



Verschijnt vier keer per jaar

Wiskundetijdschrift voor jongeren

Pythagoras



3 Jaargang 23 februari 1984

Wolters-Noordhoff

Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Redactie

Jan van de Craats, Luc Kuijk, Klaas Lakeman,
Henk Mulder, Hessel Pot, Hans de Rijk, Leo Wiegerink

Secretariaat

Leo Wiegerink, Egelandiersstraat 107^{II}
1015 PZ Amsterdam.

*Aan dit adres kunnen reacties op en bijdragen voor
Pythagoras worden gezonden.*

Pythagoras verschijnt 4 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via
één der docenten, f 9,20 per jaargang.
Voor anderen f 13,95.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-
Noordhoff bv, Afdeling Periodieken,
Postbus 567, 9700 AN Groningen.
Voor België bij J. B. Wolters-Leuven, Blijde
Inkomststraat 50, Leuven; postchecknummer
000-000 8081-30.

Abonnees wordt dringend verzocht met betalen te
wachten tot hun een acceptgirokaart wordt
gezonden.

Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met
een minimum van 5) wordt één gratis abonnement
verstrekkt. Maximaal 10 gratis abonnementen per
school.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud
zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de
redactie is niet toegestaan.

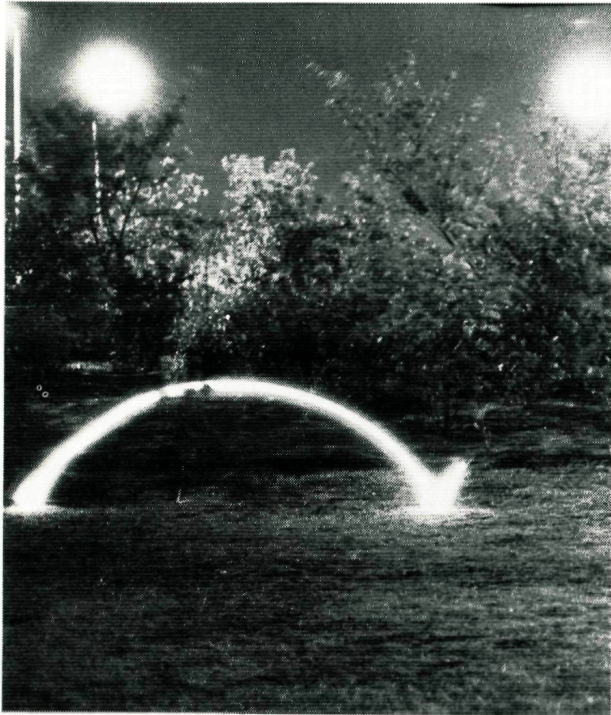
Inhoud

Van spatlap tot ventielkromme	35
<i>Aad Goddijn</i>	
Verpakte zuivel	37
<i>Jan van de Craats</i>	
Bourges I	38
<i>Klaas Lakeman</i>	
Nieuw priemrecord	39
<i>Klaas Lakeman</i>	
Correspondentie (paardesprong)	40
De 5 vijven	41
<i>Nol van 't Riet</i>	
Spelen met spiegels III	42
<i>Ton Konings</i>	
Een reuzengetal op de computer	44
<i>Leo Wiegerink</i>	
Nederlandse Wiskunde Olympiade	45
<i>Jan van de Craats</i>	
Pythagoras Olympiade	46
<i>Jan van de Craats</i>	
Magische honingraat / Help de bij	48
<i>Luc Kuijk</i>	

Rectificatie In nummer 2 staat op pag. 28, 1e kolom,
regel 9: 'Maak een stapeltje . . .'. Dit moet zijn:
'Maak stapeltjes . . .'

Het waggelwiel Na het verschijnen van het eerste
nummer van deze jaargang bleek dat we hadden verge-
ten, te vermelden dat het waggelwiel op pagina 6
rechtsboven, is ontworpen door Willem Noyons, De
Bilt.

Bij de voorplaat De winnaars van de 5 vijvenwed-
strijd snijden de reuzentaart aan. De winnende ploeg
bestond uit Peter Brinkerink, Karin Lowie, Armande
Slagter, Inge Hoving, Carolien Meyer, Wolter Sillevius
Smitt, Gonny de Rie, Barbara Reidsma, Jaap van der
Windt en Linda Hoebe allen leerlingen van het Chr.
Grifland College te Soest. Meer over de afloop van de
wedstrijd kun je lezen in het artikel 'De 5 vijven' op
pagina 41.



Van spatlap tot ventielkromme

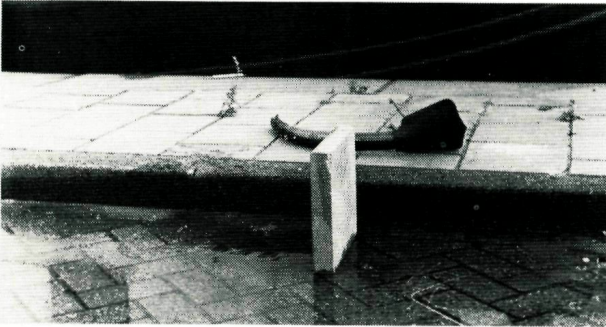
Je kent die plaatjes wel: een auto of fiets rijdt door een plas water en je ziet hoe het water opspat.

Het lijkt alsof het water aan de achterkant van het wiel tegen de rijrichting in vliegt. Nu zie ik niet in waarom dat zo zou zijn, de fiets rijdt toch vooruit en waarom zouden die losse druppels dan ineens achteruit moeten gaan? Maar als ze niet achteruit vliegen, waar is dan die spatlap nog voor nodig?

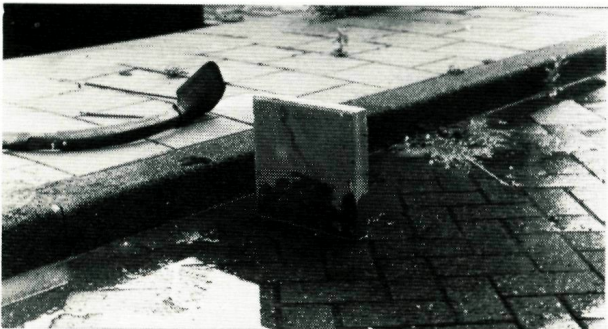
Uit onderstaande proef blijkt dat het water inderdaad meer naar voren dan naar achter vliegt, maar wellicht weet je ook uit ervaring dat een spatlap echt nodig is.

Om dat te kunnen verklaren zullen we ons eerst in het gedrag van één druppel verdiepen. Bovendien kunnen we daarna uit de doeken doen, hoe de lichtgevende boog op de foto hiernaast tot stand is gekomen!

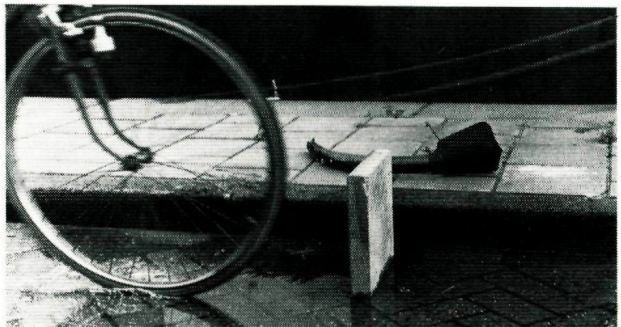
Proef



A Zet een droge stoeptegél voorzichtig op zijn kant in een plas water.



C Deze kant is nat. Het water kwam dus naar voren.



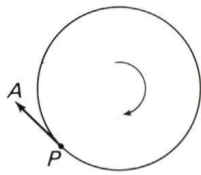
B Rijd er nu met je fiets (zonder spatbord en spatlap) vlak langs.



D En inderdaad, deze kant blijkt droog te zijn.

