



Verschijnt vier keer per jaar

Wiskundetijdschrift voor jongeren

Pythagoras



1 Jaargang 23 september 1983

Wolters-Noordhoff

Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Redactie

Jan van de Craats, Luc Kuijk, Klaas Lakeman,
Henk Mulder, Hessel Pot, Hans de Rijk, Leo Wiegerink

Secretariaat

Leo Wiegerink, Egelantiersstraat 107^{II}
1015 PZ Amsterdam.
*Aan dit adres kunnen reacties op en bijdragen voor
Pythagoras worden gezonden.*

Pythagoras verschijnt 4 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via
één der docenten, f 9,20 per jaargang.
Voor anderen f 13,95.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-
Noordhoff bv, Afdeling Periodieken,
Postbus 58, 9700 MB Groningen.

Voor België bij J. B. Wolters - Leuven, Blijde
Inkomststraat 50, Leuven; postchecknummer
000-000 8081-30.

Abonnees wordt dringend verzocht met betalen te
wachten tot hun een acceptgirokaart wordt
gezonden.

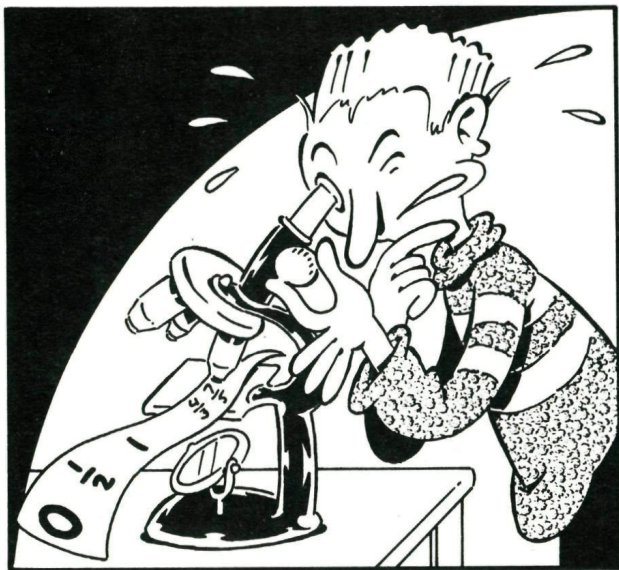
Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met
een minimum van 5) wordt één gratis abonnement
verstrekkt. Maximaal 10 gratis abonnementen per
school.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud
zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de
redactie is niet toegestaan.

Inhoud

Per microscoop naar $\sqrt{2}$	3
<i>Leo Wiegerink</i>	
Het waggelwiel	6
<i>Hans de Rijk / Klaas Lakeman</i>	
Hogere machten	7
<i>Hessel Pot</i>	
Met micro meer mens?	8
<i>Luc Kuijk</i>	
Mooie blokken	9
<i>Hessel Pot</i>	
Spelen met spiegels I	10
<i>Ton Konings</i>	
Correspondentie	11
Meer zakgeld	12
<i>Jan van de Craats</i>	
Pythagoras Olympiade	13, 14
<i>Jan van de Craats</i>	
Keerkringen zoeken	16
<i>Hessel Pot / Leo Wiegerink</i>	

Bij de voorplaat Het lijkt onwaarschijnlijk, maar dit voorwerp kan rollen. Vanwege de beweging die het tijdens het rollen maakt, wordt het een waggelwiel genoemd. Vooral in los zand kun je er eenvoudig achter komen wat voor spoor zo'n wiel maakt. Meer over het waggelwiel is te vinden op pagina 6.
(Met dank aan de sectie handvaardigheid van D'Witte Leli)



Per microscoop naar $\sqrt{2}$

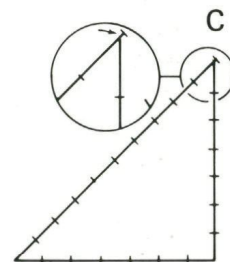
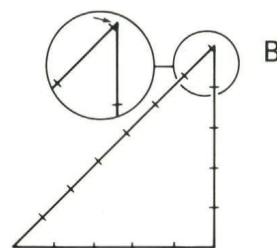
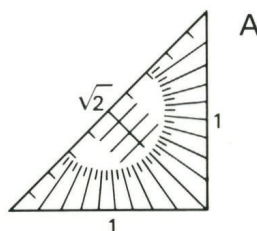
Mijn eerste kennismaking met breuken zal ik niet snel vergeten. Daarvoor meende ik alle getallen al te kennen: 1, 2, 3, 4, ... enz. Dat nu taartpunten en pannenkoeken aanleiding gaven tot een heel nieuw soort getallen, zoals $\frac{2}{3}$ en $\frac{3}{5}$, vond ik zeer verrassend. Maar daarna dacht ik opnieuw: "Nu ken ik echt alle getallen die er zijn".

De negatieve getallen die ik later leerde, veranderden daar niet veel aan. Dat waren toch eigenlijk gewone getallen met een 'minnetje' ervoor. M'n overtuiging alle getallen te kennen werd pas weer omvergegooid door de 'wortels', vooral de niet-uitkomende, zoals $\sqrt{2}$. *Je schreef eigenlijk iets op dat niet bestond!* Dat vond ik heel spannend.

Bij je 'geodriehoek' kom je $\sqrt{2}$ tegen als de verhouding tussen de schuine zijde en een rechthoekszijde. In deze driehoek geldt ook de Stelling van Pythagoras: $1^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2$. Nu kende Pythagoras deze driehoek ook, maar ... hij kende geen wortels. De enige getallen die hij kende waren 1, 2, 3, 4, ... enz.

Wel rekende hij met verhoudingen van deze getallen. Hij wist bijv. dat de schuine zijde en de rechthoekszijde van de geodriehoek ongeveer de verhouding 7 : 5 hadden. Hij wist waarschijnlijk ook dat 10 : 7 een betere verhouding was. Wij zouden zeggen: " $\sqrt{2}$ ligt in tussen $\frac{7}{5}$ en $\frac{10}{7}$ ".

Pythagoras hoopte nog eens *precies* de juiste verhouding te vinden: in hoeveel kleine stukjes moest je de rechthoekszijde verdelen, zodat je een geheel aantal van deze stukjes ook *precies* op de schuine zijde kon afpassen. Zonder iets over te houden of te kort te komen! We zoeken mee!

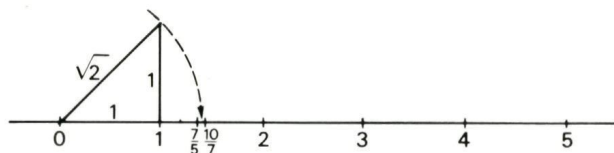


A De geodriehoek, $\sqrt{2}$: lengte of verhouding?

B Het 5-de deel van de rechthoekszijde past bijna 7 keer op de schuine zijde. Je komt iets tekort!

C Het 7-de deel van de rechthoekszijde past haast 10 keer op de schuine zijde. Je houdt iets over!

Eerst leggen we een rechthoekszijde langs de getallenlijn. Die past dus precies tussen 0 en 1. Wanneer we de schuine zijde nu omcirkelen, komen we uit in de grote onbekende van dit verhaal: $\sqrt{2}$.



