



Verschijnt vier keer per jaar

Wiskundetijdschrift voor jongeren

Pythagoras



2 Jaargang 23 december 1983

Wolters-Noordhoff

Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Redactie

Jan van de Craats, Luc Kuijk, Klaas Lakeman, Henk Mulder, Hessel Pot, Hans de Rijk, Leo Wiegerink

Secretariaat

Leo Wiegerink
Egelantiersstraat 107^{II}, 1015 PZ Amsterdam
Aan dit adres kunnen reacties op en bijdragen voor Pythagoras worden gezonden.

Pythagoras verschijnt 4 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 9,20 per jaargang.
Voor anderen f 13,95.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv, Afdeling Periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen.
Voor België bij J. B. Wolters-Leuven, Blijde Inkomststraat 50, Leuven; postchecknummer 000-000 8081-30.

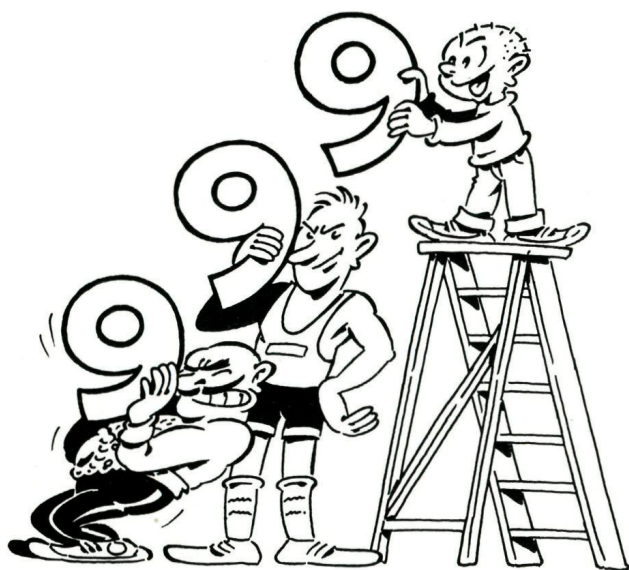
Abonnees wordt dringend verzocht met betalen te wachten tot hun een acceptgirokaart wordt gezonden. Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt. Maximaal 10 gratis abonnementen per school.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

Inhoud

Grote getallen	19
<i>Henry Ruizenaar</i>	
Priemrecord	21
<i>Jan van de Craats</i>	
Waarom geen Nobelprijs voor wiskunde?	21
<i>Hessel Pot</i>	
Zwevende constructies	22
<i>Jan van de Craats/Klaas Lakeman</i>	
Correspondentie	25
Spelen met spiegels II	26
<i>Ton Konings</i>	
Verborgten telwoorden	27
<i>Hessel Pot</i>	
Maak 'm dik	28
<i>Leo Wiegerink/Hessel Pot (idee van Wim Pijls)</i>	
Sinus-bruggetje	29
<i>Hessel Pot</i>	
Pythagoras Olympiade	30
<i>Jan van de Craats</i>	
Internationale Wiskunde Olympiade	31
<i>Jan van de Craats</i>	
Ontspanning of inspanning?	32
<i>Hessel Pot</i>	

Bij de voorplaat Deze wonderlijke constructie van 'zwevende' metalen staven die door kabels bijeen worden gehouden, staat bekend als de naaldtoren van Snelson. Deze 28 meter hoge toren werd in 1968 gebouwd en staat in het Rijksmuseum Kröller-Müller te Otterlo. Meer over dergelijke constructies vind je op pagina 22 in het artikel 'Zwevende constructies'.



Grote getallen

Wat is het grootste getal dat je ooit bent tegengekomen, en waar hoorde dat bij? Of was dat getal zó groot dat het nergens bij hoorde?

Tegenwoordig zijn we gewend aan kolossale getallen, maar vroeger was de aanleiding om met grote getallen te werken doorgaans minder. Zo werkten de Romeinen met getallen in de orde van duizendtallen. Je kent vermoedelijk de Romeinse cijfers wel, het grootste daarvan is de **M** (= duizend). Die duizendtallen werden gebruikt om de grootte van legereenheden en geldsommen aan te geven. Veel grotere getallen hadden ze vermoedelijk niet nodig.

Het grootste getal waar de Grieken nog één woord voor hadden was de myriade (= 10.000).

Het grootste getal dat in de Bijbel voorkomt, is 1.100.000 en slaat op het aantal Israëlieten dat het zwaard kon hanteren, dit naar aanleiding van een volkstelling (Kronieken 1, 21-5).

Wel vond men vroeger sommige aantallen zó groot dat ze niet te becijferen waren, zoals het aantal vissen in de zeeën of het aantal zandkorrels aan de stranden.

Brief van Archimedes

Archimedes (287–212 v.C.) was de eerste die grote aantallen niet afdeed met 'veel' of 'oneindig veel', maar een heel systeem ontwierp om grote getallen te schrijven. Zo schrijft hij in een brief aan koning Gelon van Syracuse:

"Er zijn mensen, koning Gelon, die denken dat er oneindig veel zandkorrels zijn, en ik bedoel daarmee niet alleen het zand hier rond Syracuse en de rest van Sicilië, maar al het zand van alle streken bij elkaar, bewoond of onbewoond.

Er zijn mensen die denken dat je géén getal kunt noemen dat groot genoeg is voor het aantal zandkorrels in die hoeveelheid zand. Die mensen zouden zich helemaal geen raad weten als ze moesten zeggen hoeveel zandkorrels je krijgt als je de hele aarde, met alle zeeën en holten, tot aan de toppen van de hoogste bergen opvult met zand. Maar ik zal laten zien dat bij de getallen die ik in een van mijn vorige brieven heb genoemd, er sommige zijn die niet alleen groter zijn dan het aantal zandkorrels in een opgevulde aarde, maar zelfs groter dan een hoeveelheid zandkorrels die het hele universum zou vullen."

Tegenwoordig komen we bijna dagelijks 'grote' getallen tegen. Hier volgen enkele voorbeelden. De Nederlandse Staat, wij dus met z'n allen, heeft een langlopende schuld van 145 miljard (145.000.000.000) gulden. Gemiddeld staan we per persoon ruim 10.000 gulden in het krijt, want er zijn ongeveer 14,3 miljoen Nederlanders.

Nog grotere getallen krijg je als je het aantal cellen in het menselijk lichaam zou tellen. Dat zijn er namelijk zo'n 50 biljoen: een 5 gevolgd door 13 nullen. Als we met z'n allen zoveel guldens konden verdelen, was ieder van ons ruimschoots miljonair: iedereen zou 36 miljoen op de bank krijgen.

Namen voor grote getallen

Natuurlijk verzinnen we niet voor elk groter getal een nieuwe naam. We werken met combinaties van *honderd* (10^2), *duizend* (10^3), *miljoen* (10^6), *miljard* (10^9), *biljoen* (10^{12}), *triljoen* (10^{18}), . . . Op den

duur lopen we echter op deze manier vast. Je kunt steeds grotere getallen opschrijven, bijvoorbeeld door maar negens achter elkaar te zetten, immers het grootste getal van 1 cijfer is 9, het grootste getal van 2 cijfers is 99, enz., maar vanaf een zeker moment hebben we daar geen afgesproken naam meer voor. We moeten het dan maar met de cijfervoorstelling doen.

Korter, sneller, groter, . . .

Sommige getallen kun je op een veel eenvoudiger manier schrijven. Met twee negens heb je 99, maar als je ze *schuin* boven elkaar zet, krijg je:

$9^9 = 387420489$ en dat is ruim 387 miljoen!

Met drie negens zou je krijgen 9^{9^9} .

Maar stop!!! Wat bedoelen we daar eigenlijk mee?

Is het $(9^9)^9$, dus 9^9 tot-de-macht 9, of is het $9^{(9^9)}$, dus 9 tot-de-macht 9^9 ? Dat is niet hetzelfde, want $(9^9)^9 = 9^9 \cdot 9^9 \cdot 9^9 \cdot 9^9 \cdot 9^9 \cdot 9^9 \cdot 9^9 \cdot 9^9 \cdot 9^9 = 9^{9+9+9+\dots+9} = 9^{81}$ en dat is een getal van 74 cijfers.

