De kubus van plussen voorzien.

gende manier. Neem een penseel en verf een zwarte 'plus' op elk zijvlak zoals aangegeven is in fig. 4. De ribbeblokjes en de centrale blokjes worden dus allemaal gedeeltelijk zwart gemaakt. Hoe je de kubus nu ook door elkaar draait, het lint van zwarte plussen blijft intact. Zo zie je dat de ribbeblokjes altijd met hun zwarte 'plus-kant' tegen een middenvlak aan moeten zitten. Bij de stand van fig. 3b zijn de twee 'verkeerde' blokjes dan ook niet op hun eigen plaats omgeklapt, maar onderling verwisseld (en daarbij omgeklapt, omdat de zwarte kant anders niet goed zit).

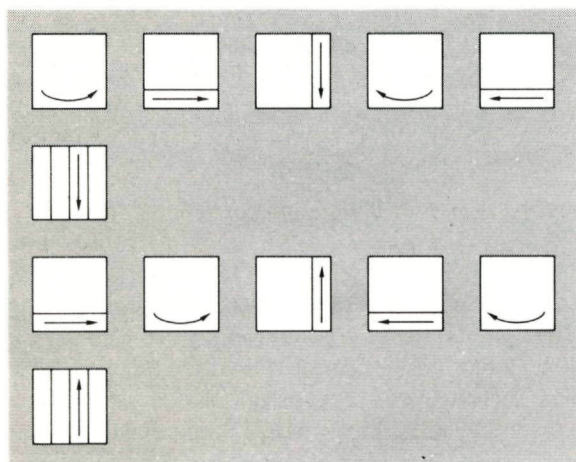
Oriëntaties Maar eerst nog iets over de ribbeblokjes. Je denkt misschien dat die blokjes, net als bij de gewone kubus, elke plaats op *twee* manieren kunnen innemen: 'gewoon', en 'omgekeerd'. Maar dat is niet waar! Elk ribbeblokje kan op elke plaats maar *op één manier* zitten! Je ziet dat het gemakkelijkst op de vol-

Voor de centrale blokjes geldt precies hetzelfde: elk blokje kan maar op één manier op elke plaats zitten, namelijk zo, dat zijn 'plus-kanten' naar het midden wijzen!

Je kunt die asymmetrie van de ribbeblokjes en de centrale blokjes ook zien als je de Quadro-kubus uit elkaar hebt gehaald. Aan de vorm van de uitsteeksels zie je dat ze maar op één manier goed op hun plaats kunnen zitten. Het is bij de gewone kubus niet zo verstandig om hem met je ogen dicht in elkaar te zetten. Je hebt dan een kans van één op twaalf dat het ding in een verkeerde 'baan' terecht komt, en niet meer schoon gedraaid kan worden. Bij de Quadro-kubus is dat risico kleiner (hoewel het natuurlijk wel een duivelse opgave is om hem met je ogen dicht in elkaar te zetten). Maar de Quadro-kubus heeft slechts drie banen. Alleen de oriëntaties van de hoekblokjes zijn van belang.

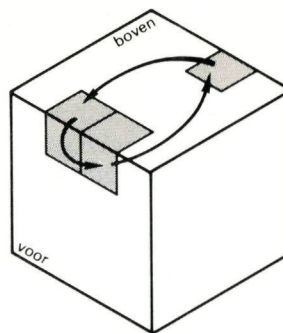
Nuttige series

Eerst een serie die drie ribbeblokjes cyclisch verwisselt (de plaatjes stellen schematische bovenaanzichten voor; een pijl betekent een kwart-draai van de betreffende schijf; een cirkel-pijl betekent een draai van de bovenschijf).

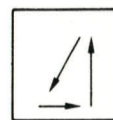


Merk op dat de derde regel de *inverse* is van de eerste regel: de draaiingen van de eerste regel worden in de derde weer terug gedraaid (natuurlijk in de omgekeerde volgorde!). We zullen de hele serie symbolisch aangeven met

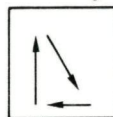
Het effect is:



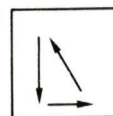
We zullen de hele serie symbolisch aangeven met:



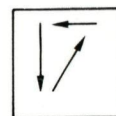
Als je in de tweede en de vierde regel met de *linker* middenschijf draait in plaats van de rechter, dan krijg je



Je zult weinig moeite hebben om op dit idee zelf nog wat variaties te bedenken. Bijvoorbeeld series met effecten als

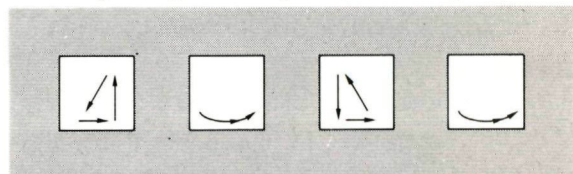


of



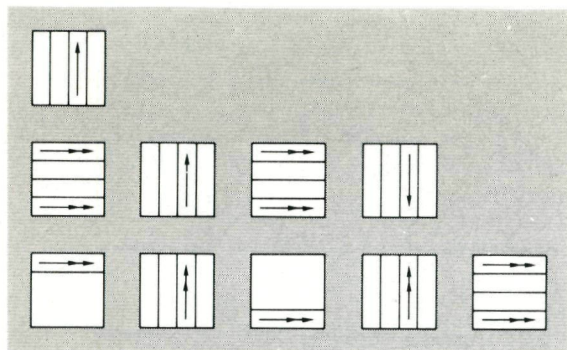
Kijk ook eens wat er gebeurt als je zo'n middenschijf een *halve* slag draait in plaats van een kwartslag.

Nu de oplossing van het probleem van fig. 3a. Draai:



(met dubbele pijlen geven we halve slagen aan). Simpel he?

Moeilijker is fig. 3b. Draai hiervoor:



Een lange serie, maar je kunt hem onthouden als je kijkt wat er gebeurt. In de eerste regel worden vier centra van zijvlakken verknoeid. De tweede regel brengt er twee in orde, en de derde herstelt de laatste twee. Maar bij dat alles zijn er een paar ribbeblokjes door elkaar gegoooid. Met de driecykels van hierboven kun je dat weer in orde brengen. Als je handig bent, heb je er maar drie nodig.

