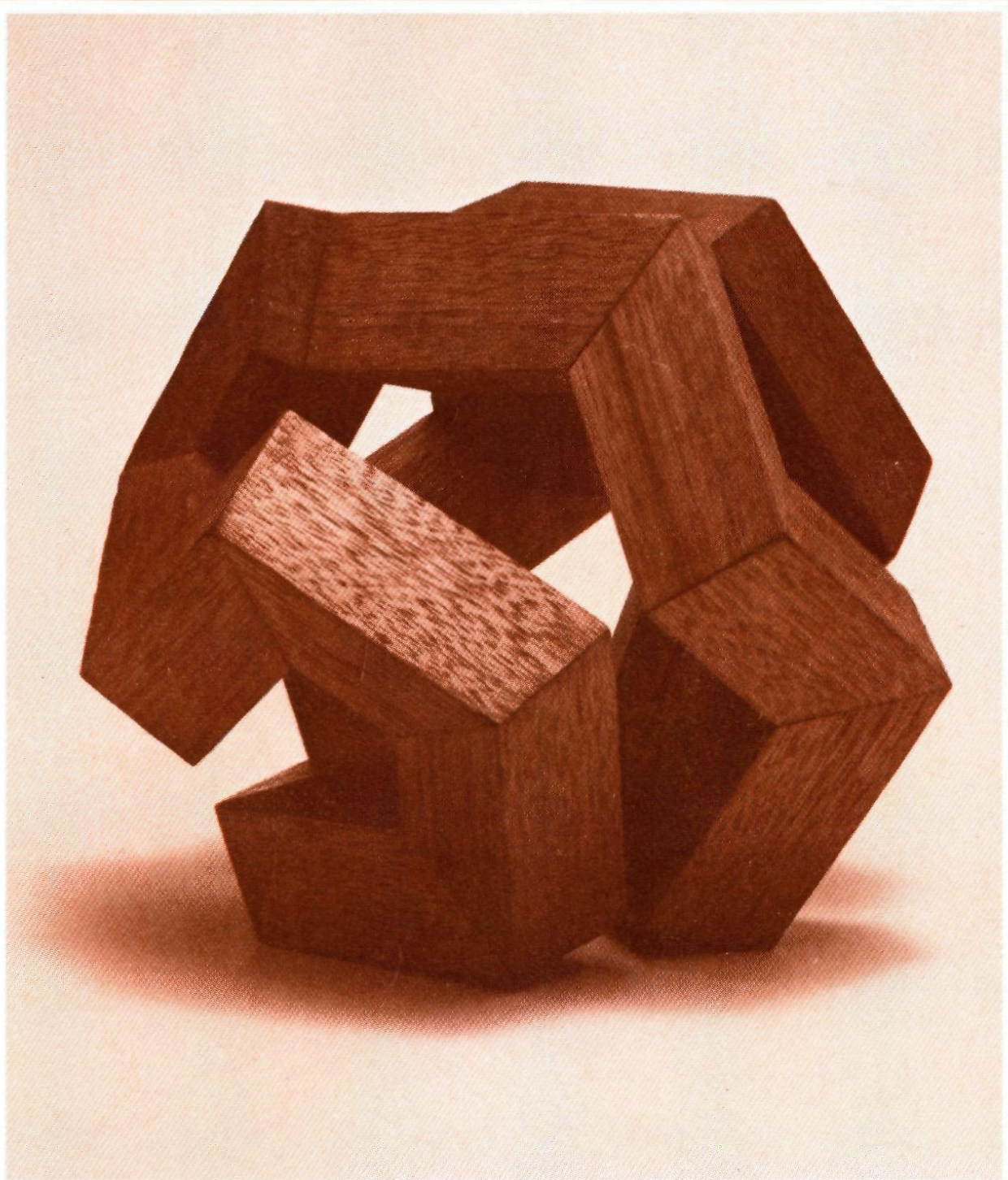




Pythagoras



wiskunde tijdschrift voor jongeren

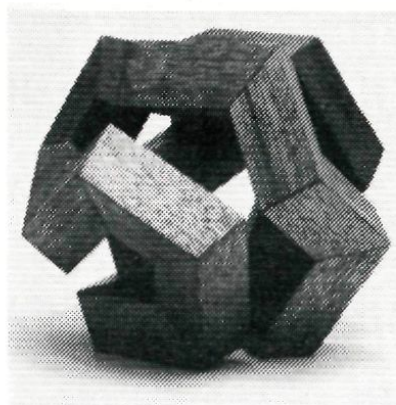
stichting ivio 'lelystad

25e jaargang

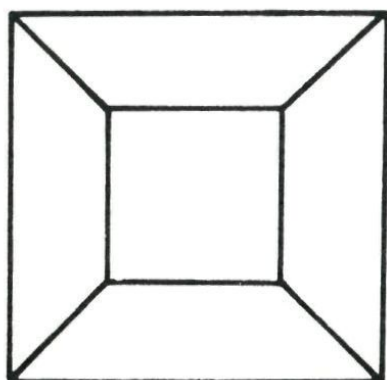
nr. 1

oktober 1985

Dubbelverstek



Als een timmerman een afwerklijst om een deur moet maken of als je misschien zelf een lijstje ergens omheen wilt maken, dan moeten de uiteinden van lat of lijstprofiel onder verstek worden afgezaagd. Dat wil zeggen onder een hoek van vijfenveertig graden. Die hoek tussen de dwarsdoorsnede van het profiel en de zaagrichting heet de verstekhoek. De afgezaagde stukken kunnen daarna worden samengevoegd tot een rechthoekige lijst.



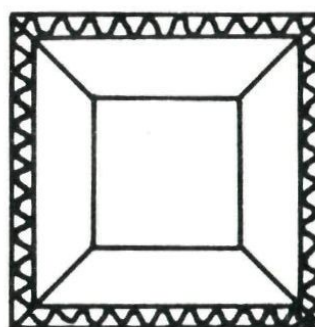
Figuur 1

Als de lijst een ingewikkeld profiel heeft, gaat dat niet helemaal op. Er moet dan een paar maal extra gezaagd worden. Bovendien houden we een paar stukjes afval over.

Afwijkingen van de lijst

Een timmerman gebruikt twee termen om de afwijkingen van een lijst aan te geven: *schranken* en *scheluw*.

Een lijst is schrank als de hoeken niet meer precies negentig graden zijn. Als een deur uit de haakse stand is gezakt en tegen de drempel gaat klemmen is de deur schrank.