Maar $9^{(9^9)}$ is veel en veel groter: 9^9 was al ruim 387 miljoen dus $9^{(9^9)} = 9^{387420489}$, en dat is een getal met meer dan driehonderdmiljoen cijfers!

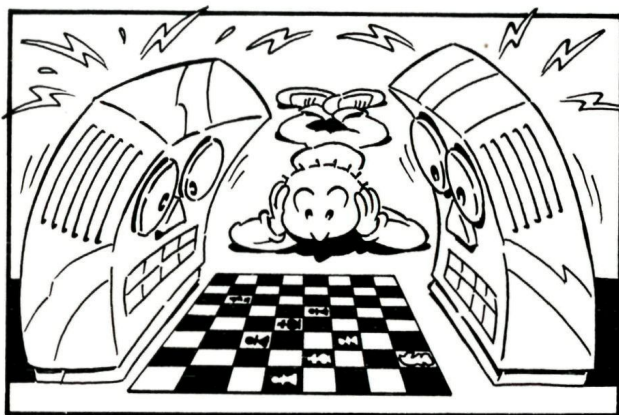
(Meestal wordt met 9^{9^9} dit laatste getal bedoeld.)

Zo'n getal kun je op geen enkele manier voorstellen. Zelfs z'n kleinere broer, $(9^9)^9$, is al haast onvoorstelbaar groot. Laten we toch eens een poging wagen om een idee te geven van de orde van grootte van zo'n soort getal.

Schaakcomputers

Schaakgrootmeester Euwe heeft het aantal mogelijke verschillende schaakpartijen geschat op 10^{120} , een 1 gevolgd door 120 nullen. Stel dat we nu twee computers dag en nacht tegen elkaar laten snelschaken: elke minuut een partij. Per dag spelen ze dan 60 (minuten) $\times 24$ (uur) = 1440 partijen. Per jaar: $365 \times 1440 = 525.600$ partijen. Dan zijn die twee computers nog 10^{120} gedeeld door 525.600 , dat is ongeveer 10^{115} jaar bezig. Dat is een onvoorstelbare tijd. Daarom zetten we nu in gedachten heel Nederland vol met computers, die allemaal twee aan twee

partijen gaan spelen. Voor ons, Nederlanders, blijft geen ruimte meer over. Wij moeten emigreren en op onze Nederlandse oppervlakte van 40.000 km^2 komen allemaal computers te staan, zeg één stel per 10 m^2 . In totaal betekent dat vier miljard stellen computers, die elk per jaar 525.600 partijen schaak spelen. Met z'n allen doen ze dan over het totale aantal van 10^{120} partijen nog zo'n $10^{120} / (525.600 \times 4 \times 10^9)$ is ongeveer 10^{105} jaar. Nog steeds blijft het onvoorstelbaar.



En als we ze het tempo laten opvoeren, geen partij per minuut, maar 100 partijen per seconde, dan levert één stel per jaar 100 (aantal) $\times 60$ (seconden) $\times 525.600 = 3.153.600.000$ partijen af. Gezamenlijk doen ze er dan nog altijd 10^{120} gedeeld door 3153600000 maal 4 miljard, dat is zo'n slordige 10^{101} jaar over.

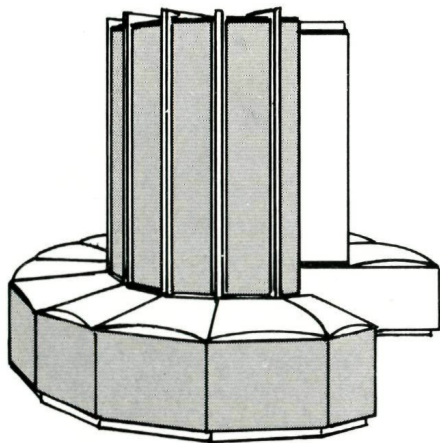
Alle aardbewoners emigreren naar andere planeten en we plaatsen ons hele aardoppervlak vol met computers. Dat is 510 miljoen km^2 . In totaal kunnen we dan ruim 5 maal 10^{13} stellen computers kwijt, die elk weer 100 partijen per seconde spelen. Maar nog zijn we dan ongeveer 10^{78} jaar verder voordat alle 10^{120} partijen gespeeld zijn. Dat aantal is nog steeds meer dan het getal $(9^9)^9$ waar we het hierboven over gehad hebben, en eigenlijk zijn al die grote getallen nog steeds even onvoorstelbaar gebleven voor ons.

Priemrecord

Een heel groot getal dat onlangs in het nieuws kwam, is het getal 2^{86243} . Dat is een getal van 25962 cijfers. In januari 1983 werd namelijk door de Amerikaan David Slowinski met hulp van een computer bewezen dat er een priemgetal ontstaat als je van dat getal 1 aftrekt. (Priemgetallen zijn getallen die alleen door zichzelf, en door 1 zonder rest deelbaar zijn.) Daarmee is dat getal, $2^{86243} - 1$, het *grootste* getal waarvan we op dit moment zeker weten dat het een *priemgetal* is.

We hebben de nieuwe recordhouder door de computer laten printen, maar helaas is het resultaat veel te groot om in Pythagoras af te drukken. De 25962 cijfers beslaan te zamen ruim 5 dichtbedrukte vellen computeruitdraai! Toch wat informatie: de eerste tien cijfers zijn 5369279955 . . . , en het getal eindigt op . . . 9433438207. Reken maar na!

Overigens, degenen die wat meer over priemgetallen willen weten, moeten maar proberen Pythagoras nr. 4 van jaargang 19 (februari 1980) te pakken te krijgen. Daarin staat een heel verhaal over deze 'bouwstenen van het rekenen'. Je vindt er ook de vorige recordhouder in: $2^{44497} - 1$, een getal van 'slechts' 13395 cijfers.

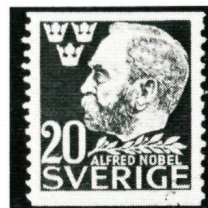


^
De Cray-I, een van de wat uiterlijk betreft, opvallendste en snelste computers, waarmee de nieuwe priemrecordhouder werd bepaald.

Waarom geen Nobelprijs voor wiskunde?

Sinds 1901 worden elk jaar op 10 december de Nobelprijzen uitgereikt aan vooraanstaande onderzoekers in de *natuurkunde*, de *scheikunde* en de *geneeskunde* (fysiologie). Daarnaast zijn er prijzen voor *literatuur* en de *vrede*, terwijl er sinds 1968 ook een prijs voor *economie* is.

Alfred B. Nobel, een Zweeds industrieel, ontdekte in 1867 hoe men een veilig en praktisch werkend explosief (dynamiet) kon maken. Bij zijn overlijden in 1896, stond in zijn testament dat van de rente van zijn nagelaten vermogen ieder jaar vijf prijzen moesten worden uitgereikt aan personen die op de vijf genoemde terreinen de mensheid de meeste diensten hadden bewezen.



< Alfred Nobel

Waarom viel de wiskunde daarbuiten?

De gangbare (hoewel moeilijk bewijsbare) verklaring heeft niets met wiskunde of wetenschap te maken, maar des te meer met menselijke zaken. Bijna 100 jaar geleden, in 1884, werd voor het eerst in Europa een vrouw benoemd tot hoogleraar in de wiskunde: de toen 34-jarige **Sonja Kovalevski**. Zij was afkomstig uit Rusland, had in Berlijn gestudeerd en was aangezocht als hoogleraar in Stockholm door Gustav Mittag-Leffler, in die tijd de belangrijkste wiskundige van Zweden. In Zweden aangekomen had zij aanvankelijk een amoureuze relatie met Nobel, maar na enige tijd werd die verbroken en ontstonden er nauwere contacten tussen haar en Mittag-Leffler.