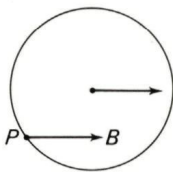
Eén druppel, twee bewegingen

Stel je voor: een druppel gaat een stuk met de uiterste rand van je wiel mee en laat dan op zeker moment los. Welke kant gaat de druppel op dat moment uit? Bekijk het eerst eens vanaf de fiets. Ten opzichte van de fiets draaide de druppel zoëven nog rond, op het moment dat de druppel loslaat, is er dus zoiets aan de hand.



Pijl *A* geeft de richting aan waarin de druppel beweegt, op het moment dat hij loslaat. Deze pijl raakt aan de cirkel.

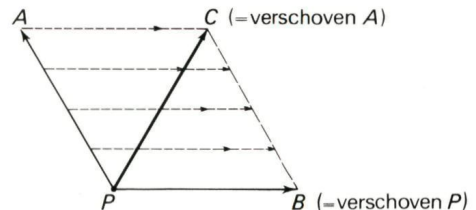
De fiets als geheel beweegt ook naar voren, dus heeft de druppel óók nog de snelheid van de fiets in horizontale richting. In het volgende tekeningetje geeft pijl *B* die snelheid aan.



Met de lengte van de pijlen kun je de grootte van de snelheid aangeven; voor ons is alleen van belang dat pijl *A* en pijl *B* even lang zijn. Waarom dat zo is? Dat weet je wel! (Bekijk het maar eens ten opzichte van jezelf op de fiets: de straat gaat met een snelheid even groot als *B* onder je door en laat, met ook weer dezelfde snelheid, je wiel draaien. Tenminste als je band niet slipt!)

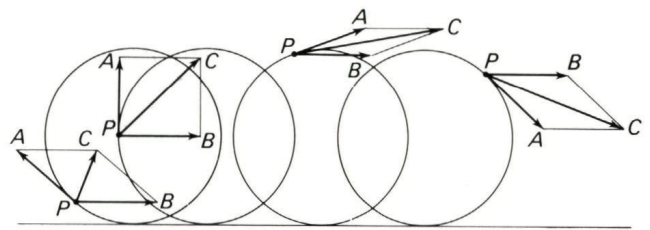
Uit *A* en *B* moeten we nu de echte beweging, d.w.z. de beweging ten opzichte van de straat, zien te vinden. Pijl *A* geeft de snelheid van de druppel (t.o.v. de fiets) aan op het moment dat de druppel loslaat. Maar stel je nu eens voor dat die snelheid een tijdje zo blijft. In een bepaalde tijd beweegt de druppel zich dan van *P* naar het eind van pijl *A*. Maar in diezelfde tijd beweegt de lijn *PA* met de fiets naar rechts. *PA* blijft daarbij in dezelfde stand en aan het eind van dat tijdje

is *P* juist op het einde van de pijl naar rechts, het punt *B*, aangekomen.



Dus *C* is het punt waar de druppel uit zou komen. Maar dan is pijl *PC* juist de echte snelheid die we zochten. Merk je ook nog even dat *PC* de hoek tussen *PA* en *PB* juist middendoor deelt?

Je kunt *C* vinden door de figuur van *PA* en *PB* uit te breiden tot een parallelogram (in dit geval zelfs een ruit). In onderstaande tekening is dat nog eens voor vier verschillende standen van het wiel gedaan.



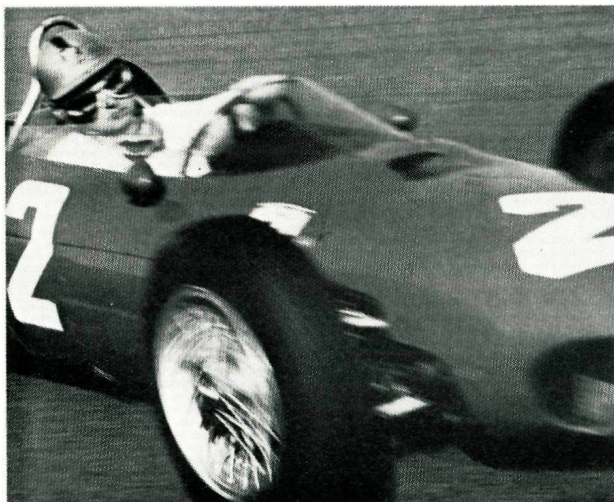
Dat verklaart heel wat meer!

Ten eerste. Pijl *B* wijst altijd horizontaal naar voren. Omdat pijl *A* niet groter is dan pijl *B*, kan het niet gebeuren dat een druppel naar achter gaat.

Ten tweede. Bovenop het wiel gaat het heel hard. Daar staan de pijlen *A* en *B* in dezelfde richting. De snelheid is verdubbeld.

Ten derde. Als *P* op de grond zit, heffen de pijlen *A* en *B* elkaar juist op. *P* staat dan dus stil. Dat wisten we al, maar het is prettig om te zien dat de pijlenredenering met de werkelijkheid klopt!

Dit laatste wordt nog eens verduidelijkt met de volgende foto van een hard rijdende racewagen. Op deze momentopname staan de spaken onderaan wel scherp afgebeeld, maar bovenaan het wiel niet.



O ja, die spatlap! Nou, voor de spatlap telt pijl *B* natuurlijk niet mee, want die geeft de beweging van de fiets ten opzichte van de straat aan. Blijft over pijl *A* en die kan wel degelijk naar je (met de fiets meegaande) benen wijzen.

De ventielkromme

Neem nu een vast punt op de buitenkant van je wiel in gedachten. Voor het gemak kun je het ventiel nemen, maar eigenlijk moet het punt echt buitenop het wiel liggen.

Dat punt begint op de grond, beweegt in een of andere baan naar boven (de fiets is dan juist een halve wielomtrek verder) en gaat dan weer naar beneden. Een hele wielomtrek vanaf het begin komt het punt weer op de grond en dan begint alles weer opnieuw. De bewegingsrichting van het punt weten we uit het druppel-verhaal. Door in een paar standen van het wiel een schetsje te maken krijg je een aardige indruk van de 'ventielkromme', die officieel trouwens *cycloïde* genoemd wordt.

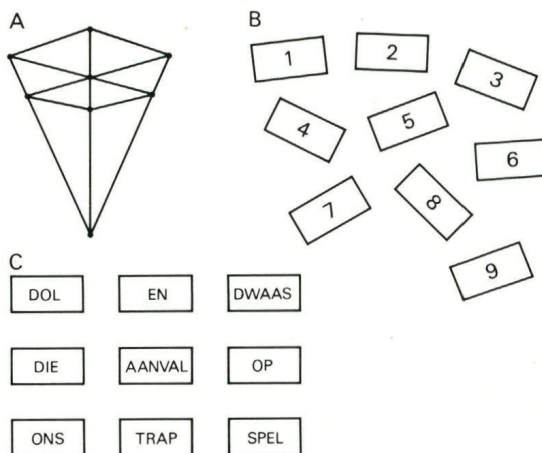
De lichtgevende boog op de foto aan het begin van dit verhaal is, zoals je nu wel begrepen zult hebben, een cycloïde. De opname werd gemaakt door een batterij tussen de spaken van een fietswiel te hangen en een lampje op de velg vast te klemmen. Terwijl de sluiters open staat rijd je voor de camera langs, uiteraard in het donker.

Verpakte zuivel

Boter-Kaas-en-Eieren is nou niet bepaald een erg opwindend spelletje. Het is alleen leuk als je het met iemand speelt die het niet kent. Dan kun je nog wel eens winnen. Maar speel je het allebei zonder fouten, dan eindigt het altijd in remise.

Het wordt weer leuk als je de boter, de kaas en de eieren zó verpakt, dat de ander nietsvermoedend aan een totaal ander — en op het eerste gezicht veel onoverzichtelijker — spelletje bezig denkt te zijn. Hieronder staan drie van die surprise-verpakkingen.

Herken je ze als Boter-Kaas-en-Eieren? Vind je het ook niet frappant dat in vier totaal verschillende verschijningsvormen eenzelfde wiskundige structuur verstopt zit? Op pagina 40 staat het verband uitgelegd.