Met deze aanwijzingen moet je de Quadro-kubus helemaal schoon kunnen krijgen, als je tenminste de gewone $3 \times 3 \times 3$ -kubus de baas kunt. Het blijft echter een tijdrovende bezigheid: ons kost het nog 5 à 10 minuten. Maar het lukt wel!

°Schuilmuurkamers

Een plattegrondprobleempje. De veelhoeken in fig. 1 en 2 stellen plattegronden van kamers voor. Als je rondkijkt vanuit punt A in de vijfhoekige (lege) kamer $BCDEF$, kun je alle muren volledig zien. Maar dit gaat niet meer op voor punt P in de zeshoekige kamer $QRSTUV$: vanuit P gezien is de wand UV geheel onzichtbaar, en de wand TU gedeeltelijk.

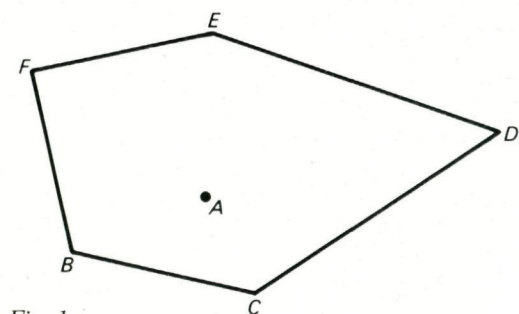


Fig. 1.

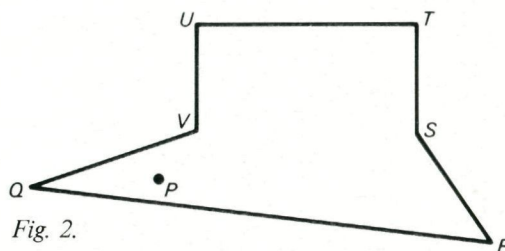


Fig. 2.

We noemen nu wanden die vanuit een punt P geheel of gedeeltelijk onzichtbaar zijn: *schuilmuren vanuit P* . En we willen je even laten nadenken over de vraag of er kamervormen zijn te bedenken met meer dan twee schuilmuren (gezien vanuit een zeker punt). De plattegrond moet een veelhoek zijn, met rechte zijden; het aantal zijden is vrij.

Kun je een vorm vinden waarbij op twee na *alle* wanden vanuit een zeker punt gezien geheel of gedeeltelijk achter andere wanden verscholen zijn? Kan het ook met slechts één volledig zichtbare wand? En ten slotte: is het al of niet mogelijk dat vanuit een punt in een veelhoek-kamer, *alle* muren schuilmuren zijn?

°De Pentapuzzel

We beschrijven hier een variant van de bekende Chinese tangram-puzzel.

Fig. 1 laat een vierkant zien, onderverdeeld in vijf stukken (het Griekse *penta* betekent vijf). Van die stukken zijn eindeloos veel andere figuren te leggen. Leggen we extra voorwaarden op waaraan die figuren moeten voldoen, dan kunnen er boeiende puzzels ontstaan.

Naast het zoeken van oplossingen voor de hieronder gestelde vragen, kun je natuurlijk ook proberen zelf nog weer andere voorwaarden te bedenken. En daar zo mogelijk alle oplossingen bij te zoeken.

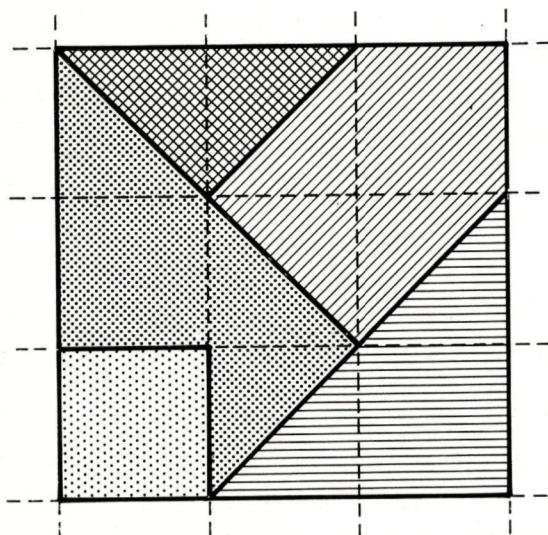


Fig. 1.

Stukjes knippen

Om te kunnen puzzelen zul je fig. 1 even moeten overtekenen op tekenpapier (of op dun karton). Knip dan de stukjes zo precies mogelijk uit.

Vraag 1 Probeer van de stukjes de in fig. 2 getekende veelhoeken te leggen. Ze kunnen echt allemaal!