Tijdens het opmaken van zijn testament overwoog Nobel ook een prijs voor wiskunde in te stellen. Maar toen hij vernam dat Mittag-Leffler ooit een kans op die prijs zou maken, moet Nobel hebben gezegd: "Dan komt er dus géén Nobelprijs voor wiskunde."

Zwevende constructies

De lamp van Zwarts

Professor Moshé Zwarts is hoogleraar bij de Afdeling Bouwkunde van de Technische Hogeschool Delft. Hij heeft allerlei mooie ontwerpen op zijn naam staan. Kijk maar eens naar het verlichtingsornament dat hierbij is afgebeeld. Het lijkt alsof er zes TL-buizen vrij in de ruimte zweven, maar bij nader inzien blijken ze door draden met elkaar verbonden. Die draden vormen de ribben van een *regelmatig twintigvlak*, en de zes buizen zijn bepaalde *scheve lichaamsdiagonalen* daarin. De stroom loopt door de draden; de starters van de TL-buizen zitten in de fittingen verborgen.

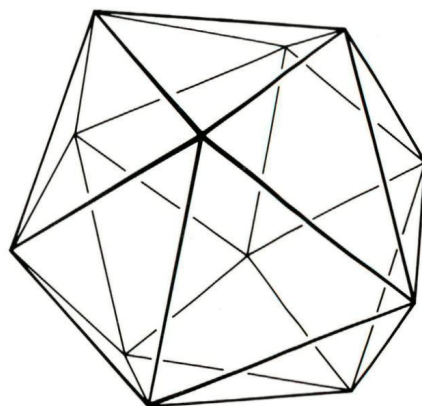
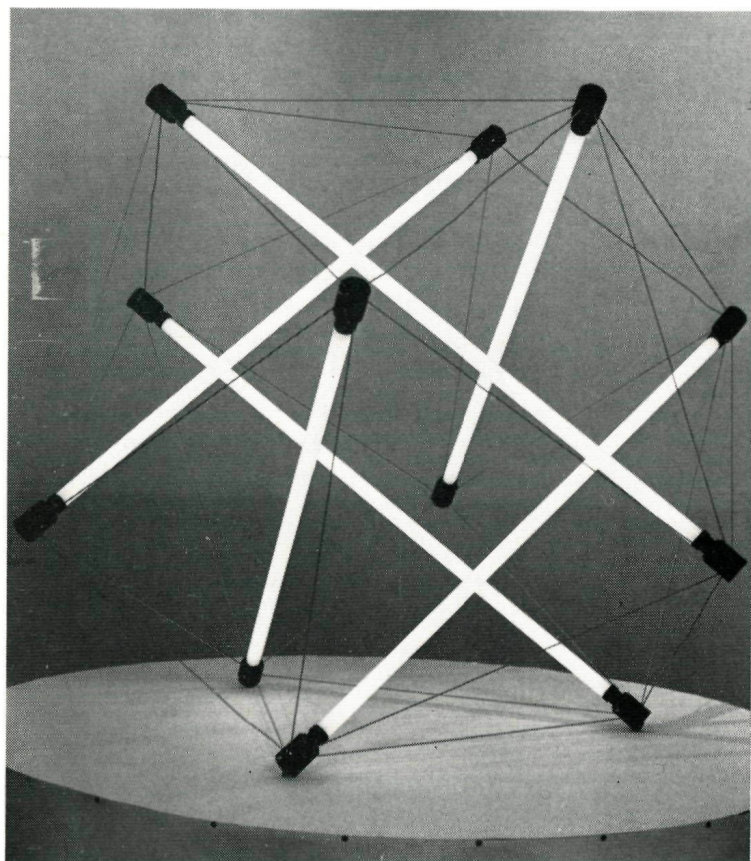
Aan dat twintigvlak en z'n diagonalen is van alles te ontdekken. Je ziet telkens twee TL-buizen die evenwijdig zijn. In totaal zijn er drie van die paren. Elk paar bepaalt een vlak. En, of je het nu gelooft of niet,

die vlakken staan loodrecht op elkaar!

Zwarts heeft voor zijn TL-buizen een symmetrische keuze gemaakt uit alle mogelijke lichaamsdiagonalen van het regelmatige twintigvlak. Hij koos er zes uit. In totaal zijn er 30 van die diagonalen, en op vijf manieren kun je zo'n zestal kiezen. Ga maar na!

Zelf maken

De lamp van Zwarts is wel erg mooi, maar niet zo praktisch. Denk je maar eens in dat je een kapotte buis moet verwisselen. Het is minder riskant om hem niet als lamp uit te voeren, maar gewoon als kamer-versiering. Zes mooie staven en wat ijzergaren; meer heb je niet nodig. De lengte van elke ribbe is precies $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0,62 \dots$ maal zo groot als de lengte van een staaf. Want zo'n staaf is één van de diagonalen in een *regelmatige vijfhoek*, die door de ribben wordt gevormd.



Links: de lamp van Zwarts.

Boven: ter vergelijking een regelmatig twintigvlak zonder diagonalen.

Rechtsboven: het fietswiel als voorbeeld van een zwevende constructie. De as 'zweeft' min of meer in het midden en wordt op zijn plaats gehouden door een aantal spaken.

Rechtsonder: model van de Flyer, waarmee Orville en Wilbur Wright in 1903 hun eerste gecontroleerde vluchten maakten. De draden houden de verschillende delen van het toestel bijeen.

Zwevende constructies om je heen

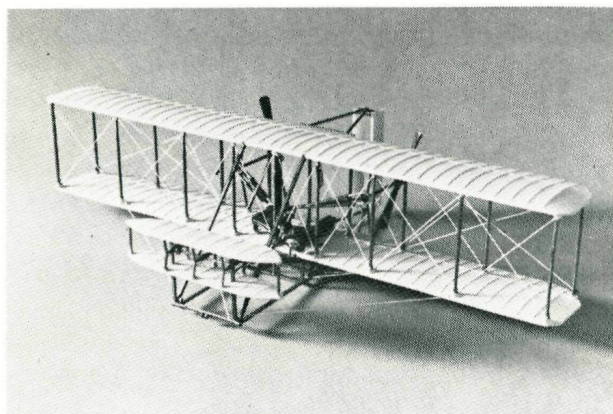
Zwevende constructies, waarvan de lamp van Zwarts een voorbeeld is, ben je ongetwijfeld al eens tegengekomen. Het vroegste voorbeeld is een vlieger: twee gekruiste latten, bijgehouden door een rondom gespannen draad.

En wat denk je van een fietswiel?

De as wordt daarin op zijn plaats gehouden door een aantal spaken die elk afzonderlijk min of meer los zouden staan (en let op, niet door het middelpunt van het wiel gaan!).

Andere fraaie voorbeelden zijn de vliegtuigen waarmee de Amerikaanse gebroeders Wright in 1903 als eersten in de geschiedenis gecontroleerde vluchten uitvoerden. Deze toestellen werden evenals de vlieger, door een aantal spandraden bijgehouden, zodat het dus eigenlijk 'zwevende constructies' in de dubbele betekenis van het woord waren.

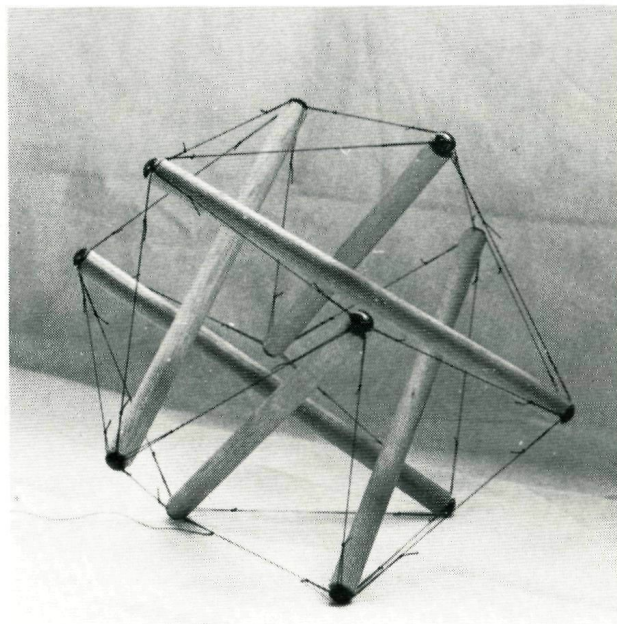
Mogelijk kun je er zelf nog een paar opsporen.



