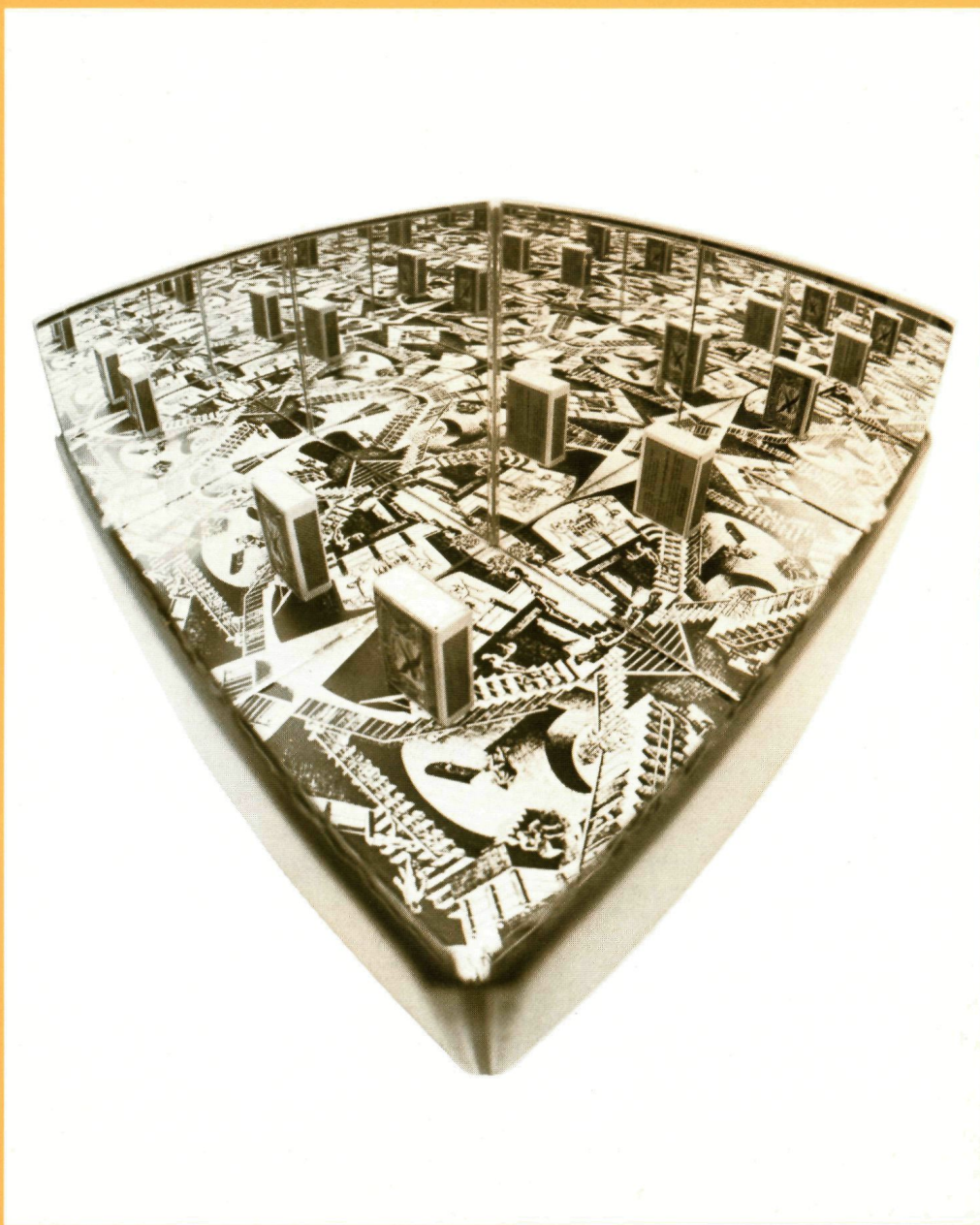




Verschijnt vier keer per jaar

Wiskundetijdschrift voor jongeren

Pythagoras



4 Jaargang 23 maart 1984

Wolters-Noordhoff

Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Redactie

Jan van de Craats, Luc Kuijk, Klaas Lakeman,
Henk Mulder, Hessel Pot, Hans de Rijk, Leo Wiegerink

Secretariaat

Leo Wiegerink, Egelantiersstraat 107^{II}
1015 PZ Amsterdam
*Aan dit adres kunnen reacties op en bijdragen voor
Pythagoras worden gezonden.*

Pythagoras verschijnt 4 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via
één der docenten, f 9,20 per jaargang.
Voor anderen f 13,95.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-
Noordhoff bv, Afdeling Periodieken,
Postbus 567, 9700 AN Groningen.
Voor België bij J. B. Wolters-Leuven, Blijde
Inkomststraat 50, Leuven; postchecknummer
000-000 8081-30.

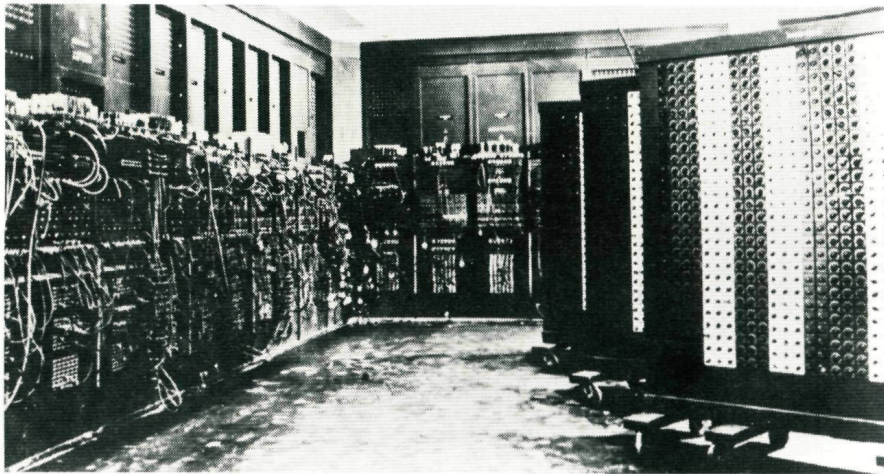
Abonnees wordt dringend verzocht met betalen te
wachten tot hun een acceptgirokaart wordt gezonden.
Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met
een minimum van 5) wordt één gratis abonnement
verstrekkt. Maximaal 10 gratis abonnementen per
school.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud
zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van
de redactie is niet toegestaan.

Inhoud

De eerste elektronische computer	51
<i>Klaas Lakeman</i>	
Wie maakt ze los?	53
<i>Jan van de Craats</i>	
Omkeerspelletje met getallen	53
<i>Henk Mulder</i>	
Ga nou gauw fietsen!	54
<i>Jan van de Craats</i>	
Stiltecentrum	55
<i>Klaas Lakeman</i>	
Parabolisch vermenigvuldigen	56
<i>Hessel Pot</i>	
Spelen met spiegels IV	56
<i>Ton Konings</i>	
De omweg van het ventiel	58
<i>Aad Goddijn</i>	
Correspondentie	60
De raadselachtige Syracuse-rijen	60
<i>Leo Wiegerink</i>	
Mededelingen	61
Pythagoras Olympiade	62
<i>Jan van de Craats</i>	
Nederlandse Wiskunde Olympiade	63
<i>Jan van de Craats</i>	
Rangeer probleem	64
<i>Jan van de Craats</i>	

Bij de voorplaat Met een mooie plaat en een (paar)
voorwerp(en) tussen vier rechtopstaande spiegels be-
land je in een (letterlijk en figuurlijk) eindeloos land-
schap. Het patroon tussen de vier spiegels wordt
eindeloos gespiegeld. Meer hierover is te vinden op
pagina 56 in het artikel 'Spelen met spiegels IV'.
(Deze groothoekopname werd gemaakt door Ben
Jonker.)



< De ENIAC

De eerste elektronische computer

'Wanneer iemand uit uw midden nu op deze knop drukt, zal de machine het getal 97367 vijfduizend keer met zichzelf vermenigvuldigen,' sprak één van de trotse wetenschappers tot een groepje journalisten.

Die keken elkaar verbouwereerd aan en tenslotte kwam er één schoorvoetend naar voren. Hij keek de 12 bij 6 meter grote zaal nog eens rond, waarvan de wanden volledig door de machine in beslag werden genomen.

'Ja, komt u maar. Deze knop moet u hebben,' werd hem nog eens verduidelijkt.

De journalist drukte, en . . . voordat hij zijn hand goed en wel had teruggetrokken, had de machine het antwoord al!