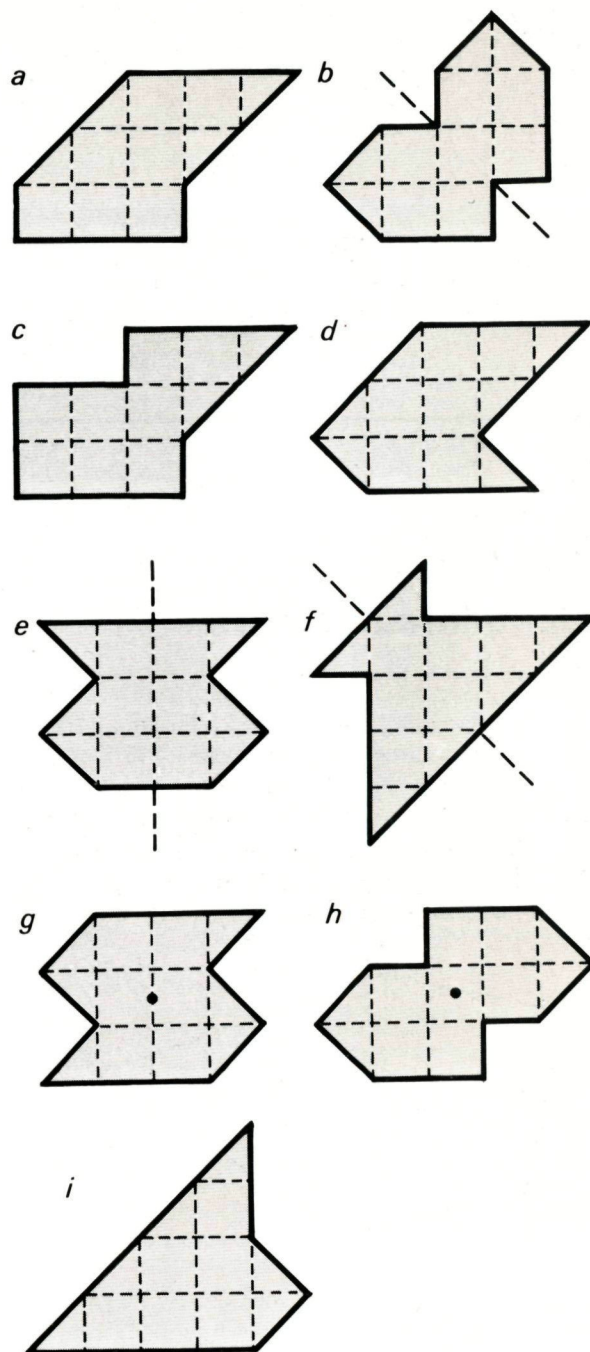


Fig. 2.

Afspraken

Als we hier spreken over het zoeken van 'veelhoeken', dan willen we de volgende regels laten gelden:

- de stukjes worden alle vijf gebruikt;
- de stukje overlappen elkaar niet;
- de stukjes vormen één samenhangende figuur, zonder gaten;
- de grens tussen twee rakende stukjes is minstens een lijnstuk;
- van alle stukjes liggen de hoekpunten op roosterpunten van het in fig. 1 getekende achtergrondrooster;
- stukjes mogen op hun kop liggen (maar je schiet daar weinig mee op).

In fig. 3 zie je voorbeelden van figuren die *niet* aan deze regels voldoen.

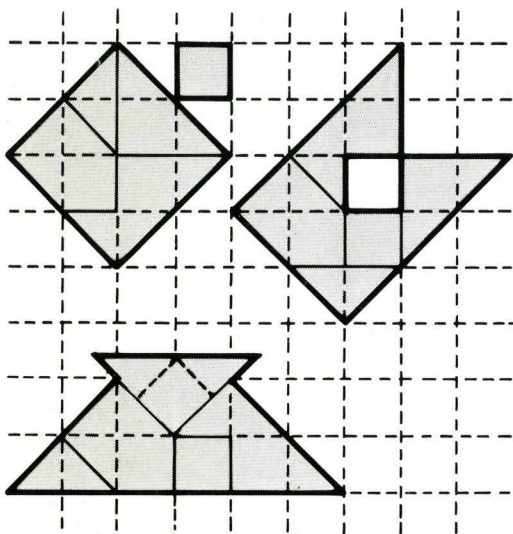


Fig. 3. Drie voorbeelden van figuren die we buiten beschouwing willen laten.

Vraag 2 Zoek *spiegelsymmetrische* veelhoeken. (Zoals in fig. 2b, 2e en 2f.)

Voor noeste volhouders zijn er zeker dertig verschillende te vinden. Al zul je dat na één uurtje proberen vast nog niet geloven!

Vraag 3 Zoek *puntsymmetrische* veelhoeken. (Zoals in fig. 2g en 2h.)

Waarschijnlijk zijn er zeventien verschillende te vinden.

Vraag 4 Zoek een veelhoek met *minimale omtrek*.

Rekenen we de roosterafstand in het achtergrondrooster als 1, dan is elke omtrek te schrijven als $a \cdot 1 + b \cdot \sqrt{2}$. Het vierkant heeft zo een omtrek van 12, maar het kan nog iets korter! Dit zal waarschijnlijk niet zo makkelijk te vinden zijn. Wat meer mogelijkheden geeft een omtrek van $10 \cdot 1 + 2 \cdot \sqrt{2} \approx 12,8$ of van $2 \cdot 1 + 8 \cdot \sqrt{2} \approx 13,3$.

Vraag 5 Zoek een veelhoek met *maximale omtrek*.

Vraag 6 Zoek veelhoeken met zo *min mogelijk hoekpunten*.

Drie hoekpunten (een driehoek dus) lijkt onmogelijk. Vier hoekpunten komen alleen voor bij het vierkant. Een vijfhoek zie je in fig. 21, maar er bestaan nog zeker drie andere.

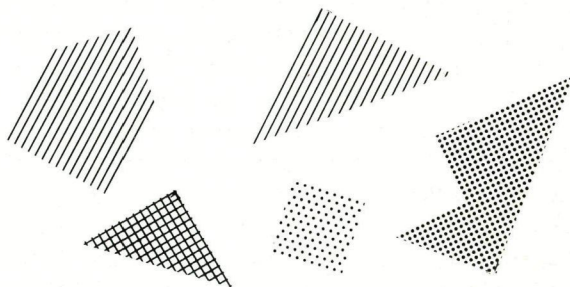
En er zijn zeker twintig verschillende zeshoeken. (Spiegelbeeld-oplossingen zijn hier dan niet als verschillend beschouwd.)

Vraag 7 Zoek een veelhoek met zo *veel mogelijk hoekpunten*.

Vraag 8 Zoek *convexe* veelhoeken.

Dit zijn veelhoeken zónder inspringende hoeken. Behalve het vierkant zijn er nog drie andere.

Noot Een mooie uitvoering in plastic van dit puzzeltje is te koop in de speelgoedwinkel. Het is een produkt van 'MB Spiele' en het heet daar UNICO.



°Platlanders

De brief aan Prof. Stein

Via de familie Nix ontving onze Platlander een vriendelijk briefje van Professor Stein, waarin deze met geen enkel woord liet blijken, dat diens optreden tijdens zijn lezing hem bevreemd had. Integendeel, de professor informeerde belangstellend naar de argumenten, die onze Platlander naar voren zou kunnen brengen om aan te tonen dat het heelal gekromd zou zijn. Over de bewering van de Platlander, dat het heelal, waar hij vandaan kwam, vlak was, zweeg de professor. Na enig wikken en wegen schreef onze vriend de volgende brief aan de voorkant van zijn huis¹.