Tensegrity

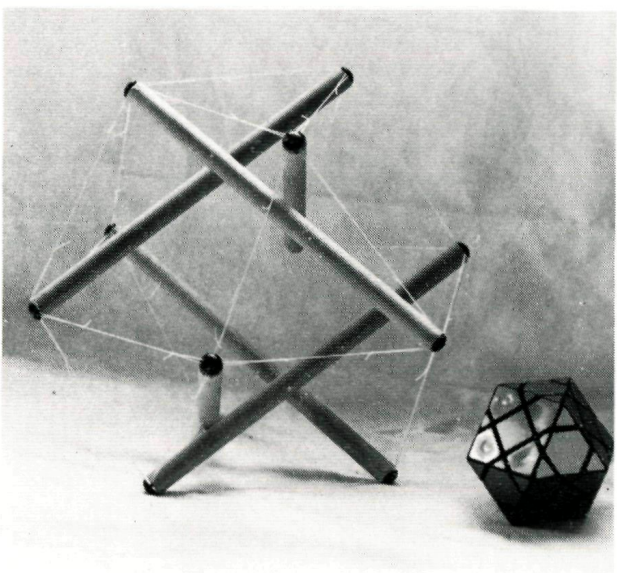
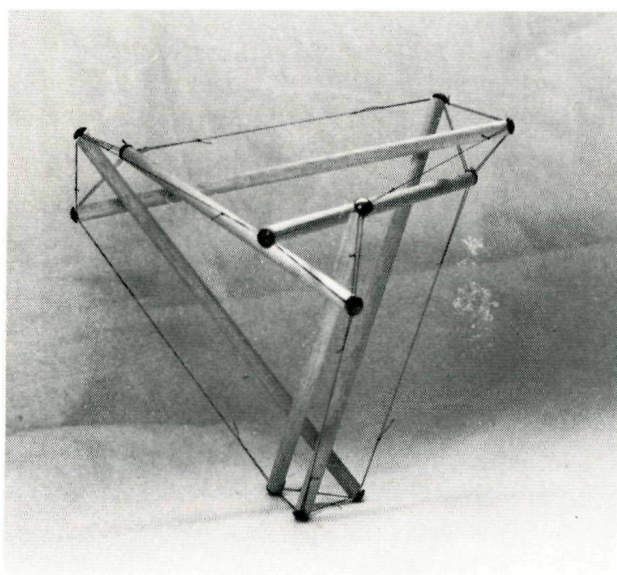
Aan het eind van de jaren veertig begon de Amerikaanse architect en uitvinder Richard Buckminster Fuller (1895–1983) met de bestudering van de grondbeginselen van de zwevende constructies. Hij onderzocht met name de spanningen in de draden die de 'vrij-zwevende' staven bijhouden. In verband hiermee sprak Buckminster Fuller niet van zwevende constructies, maar van *tensegrity structures* (tensegrity is samengesteld uit *tension*, spanning en *integrity*, volledigheid).

In 1949 ontwierp Buckminster Fuller de constructie die ten grondslag ligt aan de lamp van Zwarts. Hij gaf daaraan de naam 'tensegrity icosaeëder' (icosaëder = regelmatig twintigvlak). Wij hebben daar een model van gemaakt dat hieronder is afgebeeld. Uiteindelijk is dat precies hetzelfde als wanneer je voor het maken van je kamerversiering, in de lamp van Zwarts de TL-buizen door houten staven vervangt.



Nou ja, is het wel precies hetzelfde?

Kijk nog maar eens goed . . ., dan zul je ontdekken dat in dit model de draden ontbreken die de ribben tussen elk paar evenwijdige lichaamsdiagonalen zouden moeten vormen!



In navolging van Buckminster Fuller ontwierpen leerlingen en collega's van hem talrijke tensegrity modellen. Twee daarvan hebben we zelf ook nog gemaakt: de 'tensegrity tetraëder' en de 'tensegrity vector equilibrium'. Je vindt ze hierboven.

Het is heel lastig om deze twee modellen in elkaar te zetten. Wil je weten hoe dat moet, dan moet je je maar via het redactiesecretariaat (op bladzijde 18 vind je het adres) tot ons richten.

< Boven: tensegrity tetraëder, in 1952 ontworpen door Francesco della Sala.

Onder: tensegrity vector equilibrium, in 1951 ontworpen door John Moelman. Dit is niets anders dan een afgeknotte kubus, welke je ernaast ziet in de uitvoering van een puzzelkubus.

Bovendien zijn voor de ribben van deze constructie, die overigens allen even lang zijn, witte draden gebruikt. Deze zijn minder goed zichtbaar, waardoor de staven nog meer lijken te zweven.

Tensegrity bollen

Ondertussen, zo in het begin van de jaren vijftig, kreeg Buckminster Fuller het voor elkaar om tensegrity structures van enorme veelvlakken te construeren, met 90 en zelfs 270 zijvlakken! Deze constructies die er min of meer uitzagen als gigantische bollen, werden op de terreinen van diverse Amerikaanse universiteiten geplaatst.

Uiteindelijk kwam Buckminster Fuller hierdoor op zijn beroemde 'geodetische koepels' of 'domes' terecht. Maar dat zijn geen tensegrity structures meer en in het artikel 'De bol van Montreal' (Pythagoras jaargang 12 nr. 4) is daar al eens uitvoerig aandacht aan besteed.

Tensegrity masten

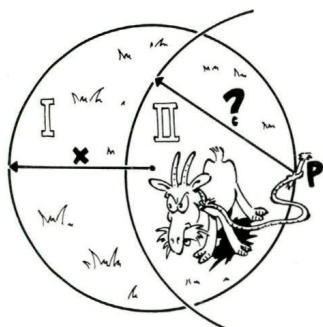
Kenneth Snelson (geb. 1927), een leerling van Buckminster Fuller, breidde de tensegrity structures in één richting uit. Hierdoor werden enorme masten verkregen van door strak gespannen kabels zwevend gehouden buizen. (Overigens beweert Snelson dat het idee van de zwevende constructies van hem afkomstig is en door zijn leermeester is overgenomen.) Een fraai voorbeeld van zo'n tensegrity mast is de 'naalddoren' die Snelson in 1968 bouwde en die je in het Rijksmuseum Kröller-Müller te Otterlo kunt bewonderen. Verder kun je op het terrein van de Technische Hogeschool Twente nog een aantal van dergelijke masten aanschouwen.

Correspondentie

Wie helpt?

Aan de rand van een cirkelvormige tuin staat een paal. Aan deze paal is een geit met een stuk touw vastgebonden.

Als de straal van de tuin nu x meter is, hoelang moet dan het touw zijn als de geit de helft van de tuin mag kaalvreten?



Ik hoop dat iemand een oplossing weet voor dit probleem, dat mij al lang bezigt houdt.

Arie van Engelenburg,
Thedingekamp 35, 7824 GT Emmen.

Ezelsbruggetjes

Op pagina 29 staat het sinus-bruggetje: een methode om de sinus van een aantal veel voorkomende hoeken gemakkelijk te onthouden. Wie weet nog meer van dergelijke ezelsbruggetjes? Laat dat ons eens weten.

De hoogste boom

In een van de vorige jaargangen vroeg u naar 'hoge bomen' (jaargang 21 nr. 2, november 1981). Nu heb ik er een gevonden en ik denk dat het de hoogste boom van Nederland is: 25 meter! Het is een soort naald boom en hij staat nabij Baarn.