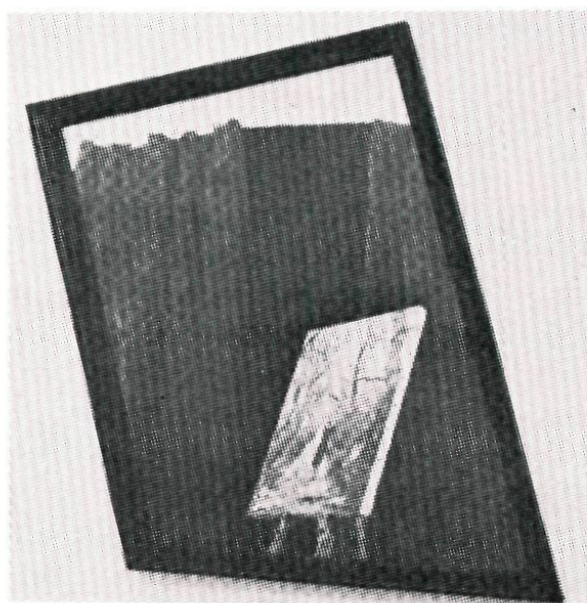


Figuur 2





Figuur 3



Figuur 4

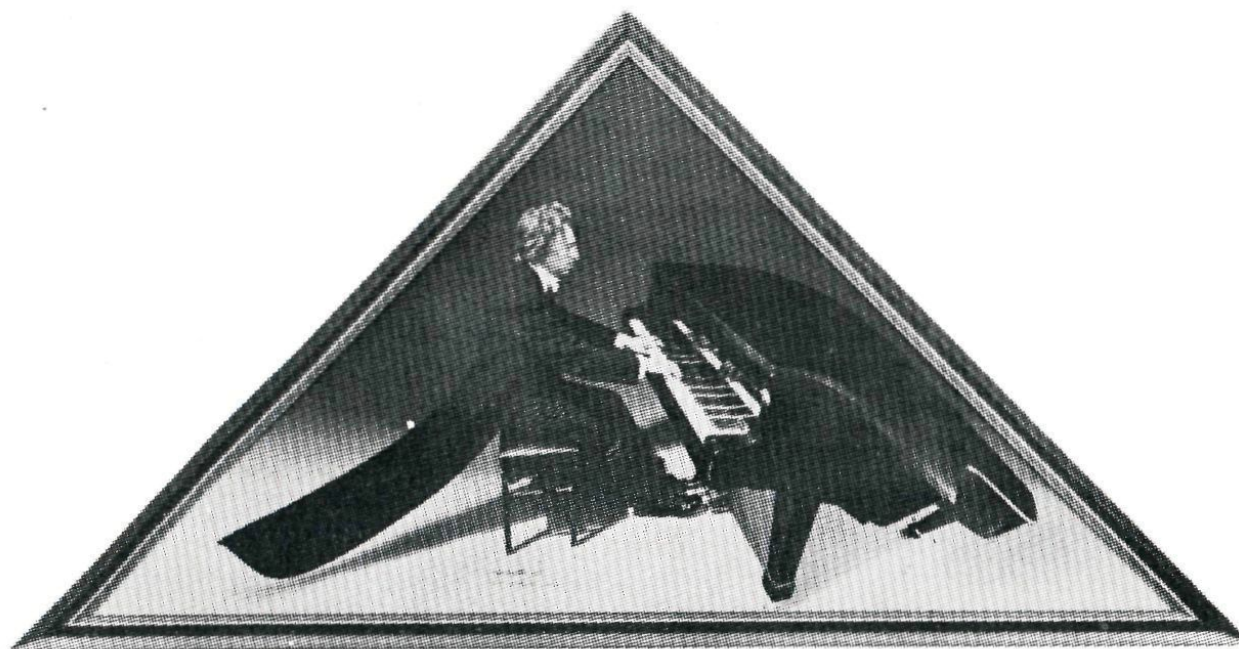
Een lijst is scheluw als ze door onnauwkeurig zagen of door kromtrekken niet meer in het platte vlak ligt. Als een deur boven goed tegen de aanslag sluit, maar onder kiert, is de deur kromgetrokken of scheluw.

Spelen met schrank

Als de verstekhoek geen 45 graden, maar 22,5 graden is, kan een mooie regelmatige achthoekvormige lijst worden geconstrueerd (zie figuur 3).

Door de verstekhoek verschillende waarden te geven, kunnen andere lijstvormen worden verkre-

Figuur 5



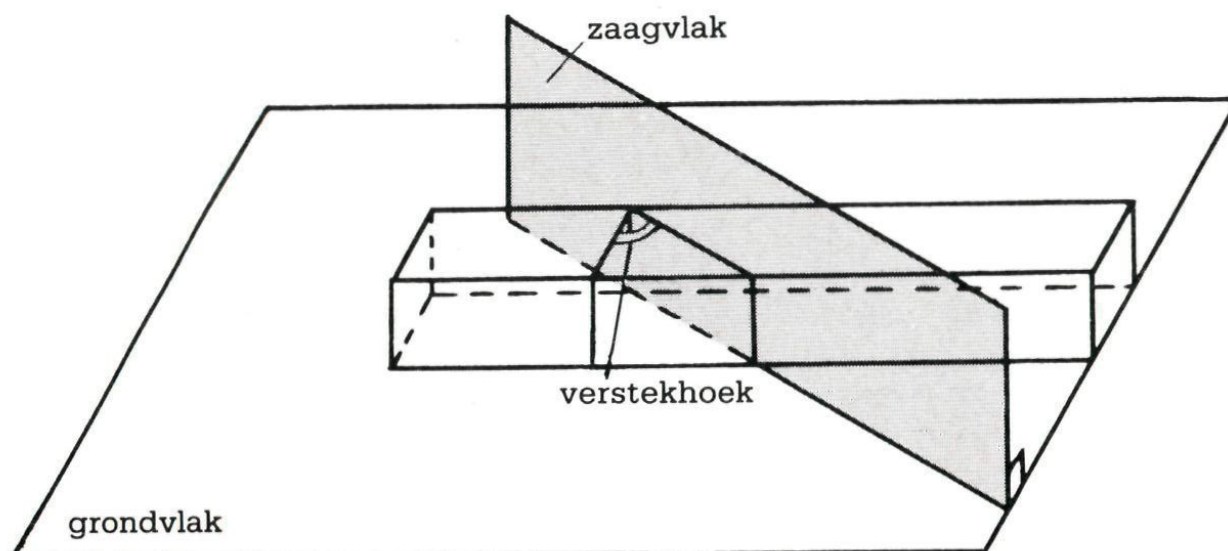
gen, zoals je in de figuren 4 en 5 kunt zien.

Bij al deze lijsten werd weliswaar de verstekhoek gevarieerd, maar er werd nog wel, zoals in figuur 6 is aangegeven, loodrecht op het grondvlak gezaagd. Hierdoor kwamen al deze lijsten steeds in het platte vlak van het grondvlak te liggen.