Aan weerszijden liggen de benaderingen $\frac{7}{5}$ en $\frac{10}{7}$. En nu maar proberen dichterbij te komen. Ik onderzocht met de computer breuken met steeds grotere noemers en vond:

$$\frac{7}{5}, \frac{10}{7}, \frac{17}{12}, \frac{24}{17}, \frac{41}{29}, \frac{58}{41}, \frac{99}{70}, \frac{140}{99}, \frac{239}{169}, \frac{338}{239}, \dots$$

$$\frac{4756}{3363}, \dots$$

en toen liet de computer het afweten!

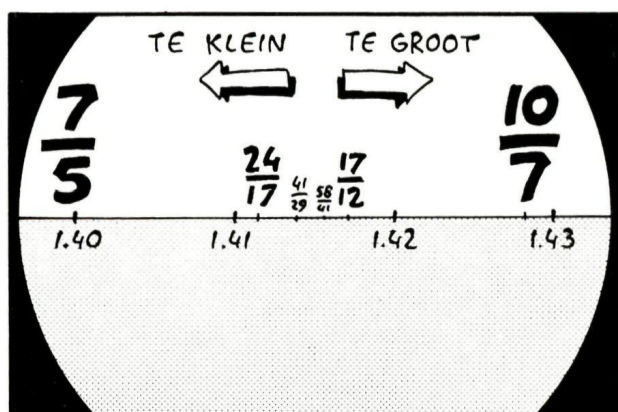
De laatste breuk is al heel goed, kijk maar hoe dicht zijn kwadraat bij 2 ligt:

$$\left(\frac{4756}{3363}\right)^2 = 2 - \frac{2}{11309769}$$

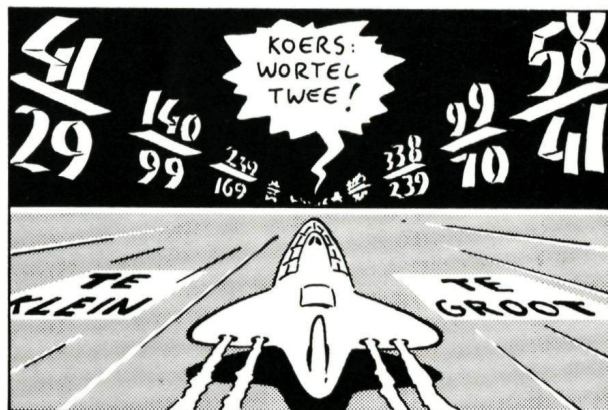
Een beetje te klein dus.

Het microscoopvliegtuig

We richten nu een microscoop op de getallenlijn en proberen $\sqrt{2}$ te ontdekken. Hieronder vind je een uitvergroting van de getallenlijn, waarop de eerste benaderingen van de rij goed zichtbaar zijn.



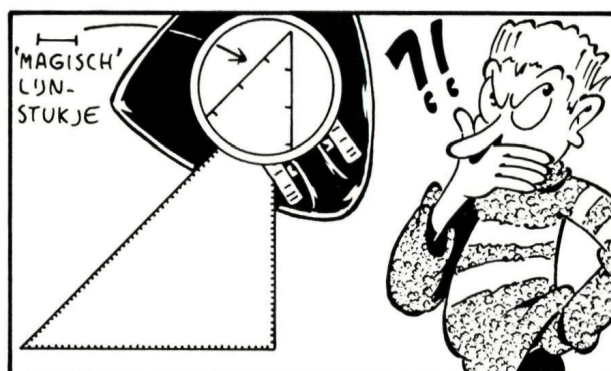
Steeds vergroten we verder uit. Zien we een breuk die iets te klein is dan sturen we wat bij naar rechts; bij een breuk die te groot is sturen we bij naar links. Loerend door de microscoop krijgen we het gevoel in een microscoopvliegtuig te zitten dat op $\sqrt{2}$ afvliegt. We zien steeds weer nieuwe breuken met alsmaar grotere tellers en noemers. Zouden we ooit een breuk vinden die precies $\sqrt{2}$ is?



Het magische lijnstukje

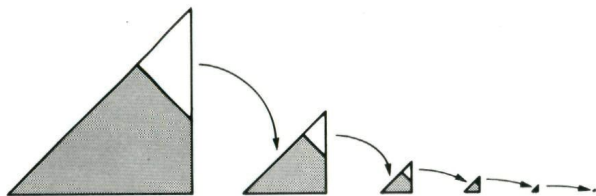
Laten we eens aannemen dat het proces eindigt bij een breuk $\frac{p}{q}$, die precies $\sqrt{2}$ is, dus: $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$; $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Dan eindigt daar de reis met het microscoopvliegtuig! In de meetkundetaal van Pythagoras zouden we moeten zeggen dat de schuine zijde en de rechthoekszijde van de geodriehoek *precies* de verhouding $p : q$ hebben. En dit betekent weer dat er een 'magisch lijnstukje' bestaat, dat *precies* p keer op de schuine zijde past en q keer op een rechthoekszijde.



Voorlopig is dat kleine lijnstukje denkbeeldig. We weten immers niet of p en q bestaan. We doen nu even net alsof het lijnstukje bestaat, en halen een trucje uit: van onze geodriehoek knippen we op een speciale manier een klein driehoekje af met dezelfde vorm. Dat kleine driehoekje is zo gekozen dat datzelfde magische lijnstukje ook precies op de zijden dáárvan een geheel aantal malen is af te passen. Hoe dat moet vertellen we aan het einde van dit verhaal.

Het aardige is nu dat je dit net zo vaak kunt herhalen als je wilt: van het kleine driehoekje kun je op dezelfde manier een nóg kleiner driehoekje afknippen, zodat nog steeds datzelfde magische lijnstuk een geheel aantal malen op de zijden daarvan is af te passen. En zo gaan we maar door.



Conclusie

Zie je al waartoe dit leidt?

Het magische lijnstuk past steeds weer een geheel aantal malen op de zijden van het nieuwe driehoekje. Maar . . . op het laatst is dat nieuwe driehoekje nog kleiner dan het lijnstukje zelf! Dat kan dus nooit! *Dat magische lijnstukje bestaat dus helemaal niet!* Dus $\sqrt{2}$ is niet als breuk te schrijven en het microscoopvliegtuig zou alsmaar door moeten blijven vliegen.

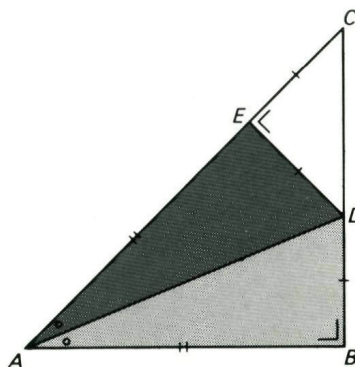
Ik weet niet of Pythagoras deze redenering ook kende. Wel staat vast dat hij tot dezelfde conclusie kwam. Hij had zijn manier om dat onder woorden te brengen: "Schuine zijde en rechthoekszijde hebben géén verhouding". Je zult zijn formulering begrijpen als je bedenkt dat een verhouding voor Pythagoras alléén een verhouding van natuurlijke getallen kon zijn.