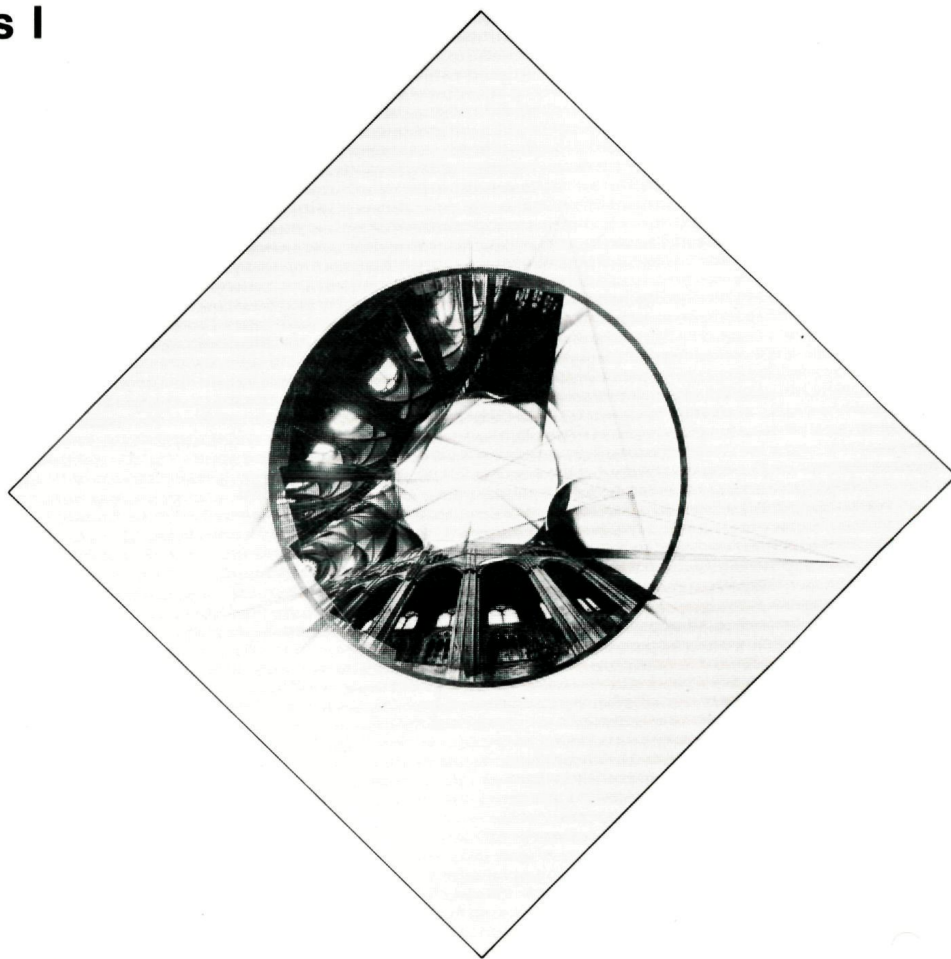
Verpakkingen: A Vlieger, B Vijftien, C Kaartvoetbal.

A. Vlieger Teken met potlood deze vlieger na. Trek dan om beurten, ieder met een andere kleur, een hele lijn (dus door eventuele punten heen) over. Wie het eerst drie lijnen van dezelfde kleur door één punt heeft, is de winnaar.

B. Vijftien Kies om beurten telkens één kaartje uit. Je wint als je drie kaartjes hebt met een som van 15.

C. Kaartvoetbal Als bij vijftien, maar nu wint degene die als eerste drie kaartjes met minstens één gemeenschappelijke letter heeft.

Bourges I



Bourges I is een collage van elf vierkante kleurenfoto's van het interieur van de kathedraal van Bourges (Frankrijk). Deze foto's zijn op een stuk geplastificeerd spaanplaat van 185 cm bij 185 cm gemonteerd, dat aan één van zijn hoekpunten is opgehangen. Dit kunstwerk, dat vervaardigd is door de Nederlander Jan Dibbets (geb. 1944), kwam ik de afgelopen zomer in het Stedelijk Museum van Amsterdam tegen.

De kathedraal van Bourges, die werd ingewijd in 1324, bestaat uit één lang en hoog middenschip. Hierdoor is de ruimte in de kerk gemakkelijk te overzien. Maar toch zou je deze ruimte nooit zó in één oogopslag kunnen waarnemen als op de fotocollage van Jan Dibbets.

Je zou ongeveer hetzelfde resultaat bereiken wanneer je op je rug liggend met een camera voorzien van een supergroothoeklens vanaf de grond recht omhoog een foto zou kunnen maken.

Het nemen van de foto's

Zo'n supergroothoeklens bestaat natuurlijk niet. De fotograaf is ergens in de kerk gaan staan en vanuit één vaste positie maakte hij in verschillende richtingen opnamen. De camera hield hij daarbij iets omhoog gericht, zodat de vloer net niet zichtbaar werd en je enigszins schuin langs de zuilen naar boven kijkt. Hij begon bij de dichtstbijzijnde zuil (deze foto vind je in de collage rechtsonder). Voor de volgende opname draaide de fotograaf zich een stukje naar links, en voor de daaropvolgende weer een stukje, enz. Daarbij moest hij er natuurlijk wel voor zorgen dat opeenvolgende foto's een zekere overlap zouden gaan vertonen. Na het afdrukken van de foto's kon dan een aaneensluitend geheel worden verkregen door de overlappende delen van twee naburige foto's over elkaar heen te leggen.

Het resultaat

Wanneer je nu de collage in z'n geheel bekijkt zie je dat alle muren van de kerk er op staan. Begin maar eens bij de eerste foto (rechtsonder) en ga met de wijzers van de klok mee langs de foto's. De eerste vier opnamen geven samen een deel van een zijmuur weer. Op de vijfde foto (ongeveer op acht uur!) staat de voormuur. Deze foto is dus praktisch in de lengterichting van het middenschip gemaakt. De volgende vijf opnamen tonen de andere zijmuur en de laatste foto is wederom in de lengterichting van het middenschip gemaakt, maar nu naar achteren.

En dan? Ja, dan kom je tot de conclusie dat de foto-graaf zich niet helemaal rond zijn as moet hebben gedraaid, want de aansluiting tussen de foto's middenboven en rechtsonder ontbreekt.

Maar er valt meer te ontdekken! De aaneengesloten foto's vormen een brede cirkelvormige band, hoewel aan de randen hier en daar met potlood wat bijgetekend moest worden. Enkele zuilen zijn naar boven toe met potlood doorgetrokken en komen in het middelpunt van die cirkelvormige band samen. Het is zelfs zo dat alle lijnen die evenwijdig aan de zuilen lopen, door dat middelpunt gaan! Dat is niet toevallig. Daar elke foto in een richting gemaakt is die niet loodrecht op de zuilen staat, leveren de doorgetrokken zuilen op elke foto een *vluchtpunt*. Vergelijk dit maar eens met de 'gewone' foto van de kerk. Deze is genomen in een richting loodrecht op de zuilen. Daardoor zie je die evenwijdig. Hier hebben andere lijnen



< 'Gewone' opname van de kathedraal van Bourges, loodrecht op de zuilen. Het vluchtpunt van de lijnen in de lengterichting van de kerk ligt ongeveer in het midden van de foto.

een vluchtpunt, bijvoorbeeld lijnen in de lengterichting van de kerk.

Je kunt dus zeggen dat het vluchtpunt van de zuilen eigenlijk een punt is dat op elke foto 'staat'. Het vormt dan ook het verbindende element van alle foto's. Doorgaans wordt dit een *perspectief* genoemd: een bundel evenwijdige lijnen die je ziet als snijdende lijnen door een gemeenschappelijk vluchtpunt.