'Niet te geloven!,' 'Haast sneller dan de bliksem . . .' hoorde hij zijn collega's mompelen.

De wetenschappers glunderden.

De ENIAC

Dit gebeurde in 1946 in de Amerikaanse stad Philadelphia, waar aan de Moore School of Electrical Engineering, een onderdeel van de Universiteit van Pennsylvania, de eerste elektronische computer aan

de pers werd gedemonstreerd.

Althans men nam algemeen aan dat het de eerste elektronische computer was.

Dit gigantische apparaat, gebouwd onder leiding van John Prosper Eckert en John William Mauchly, werd kortweg aangeduid met ENIAC (*Electronic Numerical Integrator and Calculator*). Onder uiterste geheimhouding was men in het begin van de jaren veertig met de bouw begonnen, want het apparaat zou tot taak krijgen ballistische berekeningen (o.a. het bepalen van kogelbanen) uit te voeren. Pas in december 1945 kwam men met de bouw gereed. Bovendien kon tegen het einde van de Tweede Wereldoorlog het project niet meer geheim worden gehouden.

Het was inderdaad een indrukwekkend geheel. Zo bevatte het 18.000 elektronenbuizen (die je nog wel in oude radio- en TV-toestellen tegenkomt). En het verhaal doet de ronde dat die buizen zoveel elektriciteit verbruikten dat het licht in Philadelphia merkbaar zwakker werd, wanneer de computer werd aangezet. Het programmeren van de ENIAC was een uiterst ingewikkeld en tijdrovend karwei, want het programma kon nog niet, zoals bij de tegenwoordige computers, in het geheugen worden opgeslagen. De instructies moesten op een bord met honderden draden met stekers worden vastgezet.

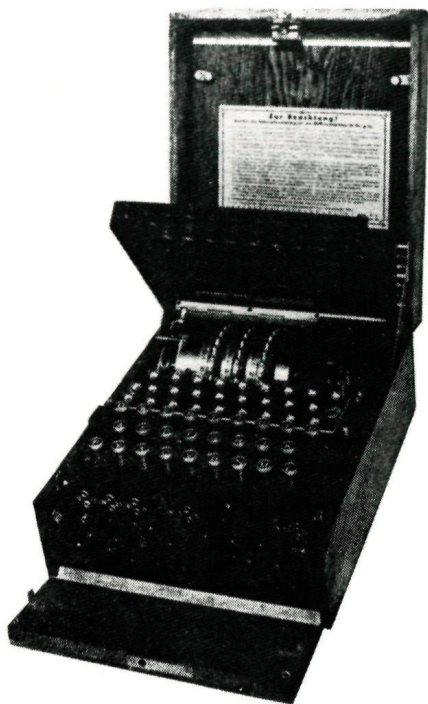
In de loop van 1946 werd de ENIAC overgebracht naar het Ballistic Research Laboratory in Aberdeen, waar hij tot 1955 dienst heeft gedaan voor het Amerikaanse leger, al mochten in verloren uren wiskundigen er ook wel mee 'spelen'.

Geheime berichtgeving

In oorlogstijd is een goede berichtgeving tussen troepen aan het front en de staf van het leger heel belangrijk. In geen geval mogen deze berichten aan de vijand bekend worden. Dat is lang niet eenvoudig, vooral wanneer over een uitgestrekt gebied oorlog wordt gevoerd, want radio- en telefoonverbindingen kunnen gemakkelijk worden afgeluisterd. Daarom vindt die berichtgeving meestal in geheimschrift plaats.

Nu beschikten de Duitsers tijdens de Tweede Wereldoorlog over een machine, de *Enigma*, waarmee een bericht in geheimschrift kon worden omgezet en weer terugvertaald. De Enigma werkte zo ingenieus, dat de Duitsers er gedurende de hele oorlog voor honderd procent op vertrouwden dat het geproduceerde geheimschrift met geen mogelijkheid door de vijand kon worden ontcijferd.

Maar het is kennelijk niet bij ze opgekomen dat zo'n Enigma wel eens zou kunnen worden ontvreemd! Dat nu lukte al in het begin van de oorlog de Poolse geheime dienst. Het ontvreemde exemplaar werd vanuit Polen in het diepste geheim naar Engeland verscheept.



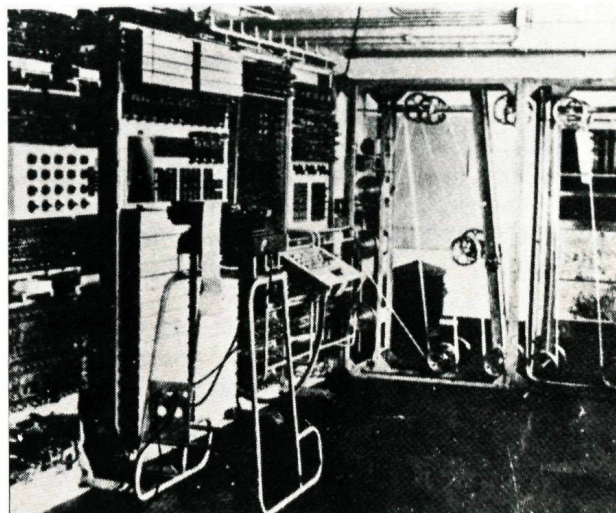
^ De Enigma

Een afgelegen landhuis

In een afgelegen landhuis, Bletchley Park geheten, te Hertfordshire, werd onder leiding van Professor Max Newman en team van elektronici en wiskundigen, onder wie Alan Turing, ondergebracht. Dit team moest de werking van de Enigma zien op te helderen. Daartoe werden een aantal elektro-mechanische computers (achtereenvolgens de Heath Robinson, de Peter Robinson, de Robinson and Cleaver en de Super Robinson) gebouwd. Die konden niet alleen de door de Enigma geproduceerde geheime berichten ontcijferen, maar waren ook in staat om de hun verstrekte informatie via een ponsband zeer snel in te lezen. Dit laatste was voor die tijd een uiterst modern technisch snufje. En omdat dit snelle inleessysteem toch ook een snel werkend computersysteem verdiende, werden de telefoonrelais van de Robinsons vervangen door elektronenbuizen.

Zo stond daar in december 1943 in Bletchley Park de allereerste elektronische computer, de *Colossus I*. Daar de Duitsers hiervan niet het flauwste vermoeden hadden, heeft de Colossus, in tegenstelling tot de ENIAC, een belangrijke rol in de oorlog kunnen spelen.

Het verhaal van de Enigma en de Colossus is pas vele jaren na de oorlog bekend geworden, lang nadat de ENIAC al in een museum was opgeborgen. De uitgebreide technische gegevens van de Colossus zijn echter nog steeds niet aan de openbaarheid prijsgegeven.



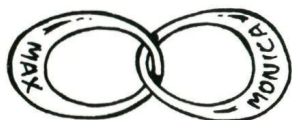
De Colossus I >

Wie maakt ze los?

Magic Max en zijn charmante assistente Monica zitten met touwen om hun polsen aan elkaar vast. Ze kunnen hun handen niet loswringen. En toch, een paar snelle kunstgrepen, tromgeroffel, trompetgeschal, hokus pokus, . . . en ze zijn los!



Hoe lappen ze 'm dat? Geen kruip door sluip door, geen zwendel, geen schaar, gewoon gezond verstand. Zouden de touwen echt helemaal strak om hun polsen vast zitten, dan zou het natuurlijk niet gaan. Twee ringen die in elkaar zitten kun je immers ook niet van elkaar krijgen.



Het touw zit strak genoeg om er voor te zorgen dat Max en Monica hun handen niet uit de lus kunnen krijgen, maar er is een heel klein beetje ruimte over bij elke pols. En daar zit het geheim: er kan bij Max z'n pols nog best iets duns door, bijvoorbeeld . . . het touw van Monica!

De ontknoping staat hiernaast.

Omkeerspelletje met getallen

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19

Eerst zul je zelf het materiaal moeten maken: vijftig kaartjes, genummerd van 1 tot en met 50. Meer kaartjes mag ook!

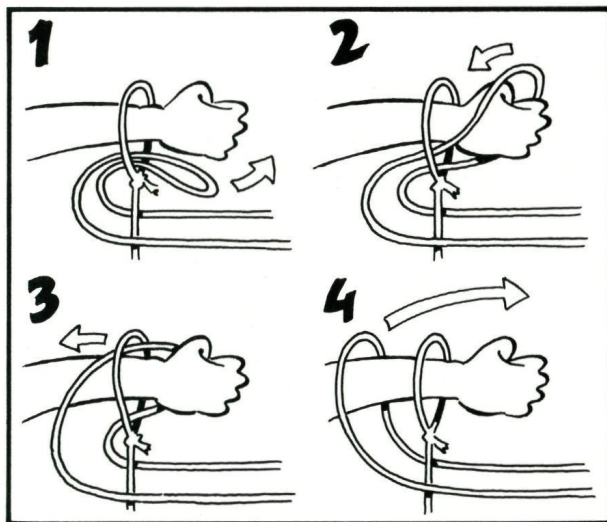
Klaar? Dan gaan we beginnen.