Zeer geachte Professor Stein,

Hartelijk dank voor Uw brief, waaruit Uw waardering voor mijn nogal revolutionaire ideeën spreekt. Het is jammer, dat ik U na Uw lezing niet heb opgezocht, om rustig over de stof, die U op zo interessante wijze uiteenzette, van gedachten te wisselen. Over de argumenten, die ik toen naar voren zou hebben kunnen brengen, wil ik U nu niet schrijven. Wel echter over een ontdekking, die ik onlangs deed, toen ik een begin maakte aan een groots opgezet onderzoek naar de kromming van ons heelal.

Mijn redenering was als volgt: Als het heelal gekromd is, zoals het lijnland van een cirkelbewoner (dit was immers het voorbeeld, dat U in Uw lezing gaf), dan zou ons heelal ook niet oneindig groot zijn. Wij zouden dit na kunnen gaan door van een bepaald punt uit bakens uit te zetten, op zulke afstanden van elkaar, dat vanuit elk baken alle omringende bakens duidelijk te zien waren. Bij een gekromd heelal, zoals U dat beschreef, zouden we hier niet oneindig lang mee door kunnen gaan: we zouden ten slotte bij een gebied komen, waar al bakens gezet waren. Ik ben aan de uitvoering van dit plan begonnen. Met behulp van drie zeer lange, niet rekbare, even grote koorden heb ik een gelijkzijdige driehoek gemaakt. Bij de hoekpunten stak ik puntbakens in de grond. Daarna heb ik met behulp van dezelfde koorden nog vijf gelijkzijdige driehoeken geconstrueerd zo, dat ze alle zes één punt

gemeenschappelijk hadden (fig. 1). Ik verwachtte, dat de eerste en de laatste driehoek op een kleine meetfout na nog een tweede gemeenschappelijke hoekpunt zouden hebben. Deze hoekpunten vielen echter helemaal niet samen. Dit verbaasde mij zeer en ik dacht ergens een grote fout gemaakt te hebben.

Ik heb toen alles nog een keer opnieuw gedaan en tot mijn verrassing kwam hetzelfde verschil weer tevoorschijn. Ik kwam toen op het idee de hoeken van alle gelijkzijdige driehoeken na te meten. Wie schetst mijn verbazing toen ik ontdekte, dat niet alleen alle top-hoeken te groot waren ($61^{\circ}34'$), maar dat ook alle basishoeken $1^{\circ}34'$ te groot waren. Hoe ik deze afwijking van de stellingen der meetkunde moet verklaren is mij nog niet duidelijk, maar ik heb een sterk vermoeden, dat ze in verband staan met de kromming van het heelal. U zou mij een groot plezier kunnen doen met mij Uw visie hierop te geven.

Met vriendelijke groet, Hoogachtend: P. L. Atlander.

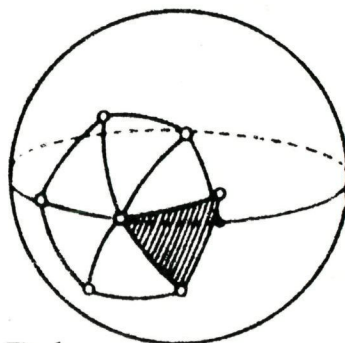


Fig. 1.

1. Het is hier wellicht de beste plaats om iets over het schrift en de PTT van 'Biljartballand' te vertellen. Een brief wordt geschreven op een lijn. De letters zijn combinaties van langere en kortere streepjes en puntjes. Zoiets als onze morse-tekens. Sinds men op Biljartballand ontdekt had, dat tegenvoeters elkaar kunnen zien, maakte men daar bij het overbrengen van berichten dankbaar gebruik van. Als men echter een bericht aan een niet-tegenvoeter wilde sturen gebruikte men daarvoor andere middelen.

Wat professor Stein antwoordde zullen we verderop zien, maar laat ons nu eens kijken naar de merkwaardige uitkomst van de opmetingen van onze platlander. Waarom hadden zijn gelijkzijdige driehoeken geen hoeken van 60° ?

Op een boloppervlak is de som van de hoeken van een driehoek altijd groter dan 180° .

Hoeveel groter, dat hangt af van de lengte der zijden. In fig. 2 is een gelijkzijdige boldriehoek getekend met drie hoeken van 90° ! Je kunt je waarschijnlijk gemakkelijk zo'n driehoek op de globe voorstellen.

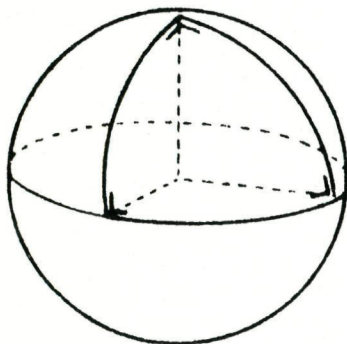


Fig. 2.

Adieu platlander

Onze platlander wist, dat het ongeveer drie dagen zou duren voor zijn bericht bij de familie Nix aankwam. De lichtsnelheid in Biljartballand is nl. veel kleiner dan bij ons, hoewel ze toch nog vele malen groter is dan de grootste snelheid, waarmee men zich in dat land kan verplaatsen.

Hij wachtte dus rustig het antwoord af. Na de tiende dag werd hij ongeduldig en schreef het volgende korte berichtje: *Zeer geachte Dr. Nix, heeft U mijn brief al ontvangen en doorgegeven? Dank voor uw goede zorgen: P. L. Atlander.*

Zes dagen later kwam het antwoord: *Waarde P. L. Atlander, wij moeten u eerlijk bekennen dat wij aanvankelijk uw bericht niet door durfden geven aan Prof. Stein. Het kwam ons voor, dat uw wiskundige vorming nogal wat hiaten vertoonde. Wat u schreef over die gelijkzijdige driehoeken is nl. volkomen normaal. Wie slechts één jaar wiskunde gestudeerd heeft, kan de*

uitkomst die u zo vreemd vindt, verklaren. Toevallig bezocht Prof. Stein ons dezer dagen en we brachten het gesprek op u en uw bericht. Hoewel ook hij uw verwondering merkwaardig vond, gelooft hij toch dat er iets meer achter zit en hij wil graag eens met u persoonlijk daarover van gedachten wisselen. Wanneer komt u? U kunt bij ons logeren. Met vriendelijke groet: Dr. Nix.