Op de collage van Dibbets zijn niet alleen de zuilen met potlood doorgetrokken, maar ook een aantal lijnen die evenwijdig lopen aan het gewelf, zijn verlengd. Deze komen in (vlucht)punten buiten de band samen en brengen nog een aantal andere perspectieven in het geheel aan.

Al met al is het resultaat een fraaie weergave van een ruimtelijke constructie en geeft een redelijke benadering voor een supergroothoek-opname. Je ziet in één oogopslag veel meer dan ooit in de werkelijkheid zou kunnen.

Nieuw priemrecord

In het vorige nummer werd vermeld dat het getal $2^{86243} - 1$ het grootste getal is, waarvan we zeker weten dat het een priemgetal is. Doch eind september 1983 maakte de Amerikaan Davis Slowinski bekend dat hij al weer een groter priemgetal had gevonden: $2^{132049} - 1$. Maar toen was het tweede nummer van Pythagoras al onderweg naar de drukker. Daarom maken we er hier melding van en hopen dat dit record niet gebroken is, voordat je dit nummer in handen krijgt.

Overigens drukten een aantal regionale kranten in de Zaanstreek en de omgeving van Haarlem met hulp van het Centrum voor Wiskunde en Informatica uit Amsterdam, dit 39751 cijfers tellende getal volledig af. Dat nam een hele krantenpagina in beslag. Maar helaas bleek er ergens iets fout te zijn gegaan, waardoor het afgedrukte getal 39754 cijfers bevatte. En dat getal was geen priemgetal, zoals enkele lezers aantoonde.

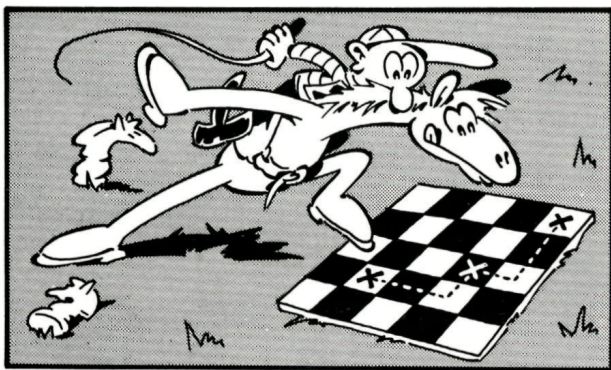
Wat het nut is van die jacht op grote priemgetallen? Daar hopen we in de volgende jaargang uitvoerig op in te gaan.

Correspondentie

Paardesprong

Op de Pythagoras-poster kwam ik een probleem tegen waarmee ik al lang bezig was, dat van de paardesprong:

Probeer alle velden van een schaakbord van 5 bij 5 met paarden te bezetten, en wel zodanig dat van het 1e naar het 2e, van het 2e naar het 3e, enz. tot en met het 25e paard gesprongen kan worden met een 'paardesprong'.



Toen ik eenmaal ontdekt had dat er meerdere oplossingen waren, rees bij mij de vraag: 'Hoeveel oplossingen zouden er in totaal zijn?'

Berekeningen liepen al snel spaak, en daarom heb ik een algoritme ontworpen waarmee dit probleem kon worden opgelost.

Nadat ik het algoritme in een BASIC-programma had omgezet, leverde de computer al snel één oplossing. Op een tweede viel echter al niet meer te wachten. Na een nacht werken vond de computer bijvoorbeeld één oplossing vanuit de beginpositie (3,3). Geconfronteerd met de langzame verwerking van een BASIC-programma, ben ik maar machinetaal (assembler) gaan leren. Nadat ik het algoritme daarin had omgezet, kreeg ik binnen vijf minuten al meer dan 100 oplossingen vanuit (1,1).

Dit opende perspectieven. Ik heb de oplossingen toen niet meer laten onthouden, maar een tellertje ingebouwd, zodat werd bijgehouden hoeveel oplossingen er waren gevonden. Dit programma liet ik vanaf 2 uur 's middags draaien, en de volgende ochtend kon ik onderstaande resultaten noteren.

304	0	56	0	304
0	56	0	56	0
56	0	64	0	56
0	56	0	56	0
304	0	56	0	304

In totaal 1728 oplossingen. Waarom (1,3) en (2,2) (en symmetrisch liggende velden) hetzelfde aantal oplossingen geven, heb ik nog niet kunnen verklaren.

Rudi Oosterveld, 6 Atheneum, RSG Zwolle.

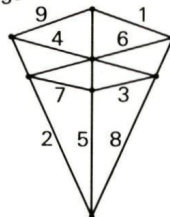
Naschrift redactie Waarom (1,3) en (2,2) hetzelfde aantal oplossingen geven, kunnen wij ook niet verklaren. Wie wel?

We voegen er nog aan toe: waarom al die nullen eigenlijk? Dit is niet zo moeilijk, maar je moet er wel even opkomen.

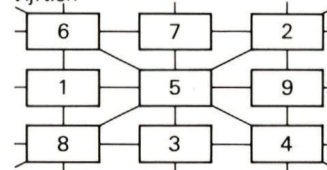
Oplossing verpakte zuivel

Bij *Vijftien* en *Kaartvoetbal* zie je de vermomming van Boter-Kaas-en-Eieren het gemakkelijkst. Leg de kaartjes maar zoals in de tekening hieronder. De 9 lijnen en de 8 punten van de Vlieger komen precies overeen met de 9 kaartjes en de 8 lijnen van de andere voorbeelden. Door de negen lijnen te nummeren als aangegeven, zie je het verband met *Vijftien*.

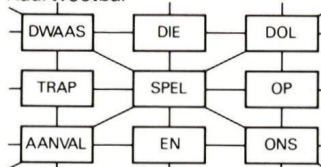
Vlieger



Vijftien



Kaartvoetbal



De 5 vijven

Woensdag 2 november 1983 om half één sidderde de aula van het *Chr. College Grifland* in Soest onder de beginmaten van de 5e symfonie van Beethoven. Op dat moment werd de reuzentaart, hoofdprijs van de 5-vijven-wedstrijd van de Pythagoras-poster, naar binnen gereden. En onder het applaus van medeleerlingen, leraren, ouders, leden van de Pythagorasredactie en zelfs de pers mocht de winnende ploeg, leerlingen uit klas 5 VWO, de taart in ontvangst nemen. Zij hadden onder leiding van hun leraren Jan van Vliegen en Gerrit de Bruyn maar liefst 5496 verschillende getallen gevonden, en deze op 14 oktober persoonlijk aangeboden op de stoep van het Wolters-Noordhoff-kantoor in Groningen. Bij elkaar was dat een pak van 146 vellen papier.

Om het geheugen even op te frissen: het ging erom met 5 vijven de meeste natuurlijke getallen te schrijven. Je mocht gebruik maken van machtsverheffen, de tekens $\times$, $+$, $-$, $:$, $\sqrt{\quad}$, $!$, en haakjes. (Het uitroepteken betekent 'faculteit', bijv. $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$). Als extra regel gold dat alleen volledig uitgeschreven oplossingen meetelden.

Het grootste getal van de ploeg uit Soest was:

$$(5 + 5)^{5!} \times 5! \times 5! = 144 \text{ met } 122 \text{ nullen erachter.}$$

Dat was echter niet het allergrootste getal dat (volledig uitgeschreven) werd ingestuurd. Dat kwam van klas A5B van de *Gereformeerde SG Rotterdam*:

$$(5 + 5)^{555}, \text{ oftewel een } 1 \text{ met } 555 \text{ nullen. Daarmee}$$

verdiende deze klas niet de reuzentaart (ze hadden 'slechts' 1178 oplossingen), wel kregen ze als troostprijs voor de grootste oplossing gebak toegestuurd.

Dat is ook gebeurd met de computergroep vergevorderden van het *College Blaucapel* die op schitterende overzichtelijke wijze 1950 oplossingen uit de computer hebben weten te krijgen, in volgorde van klein naar groot. Hun grootste getal was $((5!/5 - 5) \times (5 + 5))! (= 190!)$, een getal van 349 cijfers, waarvan slechts de laatste 46 cijfers nullen waren (zie pagina 44).