Leg de kaartjes op volgorde, met de getallen naar boven. Draai nu elk tweede kaartje om. Als je dat hebt gedaan, ligt dus elk even nummer ondersteboven. Begin weer vooraan en draai nu elk derde kaartje om (de 6 wordt nu bijvoorbeeld weer teruggedraaid). vervolgens ga je weer de rij af om elke 4e kaartje om te draaien, dan elk 5e, elk 6e, . . . enz. Het gaat steeds vlugger: bij elk 17e kaartje zijn het er nog maar twee, bij 'elk' 26e kaartje is het er nog maar één. Daarna ben je dus snel klaar. Het laatste kaartje dat je om-draait is dat met 50.

En wat je dan ziet . . . Is dat niet een opvallend resultaat? Kun je dat resultaat ook beredeneren?

Zo komt Monica los

Bij Max z'n pols is nog een heel klein beetje ruimte. Monica kan dus even een lusje maken en insteken (1), daarna omslaan (2), doorhalen (3), af laten glijden (4), en los is Monica!



Ga nou gauw fietsen!

Guus duwt tegen de trapper van Goof z'n fiets, waarbij Goof er alleen maar voor zorgt dat z'n fiets niet kan vallen. Hij houdt 'm verder niet tegen.



Volgens Goof zal z'n fiets nu vóóruit gaan rijden. Guus duwt immers de trapper 'de goede richting op'. Maar Godelieve gelooft er niets van. Volgens haar gaat Goof z'n fiets juist achteruit.

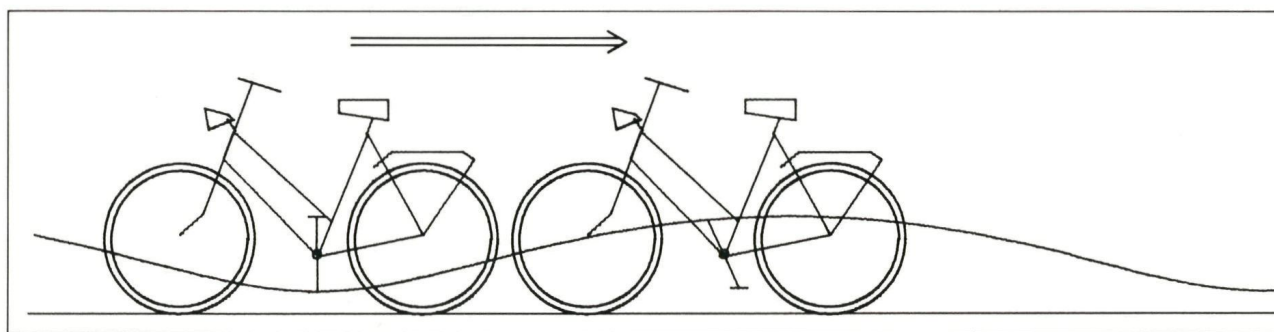
Wie heeft het bij het rechte eind? Laten we gewoon maar kijken wat er gebeurt. De spieren spannen zich, daar gaat-ie!

Nee maar! Goof gelooft z'n ogen niet. Van schrik laat hij de fiets bijna uit z'n handen glippen. Want wat gebeurt er? De fiets rijdt inderdaad achteruit!

Geloof jij er ook niets van? Doe het dan maar eens met je eigen fiets. Echt, hij rijdt achteruit!

Hoe komt dat? Of, liever gezegd, hoe komt 't dat je, net als Goof dacht dat z'n fiets vooruit zou gaan?

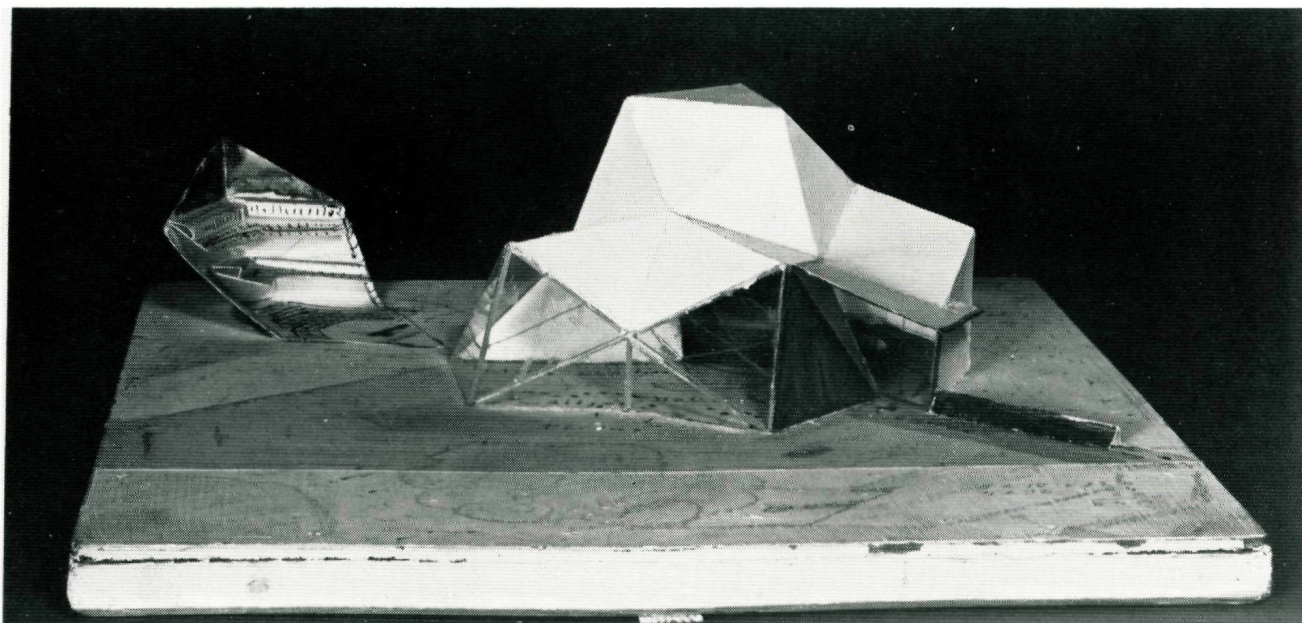
Het eerste waar je op moet letten, dat is dat Guus, toen hij tegen de trapper duwde niet *op* de fiets zat, zoals meestal wanneer je een trapper in beweging zet, maar op de grond. Dat maakt natuurlijk verschil, al denk je er misschien niet meteen aan. De fiets zal – met trapper en al – aan de achterwaartse beweging die Guus 'm wil geven, toegeven door achteruit te rijden, en, nu komt het, daarbij gaat de trapper ook achteruit, althans bekeken *vanaf de grond*. Tot je verbazing zul je zien dat de trapper *ten opzichte van de fiets* nu juist een stukje naar voren gaat. En ook dat is niet zo vreemd. Let maar eens op de baan die een trapper bij het fietsen beschrijft: ten opzichte van het fietsframe is het een cirkelbeweging. Maar ten opzichte van de grond is het een langgerekte golfbaan! Wanneer de fiets nu achteruit gaat, zal de trapper, waar Guus tegen duwt, die golfbaan een stukje in tegengestelde richting volgen!



Bij een 'doortrapper' zal de trapper zelfs de volledige golfbaan in tegengestelde richting volgen.

(Deze figuur werd vervaardigd door André Horn uit Amsterdam op een plotter, een computergestuurde tekenmachine.)

Wanneer je een trapper van je fiets in de laagste stand zet en hem naar achteren duwt, zal de fiets naar achteren gaan. De trapper zal ten opzichte van de fiets een stukje naar voren gaan. Hij volgt de langgerekte golfbaan een stukje in tegengestelde richting.