Professor Stein deed zelf open en bracht zijn bezoekers naar zijn studeerkamer. Na een gezellig babbeltje over van alles en nog wat verontschuldigde Dr. Nix zich: hij moest die avond naar een vergadering. Onze platlander was daar blij om. Nu kon hij vrijuit spreken.

ST. Ik ben blij dat u zich de moeite van die lange reis getroost hebt om met mij over uw merkwaardige wiskundige opvattingen te spreken. Ik moet u vooraf zeggen dat ik werkelijk niets van uw verwondering over de door u geconstrueerde gelijkzijdige driehoeken begrip en ik zie ook niet in, dat dit iets te maken heeft met mijn hypothese, dat ons heelal wel eens gekromd zou kunnen zijn als een cirkel.

PL. Professor, laat ik beginnen met enige meetkundige stellingen te formuleren, waarvan ik vermoed, dat ze u vreemd voorkomen: Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde, zijn verwisselende binnenhoeken gelijk.

ST. Mag ik u nu onderbreken: wat verstaat u onder evenwijdige lijnen?

PL. Twee rechten noem ik evenwijdig, als ze elkaar niet snijden. Ze hebben dan bovendien de eigenschap, dat ze van elke rechte, die loodrecht op beide staat een lijnstuk van constante lengte afsnijden.

ST. Maar het moet u toch bekend zijn, dat in onze wereld *elk* tweetal rechten p en q elkaar snijdt, zelfs in twee punten. Bovendien is er slechts één rechte mogelijk, die loodrecht op beide staat. Wat u evenwijdige lijnen noemt bestaat dus niet in onze wereld. Het schijnt mij toe, dat u over benaderingen en speciale gevallen spreekt alsof ze exact en algemeen zijn. Men

kan nl. dicht bij AB een rechte CD trekken, die bij benadering loodrecht staat zowel op p als q . Maar het lijnstuk CD is korter dan AB en bij C en D zijn de hoeken niet recht (fig. 3).

Wat die verwisselende binnenhoeken betreft: alleen in het geval van fig. 4, waarin de snijlijn s door het midden van M van AB gaat, zijn deze gelijk. Maar dat is een speciaal geval.

En nu wilt u een systeem opbouwen, dat deze niet exacte en speciale gevallen tot exacte en algemene regels maakt? Ik ben benieuwd welke consequenties dat met zich voert.

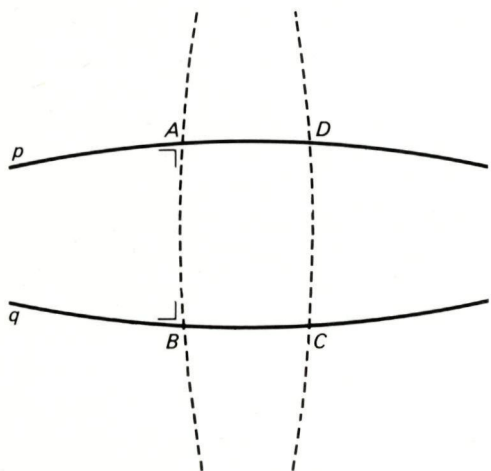


Fig. 3.

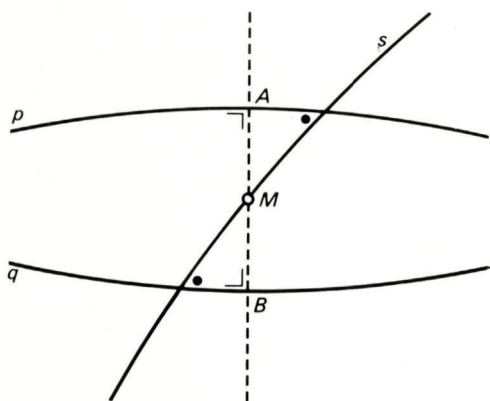


Fig. 4.

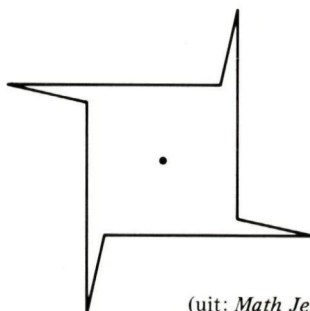
Tot zover het gesprek tussen onze platlander en Prof. Stein. Gelukkig bracht P. L. Atlander niet zijn herkomst uit een ander heelal (waarin hijzelf vast geloofde) ter sprake, want dat zou waarschijnlijk de sfeer van het gesprek bedorven hebben. Wel beweerde hij in staat te zijn uit zijn stellingen: *als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn, dan zijn twee verwisselende binnenhoeken gelijk*, te bewijzen:

1. in een driehoek is de som der hoeken 180° ,
2. in een gelijkzijdige driehoek is elke hoek 60° ,
3. men kan zes gelijkzijdige driehoeken zo om een punt A leggen, dat ze alle A als top hebben en elk der driehoeken grenst aan twee der andere. Er zijn dan dus geen openingen of 'overlappen'. Platlander vergeleek dat nog eens met de brief die hij aan Prof. Stein gestuurd had.

Prof. Stein wilde deze conclusies wel onderschrijven als benaderingen in de Biljartballandmeetkunde. Het interesseerde hem echter het meeste, of Platlander in staat zou zijn de conclusies uit zijn bovengenoemde en enkele andere stellingen van wat hij noemde 'vlaklandmeetkunde' als algemeen geldig te kunnen bewijzen.