De derde troosttaart is gegaan naar klas A2b van de *RSG Enkhuizen* voor hun keurige manier van oplossen en om de moeder van Ingrid Melis ook te belonen! Met hen eren we alle inzenders die hun best hebben gedaan iets moois of iets leuks van hun inzending te maken.

Geen taart hebben we laten bezorgen bij klas 5c van de HAVO-top van de *Katholieke Pedagogische Academie* in Tilburg. Die krijgen een taart van hun klassedocent als wij ze een eervolle vermelding zouden geven. Bij deze dus. Eet smakelijk!

We weten dat er door velen aan onze puzzel is gewerkt. Gelukkig bleef het aantal inzendingen beperkt tot 53. Daar waren nogal wat dikke brieven bij, zodat we genoeg na te kijken hadden. Er waren inzendingen van klassen, van groepjes leerlingen en van enkelingen. Al zijn ze niet in de prijzen gevallen, voor de moedige enkelingen kregen we al nakijkend veel waardering. Samen waren de 53 inzendingen goed voor een stapel



Links: de uiteindelijke winnaars bieden hun oplossingen aan in Groningen. Boven: de reuzentaart.

papier van 12 centimeter hoog, met in totaal 31331 oplossingen, een gemiddelde van 591 oplossingen per inzending.

Bijna iedereen heeft wel geprobeerd hoe ver je kon komen 'vanaf 0'. Velen kwamen zo tot en met 61. Niemand heeft 62 kunnen vinden. Omdat wij hem ook niet hebben gevonden, houden we ons aanbevelen voor het geval ooit iemand 62 vindt.

Sommigen stuurden prachtig verzorgd werk in, de getallen keurig geordend (soms met kleurcodes en al), anderen stuurden chaos en excuseerden zich met de opmerking dat ze tot het laatste moment hadden doorgewerkt. Er zijn puzzelaars geweest die er zo gek van werden dat ze rekenend in slaap vielen (*Samenwerkingsschool Waddinxveen*).

Twaalf leerlingen uit klas V47 van het *Rotterdams Montessori Lyceum* stuurden 129 oplossingen in, die ze afsloten met:

5! 5! 5! 5! 5!

Ze kwamen er niet toe dit reuzengetal uit te schrijven. Dat lijkt ons ook een hele klus. Wie geeft een behoorlijke schatting voor het aantal cijfers in dit getal?

De ranglijst Tenslotte de ranglijst van de 10 inzenders met de grootste aantallen oplossingen. Toevallig zijn dit ook precies alle inzendingen met meer dan 1000 oplossingen.

1. Chr. College Griffland (groep leerlingen o.l.v. de heer van Vliegen), Soest 5496
2. Het Rhedens College (vijf leerlingen uit 6V2), Rozendaal 2120
3. College Blaucapel (computergroep vergevorderden), Utrecht 1950
4. Stedelijk Gymnasium (klas 6), Leiden 1686
5. Katholieke Pedagogische Academie (klas 5c van de HAVO-top), Tilburg 1585
6. Chr. Gymnasium (klas 6), Leeuwarden 1540
7. College Sancta Maria (klas A42), Kerkrade 1457
8. Gereformeerde Scholengemeenschap (klas A5B), Rotterdam 1178
9. Thomas à Kempis SG (klas 4 Gym), Zwolle 1169
10. Kottenpark College (groep leerlingen o.l.v. H. Ruizenaar), Enschede 1089

Spelen met spiegels III

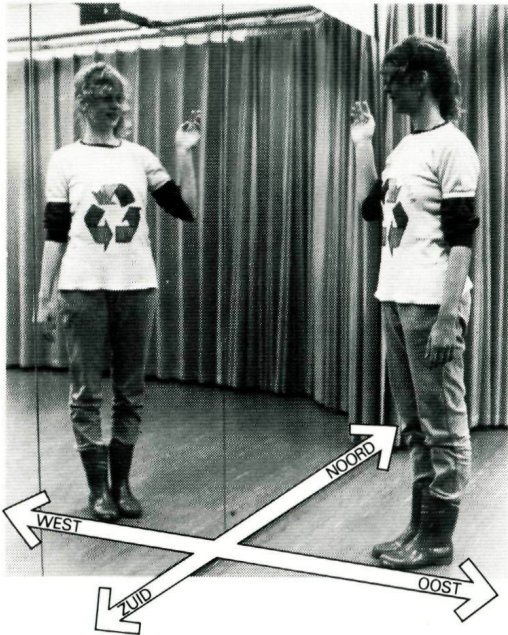
Ondersteboven met 1 spiegel?

Onlangs was ik op een feestje waar moppen werden verteld, raadsels opgegeven en spelletjes gedaan. Daarbij was het volgende vaardigheidsspelletje: teken een huisje, terwijl je handen door een vel papier zó zijn afgedekt, dat je het potlood alleen in een spiegel kunt zien. Mijn tekeningen leken op die uit mijn kleuter-tijd. Tijdens het spel rees de volgende vraag:

Waarom keert een spiegel, als je jezelf erin bekijkt, wel links en rechts om en niet onder en boven?

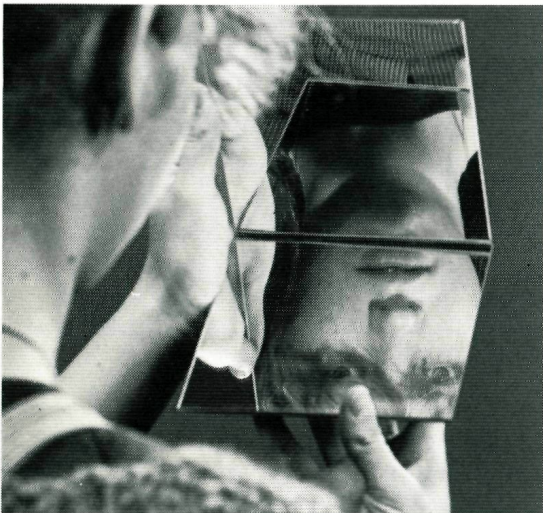


Daar waren we wel een half uur mee bezig. De meest gekke verklaringen werden gegeven (zoals: de spiegel draait ook onder en boven om, maar de hersenen corrigeren dat automatisch, want in werkelijkheid verschijnen alle beelden ook omgekeerd op je netvlies). Uiteindelijk kwam het juiste antwoord: een spiegel keert links en rechts *niet* om. Als je rechts noord noemt en links zuid, dan zie je in de volgende foto dat het spiegelbeeld van de opgeheven arm in noord blijft en die van de andere arm in zuid (ook blijven onder en boven op hun plaats). Echter het gezicht van het spiegelbeeld kijkt niet naar west, maar naar oost: *de spiegel verwisselt alleen de richting van voor- en achterkant*. Als wij zeggen dat links en rechts verwisseld zijn, dan komt dat, doordat wij ons verplaatsen in het spiegelbeeld en de opgeheven arm links noemen. Let ook op de pijlen op het T-shirt: ze draaien met de wijzers van de klok mee (rechtsom). Bij het spiegelbeeld is de *draairichting* omgekeerd: linksom.



Ondersteboven met 2 spiegels

De eerste foto is natuurlijk een trucfoto. Je kunt jezelf wel ondersteboven zien met *twee* spiegels die *loodrecht* op elkaar staan. Je ziet nu echter *niet* je spiegelbeeld op z'n kop staan. Dan zou de draairichting omgekeerd zijn. Maar je ziet jezelf ondersteboven zoals anderen je zien. Door twee keer spiegelen is de draairichting twee keer omgekeerd en dus dezelfde als oorspronkelijk.