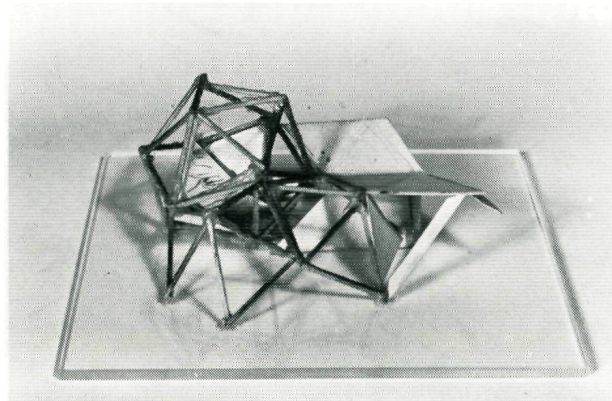
Stiltecentrum

In de zomer van 1983 waren in het Stedelijk Museum te Amsterdam een aantal maquettes van de beroemde Nederlandse architect en meubelontwerper Gerrit Thomas Rietveld (1888–1964) tentoongesteld. Daarbij was ook dit stiltecentrum, dat ca. 1963 voor de Technische Hogeschool Twente werd ontworpen. Op het terrein van de TH Twente zul je er echter vergeefs naar zoeken, want het ontwerp werd nooit uitgevoerd.

Nader bekeken

Wanneer je de maquette goed bekijkt, zie je dat de grote zaal bestaat uit een regelmatig twintigvlak. Daaromheen zijn de ingang en een hal gegroepeerd. Zoals je wellicht weet, is het regelmatig twintigvlak (of icosaeëder zoals het ook wel wordt genoemd), uit twintig even grote regelmatige driehoeken opgebouwd. In elk hoekpunt komen vijf van die driehoeken samen en vormen dus een soort koepeltje. Nu bestaat de ruimte aan de voorzijde, een hal, uit twee van die koepeltjes die schuin tegen de icosaeëdervormige zaal aanleunen. Verder vind je rond de ingang, de zich rechts

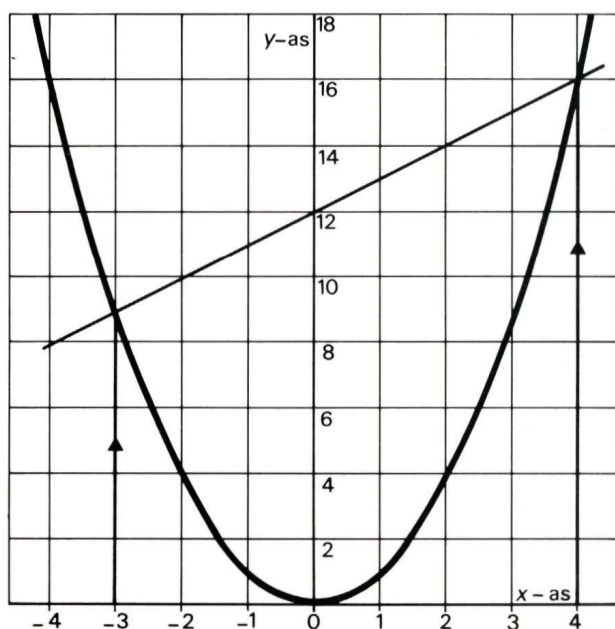
vóór bevindt, nog een aantal regelmatige driehoeken. Zo bestaat het dak boven de ingang uit twee van die driehoeken die (in één vlak) tegen elkaar aan zijn geschoven. Ze vormen dus een ruit. Bij het daarachter schuin omhoog lopende stukje dak kom je diezelfde ruit normaal tegen. Op de foto hieronder, mogelijk een voorstudie, is een en ander duidelijk te zien.



Bijna het hele gebouw is dus opgetrokken uit even grote regelmatige driehoeken.

Op de uiteindelijke maquette zie je links nog een stukje van het interieur van de grote zaal. De vloer daarvan wordt ook weer gevormd door twee regelmatige driehoeken (dus een ruit).

Parabolisch vermenigvuldigen



^
Grafiek van de functie $x \rightarrow x^2$. De eenheden langs x - en y -as zijn hier ongelijk gekozen.

Met de grafiek van de functie $x \rightarrow x^2$ (een parabool) kun je natuurlijk het kwadraat van een gegeven getal vinden.

Met diezelfde figuur kun je echter ook het *produkt* van twee gegeven getallen aflezen. Neem bijvoorbeeld maar eens 3 en 4: ga vanaf '3' op het linker en vanaf '4' op het rechterdeel van de x -as, recht omhoog tot je de grafiek bereikt. Trek door die beide punten van de parabool een rechte lijn. Het snijpunt van die lijn met de y -as blijkt nu bij '12' te liggen. En $12 = 3 \times 4$! Toevallig? Probeer het dan maar eens met twee andere getallen.

Verklaring Wie al wat meer wiskunde heeft gehad, zal zelf wel kunnen aantonen dat een rechte door de punten $(-x_1, x_1^2)$ en (x_2, x_2^2) de y -as in het punt $(0, x_1 x_2)$ snijdt. En wel voor elke keuze van de getallen x_1 en x_2 .

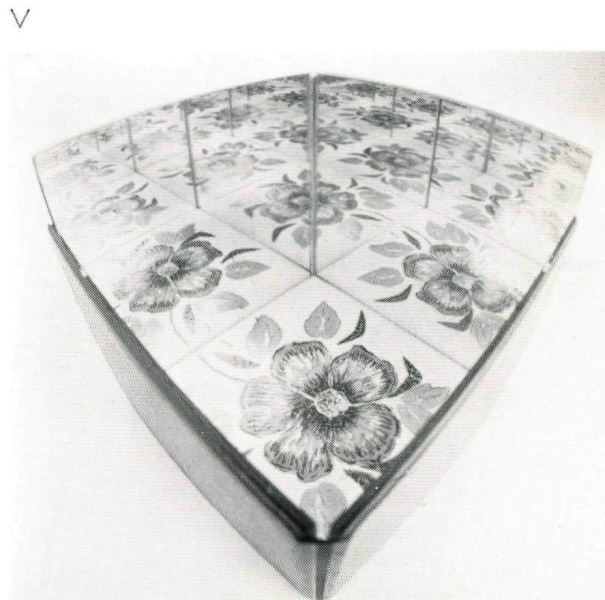
Spelen met spiegels IV

Laatst was ik in een bouwmarkt om tegels voor een vloer uit te zoeken. De verkoper legde een gebloemde tegel, die ik mooi vond, binnen een vierkant van vier rechtopstaande spiegels. 'Kijk, dan komt uw vloer er zó uit te zien', voegde hij eraan toe. Een eindeloze bloemetjesvloer lag voor me . . .

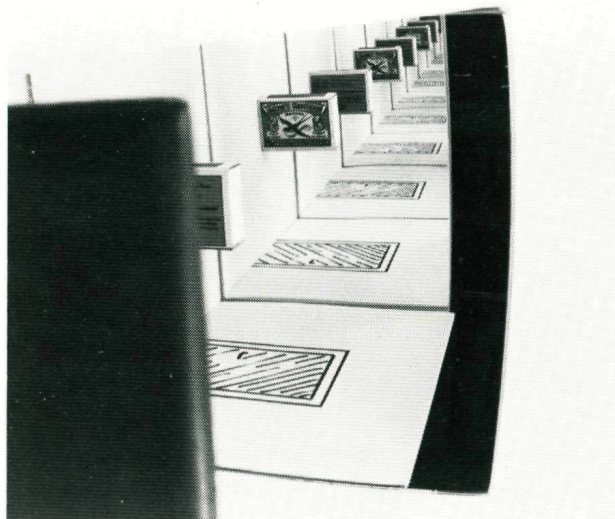


^
Vierkant van vier rechtopstaande spiegels.

Tussen vier spiegels worden tegels eindeloos weer-spiegeld, zodat je een mooie vloer ziet.

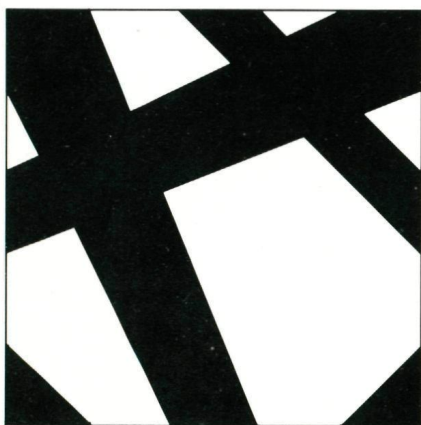


Wanneer je twee spiegels tegenover elkaar plaatst, zie je een hele gang. Zet je daartussen een lucifersdoosje, dan zie je daarvan afwisselend de voor- en de achterkant. De voorkanten blijven steeds leesbaar, omdat ze telkens ontstaan door een even aantal spiegelingen.