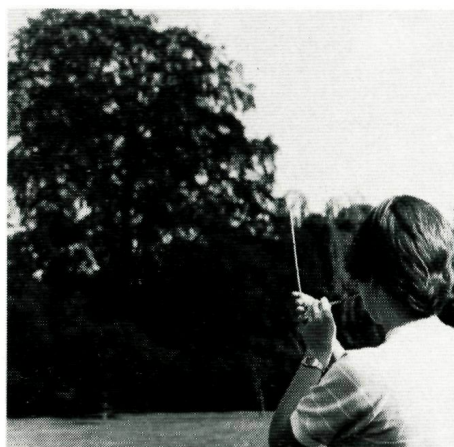
Ik heb hem opgemeten met de 'houtvestersmethode', zoals in uw artikel beschreven. Niet met zo'n mal plankje, maar precies zoals Staatsbosbeheer dat



doet . . . : twee even lange *takjes* die met hun uiteinden loodrecht op elkaar staan.

Leo Silakka, Amsterdam.

Ter herinnering



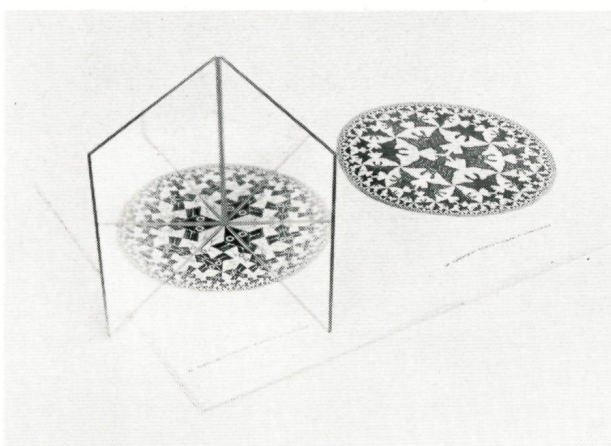
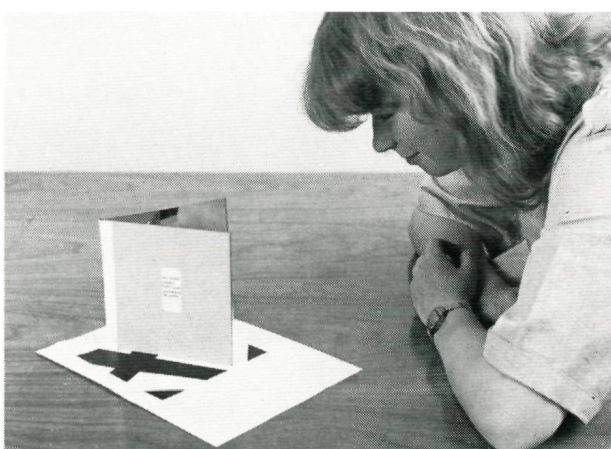
Houtvestersmethode voor hoogtemeting. Neem de takjes die loodrecht op elkaar staan en zet het uiteinde van een van de takjes boven je neus. Kijk langs dit takje naar de voet van de boom en loop zover naar achteren tot je langs het uiteinde van het andere takje de top van de boom ziet. De hoogte van de boom is dan jouw afstand tot de boom vermeerderd met je ooghoogte.

Reacties kun je richten aan het redactiesecretariaat. Het adres daarvan is te vinden op pagina 18.

Spelen met spiegels II

Het spiegelboek

Om een 'spiegelboek' te maken heb je twee spiegels nodig (heel geschikt zijn spiegeltegels die je voor ca. f 20,— bij een bouwmarkt kunt kopen), die je met breed isolatieband aan elkaar moet plakken. In dit boekwerk dat geen enkele bladzijde bevat, kun je oneindig veel mooie platen zien. Daartoe moet je het op een tafelkleed met een werkje zetten, of op plaatjes met een min of meer regelmatig patroon.



^

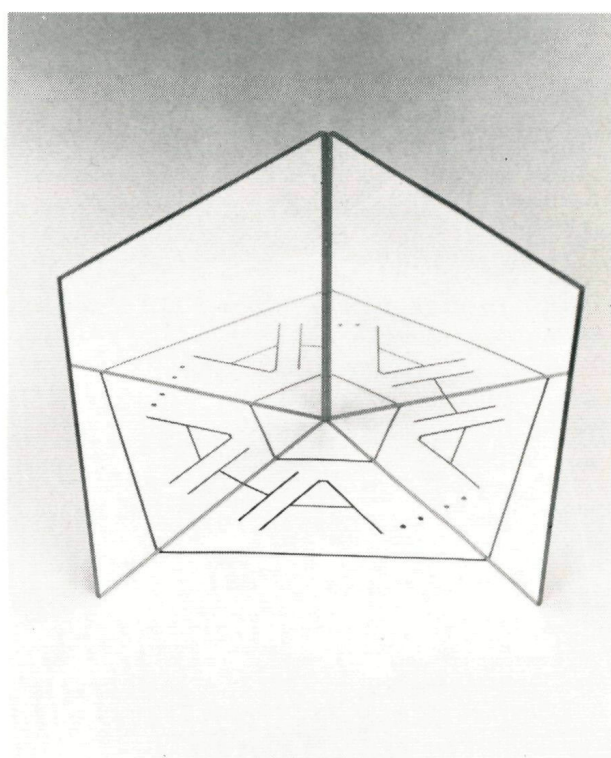
Boven: het spiegelboek.

Onder: tussen de spiegels is maar een gedeelte van de prent te zien. Doch in het spiegelboek zie je weer de volledige prent.

Alle veelhoeken

Met het spiegelboek en één lijn op een vel papier kun je elke regelmatige veelhoek maken die je maar hebben wilt. Voor een regelmatige n -hoek moet de openingshoek tussen de spiegels precies $360/n$ graden zijn.

Hieronder is op deze wijze een regelmatige vijfhoek gemaakt. De openingshoek tussen de spiegels moet dan $360/5 = 72$ graden zijn. Let bovendien eens op de verschillende spiegelbeelden van de letters (de A en de helft van de H), die boven de streep staan.



Je andere ik

Heb je ooit jezelf gezien zoals anderen je zien?

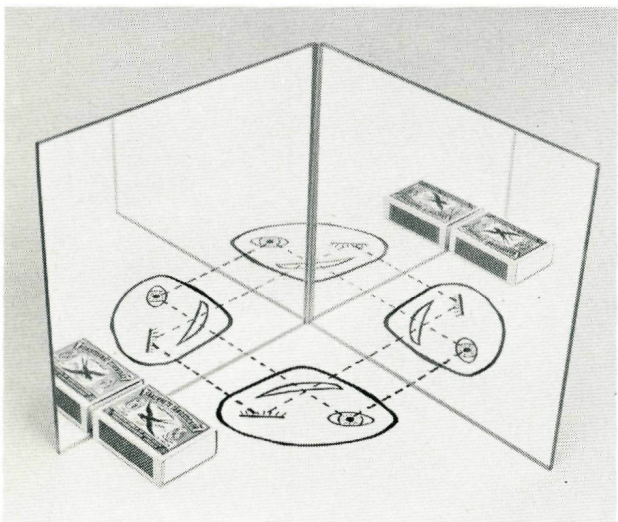
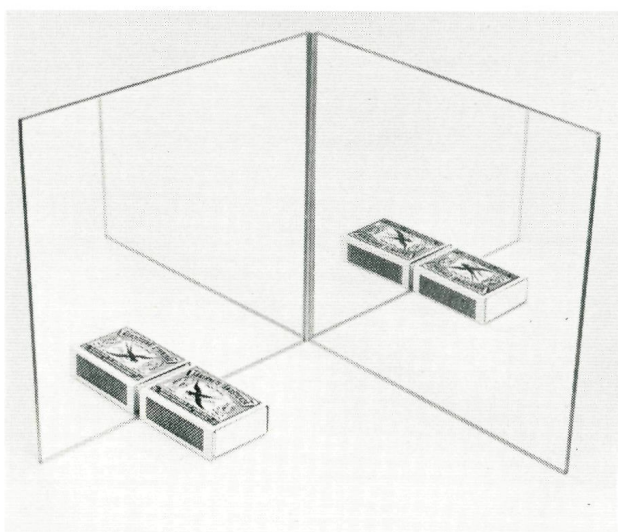
In een gewone spiegel gaat dat niet, want als jij met je linkeroog knipoogt, dan knipoogt je spiegelbeeld met het rechteroog.