Het Latijnse woord voor verhouding is *ratio*. Hiervan is het woord 'irrationaal getal' (= niet-rationaal getal) afgeleid: een getal, zoals $\sqrt{2}$, waar geen verhouding bij hoort in de betekenis van Pythagoras.

Overigens was Pythagoras zeer geschokt door zijn ontdekking. In zijn kijk op de wereld vormden natuurlijke getallen de grondslag van alle dingen. De ontdekking van lijnstukken zonder verhouding van natuurlijke getallen gooide die kijk omver. Tenminste, dat zou je denken. In werkelijkheid verbood Pythagoras z'n volgelingen om over het 'irrationale' te spreken! Eén volgeling heeft ooit tóch zijn mond opengedaan, waardoor we dit verhaal konden optekenen . . .

Een klein driehoekje afknippen

Geef de hoekpunten van de geodriehoek aan met A , B en C . Trek dan de lijn AD , de deellijn of bissectrice van hoek A . Trek dan DE loodrecht op de schuine zijde. Nu is CED het kleine driehoekje dat afgeknipt moet worden.



Het magische lijnstukje is nu ook een geheel aantal malen op de zijden van CED af te passen, want $AB = AE$, zodat het magisch lijnstukje op AE precies is af te passen. Het past ook een geheel aantal malen op AC , dus eveneens op het verschil EC , dat de rechthoekszijde van het kleine driehoekje vormt.

Verder geldt: $EC = ED = DB$, zodat het magisch lijnstukje ook precies een geheel aantal malen op DB is af te passen. En dus ook op de schuine zijde, DC , van het kleine driehoekje, want dat is het verschil tussen BC en BD .

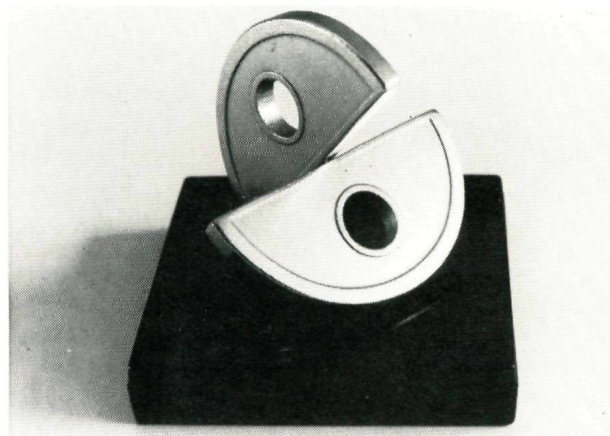
Het waggelwiel

Wanneer er in het voorwiel van je fiets een slag zit, hobbelt het een beetje. Indien je er dan een flink eind mee moet rijden is dat erg vervelend.

Wanneer je ooit eens in volle vaart tegen een stoep-rand bent gereden, was je voorwiel waarschijnlijk zo erg vervormd dat je er absoluut niet meer mee kon rijden. Zo'n grote vervorming is nauwelijks meer te verwijderen en in de meeste gevallen moet het voorwiel worden vervangen.



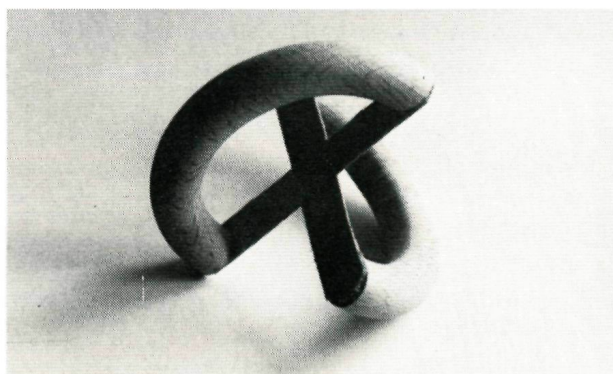
Je kunt echter een wiel nog drastischer vervormen door het langs een middellijn in twee gelijke helften te verdelen en deze loodrecht op elkaar te zetten. Op zich levert dat al een fraai kunstvoorwerp op en hoewel je nauwelijks meer van een wiel kunt spreken, wordt het een waggelwiel genoemd. Want hoe ongelooflijk het ook klinkt, het waggelwiel kan rollen. Wanneer je het een zetje geeft, of als je het langs een flauwe helling naar beneden laat gaan, zal het zich als een 'waggelende' eend voortbewegen. En het is nog eigenwijs ook. Indien je het te snel wilt laten gaan, maakt het een duikeling en staat stil.

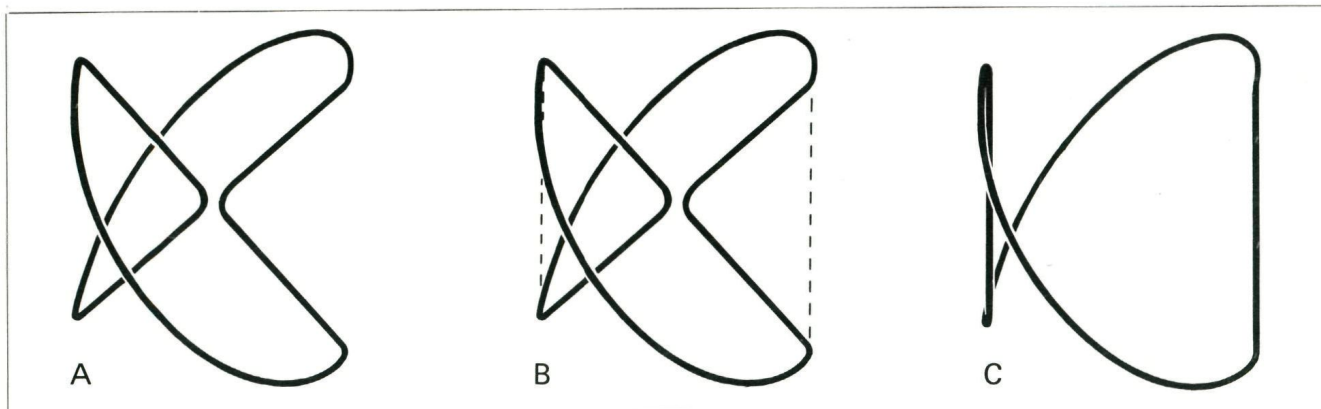


Zelf maken

Het is niet moeilijk zelf een waggelwiel te maken. Pak daartoe een stuk karton en trek daar met je passer een cirkel op. Vervolgens moet je die zo goed mogelijk uitknippen of -snijden. Daarna moet de cirkel langs een middellijn in twee stukken gesneden worden. Deze twee stukken moeten dan loodrecht op elkaar gezet worden. Je bent natuurlijk helemaal snel klaar wanneer je een bierviltje bij de hand hebt. Dit hoeft je alleen maar doormidden te snijden, al zal het niet meevallen die twee halve cirkels stevig loodrecht op elkaar te zetten.

Mijn eerste model maakte ik van gebogen koperdraad, dat was wel niet erg precies, maar het waggelde voortreffelijk. Een heel mooi waggelwiel kreeg ik, toen ik een houten ring (zoals je in borduurzaken kunt kopen) had doorgezaagd en als middellijn twee strookjes karton gebruikte.