Vanzelfsprekend kwamen beide wiskundigen deze avond met hun besprekingen niet klaar. Toen ze diep in de nacht afscheid namen waren allerlei belangrijke zaken nog niet ter sprake gekomen, bijv. het voor onze Platlander eigenaardige feit, dat er in Biljartballand geen constante verhouding bestaat tussen de omtrek en de straal van een cirkel en vooral niet, wat dit alles te maken heeft met het al of niet gekromd zijn van Biljartballand.

bij: Schuilmuurkamers



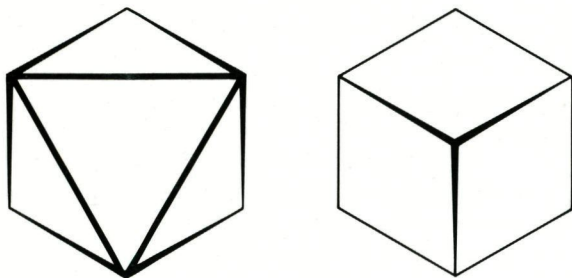
(uit: Math Jeunes)



Nieuwe opgaven (oplossingen inzenden vóór 1 mei 1983).

PO 55.

Een regelmatig achthoek en een kubus geven beide bij zekere loodrechte parallelprojectie dezelfde regelmatige zeshoek als schaduwfiguur. Hoe verhouden zich hun inhoud?



PO 56.

Iemand wil tien vierkanten van gelijke afmetingen in een vlak tekenen zonder dat ze elkaar overlappen, maar zo, dat één van die vierkanten de negen andere raakt. Bewijs dat dit onmogelijk is.

(Met negen vierkanten lukt het natuurlijk wel; teken ze maar in een groot 3×3 -vierkant.)

PO 57.

Suzie Slim heeft een kwis gewonnen. Als beloning krijgt ze honderd genummerde pionnen die ze op de hoekpunten van een regelmatige honderdhoek moet plaatsen. Ze verdient dan voor elk van de honderd zijden een bedrag in centen dat gelijk is aan het produkt van de nummers van de twee pionnen die op de aangrenzende hoekpunten staan.

Zou ze de pionnen gewoon op volgorde zetten, dan zou ze dus $1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100 + 100.1$ centen krijgen. Maar ze hoeft ze niet in deze volgorde te plaatsen. Hoe moet Suzie de pionnen zetten om zo veel mogelijk geld in de wacht te spelen?

Oplossingen en prijswinnaars van de opgaven PO 40 - 42.

PO 40.

Bij elk natuurlijk getal n hoort één cijfer, zeg $k(n)$, dat als kleinste cijfer voorkomt (soms meervoudig) in de gewone tientallige schrijfwijze van n . Bepaal

$$k(1\,000\,000\,000) + k(1\,000\,000\,001) + \dots + k(9\,999\,999\,999).$$

Oplossing van *Henk Kreuze* (5-vwo, Menso Alting College, Hoogeveen):

Onder a_i versta ik het aantal getallen n waarvoor geldt dat $k(n) = i$ ($i = 0, 1, \dots, 9$). De gevraagde som is dus gelijk aan $9 \cdot a_9 + 8 \cdot a_8 + \dots + 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_0$.

De zin: 'het aantal getallen bestaande uit' kort ik af tot 'A'. $a_9 = \text{'A' negens} = 1$

$$a_8 = (\text{'A' achten en/of negens}) - (\text{'A' negens}) = 2^{10} - 1^{10}$$

$$a_7 = (\text{'A' zevens, achten en/of negens}) - (\text{'A' achten en/of negens}) = 3^{10} - 2^{10}$$

Enzovoorts:

$$a_6 = 4^{10} - 3^{10}, a_5 = 5^{10} - 4^{10}, \dots, a_1 = 9^{10} - 8^{10}.$$

De gevraagde som is dus (na vereenvoudiging)

$$1^{10} + 2^{10} + \dots + 9^{10} = 4\,914\,341\,925.$$

Er waren 20 inzendingen, waarvan 19 correct. Prijswinnaars: *Bram Bouwens* (6-ath., Philip van Horne S.G., Weert) en *Rutger Noot* (5-g, Gymn. Haganum, Den Haag).

PO 41.

In het vlak is gegeven een cirkel c met middelpunt $(\sqrt{1981}, \sqrt{1982})$.

Bewijs dat op c ten hoogste één punt (x, y) kan liggen waarvoor x en y gehele getallen zijn.

Oplossing van *Harry Oosterveen* (6-vwo, Menso Alting College, Hoogeveen):

Stel dat (a, b) en (p, q) punten met gehele coördinaten zijn die beide op de cirkel liggen. Dan geldt

$$(a - \sqrt{1981})^2 + (b - \sqrt{1982})^2 = (p - \sqrt{1981})^2 +$$

$$+ (q - \sqrt{1982})^2, \text{ dus na uitwerken blijkt dat}$$

$(2p - 2a)\sqrt{1981} - (2q - 2b)\sqrt{1982}$ een geheel getal moet zijn. Het kwadraat is dus ook geheel, en daarom moet ook het getal $2(2p - 2a)(2q - 2b)\sqrt{1981}\sqrt{1982}$ geheel zijn. Maar het produkt van de twee wortels is *irrationaal*, dus de enige mogelijkheid is dat $(2p - 2a) = 0$ of $(2q - 2b) = 0$.

Uit het nul-zijn van de een volgt echter onmiddellijk met het bovenstaande dat de ander ook nul is, dus moet gelden $p = a$ en $q = b$. De twee punten zijn dus gelijk.

Harry merkte nog op dat je op dezelfde manier kunt aantonen dat op zo'n cirkel ten hoogste één punt kan liggen met *rationale* coördinaten.

Er waren 16 inzendingen, waarvan 15 correct. Prijswinnaars: *Victor Allis* (5-g, H. Wesselinkcollege, Aalsmeer) en *Bart de Smit* (4, Barlaeusgymn., Amsterdam).

bij: De Pentapuzzel

Vraag 4: De minimale omtrek is $6 \cdot 1 + 4 \cdot \sqrt{2} \approx 11,7$.

Vraag 5: De maximale omtrek is $8 \cdot 1 + 10 \cdot \sqrt{2} \approx 22,1$.

Vraag 7: Het maximale aantal hoekpunten is 18.

PO 42.

Op hoeveel manieren kun je één witte en één zwarte schijf op een (leeg) dambord plaatsen zo, dat wit de zwarte schijf kan slaan? Een op de laatste lijn geplaatste witte schijf wordt beschouwd als dam.