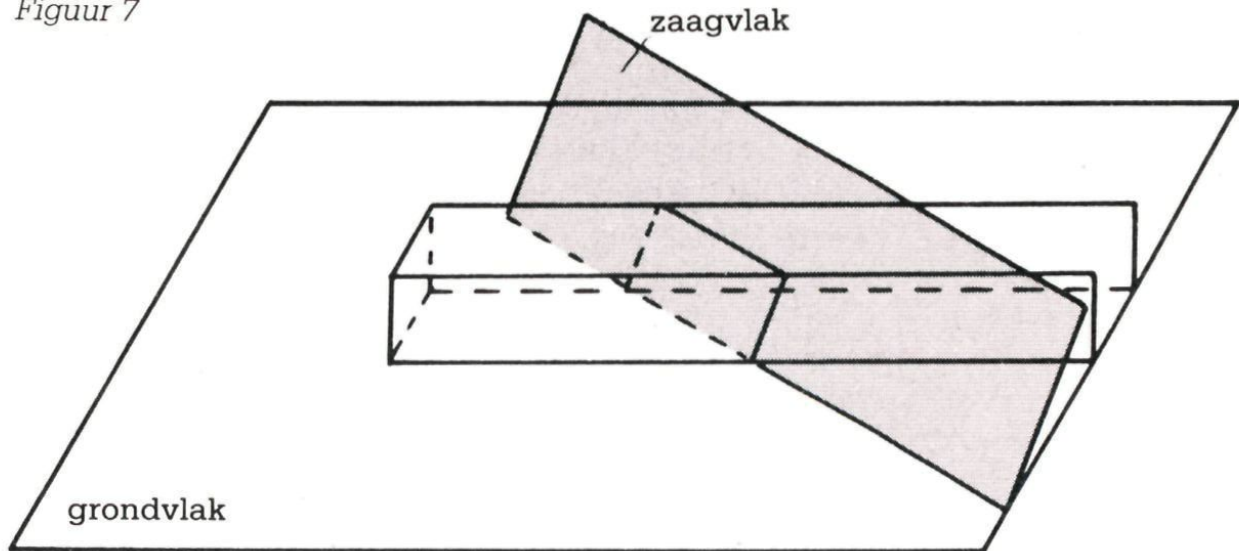
Spelen met schrank en scheluw: dubbelverstek

Als we nu niet meer loodrecht op het grondvlak zagen, zullen we zien dat de lijst zich als het ware verheft uit zijn vlak. Laten we nu eens een lat met een vierkante dwarsdoorsnede 'geheel schuin' doorzagen, zodat de zaagsnede niet loodrecht op een van de paren zijvlakken staat (zie figuur 7).

Figuur 6



Figuur 7



Er ontstaan dan twee zogeheten kopse uiteinden die elkaars spiegelbeeld zijn. Deze kopse uiteinden hebben steeds de vorm van een *parallellogram*. Ze kunnen op twee manieren aan elkaar gezet worden (zie figuur 8). Namelijk zoals ze aan elkaar zaten toen ze doorgezaagd werden, en door ze 180 graden ten opzichte van elkaar te draaien en ze dan naar elkaar toe te bewegen.

Gesloten ruimtelijke lijsten

Niet alleen in het platte vlak, maar ook in de ruimte kan een gesloten lijst geconstrueerd worden. Na een paar knikken kom je weer op het punt van uitgang terug. De foto op de omslag toont zo'n lijst. Hij bestaat uit twintig delen en heeft begin noch einde.

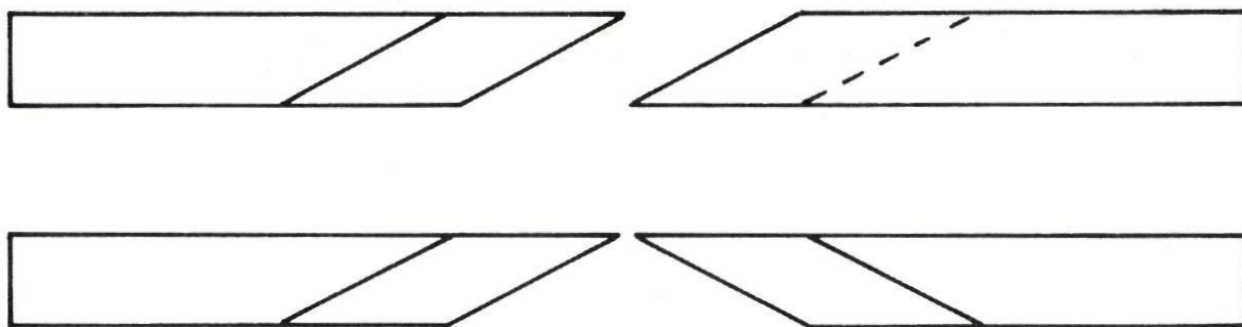
Een lijst kan pas ruimtelijk worden als we minimaal vier stukken gebruiken. Immers, uit drie stukken kan slechts een driehoek worden gevormd en die bevindt zich per definitie in één vlak.

Bouwplaatje

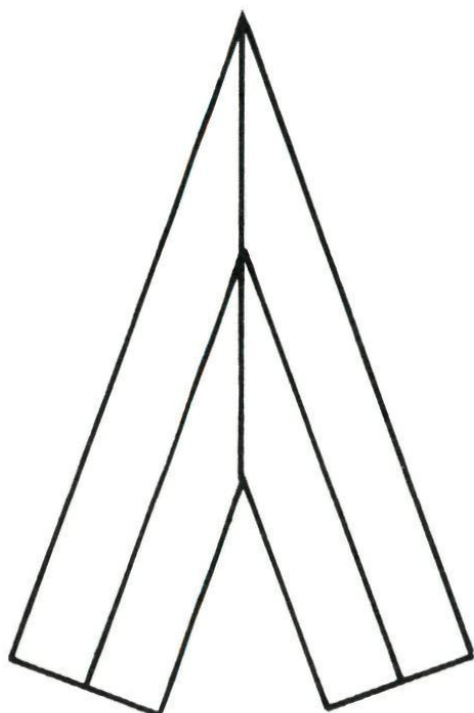
In figuur 9 (te vinden op de bladzijden 14 en 15) wordt een bouwplaatje gegeven van een ruimtelijke lijst.

Het gaat, zoals boven is beschreven, om de eenvoudigste: de ruimtelijke vierbalkconstructie. De vier stukken moeten langs de doorgetrokken lijnen worden uitgeknipt. De gestippelde lijnen moeten worden gerild en gevouwen. Daarna kunnen de zijden voorzien van dezelfde letters en cijfers aan elkaar geplakt worden. Dit kan met doorzichtig plakband, maar eventueel kun je ook met lipjes werken, die je zelf even moet tekenen.