Bekijk jezelf nu eens in het spiegelboek met een openingshoek van 90 graden en knipoog . . .

Wat er dan gebeurt, maken de foto's hieronder duidelijk. Op de bovenste foto zie je van het lucifersdoosje twee gewone spiegelbeelden (met de tekst in spiegel-schrift) en de in één lucifersdoosje samenvallende spiegelbeelden van deze spiegelbeelden (de letters zijn weer leesbaar!).

Op de onderste foto hebben we iemand getekend die met zijn linkeroog knipoogt; het samenvallende beeld van de spiegelbeelden knijpt ook zijn linkeroog toe.

De volgende keer gaan we kijken wat er met drie spiegels te beleven valt.



Verborgen telwoorden

Waar de woorden 'cent', 'dubbeltje' en 'kwartje' vandaan komen zul je vast al eens bedacht hebben. En anders kun je het misschien nu wel bedenken.

Van een groot aantal min of meer gebruikelijke woorden is veel minder bekend dat ze óók met getallen te maken hebben. Hieronder volgen er een aantal.

Quarantaine De gedwongen afzondering van binnengekomen schepen, ter controle op besmettelijke ziekten uit vreemde landen. Een 14e-eeuws voorschrift uit Venetië bepaalde dat dit veertig dagen (*quaranta giorni*) moest duren.

Punch Een drank, waarvan het recept uit Brits-Indië stamt. Met vijf bestanddelen: thee, arak, suiker, citroen en water. Het Sanskrit/Hindoestaanse woord voor vijf is *panch*. En door de *Punjab* in Pakistan stromen de vijf bronrivieren van de Indus.

Siesta Het Spaanse middagslaapje. Het betekent daar letterlijk 'het zesde uur'. In oude tijden, toen men gewoon was de dag (alleen tussen zonsopgang en zonsopgang) te verdelen in 12 uren, was dit dus rond het middaguur. Volgens die tijdrekening was een uur 's zomers dan ook een stuk langer dan 's winters!

Huzaar Waarschijnlijk afkomstig van het Hongaarse woord *husz* (= twintig). In de 16e eeuw beval de Hongaarse koning Mathias Corvinus dat ieder twintigtal huishoudens in een stad, één man (de huzaar) moest leveren voor het leger, en zijn uitrusting en onderhoud moest betalen.

Octopus Waarom heet een inktvis wel een 'octopus'? Wel, vanwege z'n acht vangarmen!

Oproep

De lijst van dergelijke woorden, waarbij je niet direct aan een telwoord denkt, is vast wel langer te maken. Kom je nog andere tegen, stuur die dan op naar de redactie. We zullen ze publiceren!

Maak 'm dik

Onlangs kreeg ik binnen één week twee spelletjes toegestuurd, die bedoeld waren voor de achterpagina. Bij nadere bestudering ontdekte ik dat er met die spelletjes iets bijzonders aan de hand was. Het bleek dat ze op hetzelfde neerkwamen!

Luciferspel

Het luciferspel wordt gespeeld met twee personen. Maak een stapeltje van één of meer lucifers op een rij. De aantallen zijn naar keuze. Om beurten pakken de spelers nu op het rijtje af (van rechts naar links) één of meer lucifers weg. Maar . . . van niet meer dan één stapeltje (het meest rechtse van de rij). Wanneer je je tegenstander kunt dwingen de laatste lucifer te pakken, heb je gewonnen.

Rechthoekenspel

Ook dit spel wordt gespeeld met twee personen. Neem een flinke rechthoekige strook ruitjespapier, waarvan elke zijde uit een geheel aantal ruitjes bestaat. Als je aan de beurt bent, knip of schrap je één

of meer even grote vierkanten over de volle breedte van de strook weg. Uiteindelijk blijft er één vierkant over. Wie dan aan de beurt is heeft verloren.

Analyse van het luciferspel In het spelvoorbeeld zie je al de grote rol van *gedwongen zetten*: beurten waarbij niets te kiezen valt doordat het 'stapeltje' maar één lucifer bevat. Om te winnen moet je ervoor zorgen dat *het aantal gedwongen zetten dat op jouw zet volgt oneven is*.

Dit kun je realiseren door óf een heel stapeltje te pakken, óf door er één lucifer van te laten liggen. Het resultaat is dat jij weer aan de beurt bent zodra er wat te kiezen valt. En dan doe je weer hetzelfde.

Analyse van het rechthoekenspel Alvorens de winnende strategie uiteen te kunnen zetten, moet je eerst eens kijken naar een zeer speciale rechthoek: de **gouden rechthoek**. Deze rechthoek, die zowel binnen als buiten de wiskunde beroemd is, kun je verdelen in een vierkant en weer een gouden rechthoek. Dit is mogelijk wanneer de lengte en de breedte van de gouden rechthoek zich ongeveer verhouden als 1,62 : 1.

Nu komt de gouden rechthoek zelf niet in ons spel voor, want het spel zou er eindeloos mee blijven doorgaan. Wel geeft hij de grens aan tussen wat we zullen noemen *dunne* en *dikke rechthoeken*. Dit onder-

Spelvoorbeelden

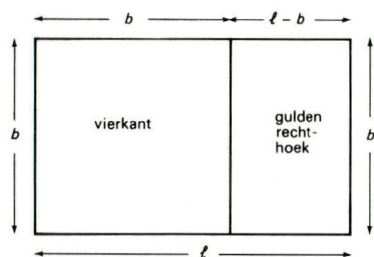
Luciferspel gespeeld door spelers A en B. A begint en neemt helemaal rechts een heel stapeltje (twee lucifers) weg. B dwingt A echter de laatste lucifer te pakken (helemaal links) en wint.

Rechthoekenspel gespeeld door spelers A en B met een rechthoek van 159 bij 59. A begint en knipt twee vierkanten van 59 bij 59 weg. B geeft de laatste knip, laat een vierkant achter en wint.

scheid is belangrijk omdat een speler

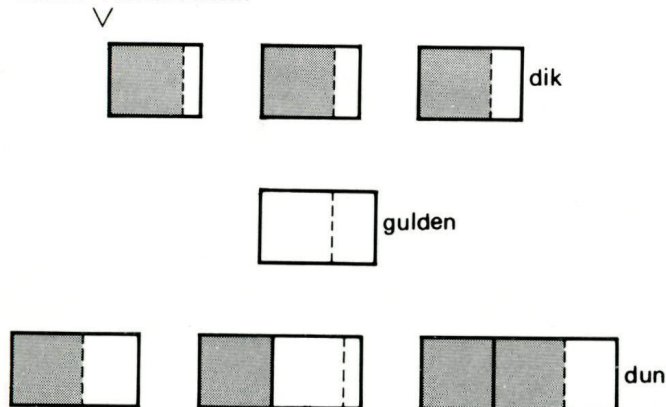
- van een *dikke rechthoek* beslist maar één vierkant kan afhalen en er dan noodgedwongen een dunne rechthoek van maakt;
- van een *dunne rechthoek* altijd, als hij dat wil, een dikke rechthoek kan maken.

Om je hiervan te overtuigen moet je de figuren hieronder maar eens nader bekijken. Bedenk daarbij nogmaals dat de gulden rechthoek niet in het spel voor kan komen, ook niet met extra vierkanten eraan geplakt.



De gulden rechthoek is te verdelen in een vierkant en een nieuwe gulden rechthoek, m.a.w. $l : b = b : (l - b)$. De lengte/breedte-verhouding die hieruit volgt is ongeveer gelijk aan $1,62 : 1$.

De gulden rechthoek vormt de grens tussen 'dikke' en 'dunne' rechthoeken.