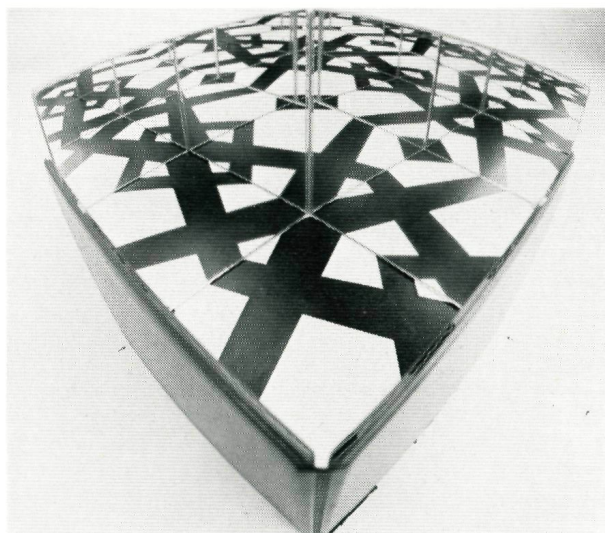
Zelf vloeren ontwerpen

Je kunt prachtige patronen maken door zelf een tegel te ontwerpen. Hier volgt een voorbeeld.

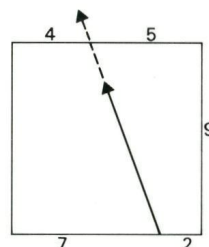


^
Voorbeeld van een tegel (naar een ontwerp dat M. C. Escher maakte om mee te stempelen).

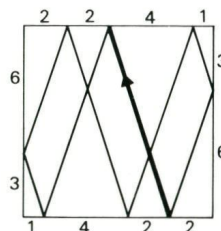
Wanneer je deze tegel tussen vier rechtopstaande spiegels legt, krijg je een vloer als in een Moors paleis. Als je de vloer echt zou willen liggen, heb je twee soorten tegels nodig: de getekende tegel en zijn spiegelbeeld (ga maar na).



Hoe moet de lijn op de tegel hieronder voortgezet worden om op de vloer een eindeloos doorlopende rechte lijn te krijgen?

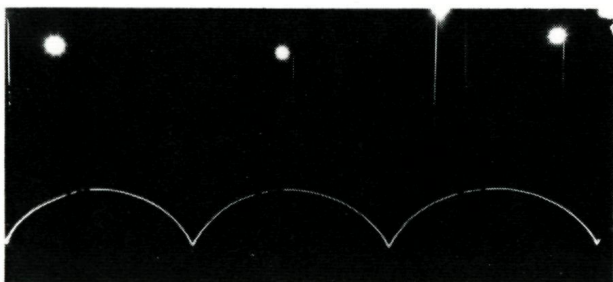


Wanneer je die lijn voortzet, bevat het tegeltje uiteindelijk 8 lijnstukjes. Als je de vloer tekent of tussen vier spiegels bekijkt, zie je nog vele andere lijnen, die eindeloos doorlopen.

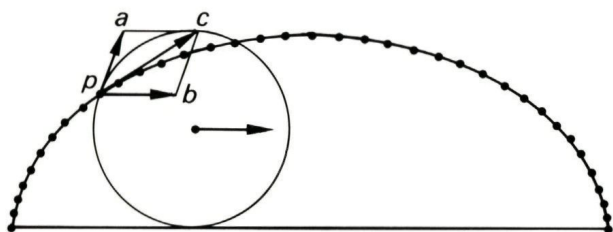


De omweg van het ventiel

In 'Van spatlap tot ventielkromme' (vorig nummer) is de ventielkromme (cycloïde) beschreven. Je kon de ventielkromme mooi op een foto krijgen door met een lampje op de velg van je fietswiel in het donker voor een camera met geopende sluiters langs te rijden. Als het lampje telkens juist de grond zou raken, dan was de ontstane kromme een cycloïde.



We zullen nu nagaan hoeveel het ventiel 'omrijdt': we zoeken naar de lengte van één cycloïde-boog. Zet het ventiel onderaan, op de grond. Draai het wiel steeds één spaak verder, en kijk hoe hoog het ventiel gekomen is en hoever het naar voren is gegaan. Na 36 spaken krijg je dan het volgende resultaat.



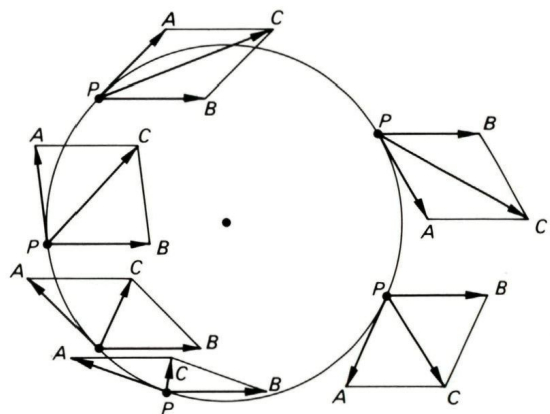
De afstanden tussen de opeenvolgende punten groeien tot we bovenaan zijn en nemen dan weer af. Dat komt overeen met wat we al wisten: onderaan staat het ventiel stil en bovenaan gaat het met dubbele snelheid.

Eén stand van het wiel is in de tekening weergegeven. Je ziet weer de pijlen uit het druppelverhaal van het eerste artikel. Pijl A geeft de snelheid aan die de loslatende druppel door de draaiing van het wiel alléén krijgt. Pijl B geeft de snelheid aan ten gevolge van het vooruitgaan van de fiets. Pijl C is gevonden door de

figuur APB tot een parallellogram te voltooien. Pijl C geeft de werkelijke snelheid (t.o.v. de straat) van de druppel aan. Als je goed kijkt zie je dat deze pijl aan de cycloïde raakt. Dat moet ook, want een druppel heeft op het moment van loslaten juist de richting van de echte beweging van het wiel. Op die raakrichting moeten we nu even dieper ingaan om de omweg van het ventiel te kunnen bepalen.

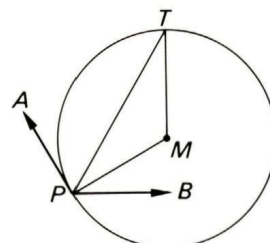
Nader onderzoek

We tekenen eens het wiel in een aantal standen over elkaar. Je ziet dan maar één wiel, maar wel verschillende keren de figuur $PBCA$.

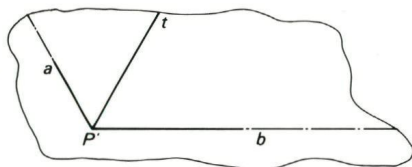


Het lijkt wel alsof al die pijlen PC naar één punt wijzen, het topje van het wiel. Daar moeten we zekerheid over zien te krijgen.

Teken om te beginnen nog eens de cirkel, het punt P , en de pijlen A en B . Teken C nog niet. Geef het midden van de cirkel aan met M en de 'top' met T . Als we nu kunnen inzien dat PT de hoek tussen PA en PB middendoor deelt, zijn we klaar, want dat doet PC namelijk ook en dan vallen PC en PT dus samen. Teken behalve PT ook nog MT en MP .



Teken op een transparant velletje nu even P en de lijnen PA , PB en PT over. Noem die lijnen a , b en t en geef P op het transparantje aan met P' . Je transparantje ziet er dus zo uit:

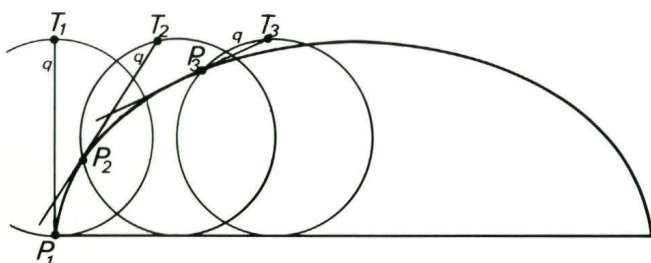


Schuif nu je transparantje zo over de tekening dat P' op M komt en draai dan zó dat lijn b samenvalt met MT . Het transparant is dan dus 90 graden gedraaid. Nu zul je merken dat lijn a precies op MP is gekomen. Allicht, want PA en MP staan ook loodrecht op elkaar. Nu nog kijken wat er met lijn t aan de hand is. Die komt natuurlijk loodrecht op PT te staan. Maar omdat driehoek TPM symmetrisch is, is t ook de lijn die de hoek tussen MP en MT middendoor deelt. Maar dan deelde t al vóór het verschuiven de hoek tussen a en b middendoor! Dus was PT inderdaad de lijn die de hoek tussen PA en PB middendoor deelde.