Als je de vierbalk in elkaar gezet hebt, zul je merken dat daarin het 'möbius-effect' optreedt. Wanneer je namelijk ergens op een zijvlak je vinger plaatst en je doorloopt de figuur door in de hoekpunten steeds naar de naastliggende zijvlakken te gaan, zul je op het punt van uitgang terugkomen, nadat je de 'ring' viermaal hebt doorlopen. Dit komt omdat er in de constructie een kwartslag optreedt.



Figuur 8



Prijsvraag

De nu volgende prijsvraag bestaat uit twee opdrachten, een voor beginners en een voor gevorderden. Onder de goede inzenders van de eerste opdracht worden maximaal twintig modelletjes verloot van de bouwplaat uitgevoerd in fijnhout, onder de goede inzenders van de tweede maximaal drie constructies zoals afgebeeld op de omslag. Toezending daarvan geschiedt tegen vergoeding van portiekosten.

Oplossingen kun je voor 1 januari 1986 apart inzenden onder vermelding van naam, adres, school en klas aan P.S. Bakker, Verspijckweg 7f, 1865 BJ Bergen aan Zee (NL).

Voor beginners

Druk de lengten van alle zijden van de bouwplaat uit in de variabelen d (de dikte van de vierkante staven) en l (de lengte van de korte staaf, gemeten in het midden van de doorsnede).

Voor gevorderden

In de vierbalk van de bouwplaat treedt een kwartslag op. Probeer nog een andere vierbalk te vinden waarin eveneens zo'n kwartslag optreedt.

Deze vraag heeft oneindig veel oplossingen, maar ze zijn heel moeilijk te vinden. Daarom geven we nog als hint dat één van die oplossingen als knikpunten heeft: twee hoekpunten en twee zijvlaksmiddens van een kubus. De beschrijving is weer te geven aan de hand van een bouwplaatfiguur, met de maten ervan uitgedrukt in d en l .

Andere oplossingen en andere beschrijvingen zijn ook welkom.

Onmogelijke eenbalken

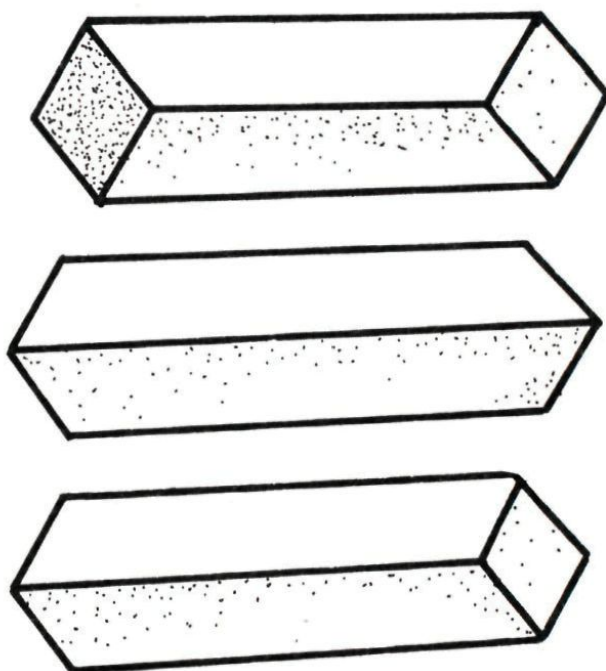
Onmogelijke figuren staan op het ogenblik erg in de belangstelling en waarschijnlijk is dat niet alleen maar een modeverschijnsel. Het is natuurlijk heel wonderlijk, dat wij in ons brein een ruimtelijk voorwerp construeren dat niet kan bestaan. En dat terwijl datzelfde brein ons wel degelijk laat weten dat het niet *kan* bestaan. Dat is een absurde conclusie: ik zie het, maar het kan niet bestaan!

Escher heeft drie prenten gemaakt, waarin onmogelijke figuren gebruikt worden: 'Waterval' (1961) met onmogelijke driebalken, 'Klimmen en dalen' (1960) met de onmogelijke trap en 'Belvédère' (1958) met een onmogelijke kubus. De eerste twee onmogelijke figuren ontleende hij aan een artikel van vader en zoon Penrose uit 1958. De onmogelijke kubus was een vondst van Escher zelf. Deze drie prenten zijn de populairste Escherprenten en daarvan zijn ook de meeste reproducties op posterformaat verkocht.