Om het rechthoekenspel te winnen moet je er steeds voor zorgen dat je tegenspeler een dikke rechthoek krijgt, en daar kan hij dan alleen maar een dunne van maken. Jij maakt daar weer een dikke van, enz. Eens zal die dikke rechthoek die jij aan je tegenspeler geeft het slotvierkant zijn, en dan heb je gewonnen! Alleen

als jij moet beginnen met een dikke rechthoek, zit je tegenstander in de voordeligste positie. Of hij daar gebruik van weet te maken is natuurlijk de vraag.

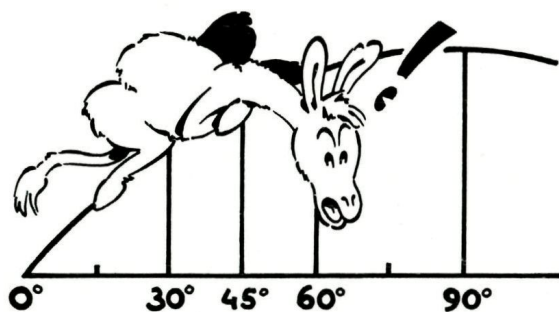
De strategie van het 'dik maken' kun je ook zo omschrijven: *geef steeds aan je tegenstander een rechthoek door die zoveel mogelijk op een vierkant lijkt.*

Luciferspel = rechthoekenspel

Dat het luciferspel en het rechthoekenspel op precies hetzelfde neerkomen, is een kwestie waar je misschien al lang achter bent gekomen. En als je het nog niet ziet, moet je op elk vierkant van de rechthoek maar eens een lucifer neerleggen!

Vind je het niet opmerkelijk dat de gegeven analyses van beide spelen toch heel verschillend zijn? Bij het ene spel kijk je vooruit (oneven aantal gedwongen zetten), bij het andere kijk je naar de spelsituatie van het moment (dikke of dunne rechthoek).

Sinus-bruggetje



$$\begin{aligned}\sin 0^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{0} \\ \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{1} \\ \sin 45^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{2} \\ \sin 60^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{3} \\ \sin 90^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{4}\end{aligned}$$

Pythagoras Olympiade



Nieuwe opgaven (Oplossingen inzenden vóór 1 februari 1984 aan *Pythagoras Olympiade, Oltmansdreef 21, 2353 CK Leiderdorp (NL)*. Wedstrijdvoorwaarden en prijzen staan vermeld op pagina 13 van deze jaargang.)

PO 61.

De getallen van 1 tot en met 100 worden in tien groepjes van tien verdeeld. De som van de getallen in het j -de groepje noemen we s_j .

Bij welke verdeling is het product: $s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdot \dots \cdot s_9 \cdot s_{10}$ zo klein mogelijk?

PO 62.

Bepaal alle paren positieve gehele getallen (n, m) waarvoor geldt dat

$$1! + 2! + \dots + n! = m^2.$$

($k!$ is een afkorting voor $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$)

PO 63.

Bewijs: als je drie punten kiest in een vierkant met zijde 1 dan is er een tweetal onder met een afstand kleiner dan of gelijk aan $\sqrt{6} - \sqrt{2}$.

Laat ook zien dat het geval $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ in de vorige zin niet vervangen kan worden door een kleiner getal.

Uitslag ladderwedstrijd 1982/83

Aan de Pythagoras Olympiade uit de vorige jaargang namen in totaal 170 leerlingen één of meer keren deel:

126 stuurden 1 maal oplossingen in,

25 stuurden 2 maal oplossingen in,

10 stuurden 3 maal oplossingen in,

9 stuurden 4 maal oplossingen in.

De moeilijkheidsgraad van de verschillende opgaven liep heel erg uiteen: er waren gemakkelijke opgaven bij, maar ook een paar waar vrijwel niemand uitkwam. De uitslag van de ladderwedstrijd is:

1. Rutger Noot,	
6g, Gymnasium Haganum, Den Haag	12 p
2. Menke Ubbens,	
5ath, RSG Magister Alvinus, Sneek	11 p
3. Auke Zijlstra,	
6ath, RSG Leeuwarden	10½ p
4. Jan de Boer,	
5vwo, RSG Magister Alvinus, Sneek	10 p

5/6. Roelant Nieboer,	
5g, Herman Wesselink College, Amstelveen	9 p
Frank Robijn,	
5vwo, RSG Koning Willem II, Tilburg	9 p
7. Wiebe Kees Goodijk,	
5g, Chr. Gymnasium, Leeuwarden	8½ p
8. Machiel van Frankenhuysen,	
4g, Stedelijk Gymnasium, Nijmegen	8 p
9/10. Reinder Beurskens,	
5vwo, Nijmeegse SG, Nijmegen	7½ p
Klaas Wijbrans,	
6vwo, Chr. Lyceum, Almelo	7½ p
11/13. Victor Allis,	
6g, Herman Wesselink College, Amstelveen	6 p
Luc Crauwels,	
5 LWi, Xaverius College, Borgerhout, België	6 p
Bart de Smit,	
5g, Barlaeus Gymnasium, Amsterdam	6 p
14/15. Gerard Barkema,	
5vwo, CSG Oostergo, Dokkum	5½ p
Dirk Ophoff,	
4vwo, Gereformeerd Lyceum, Groningen	5½ p

Oplossing en prijswinnaars van opgave PO 49

PO 49.

Gegeven is een rechthoekige driehoek met zijden van gehele lengte. De lengte van de schuine zijde is p , de oppervlakte van de driehoek is q .

Bewijs dat elk van de vier vergelijkingen

$$x^2 \pm px \pm q = 0$$

twee gehele wortels heeft.

Oplossing van *K. T. Nool*, 4havo, Heymans College Groningen:

Stel dat a en b de beide rechthoekszijden zijn, met $a > b$, dan geldt:

$p = \sqrt{a^2 + b^2}$ en $q = \frac{1}{2}ab$. De wortels van $x^2 + px + q = 0$ zijn $-\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}(a-b)$; die van $x^2 + px - q = 0$ zijn $-\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}(a+b)$; $x^2 - px + q = 0$ geeft $\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}(a-b)$ en $x^2 - px - q = 0$ geeft $\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}(a+b)$.

Stel p is even, dan is p^2 een viervoud, dus $a^2 + b^2$ ook. Dat kan alleen als a^2 en b^2 beide viervouden zijn, dus a en b zijn even. De wortels zijn dan dus gehele getallen.

Stel p is oneven, dan is p^2 een viervoud plus 1, en $a^2 + b^2$ dus ook. Dat kan alleen als van de getallen a en b er precies één oneven is. Ook in dit geval zijn de wortels dus gehele getallen.

Er waren 46 inzendingen, waarvan 42 correct. Prijswinnaars: *Gert Jan van Oosten*, 4vwo, Zandeveld College, 's-Gravenzan-de, en *Frank Robijn*, 5gymn., RSG Koning Willem II, Tilburg.

Internationale Wiskunde Olympiade



Opgaven Internationale Wiskunde Olympiade

Eerste dag (6 juli 1983; beschikbare tijd: $4\frac{1}{2}$ uur)

De Nederlandse ploeg heeft van de zomer bij de 24e Internationale Wiskunde Olympiade in Parijs een beste beurt gemaakt. Zevende op de ranglijst van 32 landen, en eenmaal goud en drie maal zilver voor individuele prestaties. *Daan Krammer* uit Hengelo kreeg met 38 punten een gouden medaille (het maximum was 42 punten), en zilver was er voor *Victor Allis* uit Aalsmeer (35 p), *Daniel Tuijnman* uit Arnhem (30 p) en *Menke Ubbens* uit Sneek (26 p).