En als je een groot waggelwiel wilt hebben, kun je een stuk spaanplaat nemen en daar twee halve cirkels uitzagen. Wanneer je dat eenmaal in elkaar gezet hebt, kun je de beide halve cirkels elk met een andere kleur verven, hetgeen tijdens het rollen nog een extra leuk effect geeft.

Ja, en als je dan zo'n waggelwiel hebt moet je de beweging ervan maar eens bestuderen. Je kunt bijvoorbeeld eens bekijken welk spoor het achterlaat en misschien kun je er zelfs achter komen wat voor beweging het middelpunt maakt. Verder kun je eens proberen uit te zoeken waar de maximale snelheid van afhangt en hoe groot die is.

Wanneer je een waggelwiel van koperdraad wilt maken, kun je dat doen zoals in A is aangegeven. Je kunt echter de draden naar het middelpunt weglaten en vervangen door draden die in B met een stippellijn zijn aangegeven. Het resultaat zie je in C, twee halve cirkelbogen die door twee evenwijdige lijnen met elkaar zijn verbonden. Je hebt dan wel een heel fraai waggelwiel verkregen, waarvan anderen zich waarschijnlijk nauwelijks zullen kunnen voorstellen dat het nog rolt ook.



Hogere machten

$$1 + 6 + 7 + 17 + 18 + 23 =$$

$$2 + 3 + 11 + 13 + 21 + 22$$

$$1^2 + 6^2 + 7^2 + 17^2 + 18^2 + 23^2 =$$

$$2^2 + 3^2 + 11^2 + 13^2 + 21^2 + 22^2$$

$$1^3 + 6^3 + 7^3 + 17^3 + 18^3 + 23^3 =$$

$$2^3 + 3^3 + 11^3 + 13^3 + 21^3 + 22^3$$

Dit is echt waar! Ga maar na.

Zal het ook gelden voor de vierde-machten? En voor de vijfde-machten? Met je rekenmachine zul je het antwoord snel te weten komen.

Met micro meer mens?

De chips veroveren onze samenleving . . .

Krantekoppen in deze sfeer zijn er al een tijdje, maar het komt nu ook echt in jullie omgeving: de goedkope 'computerspelletjes' zijn op school al een vertrouwd beeld geworden. Sommigen zijn niet los te branden van hun Space-invaders of Pac Man.

Veel ouderen hebben een afkeer van die kleine doosjes die zonder dat je ziet hoe, in een handomdraai allerlei lastige en vervelende berekeningen afwerken waar ze vroeger op school zo'n hekel aan hadden en die ze nu in het dagelijks leven nog wel tegenkomen.

Maar jullie zijn opgegroeid met knoppen en elektronica: de TV met afstandsbediening, recorders, digitale horloges met alle toeters en bellen die er vaak bij zitten. Jullie moeten misschien zelfs je vader of moeder uitleggen hoe ze het alarm op hun horloge moeten instellen.

Nu zijn er voor een bedrag van rond de f 300,— kleine computers te koop, zeg maar zakcomputers. Hiermee kun je niet alleen net als op je rekenmachine gewoon rekenen, maar ze kunnen ook een programma uitvoeren. Zo'n programma kun je zelf schrijven of gewoon kant en klaar kopen. Er zijn programma's te verkrijgen voor van alles en nog wat: de administratie van je

muziekcassettes, roosters en schema's voor de favoriete sport, het maken van een adressenbestand van je kennissen enz.

Waarom zou je er niet aan beginnen? Voor een paar honderd gulden heb je zo'n zakcomputer (bijv. van CASIO, SHARP of SINCLAIR) of compulor (computer + calculator) en je kunt aan de slag. Je hebt misschien een middag nodig om het ding plus handleiding te verkennen. Op sommige modellen zit een ruim aflees-venster, andere apparaten kun je op de TV aansluiten. Voor het bewaren van programma's kun je gewone cassettes gebruiken.

Wanneer je zelf programma's wilt schrijven, moet je de grondbeginselen van BASIC leren, de taal waarin je het apparaat je opdrachten verstrekt. Ben je eenmaal een stuk op weg, dan zul je gegrepen worden door een machtige ervaring: aan het stuur zitten van een snelle machine.

Tips

Verder nog wat tips. Er zijn boekhandels met een apart hoekje voor computer-boeken, maar je kunt ook terecht bij speciale computerboekhandels of in elektronica-zaken. Beperk je in het begin tot materiaal dat herkenbaar voor jouw apparaat is geschreven. Dan schiet je het snelst op in je poging de boeiende wereld van de micro te betreden.

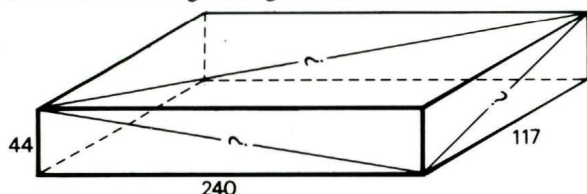
Je kunt ook lid worden van een van de vele clubs. De belangrijkste is de HCC, de Hobby Computer Club (adres: *Postbus 149, 2250 AC Voorschoten*).

Ja, en als je dan eenmaal besloten hebt zo'n apparaat aan te schaffen dan kom je altijd mensen tegen die weer een ander apparaat weten dan wat jij op het oog had. Laat je hierdoor niet al te veel van de wijs brengen. Er bestaan altijd mooiere, betere enz. Maar dat komt dan ook meestal weer tot uitdrukking in de prijs. Dus koop een ding dat je aanstaat en vooral past bij jouw budget. Na verloop van tijd kun je met de ervaring die je hebt opgedaan, altijd nog op zoek gaan naar een andere (betere, mooiere . . .). Kortom, je weet dan welke eisen je wilt stellen en of een computer iets voor jou is.



Mooie blokken

In het rechthoekig blok hieronder zijn de lengten van de ribben gegeven: 240, 117 en 44. Wanneer je nu je rekenmachine pakt en met de *Stelling van Pythagoras* de lengten van de drie zijvlaksdagonalen, aangegeven met een vraagteken, gaat uitrekenen, zul je een merkwaardige ontdekking doen. Als je het goed doet, zijn alle uitkomsten gehele getallen!

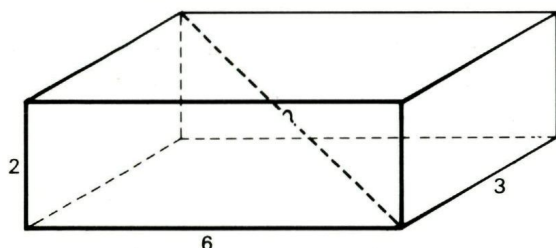


Misschien vind je er niets merkwaardigs aan. Er zijn inderdaad nog wel meer van zulke blokken, waarbij de lengten van de zijvlaksdagonalen evenals de ribben gehele getallen zijn. Er zijn er zelfs oneindig veel! Toch zal het je niet meevallen om zelf zo'n blok te vinden. Voor zover bekend werd dit blok voor het eerst in 1719 door P. Halcke gevonden. Toen natuurlijk nog zonder rekenmachine!

Als je geen zin hebt om zelf lang te zoeken (of om een zoek-programma voor je schoolcomputer te schrijven), kun je aan het eind van dit artikel een recept vinden waarmee je zonder veel moeite oneindig veel van dergelijke blokken kunt vinden. (Leraren: hier kunnen jullie mooi uitkomende proefwerksommen vinden.)