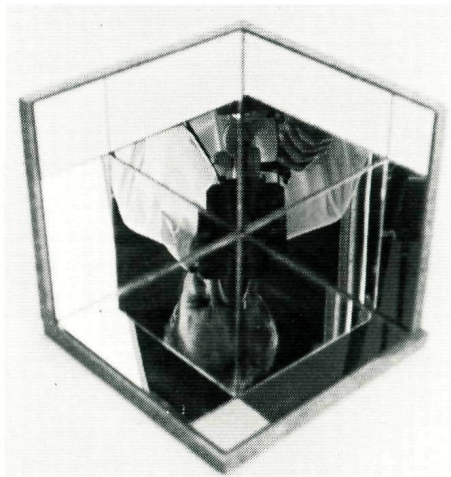


Ondersteboven met 3 spiegels

Als je drie spiegels onderling loodrecht tegen elkaar zet, dan zie je jezelf ondersteboven rond het punt waar de spiegels bij elkaar komen.



Als je deze drievlaksspiegel ergens in je kamer zet, zal je 'op-z'n-kop-spiegelbeeld' je overal blijven bekijken. De drievlaksspiegel heeft namelijk als eigenschap dat het licht dat erin valt, teruggestuurd wordt in de richting waar het vandaan komt. Vandaar dat de fotograaf er hieronder wel op *moest*.



Wist je dat reflectoren op je fiets vaak bestaan uit vele drievlakspiegeltjes naast elkaar?

In de drievlaksspiegel zie je je spiegelbeeld op z'n kop staan omdat door drie keer spiegelen de draairichting drie keer wordt omgekeerd en dat geeft hetzelfde resultaat als één omkering.

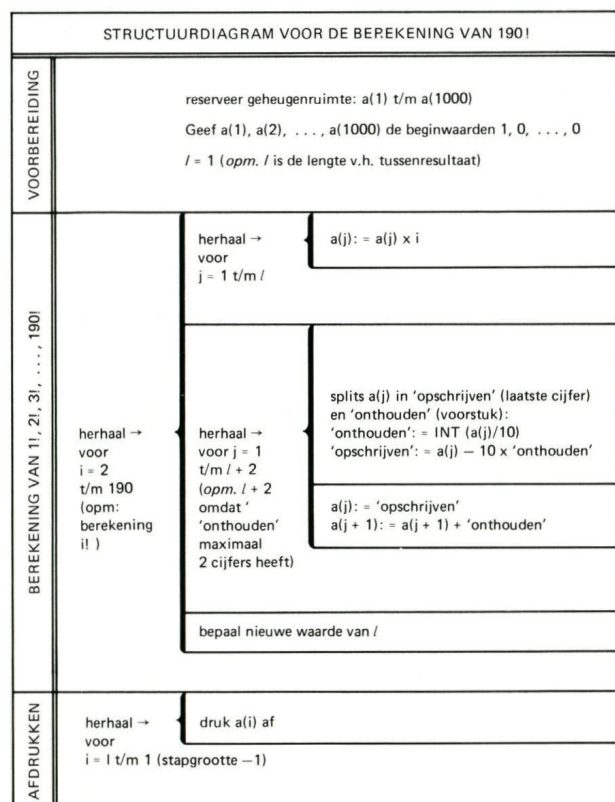
men. Zo kan het afdrucken niet met één print-opdracht. Het zal cijfer voor cijfer moeten, want zo zit het getal in het geheugen. Verder is het verstandig om bij te houden hoe lang elk tussenresultaat is. Je hoeft dan niet steeds tot $a(1000)$ door te laten rekenen, maar kunt precies gaan tot waar de nullen beginnen. Het structuurdiagram bij deze opzet staat aan het einde van dit artikel afgedrukt. Het programma dat je daarbij maakt, zal het getal waarschijnlijk nog met spaties tussen de cijfers afdrucken. Dit is, hoewel bij elke machine verschillend, eenvoudig te verhelpen.

De 'vergevorderden' zouden hun naam niet waard zijn als ze ook niet iets hadden gedaan met de steeds grotere aantallen nullen waar $n!$ op eindigt als je n laat toenemen. Zie het probleempje hieronder.

Op hoeveel nullen eindigt 1000!

($= 1000 \cdot 999 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$)? En $n!$?

Met de oplossing van dit probleem kun je een nog snellere versie van een programma voor $n!$ ontwerpen.



Nederlandse Wiskunde Olympiade



In het vorige nummer hebben we iets verteld over de Nederlandse successen bij de Internationale Wiskunde Olympiade in Parijs. Dit keer zullen we aandacht besteden aan de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Die wordt jaarlijks georganiseerd in twee rondes, de Eerste Ronde kort voor Pasen op de scholen, en de Tweede Ronde, alleen voor de allerbesten, in september, centraal in Utrecht.

Vorig jaar deden 2556 leerlingen van 237 scholen mee aan de Eerste Ronde. Een door Shell beschikbaar gestelde prijs voor de school met de vijf beste deelnemers ging naar het Kottenparkcollege te Enschede, waar de prijswinnaars *Jan Hondebrink*, *Reinier Sterkenburg*, *Cilia van Peursen*, *Wouter v.d. Berg* en *Kees Wiebering* op 10 juni een wisselprijs, een oorkonde en een persoonlijke herinnering in ontvangst namen.

Aan de Tweede Ronde deden een kleine honderd scholieren mee. De meesten waren uitgenodigd omdat ze bij de Eerste Ronde 21 of meer punten behaald hadden, maar er waren er ook die mee mochten doen op grond van hun score bij de Pythagoras Olympiade. De tien prijswinnaars waren:

- 1 *Jan de Boer*, RSG Magister Alvinus, Sneek 38 p.
- 2 *Gerard van Mazijk*, RSG Den Burg, Texel 28 p.
- 3 *Machiel van Frankenhuijsen*, Sted. Gymn. Nijmegen 24 p.
- 4 *Koen Versmissen*, Hertog Jan College, Valkenswaard 22 p.
- 5 tot en met 9 (allen met 20 p.):
Hans van Antwerpen, Augustinianum, Eindhoven
Rudi Hakvoort, Chr. Lyceum, Delft
Bart de Smit, Barlaeus Gymn., Amsterdam
Menke Ubbens, RSG Magister Alvinus, Sneek
Wiebe Kees Goodijk, Chr. Gymn., Leeuwarden
- 10 *Harold de Boer*, CSG Dingstede, Meppel 19 p.

Op pagina 47 vind je de opgaven van de Tweede Ronde. Bedenk dat de deelnemers drie uur de tijd hadden om de oplossingen te vinden, en dat er volledig uitgewerkte antwoorden werden gevraagd!

Pythagoras Olympiade



Nieuwe opgaven (Oplossingen inzenden vóór 1 maart 1984 aan *Pythagoras Olympiade, Oltmansdreef 21, 2353 CK Leiderdorp (NL)*. Wedstrijdvoorwaarden en prijzen staan vermeld op pagina 13 van deze jaargang.)

PO 64.

Zijn er behalve 101 nog andere priemgetallen van de vorm 101010...101?

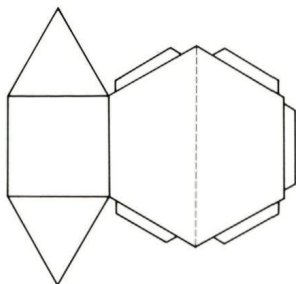
PO 65.

Honderd genummerde kaartjes worden zonder op de nummers te letten in een 10 bij 10 patroon gelegd. Daarna leggen we ze per rij op volgorde: in elke rij beginnen we met links het kaartje met het laagste nummer te leggen, dan het op één na laagste, enz.

Vervolgens doen we hetzelfde per kolom: bovenaan het laagste kaartje, dan het op één na laagste, enz. Liggen na deze herverdeling de rijen nog steeds van links naar rechts in opklimmende volgorde?

PO 66.

Wat is de inhoud van de figuur die je krijgt als je de afgebeelde bouwplaat maakt? (De figuur is opgebouwd uit een vierkant, een doormidden te vouwen regelmatige zeshoek en twee gelijkzijdige driehoeken, allemaal met zijden van lengte 1.)