De overige Nederlanders, *Ronald Beekelaar* uit Bussum en *Bart de Smit* uit Amsterdam, vielen buiten de prijzen. Deze zeer zware wedstrijd (de helft van de 186 deelnemers behaalde minder dan 15 punten!) bestond uit twee zittingen van $4\frac{1}{2}$ uur voor telkens drie opgaven. Die zes sommen drukken we hierbij af. Voor de oplossingen kun je schrijven naar: *J. van de Craats, Mathematisch Instituut, Postbus 9512, 2300 RA LEIDEN.*

De ploeg stond onder leiding van J.M. Notenboom en J. van de Craats. De landenranglijst met het totaal aantal punten per land, was als volgt:

1. West-Duitsland	212	17. Israël	96
2. USA	171	18. Joegoslavië	89
3. Hongarije	170	19. Australië	86
4. Sovjet Unie	169	20. Brazilië	77
5. Roemenië	161	21. Zweden	47
6. Vietnam	148	22. Oostenrijk	45
7. Nederland	143	23. Spanje	37
8. Tsjechoslowakije	142	24. Cuba	36
9. Bulgarije	137	25. Marokko	32
10. Frankrijk	123	26. Tunesië	31
11. Groot Britannië	121	27. België	26
12. DDR	117	28. Colombia	21
13. Finland	103	29. Luxemburg	13
14. Canada	102	30. Algerië	6
15. Polen	101	31. Koeweit	4
16. Griekenland	97	32. Italië	2



1. Bepaal alle functies f die de verzameling van de reële getallen groter dan nul in zichzelf afbeelden, die voldoen aan de volgende voorwaarden:
(i) $f(x f(y)) = y f(x)$ voor alle reële $x, y > 0$,
(ii) $f(x) \rightarrow 0$ voor $x \rightarrow \infty$

2. Gegeven zijn in het vlak twee elkaar snijdende cirkels C_1 en C_2 met ongelijke stralen en met middelpunten O_1 respectievelijk O_2 .

A is één van de twee snijpunten van de cirkels. Eén van de twee gemeenschappelijke raaklijnen raakt C_1 in P_1 en C_2 in P_2 , de andere gemeenschappelijke raaklijn raakt C_1 in Q_1 en C_2 in Q_2 .

M_1 is het midden van $P_1 Q_1$, M_2 is het midden van $P_2 Q_2$.

Bewijs: $\angle O_1 A O_2 = \angle M_1 A M_2$.

3. a, b en c zijn gehele getallen groter dan nul. $\text{ggd}(a, b) = \text{ggd}(b, c) = \text{ggd}(c, a) = 1$.

Bewijs dat $2abc - ab - bc - ca$ het grootste getal is dat niet geschreven kan worden in de vorm $xbc + yca + zab$ met x, y en z gehele getallen groter dan of gelijk aan nul.

Tweede dag (7 juli 1983; beschikbare tijd: $4\frac{1}{2}$ uur)

4. Gegeven is een gelijkzijdige driehoek ABC . E is de verzameling bestaande uit alle punten van de lijnstukken AB, BC en CA , inclusief de eindpunten.

Is het voor elke partitie van E in twee deelverzamelingen mogelijk om in minstens één van de twee deelverzamelingen drie punten te vinden die de hoekpunten vormen van een rechthoekige driehoek? Bewijs je antwoord.

(V en W vormen een partitie van E als geldt:

$V \cup W = E$ en $V \cap W = \emptyset$.)

5. Is het mogelijk om 1983 verschillende gehele getallen te kiezen, alle groter dan nul en kleiner dan of gelijk aan 100.000, zo, dat er geen drie bij zijn die opvolgende termen zijn van een rekenkundige rij? Bewijs je antwoord.

6. Van een driehoek zijn de lengtes van de zijden a, b en c . Bewijs:

$$a^2 b (a-b) + b^2 c (b-c) + c^2 a (c-a) \geq 0.$$

Bepaal wanneer het gelijkteken geldt.

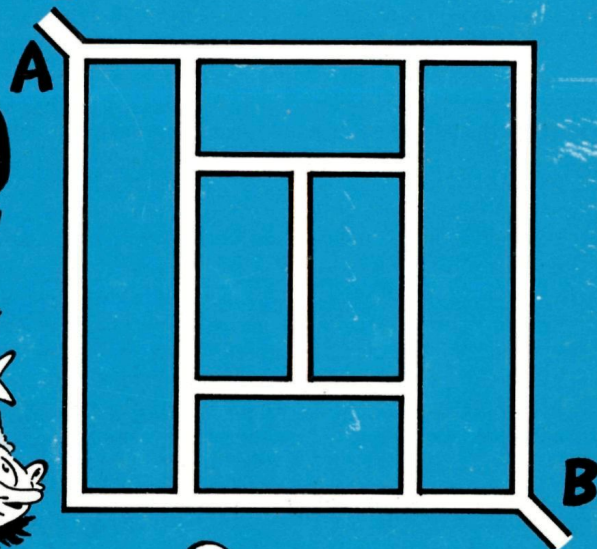
Voor elke opgave kon maximaal 7 punten behaald worden.

< De Nederlandse ploeg bij de Internationale Wiskunde Olympiade na afloop van de prijsuitreiking op 11 juli 1983 in de Sorbonne te Parijs. Achter v.l.n.r. Bart de Smit, Menke Ubbens, Victor Allis en Daan Krammer, voor: Daniel Tuijnman en Ronald Beekelaar.

Ontspanning of inspanning?

De langste weg

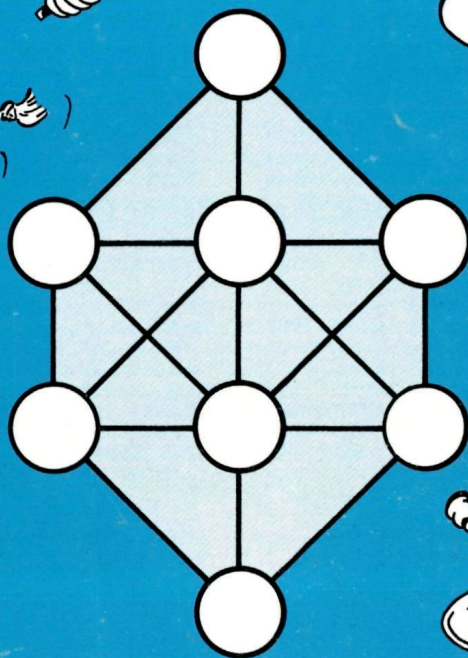
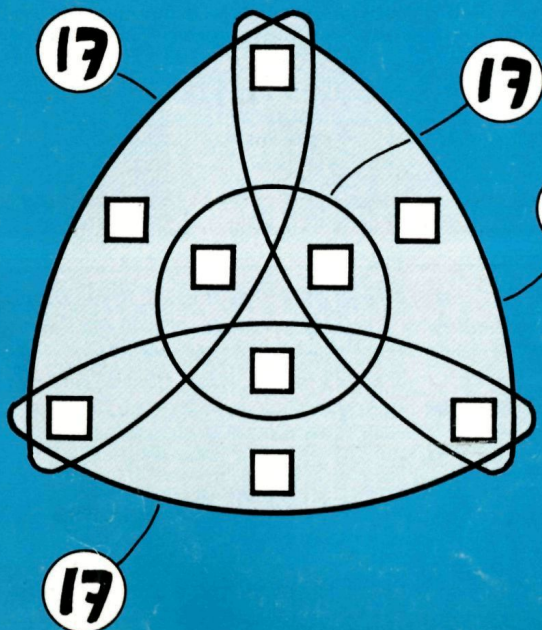
Een fanfarekorps maakt een rondgang door een wijk waarvan hieronder de straten getekend zijn. Het korps loopt van A naar B, langs een zolang mogelijke route zonder ergens eenzelfde stuk tweemaal af te leggen. Zoek eens uit hoe.



Steeds tot zeventien

Probeer de getallen 1 tot en met 9 in de negen vierkante hokjes te plaatsen, zodat in elk van de vier aangegeven kringen de som gelijk wordt aan *zeventien*.

Er zijn twee verschillende oplossingen mogelijk.



Geen opeenvolgende getallen

Probeer de getallen 1 tot en met 8 in de rondjes te plaatsen, zodat in rondjes die door een lijntje met elkaar worden verbonden, geen opeenvolgende getallen komen.

Wanneer je dus in het bovenste rondje een 3 plaatst, mogen in elk van de rondjes op de horizontale rij daaronder de getallen 2 én 4 *niet* voorkomen.