Nog mooier

In het volgende blok zijn de lengten van de ribben weer gehele getallen: 6, 3 en 2. Het is nu de bedoeling dat je de lengte van de lichaamsdiagonaal, aangegeven met het vraagteken uitrekent.



Ook hier zal de lengte van de gevraagde lichaamsdiagonaal een geheel getal zijn (de andere lichaamsdiagonalen zijn natuurlijk even lang). Ook in dit geval zal het niet eenvoudig zijn nog zo'n blok te vinden. Maar we zullen je weer een recept verschaffen waarmee je er oneindig veel kunt vinden.

Het allermooiste blok?

Als je een poosje met dit soort mooie blokken bezig geweest bent, zul je je wellicht zijn gaan afvragen: zijn er ook blokken te vinden (met gehele ribben) waarin zowel de lengten van alle zijvlaksdagonalen, alsook de lengten van de lichaamsdiagonalen gehele getallen zijn?

Het verrassende antwoord hierop is (volgens een boek uit 1962): **'It is not known'**.

Verrassend omdat de gestelde vraag toch heel eenvoudig lijkt. Misschien is hier in latere jaren nog een antwoord op gevonden. Er zal zeker wel eens door computers naar gezocht zijn. We horen het graag!

Recepten voor mooie blokken

Zijvlaksdagonalen Kies voor m en n natuurlijke getallen, dan zijn in een blok met ribben

$$|(m^2 - n^2) \cdot [4(2mn)^2 - (m^2 + n^2)^2]|,$$

$$|(2mn) \cdot [4(m^2 - n^2)^2 - (m^2 + n^2)^2]| \text{ en}$$

$$|4(2mn) \cdot (m^2 - n^2) \cdot (m^2 + n^2)|$$

alle zijvlaksdagonalen geheel.

We weten niet zeker of op deze manier alle blokken met die eigenschap gevonden worden.

Lichaamsdiagonalen Kies natuurlijke getallen l en m . Kies één van de delers van het getal $(l^2 + m^2)$, die kleiner is dan $\sqrt{l^2 + m^2}$ en noem die deler n . Dan heeft het blok met ribben $2l$, $2m$ en $(l^2 + m^2 - n^2)/n$ een gehele lichaamsdiagonaal. Op deze manier worden wel alle blokken met die eigenschap gevonden.

(naar een idee van Frank Roos)

Spelen met spiegels

Een parkiet wordt eindeloos geboeid door een spiegel-tje dat in zijn kooi hangt. Hij blijft zich tegen zijn spiegelbeeld gedragen alsof het een andere vogel is. Een hond is intelligenter: eerst blaft hij nog, maar na enige tijd loopt hij achteloos de spiegel voorbij. De 'andere hond' is niet echt. Een aap kan uren spelen met een zakspiegeltje: hij trekt rare snuiten, kijkt via de spiegel achter zich en vergelijkt voorwerpen met hun spiegelbeeld. Kleine kinderen schrijven geheimcodes in spiegelschrift en net als apen gaan zij met spiegels (in het Engels: *mirror*) om als wonderlijke dingen (in het Engels: *miracles*).

Grotere mensen gedragen zich tegenover spiegels meer als honden. Maar weten zij nu ook wel precies hoe spiegels werken en wat je er zoal mee kunt doen?



In de volgende nummers van deze jaargang zullen we wat gaan spelen met twee of meer spiegels. In dit nummer beginnen we met één spiegel.

In de paskamer

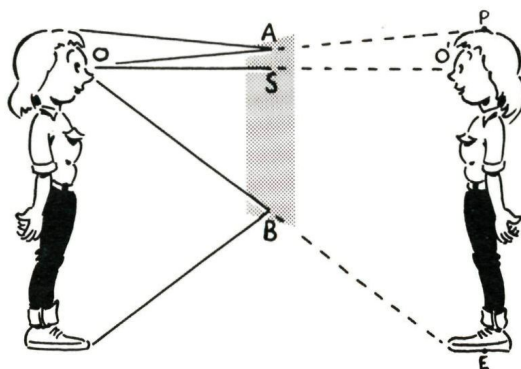
In een winkeltje met tweedehands kleren gebruikte ik de paskamer. Aan de muur daarvan hing een spiegel die ongeveer 50 cm hoog was. Daarin zag ik mezelf maar van knieën tot schouders. Om mezelf helemaal te zien deed ik een paar stappen naar achteren. Maar dat hielp niet veel. Dan maar het gordijn open; tenslotte stond ik achterin de winkel en zag mezelf nog maar half!

Een soortgelijke ervaring kun je opdoen wanneer je een zakspiegeltje neemt en dat recht voor je houdt. Of je het nu dichtbij houdt of verder af, steeds zie je evenveel van jezelf. Probeer het maar!



Om jezelf helemaal in een passpiegel die aan de muur hangt te kunnen zien, moet die spiegel minstens de helft van jouw lengte hoog zijn en op ooghoogte hangen. Controleer dat maar eens bij passpiegels in je omgeving.

De verklaring daarvoor vind je in onderstaande figuur. Daarin is de afstand van oog tot spiegelbeeld (OO') tweemaal de afstand van oog tot spiegel (OS). De hoogte van het zichtbare deel van je eigen spiegelbeeld is daarom ook juist gelijk aan tweemaal de hoogte van de spiegel.



Toch zijn er wel manieren om jezelf helemaal te zien in een spiegel van maar 50 cm. Wanneer je daar zelf niet zo snel op kunt komen, moet je maar eens kijken op de bladzijde hiernaast.

Correspondentie

Kritiek

Tot mijn spijt moet ik bekennen, dat naar mijn mening, de ingevoerde veranderingen een zeer negatieve invloed hebben op het blad.

Enkele punten van kritiek zijn:

- a het blad is te groot van formaat geworden, het leest niet handig meer en neemt teveel ruimte in op je bureau als je iets wilt uitwerken;
- b het blad is te populair geworden, dit geldt met name voor de voorkant die veel te 'flitsend' is;
- c het aantal nummers van het blad is nu helemaal weinig;
- d het aantal te lezen bladnummers is gehalveerd, terwijl de hoeveelheid informatie op 1 bladzijde gemiddeld *niet* is toegenomen en de prijs gelijk is gebleven: dit is ronduit een SCHANDE!!;
- e de inhoud van de onderwerpen is te simpel geworden. Mijn conclusie is dan ook dat het blad Pythagoras van een status als hoog gekwalificeerd wiskunde tijdschrift voor jongeren afgezakt is naar een status van middelmatig blaadje voor bij de kapper (een soort Privé: die lees je ook alleen maar bij de kapper om de tijd te doden).

Ferry van Dijk, Vleuten.

Waarom wiskunde?

Voor mij vrij simpel. Het is een hartstikke gek vak. Ik hou erg van passen en meten, precies uitrekenen en cijferen, dus bijna alle blokken vind ik leuk.