Een nieuw onderdeel aan je fiets

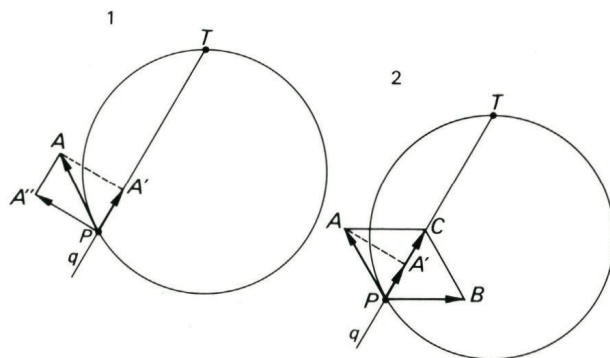
Denk je nu eens in dat er een lat, die even lang is als de diameter van je wiel, als volgt aan je fiets zit. Eén uiteinde zit scharnierend vast aan een punt bij de top van je wiel, bijvoorbeeld aan het boven-eind van je voorspatbord. Laat er nu een uitsteekseltje aan het ventiel zitten, dat langs de lat glijdt en zo de lat in beweging brengt. Het volgende plaatje geeft een paar standen van het wiel met deze vreemde lat weer.

Uit het voorgaande weten we dat deze lat – laten we verder van de lijn q spreken, de lat was maar een denkbeeld – juist de raaklijn aan de cycloïde is.



We gaan kijken hoe snel P zich t.o.v. de lijn q beweegt. Wat concreter: stel je voor dat er op de lat een vlieg zit; die merkt niets van een kromme ventielbaan of van beweging van de lat, die ziet alleen het ventiel voorbij komen.

We maken nu eerst een grotere tekening (1) met het wiel, punt P , pijl A en lijn q . Pijl B doet niet mee, want in de beweging van het geheel t.o.v. de straat zijn we even niet geïnteresseerd.



Voor de vlieg speelt pijl A alleen een rol voor zover die in de richting van lijn q werkt. Je kunt snelheden niet alleen samenstellen uit twee componenten, maar je kunt ze ook in delen splitsen. Hier splitsen we A in een component A' langs lijn q en een component A'' loodrecht op lijn q . Wij (en de vlieg) hechten alleen waarde aan A' want die werkt langs lijn q . De pijlen A' en A'' waren al ingetekend, maar nu voegen we in (2) de pijlen B en C ook toe en laten A'' maar weg. Het zal je geen moeite kosten om in te zien dat pijl A' precies de helft van pijl C is. De vlieg ziet dus steeds de helft van de ware snelheid. Hij zal daarom denken dat het ventiel juist één diameter (= de lengte van de lat) aflegt voor het bij T is. In werkelijkheid, langs de kromme cycloïde, moet dat dus twee keer zoveel zijn.

Voor een halve boog van de cycloïde vinden we dus een lengte van twee diameters. En een hele boog is kennelijk vier diameters lang.

Ter vergelijking: de afstand van voetpunt tot voetpunt is precies één wielomtrek, ofwel π keer de diameter. Zo weet je dus de omweg van het ventiel: ongeveer 1,27 (nl. $4/\pi$) keer zo lang als de recht afgelegde weg!

Correspondentie

A-blokken

Snij een vel papier van het gebruikelijke A4-formaat doormidden, de langste zijde in tweeën. Je krijgt dan twee vellen A5-formaat. Elk met een oppervlakte die de helft is van het oorspronkelijke vel, maar met nog steeds dezelfde lengte/breedte verhouding.

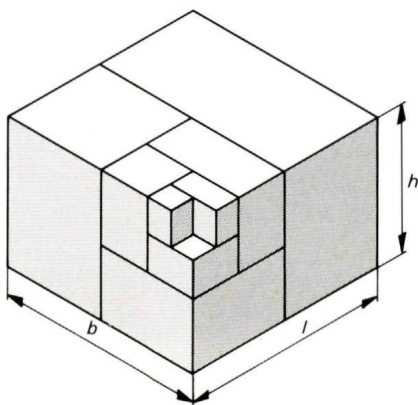
Dit lukt omdat de zijden van het A4-vel zich verhouden als $\sqrt{2} : 1$. Na halvering wordt dat $1 : \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en dat is *dezelfde* verhouding.

Het aardige is dat dit bij alle volgende tweedelingen van het papier *blijft* gelden. Maar nu . . .

In de ruimte Kun je bij een rechthoekig blok (een balk) lengte, breedte en hoogte zó kiezen dat na éénmaal middendoor zagen de verhouding lengte/breedte/hoogte ($l : b : h$) ongewijzigd blijft?

Duidelijk is in ieder geval dat je voor het doorzagen de langste ribbe van het blok moet kiezen. Stel $l > b > h$, dan geldt voor de oude en de nieuwe verhoudingen: ($l : b : h$) wordt ($b : h : \frac{1}{2}l$).

Met een beetje algebra (je kunt de verhoudingen het beste als echte delingen schrijven), vind je dat dit *dezelfde* verhouding is, als je kiest: $(\sqrt[3]{2})^2 : \sqrt[3]{2} : 1$. Ook hier krijg je bij herhaald doorzagen steeds *gelijkvormige* blokken (telkens met een gehalveerd volume).



Een idee voor beter stapelbare postpakketten?

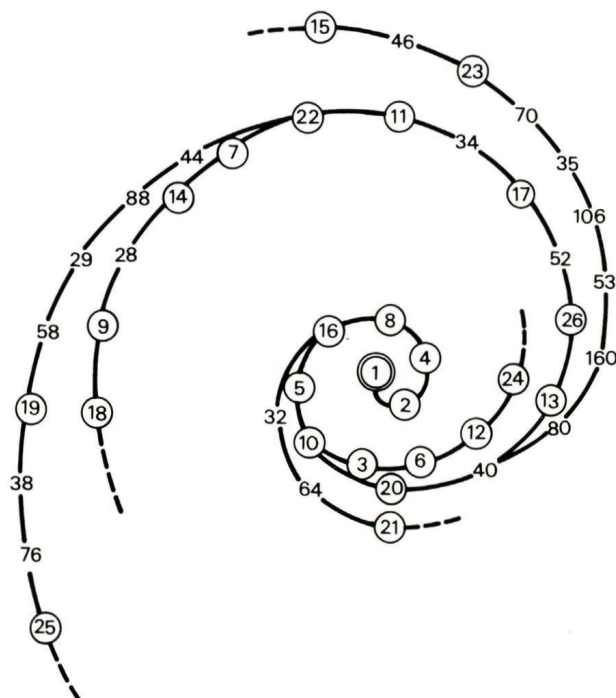
Oskar van Deventer, Eindhoven

De raadselachtige Syracuse-rijen

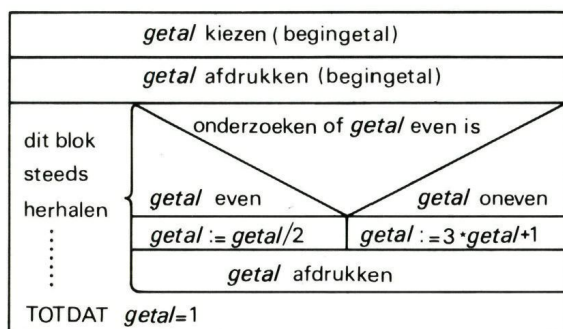
Het probleem van de Syracuse-rijen is echt zo'n probleem, waarbij je zegt: 'Even de computer gebruiken'. Door z'n eenvoud is het een van de mooiste problemen die ik ken, maar het bijbehorende rekenwerk gaat zó gauw vervelen dat ik het altijd wel geloofde. Tot er op m'n school microcomputers kwamen, die hun hand daar niet voor omdraaien.

Je maakt een Syracuse-rij door te beginnen met een willekeurig natuurlijk getal. Is het *even* dan neem je als volgend getal de *helft*; is het oneven dan neem je als volgend getal het *drievoud plus 1*. En zo ga je maar door. Hier zie je als voorbeeld de Syracuse-rij met begin tal 17: $17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Bij 1 stop je, want daarna zou het stuk $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ steeds terugkeren.

Hieronder zie je een aantal Syracuse-rijen samengebracht, tot en met begingetal 26. Het opmerkelijke is dat je steeds op 1 uitkomt! Zou dat voor elk begingetal gelden?



‘Even de computer pakken’, dacht ik toen, en schreef aan de hand van het volgende structuurdiagram een programma.