Oplossing van *Wiebe Kees Goodijk* (4-vwo, Chr. Gymnasium Leeuwarden):

Om te beginnen bekijk ik het aantal mogelijkheden als de witte schijf niet op de laatste lijn is geplaatst. De zwarte schijf kan alleen geslagen worden als hij niet aan de rand staat, dus hij moet in het binnenste vierkant van 8×8 velden staan. Daar zijn 32 plaatsen voor de zwarte schijf beschikbaar. Bij

elk van deze standen kan de witte schijf er op vier manieren omheen geplaatst worden, maar in acht van deze gevallen staat wit dan op de laatste lijn. Als wit geen dam is, zijn er dus $4 \times 32 - 8 = 120$ mogelijkheden.

Met de witte schijf als dam in de hoek bestrijkt hij acht velden waar zwart geslagen kan worden; met wit als dam niet in de hoek zijn er telkens zeven velden waar zwart aangevallen wordt. In totaal geeft dit $4 \times 7 + 8 = 36$ mogelijkheden. Alles bij elkaar komen we dus op $120 + 36 = 156$ mogelijkheden.

Er waren 22 inzendingen, waarvan 19 correct. Prijswinnaars: *Herman v.d. Molen* (5-vwo, Fivelcollege, Delfzijl) en *Maurits de Graaf* (4-vwo, Jacobscollege, Enschede).

° Alles wat u zegt kan tegen u gebruikt worden!

Deze zin bevat 1 keer het cijfer 0, 2 keer het cijfer 1, 3 keer het cijfer 2, en 2 keer het cijfer 3.

Kijk of je het eens kunt zijn met de omliggende bewering hierboven. Zo ja, dan mag je proberen om op dezelfde manier de volgende zin kloppend te maken. Vul cijfers in op de puntjes.

Deze zin bevat . . . keer het cijfer 0, . . . keer het cijfer 1, . . . keer het cijfer 2, . . . keer het cijfer 3, . . . keer het cijfer 4, . . . keer het cijfer 5, . . . keer het cijfer 6, . . . keer het cijfer 7, . . . keer het cijfer 8, en . . . keer het cijfer 9.

We weten dat er zeker één goede oplossing is. Als je nog andere vindt, horen we dat graag.

Het aardige van deze verhaaltjes is, dat elke bewering invloed heeft op de volgende, terwijl de volgende al vaststaande elementen bevat die invloed uitoefenen op de voorafgaande.

Probeer ook de varianten waarbij de zin niet doorloopt tot 3 of tot 9, maar tot een daar tussenliggend hoogste cijfer. Volgens ons kom je dan één onoplosbaar geval tegen.

° Een kwadratendriehoek

$$\begin{array}{rcl} 3^2 + 4^2 & = & 5^2 \\ 10^2 + 11^2 + 12^2 & = & 13^2 + 14^2 \\ 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 & = & 25^2 + 26^2 + 27^2 \\ 36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 & = & 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2 \\ 55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 & = & 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2 \\ . & = & . \\ . & = & . \end{array}$$

De bovenstaande gelijkheden lijken haast té mooi om allemaal wáár te kunnen zijn: elke regel bevat juist de kwadraten van opvolgende getallen!

Laat je rekendoosje de zaak maar controleren.

Als het blijkt te kloppen, kun je je afvragen of er meer van zulke gelijkheden te vinden zijn. Kan het

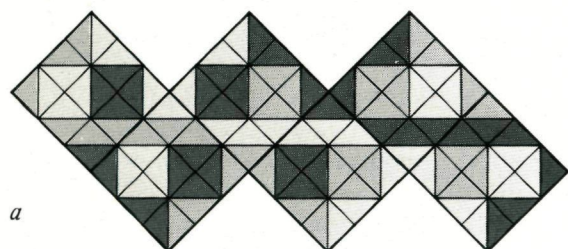
ook met zeven-plus-zes opvolgende kwadraten? En met acht-plus-zeven?

Het antwoord hierop kun je zelf wel vinden door te zoeken naar regelmaat in de gegeven reeks. Kijk bijvoorbeeld naar de begintermen van elke regel, of naar de middentermen.

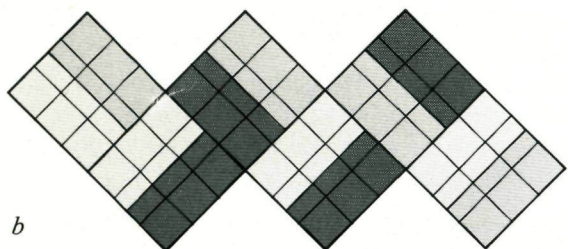
Correspondentie

Op deze plaats willen we een aantal van de reacties op artikelen uit voorgaande nummers signaleren. Bij enkele artikelen geven we ook nog wat extra toelichting.

In het laatste nummer van de vorige jaargang werd gevraagd (blz. 102) naar *driekleurige* patronen voor een Superkubus. Je ziet hier de oplossingen van Menke Ubbens (a) en van Oskar van Deventer (b).