Toch soms, vind ik het ook best wel jammer dat ik er goed in ben. M'n vriendinnen nl. hebben er meer moeite mee dan ik. Wiskunde moet je vatten en nooit meer vergeten, wat er bij hen niet zo zeer in zit. Als dan iedere proef onvoldoende is, zou ik zo een beetje uit m'n hersens willen nemen en het er bij hen inplanteren, omdat ik wil dat zij ook alles gaan begrijpen. Maar ja, dat kan niet hè?! Nog een andere reden is, dat ik het nodig heb voor een verdere beroepsopleiding die ik straks hoop te gaan volgen. Maar al was

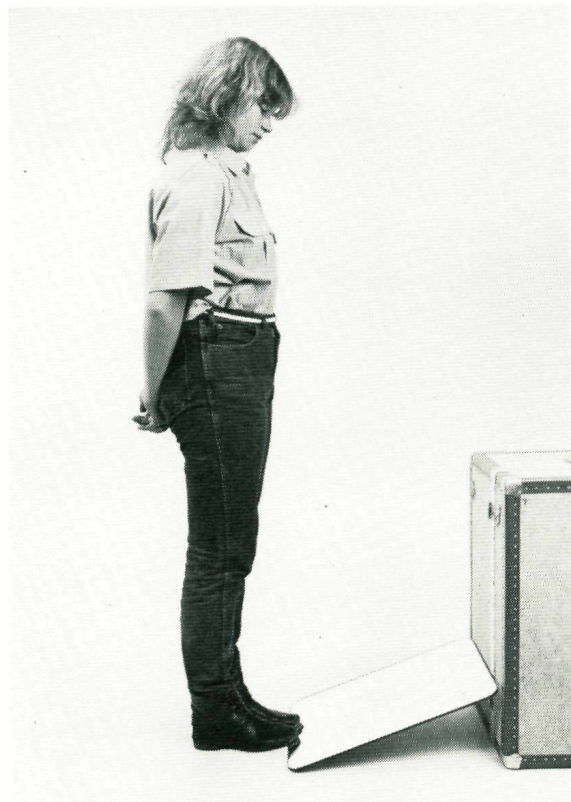
dat niet het geval geweest, had ik het toch gekozen.

Linda van den Bergh, Purmerend.

Zie je wiskunde ook niet zo zitten of juist wel, verbaas je er ook over dat de *top* van een parabool meestal onderaan zit, of heb je iets anders te melden over je ervaringen met wiskunde, richt je bijdrage dan aan het redactiesecretariaat. Het adres daarvan is te vinden op pagina 2.

Antwoord bij spelen met spiegels I

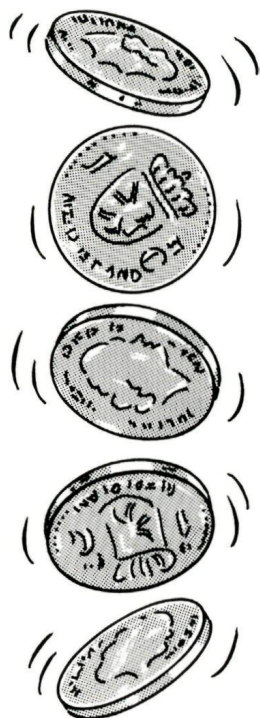
Om jezelf helemaal in een spiegel van 50 cm te kunnen zien, zet je de spiegel schuin tegen de wand en ga je met je voeten tegen de rand van de spiegel staan. Hoe groter je bent des te platter moet de spiegel liggen.



Meer zakgeld

Let op: deze Pythagoras is goud waard! Als je hem tenminste niet aan je ouders laat lezen.

Natuurlijk zit je krap in je zakgeld. Maar als je vader of moeder van een gokje houden, kun je er gemakkelijk wat bij verdienen. Gewoon met kruis of munt gooien. Het gaat er om een serie van drie worpen achter elkaar te voorspellen.



Stel dat pa je eerste slachtoffer is. Je vraagt hem dan een serie van drie worpen te noemen. Stel dat hij zegt: kruis-kruis-munt. Dan noem jij op jouw beurt een andere serie, zoals bijvoorbeeld munt-kruis-kruis en vervolgens gaat het spel beginnen. Je werpt om beurten een munt en degene wiens serie het eerst verschijnt, heeft gewonnen.

Om ruzie te voorkomen, kun je 't beste een stuk papier nemen waarop je ieders favoriete serie zet en de uitkomsten van de worpen noteert.

Bijvoorbeeld:

pa: **KKM**

ik: **MKK**

KMKMMMKMMKMKMMMMKK ik win

MMKK ik win

KMMKMMKK ik win

KKKKM pa wint.

Nadat pa op deze manier flink wat geld verloren heeft, zegt hij natuurlijk dat hij blijkbaar een verkeerde serie gekozen heeft. Okee, antwoord je, kies maar een andere! Hij denkt slim te zijn en neemt de serie waarmee jij zoveel succes had: **MKK**. Maar nu neem jij **MMK** en het spel kan weer beginnen.

pa: **MKK**

ik: **MMK**

KKMMMK ik win

MMMK ik win

KMMMMK ik win

MKK pa wint

KMKMMMMK ik win.

Het is verstandig om nu maar even te stoppen voordat je ruzie krijgt of van vals spelen wordt beschuldigd. Je systeem is echter waterdicht en winst is gegarandeerd. Het enige wat je daarvoor moet doen is de volgende tabel uit je hoofd leren. Daarin staan alle mogelijke combinaties die je tegenstander kan kiezen met daarachter het antwoord dat jou de winst bezorgt. Telkens staat er ook achter wat je winstkansen zijn.

En natuurlijk, zorg dat je toekomstige slachtoffers deze Pythagoras niet in handen krijgen!

<i>tegenstander</i>	<i>jouw antwoord</i>	<i>kans dat jij wint</i>
KKK	MKK	7 van de 8 keer
KKM	MKK	3 van de 4 keer
KMK	KKM	2 van de 3 keer
KMM	KKM	2 van de 3 keer
MKK	MMK	2 van de 3 keer
MKM	MMK	2 van de 3 keer
MMK	KMM	3 van de 4 keer
MMM	KMM	7 van de 8 keer



Je ziet dat dit spelletje dat er zo op het oog heel eerlijk en onschuldig uitziet – je geeft je tegenstander immers de mogelijkheid om zelf zijn serie te kiezen – helemaal geanalyseerd kan worden. Bovendien zijn in alle gevallen nog je winstkansen te berekenen ook. Wanneer je zelf eens wilt proberen de geheimen van dit gokspel te ontsluiten, kun je het gemakkelijkst beginnen met de gevallen dat je tegenstander **K K K** of **M M M** kiest. Zie je waarom jij dan **M K K** respectievelijk **K M M** moet nemen? En dat je dan in 7 van de 8 gevallen wint?

Het kringetje rond

Tenslotte nog wat gek. Uit de tabel blijkt:

K M M verliest van **K K M**,
K K M verliest van **M K K**,
M K K verliest van **M M K**,
M M K verliest van **K M M**,

en zo zijn we het kringetje rond! Is dat niet verbazend?

Pythagoras Olympiade



Al een paar jaar draait in Pythagoras een wedstrijd voor wiskunde-bollebozen: de Pythagoras Olympiade. Het gaat om opgaven – drie in elk nummer – waarvoor je nauwelijks wiskundige voorkennis nodig hebt. Tot ruim een maand na de verschijningsdatum kun je oplossingen insturen.