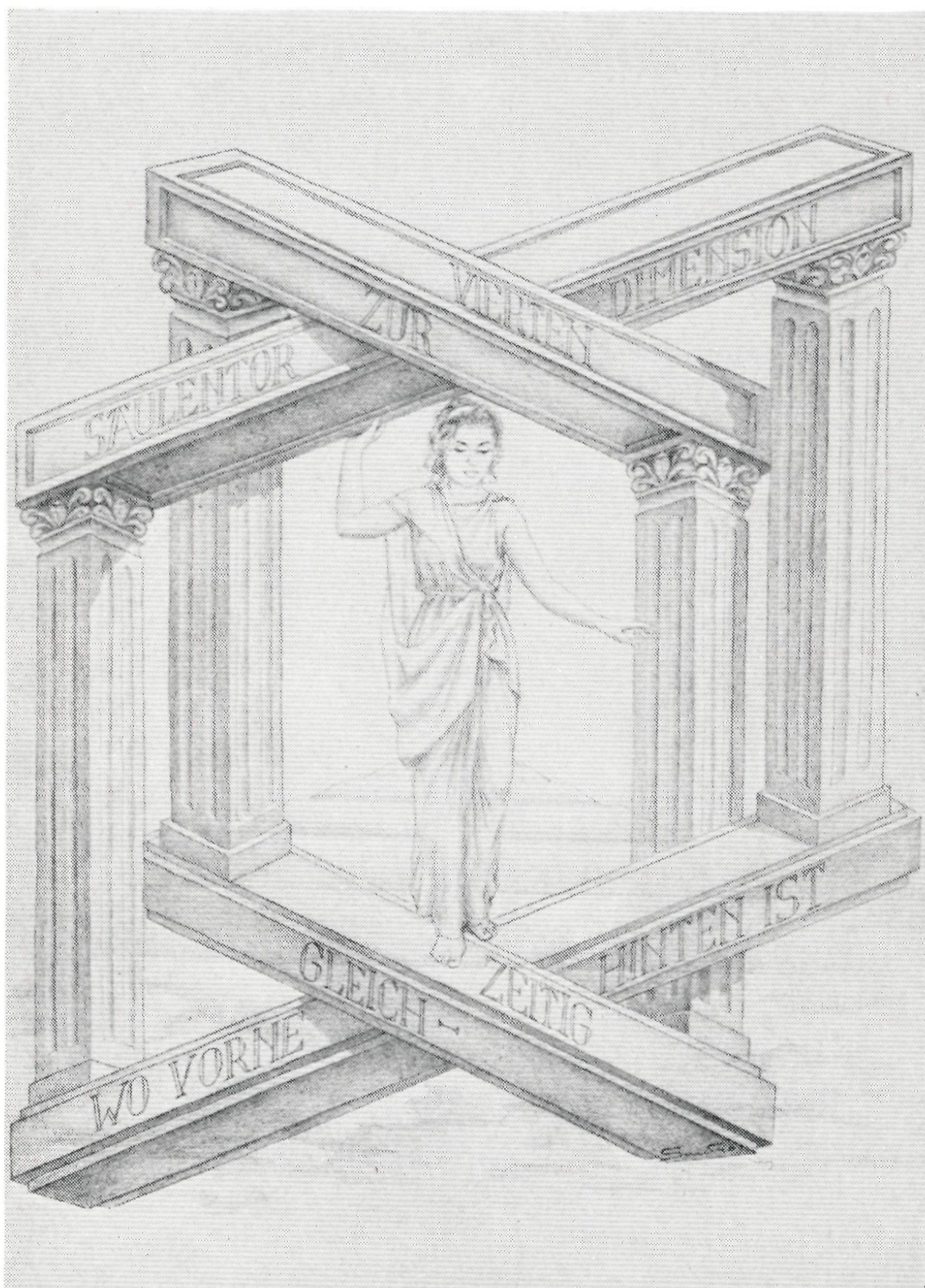
De soberste onmogelijke figuur

We kunnen ons afvragen, of er ook een onmogelijke figuur in de vorm van één balk getekend kan worden. In theorie is dat eenvoudig. In figuur 1 staan twee voorbeelden: bij de ene balk kijk je op twee kopse kanten en dat is niet mogelijk terwijl de andere balk juist geen enkele kopse kant laat zien. Daaronder staat een normale balk. Toch zien we deze balken niet als iets onmogelijks. Ons brein treedt gewoon corrigerend op en veronderstelt dat die balken niet recht, maar schuin afgezaagd zijn. Alleen als we die laatste mogelijkheid

absoluut uitsluiten, komen de gegevens die wij uit de afbeelding destilleren echt met elkaar in tegenspraak en dan ontstaat een onmogelijke figuur. We moeten dan toch wel wat meer rondom die balk tekenen. De Zwitserse tekenaar *Sandro Del Prete* heeft dat heel mooi en overtuigend gedaan in de hiernaast afgebeelde prent. Hij gebruikt onmogelijke eenbalken zonder kopse kanten om twee raamwerken te tekenen die samen een vreemde poort



Figuur 1

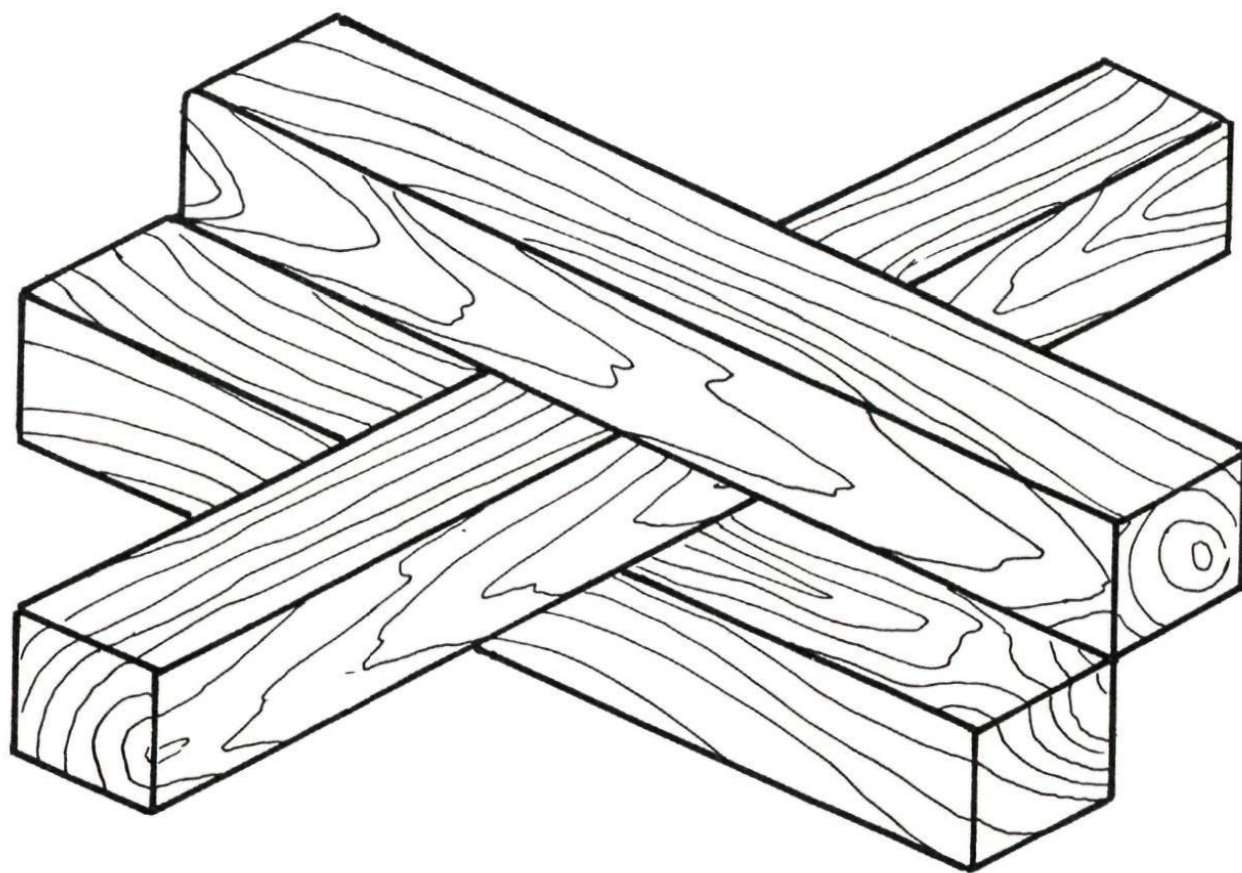


'Poort naar de vierde dimensie' van Sandro Del Prete.