Toen m'n programma af was, was ik natuurlijk benieuwd naar de resultaten met begingetal 27:

27	82	41	124	62	31	94	47	142	71	214
107	322	161	484	242	121	364	182	91	274	
137	412	206	103	310	155	466	233	700	350	
175	526	263	790	395	1186	593	1780	890		
445	1336	668	334	167	502	251	754	377		
1132	566	283	850	425	1276	638	319	958		
479	1438	719	2158	1079	3238	1619	4858			
2429	7288	3644	1822	911	2734	1367	4102			
2051	6154	3077	9232	4616	2308	1154	577			
1732	866	433	1300	650	325	976	488	244		
122	61	184	92	46	23	70	35	106	53	160
80	40	20	10	5	16	8	4	2	1	

We wachten met spanning af!

Mededelingen

Het abonnementsgeld is dan wel iets hoger, maar daarvoor kun je Pythagoras dan ook vier keer per jaar in je eigen brievenbus vinden.

Inlichtingen bij je wiskunde leraar of bij H. N. Schuring, secretaris van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, tel. 085 - 455555.

Pythagoras Olympiade



Nieuwe opgaven (Oplossingen inzenden vóór 1 mei 1984 aan *Pythagoras Olympiade, Otlmansdreef 21, 2353 CK Leiderdorp (NL)*. Wedstrijdvoorwaarden en prijzen staan vermeld op pagina 13 van deze jaargang.)

PO 67.

Voor een zeker natuurlijk getal n is $10^n + 1$ een priemgetal groter dan 2.

Bewijs dat n van de vorm $n = 2^k$ is voor zeker natuurlijk getal k .

PO 68.

Voor elke niet-lege deelverzameling $D = \{i_1, \dots, i_k\}$ van de verzameling $\{1, 2, \dots, 1984\}$ definiëren we het getal

$$p(D) \text{ door } p(D) = \frac{1}{i_1 \cdot i_2 \cdot \dots \cdot i_k}.$$

Bewijs dat de som van alle getallen $p(D)$ 1984 is.

PO 69.

Toon aan dat je in een kubusvormige holle doos met inwendige ribbelengte 1, drie massieve regelmatig viervlakken met ribbelengte 1 kunt opbergen. (Geef bijvoorbeeld een nette tekening met een duidelijke toelichting.)

Oplossingen en prijswinnaars van de opgaven

PO 54–56

PO 54.

Bewijs dat het product van vier op elkaar volgende gehele getallen groter dan nul nooit de derde macht van een geheel getal kan zijn.

Oplossing van *Rutger Noot*, 6g, Gymnasium Haganum, Den Haag:

Onder die vier getallen zijn er twee even (waarvan één een viervoud), en één of twee drievouden. Alle andere priemfactoren kunnen maar in één van de vier getallen voorkomen. Als het product een derdemacht is, moet dus elke priemfactor groter dan 3 tot een macht voorkomen die een veelvoud van 3 is, en al die zelfde priemfactoren mogen maar in één van de vier getallen zitten.

Een van de oneven getallen is geen drievoud, en dus is het de derde macht van een product van priemfactoren groter dan 3. Het andere oneven getal kan geen derdemacht zijn, want twee derdemachten verschillen altijd meer dan 2 van elkaar. We hebben dus onder die vier getallen: een oneven derde-

macht die geen drievoud is, dus een getal van de vorm $p = (6n \pm 1)^3 = 216n^3 \pm 108n^2 + 18n \pm 1$, een oneven drievoud dat hiervan twee verschilt, dus $216n^3 \pm 108n^2 + 18n \pm 3$ en dat is geen negenvoud. Er is onder de vier getallen nog een drievoud, en dat moet blijkbaar een negenvoud zijn, anders komen we niet aan drie factoren 3. Dat negenvoud is dus $216n^3 \pm 108n + 18n$.

Als $p = (6n + 1)^3$ dan is het product van de vier getallen dus $(p-1)p(p+1)(p+2)$, en als $p = (6n-1)^3$ dan is het $(p-2)(p-1)p(p+1)$. In het eerste geval moet, wil het product een derdemacht zijn, ook $(p-1)(p+1)(p+2)$ een derdemacht zijn. Maar omdat $p > 1$ is, geldt $p^3 < (p-1)(p+1)(p+2) < (p+1)^3$, tegenspraak.

In het tweede geval is evenzo $(p-2)(p-1)(p+1)$ een derdemacht. Nu geldt echter $(p-1)^3 \leq (p-2)(p-1)(p+1) < p^3$ met gelijkheid alleen als $p = 3$, maar dat is zelf geen derdemacht. In alle gevallen komt er dus een tegenspraak.

Er waren slechts 10 inzendingen, waarvan 4 correct: *Rutger Noot*, *Auke Zijlstra* (6 ath, RSG Leeuwarden), *Frank Robijn* (5g, RSG Koning Willem II, Tilburg) en *Wiebe Veldhuis* (6 vwo, Bogermancollege, Sneek). De prijzen gingen naar Wiebe en Rutger.

PO 55.

Een regelmatig achthoek en een kubus geven beide bij zekere loodrechte parallelprojectie dezelfde regelmatige zeshoek als schaduwfiguur. Hoe verhouden zich hun inhoud?

Oplossing van *Gerard Barkema*, 5vwo, CSG Oostergo, Dokkum:

De ribbe van het achthoek is even lang als de zijvlakdiagonaal van de kubus. Stellen we die lengte op 1, dan heeft de kubus dus ribben ter lengte $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, en de inhoud van de kubus is daarom $(\sqrt{2})/4$.

Het regelmatige achthoek is opgebouwd uit twee pyramides met een vierkant als grondvlak. De hoogte is $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, dus de inhoud van zo'n pyramide is $1 \cdot 1 \cdot (1/3) \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{2}) = (1/6)\sqrt{2}$. De inhoud van het achthoek is dus $(1/3)\sqrt{2}$, en de verhouding van de twee inhoud is 3 : 4.

Er waren 23 inzendingen waarvan 17 correct. Prijswinnaars: *Claudine de Baere*, 4 hum., Virgo Sapientiae, zusters Maricolen, Maldegem (België), en *Reinder Beurskens*, 5 vwo, Nijmeegse SG.

Nederlandse Wiskunde Olympiade



Oplossingen Tweede Ronde 1983

1. Een lijn door het hoekpunt A verdeelt driehoek ABC in twee gelijkbenige driehoeken. Gegeven is dat een van de hoeken van driehoek ABC gelijk is aan 30° . Bereken in alle mogelijke gevallen hoe groot de andere hoeken van de driehoek kunnen zijn.

Stel D is het punt waar de lijn door A de zijde BC snijdt. De driehoeken ADB en ADC zijn gelijkbenig, zeg met top hoeken resp. T_1 en T_2 (de top hoek is de hoek waar de twee gelijke benen samenkomen). Er zijn nu negen gevallen denkbaar:

$T_1 \backslash T_2$	A	D	B
A	X	1	X
D	1	3	2
C	X	2	X

De gevallen 'X' zijn echter onmogelijk:
 $T_1 = T_2 = A$ omdat dan B, D en C niet op één lijn kunnen liggen,
 $T_1 = B, T_2 = A$ omdat dan $\angle B + \angle C = \angle ADB + \angle ADC = 180^\circ$ zou zijn,
 $T_1 = C, T_2 = A$ om soortgelijke reden,

$T_1 = B, T_2 = C$ omdat dan $BC < AB + AC = DB + DC = BC$ zou zijn.

In de redenering spelen B en C dezelfde rol, dus we behoeven nu nog slechts drie gevallen te onderzoeken:

- $T_1 = D, T_2 = A$,
- $T_1 = B, T_2 = D$,
- $T_1 = T_2 = D$.

Geval 1: (maak zelf een tekening!) Dan geldt voor de hoeken van de driehoek: $C = 2B, A = 180 - 3B$. Als één van de hoeken 30 is, geeft dit als mogelijkheden:

1.1: $A = 90, B = 30, C = 60$ (alles in graden)

1.2: $A = 135, B = 15, C = 30$.

1.3: $A = 30$ zou leiden tot $B = 50$, maar B moet kleiner zijn dan A , dus dit is onmogelijk.

Geval 2: In dit geval geldt $A = 3C$ en $B = 180 - 4C$.

2.1: $A = 30, B = 140, C = 10$.

2.2: $B = 30, C = 37\frac{1}{2}, A = 112\frac{1}{2}$

2.3: $C = 30, A = 90, B = 60$ (zelfde als geval 1.1).

Geval 3: Dan moet hoek A recht zijn, en dat leidt weer tot een $30-60-90$ driehoek.

Er zijn dus vier verschillende gevallen mogelijk (1.1, 1.2, 2.1 en 2.2).