Prijzen Iedere opgave is een wedstrijd op zichzelf. Je hoeft niet aan alles mee te doen, je kunt van elke som afzonderlijk een oplossing inzenden. Bij elke opgave verloten we onder de goede inzenders twee prijzen van f 10,-/Bfr 150. Verder vormen de 12 opgaven van van één jaargang een *ladderwedstrijd*. Iedere goede oplossing geeft 1 punt. De drie inzenders met de meeste punten krijgen elk een prijs van f 25,-/ Bfr 400. Bovendien ontvangen de beste tien van de ladderwedstrijd een uitnodiging voor de Tweede Ronde (tevens finale) van de NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE, zelfs al hebben ze niet aan de Eerste Ronde meegedaan of daarbij niet voldoende punten behaald.

Oplossingen De uitwerkingen komen natuurlijk in Pythagoras. Bij elke opgave wordt de oplossing van één van de inzenders gepubliceerd. Maar gezien de benodigde correctietijd en de productietermijn van Pythagoras zal dat meestal in de volgende jaargang kunnen gebeuren. Maar . . . je kunt de uitslag en de uitgekozen oplossing eerder krijgen als je een aan jezelf geadresseerde en gefrankeerde enveloppe meestuurt.

Inzendingen Leerlingen van het voortgezet/secundair onderwijs kunnen hun oplossingen insturen aan: *Pythagoras Olympiade, Oltmansdreef 21, 2353 CK Leiderdorp*. De inzendingstermijn voor de eerste drie opgaven, die op de volgende bladzijde staan, sluit op **1 december 1983**. Vermeld op elk (éénzijdig beschreven) vel: naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas. Verder moet elke oplossing op een nieuw vel beginnen. We bekijken alleen goed leesbare oplossingen die volledig uitgewerkt zijn, met verklarende tekst in goed lopende zinnen.

Pythagoras Olympiade



Nieuwe opgaven (oplossingen inzenden vóór 1 december 1983).

PO 58.

Is het mogelijk de velden van een schaakbord zo te nummeren van 1 tot en met 64 dat de nummers van twee velden die een zijde of een hoekpunt gemeen hebben altijd hoogstens 8 verschillen?

Geef zo'n nummering, of een bewijs dat het niet kan.

PO 59.

Bewijs dat je uit elk tiental opvolgende natuurlijke getallen er minstens één kunt kiezen dat met geen van de andere een gemeenschappelijke deler (groter dan 1) heeft. Voorbeeld: van de getallen 840 t.e.m. 849 heeft 841 = $29 \cdot 29$ geen gemeenschappelijke deler met een van de andere getallen.

PO 60.

Gegeven is een willekeurige niet-gelijkzijdige driehoek met zijden van lengte a , b en c cm. Bewijs dat

$$(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) < a \cdot b \cdot c.$$

Oplossingen en prijswinnaars van de opgaven

PO 43 - 48

PO 43.

Bewijs dat voor elk natuurlijk getal n geldt dat ten minste één van de vijf getallen 17^n , 17^{n+1} , 17^{n+2} , 17^{n+3} , 17^{n+4} , uitgeschreven in het tientallig stelsel, begint met het cijfer 1.

Oplossing van *Auke Zijlstra*, 5 ath, R.S.G. Leeuwarden (enigszins gefatsoeneerd):

Er geldt $17^2 = 289$, $17^3 = 4913$, $17^4 = 83521$ en $17^5 = 1419857$.

Stel nu dat voor zekere n het getal 17^n met het cijfer 1 begint. Voor zekere a is dus $10^a \leq 17^n < 2 \cdot 10^a$. We onderscheiden drie gevallen:

1) $10^a \leq 17^n < \frac{20}{17} \cdot 10^a$. Dan geldt

$17 \cdot 10^a \leq 17^{n+1} < 20 \cdot 10^a$, dus dan begint 17^{n+1} met het cijfer 1.

2) $\frac{20}{17} \cdot 10^a \leq 17^n < \frac{20000000}{1419857} \cdot 10^a$. Dan geldt

$1670420 \cdot 10^a \leq 17^{n+5} < 20000000 \cdot 10^a$, dus dan begint het getal 17^{n+5} met het cijfer 1.

3) $\frac{20000000}{1419857} \cdot 10^a \leq 17^n < 2 \cdot 10^a$. Dan geldt $10^5 \cdot 10^a < \frac{20000000}{17} \cdot 10^a \leq 17^{n+4} < 167042 \cdot 10^a$, dus dan begint 17^{n+4} met het cijfer 1.

Het getal 17 zelf begint met het cijfer 1, en volgens het bovenstaande komt het begincijfer 1 terug met tussenpozen van hoogstens vier machten met een ander begincijfer.

Er waren 15 inzendingen, waarvan 14 correct. Prijswinnaars: *Klaas Wijbrans*, 5 vwo, Chr. Lyceum, Almelo en *Auke Zijlstra*.

PO 44.

Onder $s(n)$ verstaat men de som van alle (positieve gehele) delers van n . Zo is bijvoorbeeld $s(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$.

Zijn er positieve gehele getallen n waarvoor geldt $s(n) = 1982$? Of $s(n) = 1980$? Geef in beide gevallen of ten minste één zo'n getal n , of een bewijs dat zo'n getal n niet bestaat.

Oplossing van *Rob de Jeu*, 6 vwo, O.S.G. Albert Einstein, Pernis:

Omdat 1979 een priemgetal is, geldt dat $s(1979) = 1 + 1979 = 1980$. Stel nu dat n in priemfactoren ontbonden wordt: $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \dots$

Dan is $s(n) = (1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{k_1})(1 + p_2 + \dots + p_2^{k_2}) \dots$

(Als je dit uitvermenigvuldigt krijg je immers alle mogelijke delers van n precies één keer). We onderzoeken nu of $s(n) = 1982$ kan zijn. Omdat $1982 = 2 \cdot 991$, en 991 een priemgetal is, moet of

$2 = 1 + p_1 + \dots$ en $991 = 1 + p_2 + p_2^2 + \dots$, of

$1982 = 1 + p + p^2 + \dots$

Het eerste kan natuurlijk niet, en uit het tweede zou volgen $1981 = p + p^2 + \dots = p(1 + p + \dots)$ dus $p = 7$ of $p = 283$ (want $1981 = 7 \cdot 283$).

Beide gevallen leiden tot een tegenspraak. Voor geen enkele n geldt dus $s(n) = 1982$.

Er waren 14 inzendingen, maar slechts 8 waren er correct. Prijswinnaars: *Steven van Enk*, 5 vwo, Chr. Lyceum, Veenendaal, en *Ronald Heijnen*, 6 vwo, O.L.V. Lyceum, Breda.

PO 45.

Elvie en Tini proberen met een zuivere munt zoveel mogelijk malen kruis te gooien. Elvie gooit 11 maal, Tini 10 maal, maar Elvie mag maar 10 van haar 11 worpen meetellen (ze mag zelf aan de hand van de resultaten na afloop beslissen welke worpen ze meetelt).

Wie de meeste malen kruis heeft, wint, en bij gelijke aantallen wint Tini. Wie heeft de beste kansen, en hoe groot is haar kans om te winnen?