Oplossingen en prijswinnaars van de opgaven PO 50 - 53

PO 50.

Als n een geheel getal groter dan 1 is, dan stelt men

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}.$$

a. Bewijs; als je s_n schrijft als een onvereenvoudigbare breuk, dan is de teller van die breuk oneven.

b. Bewijs dat s_n voor geen enkele n een natuurlijk getal kan zijn.

Oplossing van *Floor van Lamoën*, 5 vwo, Stedelijk Gymnasium Leeuwarden:

Stel k is het kleinste gemene veelvoud van de getallen 2 t.e.m. n . Omdat $n \geq 2$ zal k even zijn. Er geldt, als we s_n als onvereenvoudigbare breuk schrijven:

$$s_n = (k + k/2 + k/3 + \dots + k/n)/k.$$

De termen $k, k/2, \dots, k/n$ zijn op één na allemaal even. Die ene correspondeert met de hoogste macht van 2 die kleiner dan of gelijk aan n is; die macht is ook precies de macht van 2 die in k voorkomt. De teller is, als som van even getallen en één oneven getal, dus een oneven getal. De noemer is even, dus ongelijk aan 1, en daarom is s_n geen geheel getal.

Er waren 20 inzendingen, waarvan 18 correct. Prijswinnaars: *Gerard Barkema*, 5 vwo, CSG. Oostergo, Dokkum en *Wiebe Kees Goodijk*, 5 vwo, Chr. Gymn. Leeuwarden.

PO 51.

Iemand wil een vierkante vloer van $4 \times 4 \text{ m}^2$ betegelen met vierkante tegels van $20 \times 20 \text{ cm}^2$ in vier verschillende kleuren op zo'n manier dat nergens twee gelijk gekleurde tegels met een zijde of een hoekpunt tegen elkaar komen te liggen. Bepaal alle manieren waarop dit mogelijk is.

Oplossing van *Victor Allis*, 6 vwo, Herman Wesselink College, Amstelveen:

Laten a, b, c en d de vier kleuren zijn. Wanneer in één kolom onder elkaar drie verschillende kleuren voorkomen, zal er een patroon ontstaan met in elke rij twee verschillende kleuren (diagram 1).

Wanneer in één rij naast elkaar drie verschillende kleuren voorkomen, zal er een patroon ontstaan met in elke kolom precies twee verschillende kleuren (diagram 2).

Er geldt dus dat of in elke kolom maar twee kleuren voorkomen, of in elke rij.

Als dan de eerste van zo'n kolom of rij gekozen is, dan ligt de rest van die kolom of rij vast.

Hebben we de vier kleuren in de linkerbovenhoek gekozen (dat kan op 24 manieren), dan zijn er als we per kolom werken voor elke nieuwe kolom dus twee mogelijkheden; in totaal dus 2^{18} mogelijkheden. Per rij geldt hetzelfde, maar er is één rangschikking die we zo dubbel tellen: degene waarbij in elke rij én in elke kolom precies twee kleuren voorkomen. Het totale aantal mogelijke kleuringen is dus $24 \cdot (2^{18} + 2^{18} - 1)$.

diagram 1

....acacacac....
....bdbdbdbd....
....cacacaca....

diagram 2

...
abc
cda
abc
cda
abc
...

Er waren 27 inzendingen, waarvan slechts 9 correct. Prijswinnaars: *Roelant Nieboer*, 5 vwo, Herman Wesselinkcollege, Amstelveen, en *Victor Allis*.

De overige goede oplossingen kwamen van *Frank Robijn*, *Rutger Noot*, *Bart de Smit*, *Jan de Boer*, *Klaas Wijbrans*, *Menke Ubbens* en *Machiel van Frankenhuysen*.

PO 52.

Voor zekere functie $f: x \rightarrow ax^2 + bx + c$ geldt $|f(0)| \leq 1$, $|f(1)| \leq 1$ en $|f(-1)| \leq 1$.

Bewijs dat $|f(x)| \leq \frac{5}{4}$ voor alle $|x| \leq 1$.

Oplossing van *Rutger Noot*, klas 6, Gymnasium Haganum, Den Haag:

Stel dat er wel een x is met $-1 \leq x \leq 1$ waarvoor $|f(x)| > \frac{5}{4}$. De extreme waarde van f moet dan tussen -1 en $+1$ aangenomen worden, dus $-1 \leq (-b)/(2a) \leq +1$. Noem $m = (-b)/(2a)$. Uit $-1 \leq f(1) \leq +1$ volgt $-1 \leq a+b+c \leq +1$, en uit $-1 \leq f(-1) \leq +1$ volgt $-1 \leq -a+b-c \leq +1$. Optellen en door 2 delen geeft $-1 \leq b \leq +1$. Uit $-1 \leq f(0) \leq +1$ volgt $-1 \leq c \leq +1$.

Laat x_0 één van de getallen 0, $+1$ en -1 zijn, en wel zo gekozen dat $|m - x_0| \leq \frac{1}{2}$ (dat kan). Omdat $f(m)$ in absolute waarde groter dan $\frac{5}{4}$ is verondersteld, moet $|f(m) - f(x_0)| > \frac{1}{4}$ zijn.

We kunnen $f(x)$ schrijven als

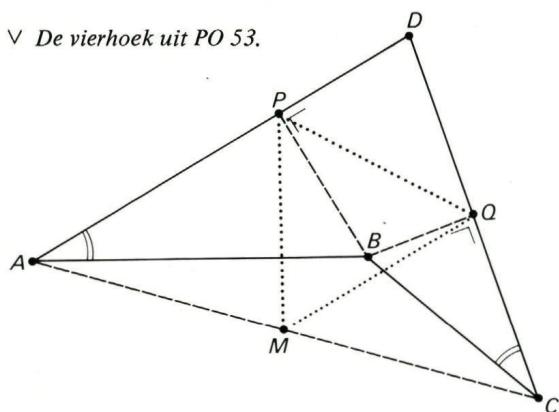
$$f(x) = a(x-m)^2 + c - m^2,$$

dus $f(m) = c - m^2$, en $f(m) - f(x_0) = -a(x_0 - m)^2$. Omdat $|x_0 - m| \leq \frac{1}{2}$ moet dus gelden dat $|a| > 1$. Samen met $|b| \leq 1$ geeft dit $|(b^2)/(4a)| < \frac{1}{4}$, en omdat $-1 \leq c \leq +1$ zou hieruit volgen dat $|f(m)| < \frac{5}{4}$, in tegenspraak met hetgeen we verondersteld hebben.

De aanname $|f(m)| = \frac{5}{4}$ leidt tot $a = -c = \pm 1$, $b = \pm 1$.

Er waren 15 inzendingen, waarvan 11 correct. Prijswinnaars: *Ronald Treep*, 5 vwo, v. Lodensteijn. SG, Amersfoort, en *Klaas Wijbrans*, 6 vwo, Chr. Lyceum Almelo.

✓ De vierhoek uit PO 53.



PO 53.

Gegeven is een vierhoek $ABCD$ met $\angle DCB = \angle DAB = 30^\circ$. M is het midden van AC ; P en Q zijn de loodrechte projecties van het punt B op de lijnen AD en CD .

Bewijs dat driehoek PMQ gelijkzijdig is.

Oplossing van *Reinder Beurskens*, 5 vwo, Nijmeegse SG:

Stel R is het midden van AB , en S is het midden van BC . Uit de gegevens volgt dat de driehoeken PRB en QSB gelijkzijdig zijn. Gebruik makend van het feit dat $RMSB$ een parallelogram is, kunnen we nu gemakkelijk bewijzen dat de driehoeken PRM , MSQ en PBQ congruent zijn. Immers, $PR = PB = RB = MS$, $RM = BS = QS = QB$. Wegens de gelijkheid van de hoeken BRM en MSB (pgm) zijn ook de hoeken PRM en MSQ gelijk.