2. Bewijs dat

$$2^{2n}(2^{2n+1} - 1)$$

voor elk oneven natuurlijk getal n een getal is dat eindigt op 28 als het in het tientallig stelsel wordt uitgeschreven.

Voor $n = 1$ klopt het.

Stel dat we voor zekere oneven n bewezen hebben dat

$$f(n) = 2^{2n}(2^{2n+1} - 1) \text{ eindigt op } 28. \text{ Als we } n \text{ met } 2 \text{ vermeerderen, ontstaat } f(n+2) = 2^{2(n+2)}(2^{2(n+2)+1} - 1) = 16 \cdot 2^{2n}(16 \cdot 2^{2n+1} - 1) = 16 \cdot 2^{2n}(16(2^{2n+1} - 1) + 15) = 256 \cdot 2^{2n}(2^{2n+1} - 1) + 16 \cdot 15 \cdot 2^{2n} = 256 \cdot 2^{2n}(2^{2n+1} - 1) + 240 \cdot 4^n.$$

Omdat $2^{2n}(2^{2n+1} - 1)$ eindigt op 28, eindigt $256 \cdot 2^{2n}(2^{2n+1} - 1)$ op 68. Verder geldt: de machten van 4 eindigen afwisselend op 4 en op 6; de oneven machten eindigen allemaal op 4. Als n oneven is, eindigt $240 \cdot 4^n$ dus op 60. Daarom eindigt $f(n+2)$ ook op 28.

Omdat $f(1)$ eindigt op 28, geldt hetzelfde voor $f(3), f(5), f(7), \dots$, dus voor alle $f(n)$ met oneven n .

3. Gegeven zijn vier reële getallen a, b, c en p .

De getallen a, b en c zijn niet alle drie gelijk. Verder geldt dat

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a} = p.$$

Bepaal alle mogelijke waarden van p en bewijs dat $abc + p = 0$.

Uit de opgave blijkt dat $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$. Ook moet gelden dat $p \neq 0$ want anders was $b = -\frac{1}{a} = -\frac{1}{c}$ dus $c + \frac{1}{c} = 0$; kan niet.

$$\begin{aligned} \text{We hebben } ab + 1 &= bp, \\ bc + 1 &= cp, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dus } cp^2 &= bpc + p = (ab+1)c + p = abc + p + c, \\ \text{dus } c(p^2 - 1) &= abc + p. \end{aligned}$$

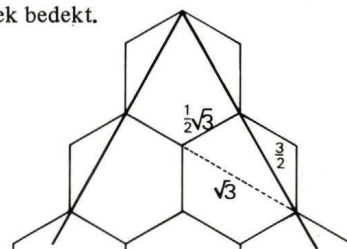
Evenzo bewijs je $a(p^2 - 1) = abc + p$, en $b(p^2 - 1) = abc + p$. Omdat a, b en c niet alle drie gelijk zijn, volgt hieruit $p^2 - 1 = 0$ en $abc + p = 0$.

Inderdaad kunnen de waarden $p = \pm 1$ beide worden aangenomen, bijvoorbeeld $(a, b, c) = (\pm 2, \mp 1, \pm \frac{1}{2})$.

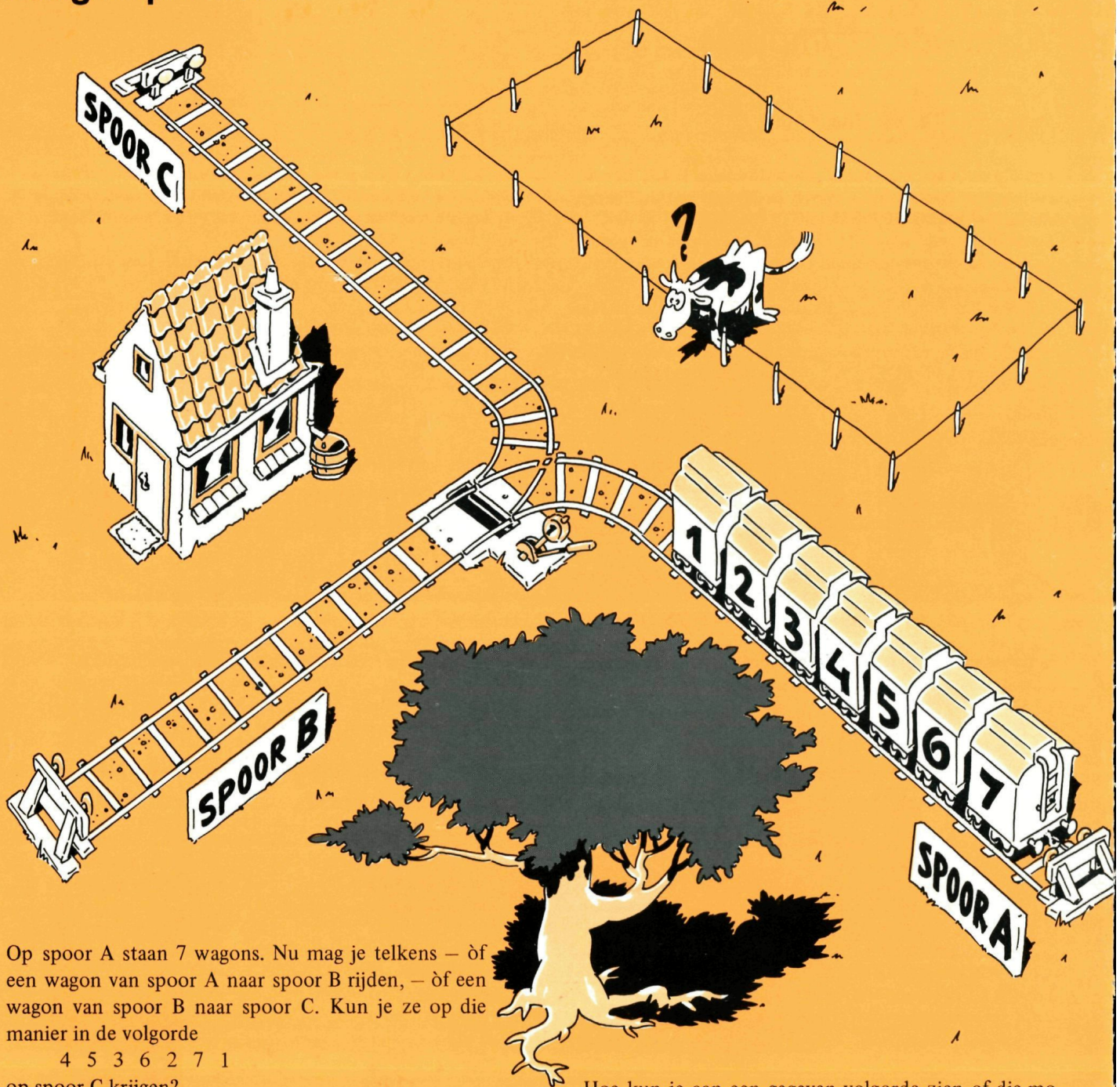
4. Binnen een gelijkzijdige driehoek met zijden van lengte 15 zijn 111 punten gekozen.

Bewijs dat het — hoe die punten ook gekozen zijn — altijd mogelijk is een ronde munt met diameter $\sqrt{3}$ ergens op de driehoek te leggen op zo'n manier dat de munt minstens drie van de gekozen punten bedekt. (De munt mag gedeeltelijk buiten de driehoek liggen.)

Zo'n gelijkzijdige driehoek kan precies bedekt worden door een honingraatpatroon van $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 10 = 55$ regelmatige zeshoeken met een diameter van $\sqrt{3}$ (zie de figuur). In minstens één van die zeshoeken moeten drie van de gekozen punten liggen. Plaats de munt precies zo, dat hij bij die zeshoek bedekt.



Rangeerprobleem



Op spoor A staan 7 wagons. Nu mag je telkens — òf een wagon van spoor A naar spoor B rijden, — òf een wagon van spoor B naar spoor C. Kun je ze op die manier in de volgorde

4 5 3 6 2 7 1

op spoor C krijgen?

Ga daarna eens na of de volgende volgordes mogelijk

zijn: 4 5 3 6 7 2 1

4 5 3 6 1 7 2

4 5 6 3 2 7 1

4 5 3 2 6 7 1.

Hoe kun je aan een gegeven volgorde zien of die mogelijk is? Kun je misschien een computerprogramma schrijven dat dit uitzoekt, voor zeven wagons, of voor een willekeurig ander gegeven aantal?

En hoeveel mogelijke volgordes zijn er bij zeven wagons?