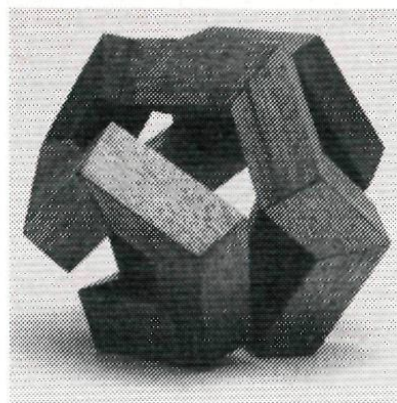
vormen. Nu komt het onmogelijke duidelijk tot uitdrukking: de vier balken (twee boven en twee onder) lopen alleen maar van ons af. Het midden van deze balken waar de vrouwenfiguur staat is van al het afgebeelde het dichtste bij ons. Ook de letters op de balken werken mee aan dit effect. Een bijkomende onmogelijkheid is dat van elke balk de bovenkant tegelijk de zijkant is. Het lijkt alsof zo'n balk onderweg over negentig graden is gedraaid. Dat hier een poort naar de vierde dimensie afgebeeld is, zoals de Duitse tekst suggereert, beschouwen we maar als een

speelse gedachte van de tekenaar. Met de vierde dimensie heeft de prent niets te maken. Hieronder geven we nog een tekening van een andere onmogelijke éénbalk, waarbij twee normale balken nodig zijn om hem onmogelijk te maken. Die balk is onmogelijk, omdat hij niet tussen de twee andere balken door kan lopen.

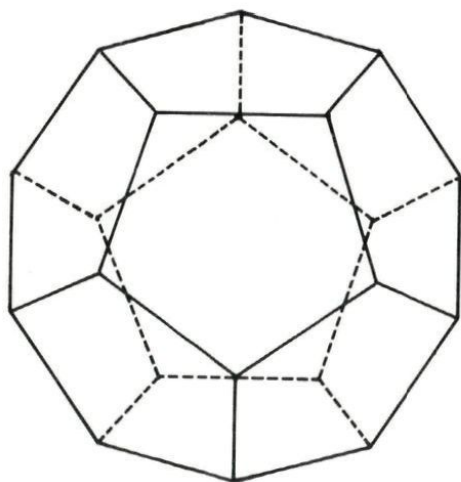
Wil je meer weten over de vele onmogelijke figuren die de afgelopen tien jaar gevonden zijn, lees dan bij voorbeeld het boek *Avonturen met onmogelijke figuren* dat onlangs is verschenen.



Reis over een twaalfvlak



In 1859 verkocht de Ierse wiskundige Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) aan een speelgoedfabrikant een spel. Als je dat een naam moet geven, zou je het 'Reis over een twaalfvlak' kunnen noemen. Zo'n twaalfvlak is, zoals je in figuur 1 ziet, een veelvlak dat bestaat uit twaalf regelmatige vijfhoeken en heeft dertig ribben en twintig hoekpunten. Die twintig hoekpunten kregen elk de naam van een grote wereldstad, bijvoorbeeld A = Amsterdam, B = Brussel, C = Calcutta, enz. Langs de ribben van dat regelmatige twaalfvlak moest men nu proberen een 'wereldreis' te maken. Deze reis moest bijvoorbeeld in Amsterdam beginnen en daar weer eindigen, terwijl onderweg *iedere stad precies éénmaal moest worden bezocht*. Eventueel kon de moeilijkheidsgraad worden verhoogd door te eisen dat bepaalde steden het eerst aangedaan moesten worden.

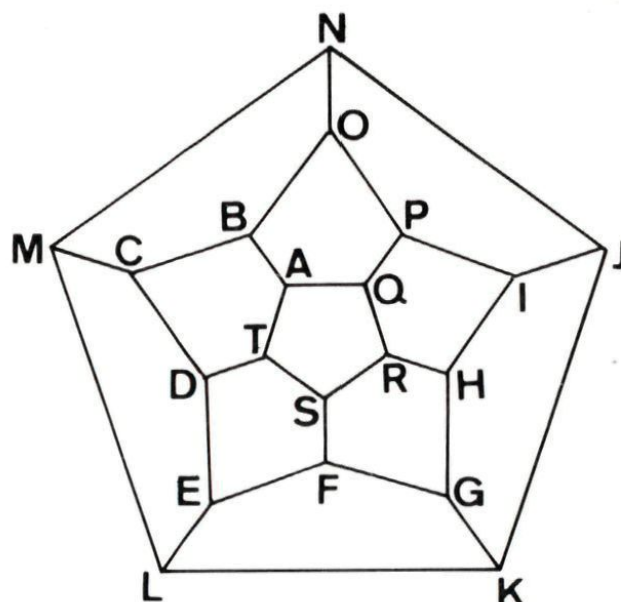
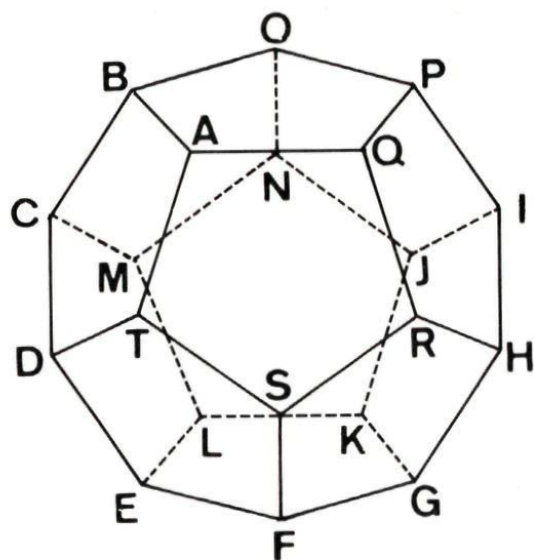


Figuur 1. Een regelmatig twaalfvlak van bovenaf gezien.

In elk hoekpunt werd een kopspijker geslagen en er werd een koord bijgeleverd. Dat koord kon dan in A vastgemaakt worden en langs de spijkers worden gelegd, zodat puzzelaars aan konden geven hoe hun reis verliep. Uiteraard is zo'n hamiltonreis langs de hoekpunten van een regelmatig twaalfvlak mogelijk, anders had het geen enkele zin om het als spel te gaan verkopen. De constructie op de omslag geeft zo'n reis aan.

Een platte versie

Ondanks het koord en de kopspijkers, vonden velen het werken met zo'n houten regelmatig twaalfvlak nogal lastig en onover-



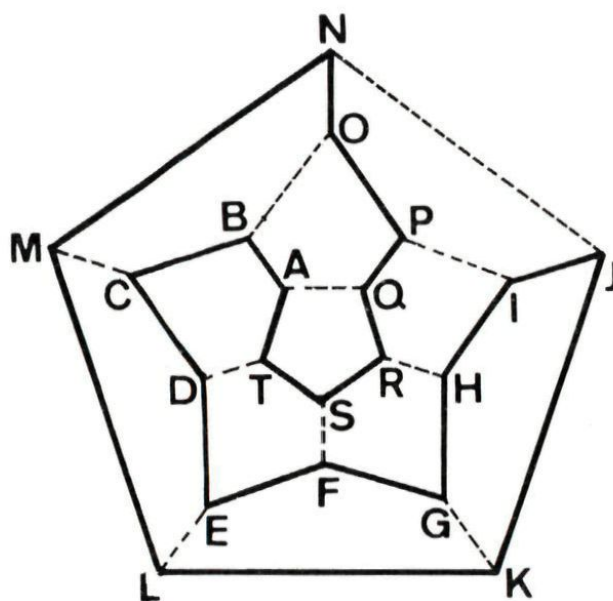
Figuur 2. Het regelmatig twaalfvlak (links) met z'n plattegrond (rechts).

zichtelijk. Daarom maakte Hamilton een platte versie van het spel. Eigenlijk niets anders dan een plattegrond van een dodecaëder, zoals het regelmatig twaalfvlak ook wel wordt genoemd. Zoals je in figuur 2 kunt controleren, is de onderlinge ligging van de twintig hoekpunten en de dertig ribben daarbij niet gewijzigd.