a

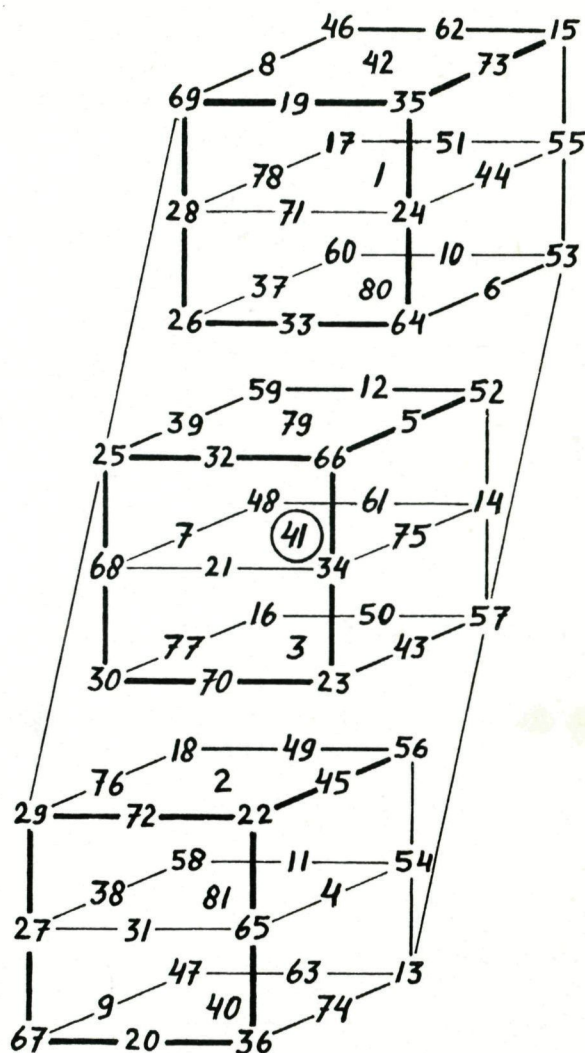


b

Datzelfde nummer maakte met bewondering melding van de 'Toverkubus van Krijgsman' (*Pyth.* 21-5, blz. 109). Maar Menke Ubbens heeft hem zo mogelijk nog overtroffen. Menke stuurde niet alleen computerprogramma's, mét resultaten, voor alle mogelijke $n \times n \times n$ toverkubussen (n oneven), maar ook het opbouwrecept voor *oneven VIER-dimensionale* toverkubussen.

Hierboven zie je het resultaat van een poging om er een te tekenen.

De lezer mag proberen na te gaan dat er in de aangegeven 4-dimensionale kubus maar liefst *honderdvierenveertig* drietallen voorkomen op een rechte lijn, met als som $\frac{1}{2} \times (1 + 81) \times 3 = 123!$



N.B. Bij Menke doen steeds alle diagonalen *door het centrum* mee; maar niet — zoals wel bij Krijgsman — de diagonalen in vlakken die niet door het centrum gaan.

Allemaatsbanen (Pyth. 22–1, blz. 7)

Een uitgebreide reactie hierop kregen we van de leraar wiskunde J. H. de Geus uit Den Haag, die goed thuis blijkt te zijn in de ingewikkelde wiskundige theorie die voor het oplossen van dit probleem nodig is. We geven er hier alleen wat resultaten uit (in hectometers), voor degenen die zelf aan het puzzelen geweest zijn. (Alleen de gróóteste ronde banen die bij een zeker aantal startlijnen aan de voorwaarde voldoen.)

3 lijnen: $7 = 1 + 2 + 4$

4 lijnen: $13 = 1 + 2 + 6 + 4 = 1 + 3 + 2 + 7$

5 lijnen: $21 = 1 + 3 + 10 + 2 + 5$

6 lijnen: $31 = 1 + 2 + 5 + 4 + 6 + 13$
 $= 1 + 2 + 7 + 4 + 12 + 5$
 $= 1 + 3 + 2 + 7 + 8 + 10$
 $= 1 + 3 + 6 + 2 + 5 + 14$
 $= 1 + 7 + 3 + 2 + 4 + 14$

7 lijnen: geen grotere banen mogelijk dan bij 6

8 lijnen: $57 = (6 \text{ oplossingen})$

9 lijnen: $73 = (4 \text{ oplossingen})$

10 lijnen: $91 = (6 \text{ oplossingen})$

11 lijnen: geen grotere banen mogelijk dan bij 10

12 lijnen: $133 = (18 \text{ oplossingen})$.

.....
Wie er meer over wil weten kan schrijven aan de redactie. Hetzelfde geldt voor het 'Verschilwebben'-probleem, ook hierover hebben we, mede van de heer de Geus, uitvoerige documentatie.

Verschilwebben (Pyth. 22–1, blz. 10)

Gezien het aantal reacties blijkt er heel wat aan deze opgave gepuzzeld en gerekend.

Het gevraagde maximum-aantal aftrekronen met startgetallen onder de 100 bleek 13 te zijn. Met als start:

(0, 7, 20, 44).

Even lange series geven ook:

(0, 14, 40, 88) (0, 13, 37, 81)

(0, 24, 37, 44) (0, 44, 68, 81)

(0, 48, 74, 88)

of viertallen die hier een constante van afwijken.

Van de inzenders kwamen *Johan Heemskerk* (Noordwijkerhout) en *Rudie Flentge* (mavo!, Roermond) tot 7 aftrekronen. *Roelof van der Linde* (Ede) bracht het tot 9, en *Karel Thönissen** (Aerd) tot 10.

Het maximum van 13 ronden werd gehaald door *Cor in 't Veld* uit Gouderak, en door een groep leerlingen van de Hugo-de-Groot-Mavo (!) uit IJmuiden. De meest indrukwekkende reactie kwam echter van *Ronald Beekelaar*, 5-vwo St.-Vituscollege Bussum die, naast twee maximale oplossingen, ook nog een complete afleiding gaf van het algemene recept voor laagste-starten-met-langste-series:

Alle recordlange series blijken af te leiden uit de getallenrij

0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, ...
(waarin elke term de som is van z'n drie voorgangers). Gebruik opvolgende viertallen uit deze rij als startkwartet voor verschilwebben. Dan kom je hierin alle recordstarten tegen, eventueel na verlaging naar een minimum van 0 en na wegdeling van factoren 2.

Doe dit bijvoorbeeld met het cursieve viertal.

De webben blijken overigens nog meer verrassingen te kunnen opleveren:

- Begin eens niet met vier gehele getallen, maar laat ook *breuken* toe. Start bijv. met $(0, \frac{1}{3}, \frac{4}{7}, 1)$.
- Nog gekker: begin met $(0, 1, \sqrt{3}, \pi)$. Het meeste werk is nu het uitzoeken van welk getal het grootst is.
- Het is zo goed als zeker dat je ook met gebroken en met irrationale startgetallen toch steeds weer op de vier nullen uitkomt. Nader onderzoek leert namelijk dat er maar één uitzonderingsgeval is (met wat kleine variaties) van een start waarbij de nullen op den duur wel benaderd, maar niet bereikt worden.
- Ten slotte: ga eens na wat er gebeurt als je in plaats van aftrekken gaat *delen*! Steeds de grootste gedeelde door de kleinste. (Consequent andersom mag ook.) Begin eerst maar met het viertal (1, 2, 4, 8). En doe het als je nieuwsgierig geworden bent, ook nog met (1, 2, 3, 4).