Oplossing van *Menke Ubbens*, 4 ath, R.S.G. Magister Alvinus,

Sneek:

Over het algemeen zal de extra spelregel niet op de uitslag van invloed zijn. Stel dat beide 10 maal gooien. Alleen als ze dan gelijk staan, zal de regel van invloed zijn. Immers, als Tini voor staat, kan Elvie met haar elfde gooi hoogstens gelijk komen, en dan heeft Tini toch nog gewonnen. En als Elvie na 10 worpen voor staat, blijft dat zo na de elfde worp. Stel dus dat ze na 10 worpen gelijk staan. Als Elvie dan munt gooit, blijven ze gelijk, dus dan heeft Tini gewonnen. Als Elvie bij haar elfde worp kruis gooit, zal dit vrijwel altijd betekenen dat ze ook heeft gewonnen, want er zal vrijwel altijd al een munt zijn voorgekomen in haar vorige 10 worpen, die ze dan kan 'inwisselen' voor haar elfde worp die kruis is. Echter, als ze alle vorige keren kruis heeft gegooid (en Tini dus ook) gaat deze vlieger niet op, en dan wint Tini. Zou deze ene mogelijkheid er niet zijn, dan hadden beide 50% kans om te winnen, nu heeft echter Tini dus de beste kansen. Om haar kans op winnen te berekenen moeten we eerst het totale aantal verschillende manieren weten waarop Elvie en Tini kunnen gooien. Dit is $2^{10} \cdot 2^{11} = 2^{21}$. Bij de helft van deze manieren plus één (nl. als alle worpen kruis opleveren) wint Tini. Haar kans om te winnen is dus $(2^{20} + 1) \cdot 2^{-21}$, en dat is ongeveer 50,000047684%.

Er waren 16 inzendingen, waarvan 14 correct. Prijswinnaars: *Menke Ubbens*, en *Jan Willem van Dalen*, 5 vwo, R.S.G. Steenwijk.

PO 46.

Er bestaat een natuurlijk getal N met erg veel delers: het is deelbaar door alle getallen van 1 tot en met 60 op twee na, en die twee niet-delers komen na elkaar.

We vragen je niet om N te bepalen, maar kun je afleiden door welke opvolgende getallen N niet deelbaar is?

Oplossing van *Frits Vriend*, 20 jaar, M.T.S. Westfriesland, Hoorn:

De twee getallen moeten boven de 30 liggen, omdat een getal dat niet deelbaar is door een getal onder de 30, ook niet deelbaar is door het dubbele, en dat ligt dan nog onder de 60.

De twee getallen moeten ook machten van priemgetallen zijn, want anders is minstens een van hen opgebouwd als produkt van machten van verschillende priemgetallen, en die machten zitten dan onder de 30. Het getal zou daarom door die machten deelbaar moeten zijn, en dus is het ook deelbaar door het produkt van die machten.

Omdat één van de twee getallen even is, is het een macht van twee. De enige macht van twee tussen 30 en 60 is 32. Het andere getal is dan 31, want $33 = 3 \times 11$. De twee getallen zijn dus 31 en 32.

Er waren 95 inzendingen, waarvan 68 correct. De prijzen gaan naar *Ferry van Dijk*, 17 jr, 5 Ath. R.S.G. Minkema, Woerden, en *Theo Ruys*, 17 jr, 5G, Rotterdams Lyceum.

PO 47.

Gegeven is een rechthoekige driehoek. De lengten van de zijden (in cm) zijn gehele getallen; die van de schuine zijde is géén geheel veelvoud van 5.

Bewijs dat de oppervlakte (in cm^2) een geheel getal is dat op een nul eindigt.

Veel oplossingen werkten met de formules van Pythagoreïsche drietallen: als $a = r^2 - s^2$, $b = 2rs$, $c = r^2 + s^2$ dan is $a^2 + b^2 = c^2$. Een andere oplossing komt van *Jan de Boer*, 15 jr, 5 vwo, R.S.G. Magister Alvinus, Sneek: Te bewijzen is dat $\frac{1}{2}ab$ een tienvoud is, dus dat ab een twintigvoud is.

1 ab is een vijfvoud:

c is geen vijfvoud (gegeven). Stel a is geen vijfvoud. Dan eindigen a^2 en c^2 op 1, 4, 6 of 9. $b^2 = c^2 - a^2$ moet dan op 0, 2, 3, 5, 7 of 8 eindigen. Maar een kwadraat eindigt altijd op 0, 1, 4, 5, 6 of 9, dus b^2 eindigt op 0 of 5, en dus is b een vijfvoud. ab is dus ook een vijfvoud.

2 ab is een viervoud:

Als a en b beide even zijn, klopt het.

Als a en b beide oneven zouden zijn, zou c even zijn. Dan zouden $a + b - c$ en $a + b + c$ beide even zijn, dus $ab = \frac{1}{2}(a + b - c)(a + b + c)$ ook, in tegenspraak met het feit dat a en b beide oneven zijn.

Een van beide, zeg a , is dus oneven, de andere, b , even. Dan is c ook oneven. Het verschil tussen $a + b + c$ en $a + b - c$ is dan $2c$, en dat is geen viervoud. Een van beide getallen $a + b + c$ en $a + b - c$ is dus wel een viervoud en $ab = \frac{1}{2}(a + b + c)(a + b - c)$ is het daarom ook.

Er waren 49 inzendingen, waarvan 26 correct. Prijswinnaars: *Jan Bruin*, 17 jr, 5 Murmellius Gymn., Bergen en *Frits Bos*, 18 jr, 5 Ath., Kottenparkcollege, Enschede.

PO 48.

Het antieke horloge van mijn grootvader doet het nog best, al loopt het iets te snel. Als ik het 's middags om 12 uur gelijk zet, staan om half zeven 's avonds de grote en de kleine wijzer precies over elkaar heen, dus dan loopt het ruim twee minuten voor. Bepaal precies hoeveel het per etmaal voor loopt.

Oplossing van *Henk Kreuze*, 6 vwo, Menso Alting College, Hoogeveen:

Om 12 uur staan de wijzers over elkaar. Na $6\frac{1}{2}$ uur weer. De kleine wijzer heeft dan x minuten afgelegd, de grote $6 \times 60 + x = 360 + x$ minuten. De grote wijzer gaat 12 maal zo snel als de kleine, dus $12x = 360 + x$, zodat $x = 360/11$. Het horloge loopt dus in $6\frac{1}{2}$ uur $(360/11) - 30 = 30/11$ minuut voor. In 24 uur wordt dit $1440/11$ minuten.

Er waren 134 inzendingen, waarvan 118 correct. Prijswinnaars: *Frits Bos*, en *Luc Crauwels*, 16 jr, 5e klas, ASO Borgerhout, België.

Keerkringen zoeken

In een keerkring is elk getal gelijk aan het product van z'n buren.

Probeer van de kring hiernaast een keerkring te maken door in de lege rondjes getallen in te vullen. Wanneer je dat is gelukt, ga dan eens aan de slag met de drie kringen hieronder. Maar pas op, bij één van deze drie kringen lukt het niet. Zoek maar eens uit welke dat is.