Die plattegrond van het regelmatig twaalfvlak is namelijk verkregen door het achterste zijvlak er uit te knippen. Je krijgt dan een soort open doos en die kun je zo vervormen dat alle vlakken naast elkaar komen te liggen. De ribben van het achtervlak moeten daartoe wat uitgerekt worden, terwijl de rest hier en daar wat ingedrukt moet worden. De vijfhoeken zijn nu niet regelmatig meer, maar dat is toch niet van belang voor het spel!

In de platte versie is de door Hamilton gevraagde wereldreis gemakkelijk te vinden. In figuur 3 is een van de dertig mogelijkheden aangegeven. Je ziet, begin-

nend in A kun je alle steden of hoekpunten aandoen en elk juist éénmaal passeren. Niet alle ribben worden gebruikt, want bij elk hoekpunt ga je langs één ribbe de stad *in* en langs een tweede er weer *uit*. Je gebruikt dus bij elk hoekpunt maar twee van de drie ribben die daar samenkomen!



Figuur 3. Een hamiltonreis over de plattegrond van het regelmatig twaalfvlak.

Dertig verschillende reizen

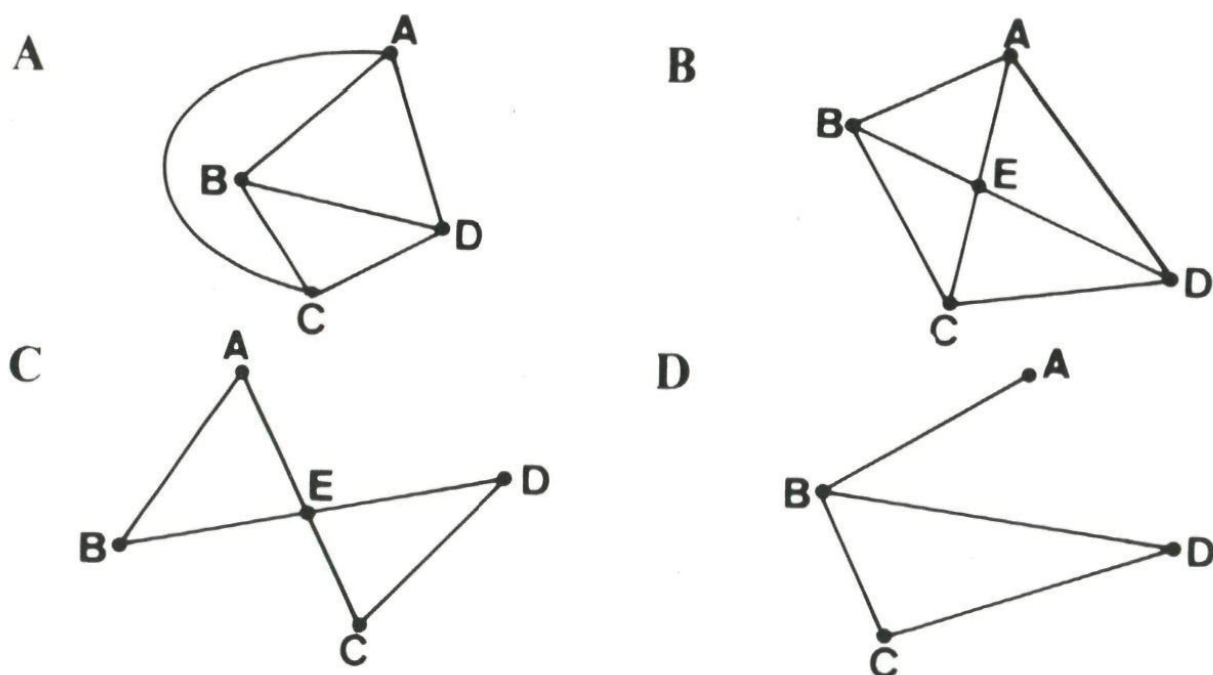
Die dertig verschillende reizen krijg je alleen maar als alle hoekpunten voorzien zijn van een letter, cijfer of naam. De hoekpunten kunnen dan onderscheiden worden, zodat elke oplossing bestaat uit een serie van 20 letters, cijfers of namen. Daarbij is alleen de volgorde van belang, niet het beginpunt, want bij zo'n gesloten circuit mag je overal beginnen. Bovendien worden al die dertig mogelijkheden maar in één richting doorlopen, anders kom je tot het dubbele aantal. Als de hoekpunten niet voorzien zijn van een letter, cijfer of naam, dan zijn er slechts twee verschillende reizen mogelijk. En die zijn dan nog elkaars spiegelbeeld. Een van die oplossingen krijg je door in figuur 3 de letters weg te laten. Hoe kom je aan de andere?

Grafen

Of 'Reis over een twaalfvlak' dan wel de platte versie ervan ooit een

succes is geworden, is niet bekend. In de wiskunde word je er echter blijvend aan herinnerd, want zo'n 'hamiltonreis' noemt men in de grafentheorie een *hamiltonpad*. 'Grafentheorie?' hoor ik je nu al mompelen, 'Daar heb ik nog nooit van gehoord. Wat is dat?'

Nou, rustig maar. In de grafentheorie worden de eigenschappen van allerlei grafen bestudeerd. En een graaf is te zien als een figuur die bestaat uit een aantal punten die elk door lijnstukken met een kleiner of groter aantal van de andere punten verbonden zijn (eventueel zelfs met geen van de andere punten, of juist met allemaal). In plaats van punten spreekt men bij grafen liever van *knooppunten* en in plaats van lijnen liever van *kanten* of *takken*. Het spel van Hamilton maakt gebruik van grafen. Enkele voorbeelden vind je in figuur 4.



Figuur 4. Vier voorbeelden van grafen. A en B, bezitten een hamiltonpad, C en D niet. Dat graaf D geen hamiltonpad bezit, zie je direct aan de losse tak naar het knooppunt A.