Omdat hoek PBQ gelijk is aan $360^\circ - 60^\circ - 60^\circ - \angle RBS$, en $\angle RBS = 180^\circ - \angle BSM$, geldt $\angle PBQ = 60^\circ + \angle BSM = \angle QSM$.

Conclusie: $PQ = QM = MP$.

Er waren 7 goede oplossingen. Prijswinnaars: *Jan de Boer*, 5 vwo, RSG Magister Alvinus, Sneek, en *Auke Zijlstra*, 6 ath., RSG Leeuwarden.

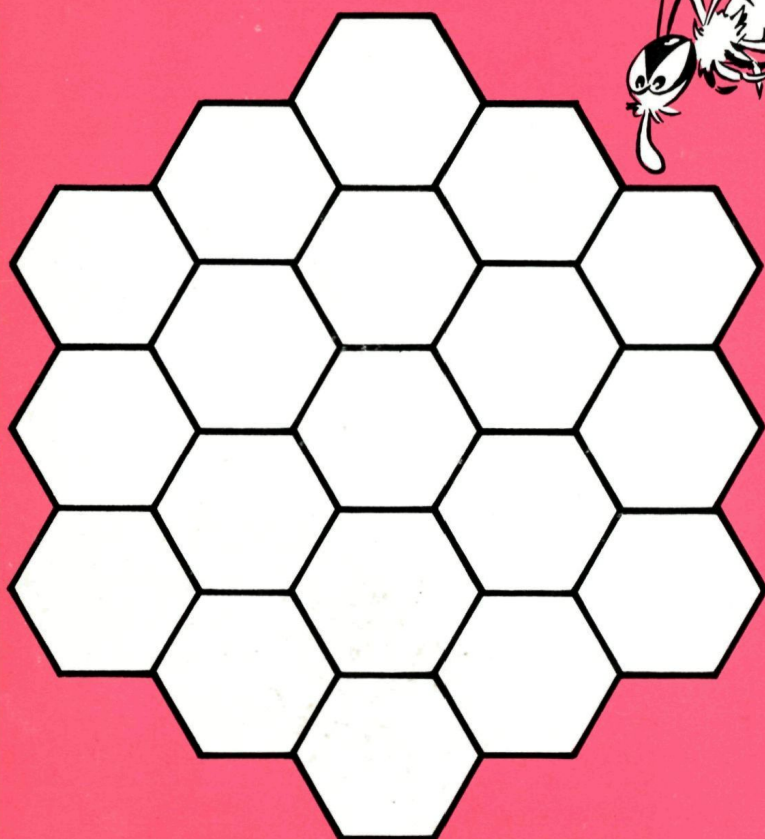
De overige goede inzendingen kwamen van *Roelant Nieboer*, *Rutger Noot*, *Wiebe Kees Goodijk* en *Menke Ubbens*.

Opgaven Tweede Ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

1. Een lijn door het hoekpunt A verdeelt driehoek ABC in twee gelijkbenige driehoeken. Gegeven is dat een van de hoeken van driehoek ABC gelijk is aan 30° . Bereken in alle mogelijke gevallen hoe groot de andere hoeken van de driehoek kunnen zijn.
2. Bewijs dat $2^{2n}(2^{2n+1}-1)$ voor elk oneven natuurlijk getal n een getal is dat eindigt op 28 als het in het tientallig stelsel wordt uitgeschreven.
3. Gegeven zijn vier reële getallen a , b , c en p . De getallen a , b en c zijn niet alle drie gelijk. Verder geldt dat $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a} = p$. Bepaal alle mogelijke waarden van p en bewijs dat $abc + p = 0$.
4. Binnen een gelijkzijdige driehoek met zijden van lengte 15 zijn 111 punten gekozen. Bewijs dat het – hoe die punten ook gekozen zijn – altijd mogelijk is een ronde munt met diameter $\sqrt{3}$ ergens op de driehoek te leggen op zo'n manier dat de munt minstens drie van de gekozen punten bedekt. (De munt mag gedeeltelijk buiten de driehoek liggen.)

Magische honingraat

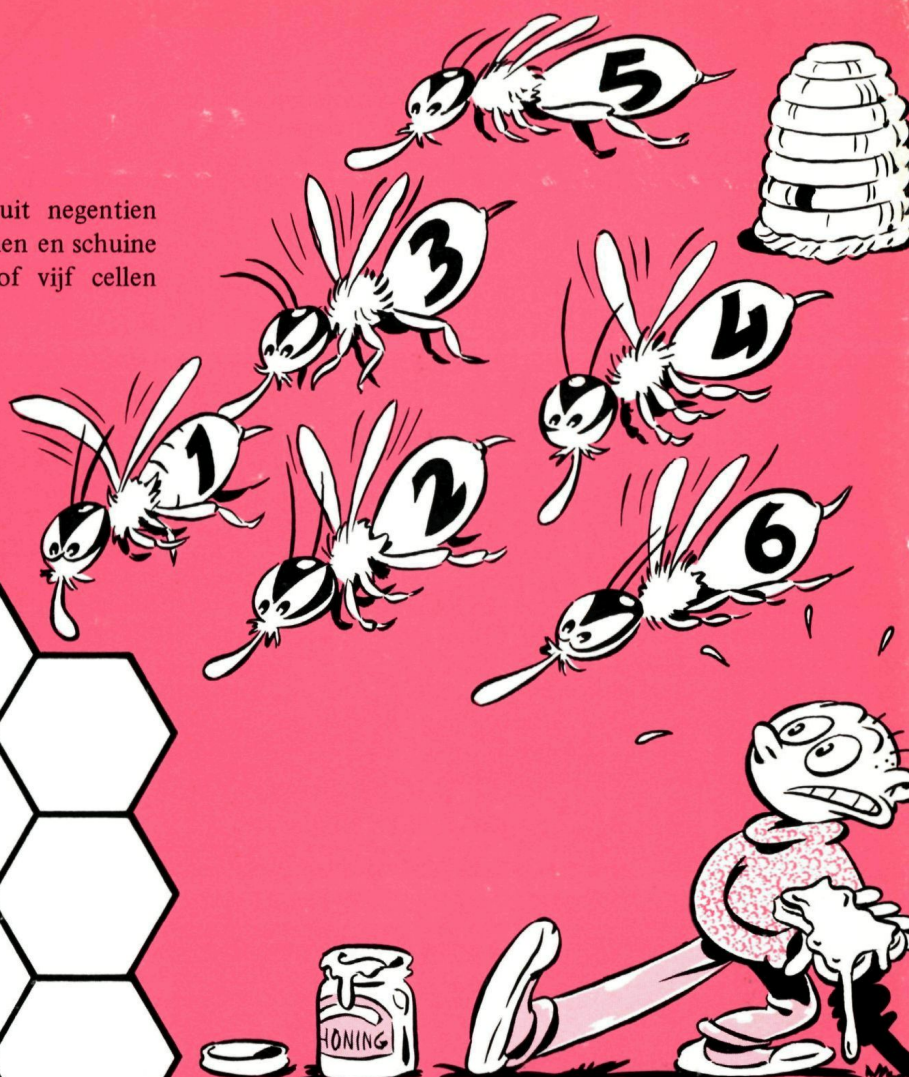
De onderstaande honingraat bestaat uit negentien zeshoekige cellen, die verticale kolommen en schuine rijen met een lengte van drie, vier of vijf cellen vormen.



Probeer eerst de getallen 1 tot en met 19 in de negentien cellen te plaatsen, zodat de getallen in elke kolom steeds dezelfde som leveren. Dus de getallen van de drie cellen links geven bij elkaar opgeteld hetzelfde totaal als de getallen in de vier cellen ernaast, enz.

Wanneer dat is gelukt, probeer dan eens of je ervoor kunt zorgen dat de getallen in elke schuine rij eenzelfde totaal geven als in de kolommen.

48 *Pythagoras*



Help de bij

Kun je de onderstaande zes figuren zó tegen elkaar leggen dat er een gesloten honingraat ontstaat?