Een hamiltonpad of niet?

Zoals je gemakkelijk kunt nagaan, is bij twee van de vier grafen uit figuur 4 een hamiltonpad mogelijk. Dat de graaf uit figuur 4D geen hamiltonpad bezit, zie je meteen aan die 'losse' tak. Een hamiltonpad bezitten is dus een eigenschap die sommige grafen wel en andere niet hebben. Nu zou het handig zijn als er een algemene methode was waarmee je kon uitmaken of een ingewikkelde graaf zonder losse takken een hamiltonpad bezit of niet. Dat zou niet alleen tot nog meer fraaie spelen en dubbelverstekconstructies kunnen leiden, maar je zou er ook veel gemak van kunnen hebben bij een probleem als dat van de handelsreiziger. Helaas bestaat zo'n algemene methode niet.

De handelsreiziger

Het probleem van de handelsreiziger vertoont enige gelijkenis met het spel van Hamilton. Een handelsreiziger moet dikwijls ook een aantal steden aandoen alvorens naar huis terug te keren. Hij neemt dus een landkaart en zoekt de te bezoeken steden en hun onderlinge verbindingswegen op. Daarvan kan hij dan een apart kaartje maken. In feite komt dat neer op het tekenen van de graaf, waarin de steden de knooppunten en de wegen de takken voorstellen.

Vervolgens ligt het voor de hand dat hij gaat uitzoeken of die graaf een hamiltonpad bezit. Omdat daarvoor geen algemene methode bestaat, is dat een kwestie van uitproberen.

Als onze handelsreiziger nu een hamiltonpad vindt, dan doet hij er

overigens verstandig aan om niet meteen volgens die route op reis te gaan.

In tegenstelling tot het spel van Hamilton liggen echte steden meestal niet zo gelijkmatig verspreid en ook de onderlinge afstanden verschillen nogal. Reden waarom hij zich zal moeten afvragen of het gevonden hamiltonpad wel het gunstigst is. Want het ligt voor de hand dat hij een zo kort mogelijke route in zo weinig mogelijk tijd en zo goedkoop mogelijk wil afleggen. Dus moet hij nagaan of er niet nog andere routes zijn, die beter aan de eisen voldoen. Ook dat is weer een kwestie van steeds maar uitproberen. En dan kan best blijken dat hij helemaal geen hamiltonpad moet volgen, maar dat hij toch beter één of meer plaatsen méér dan eens zal moeten passeren.

De praktijk

Om te laten zien wat we met het bovenstaande precies bedoelen, moet je het volgende eenvoudige probleem maar eens proberen op te lossen.

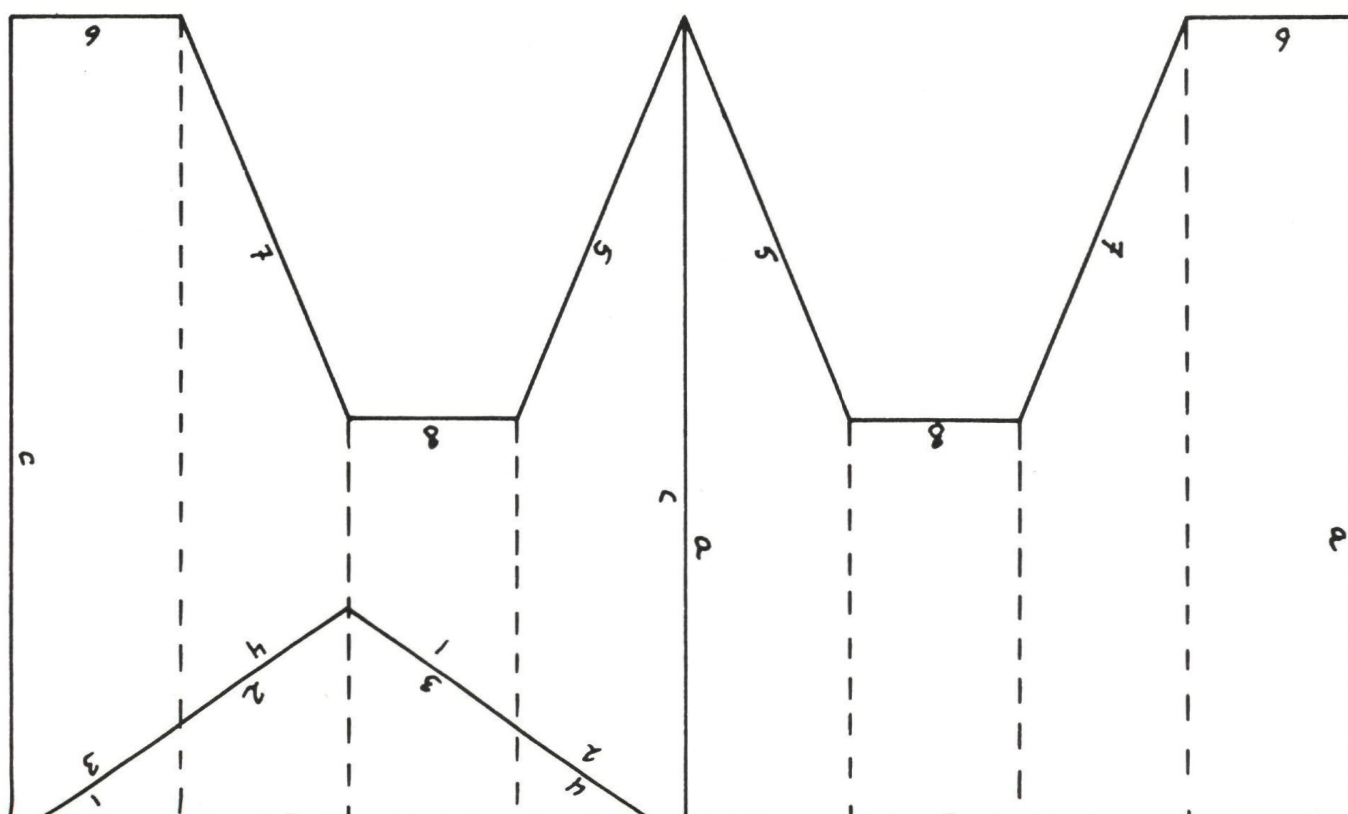
Een handelsreiziger woont in stad A en moet de steden B, C en D bezoeken om vervolgens weer in zijn woonplaats A terug te keren. De afstanden tussen de steden zijn gegeven in figuur 5. Wat is de kortste reis die de handelsreiziger vanuit A langs elk van de andere steden voert? Na enig uitproberen zul je waarschijnlijk wel tot de slotsom komen dat dat een hamiltonpad is, en wel de reis ABDCA (of in omgekeerde richting ACDBA), welke een lengte heeft van 470 km. Daarmee is het probleem ook

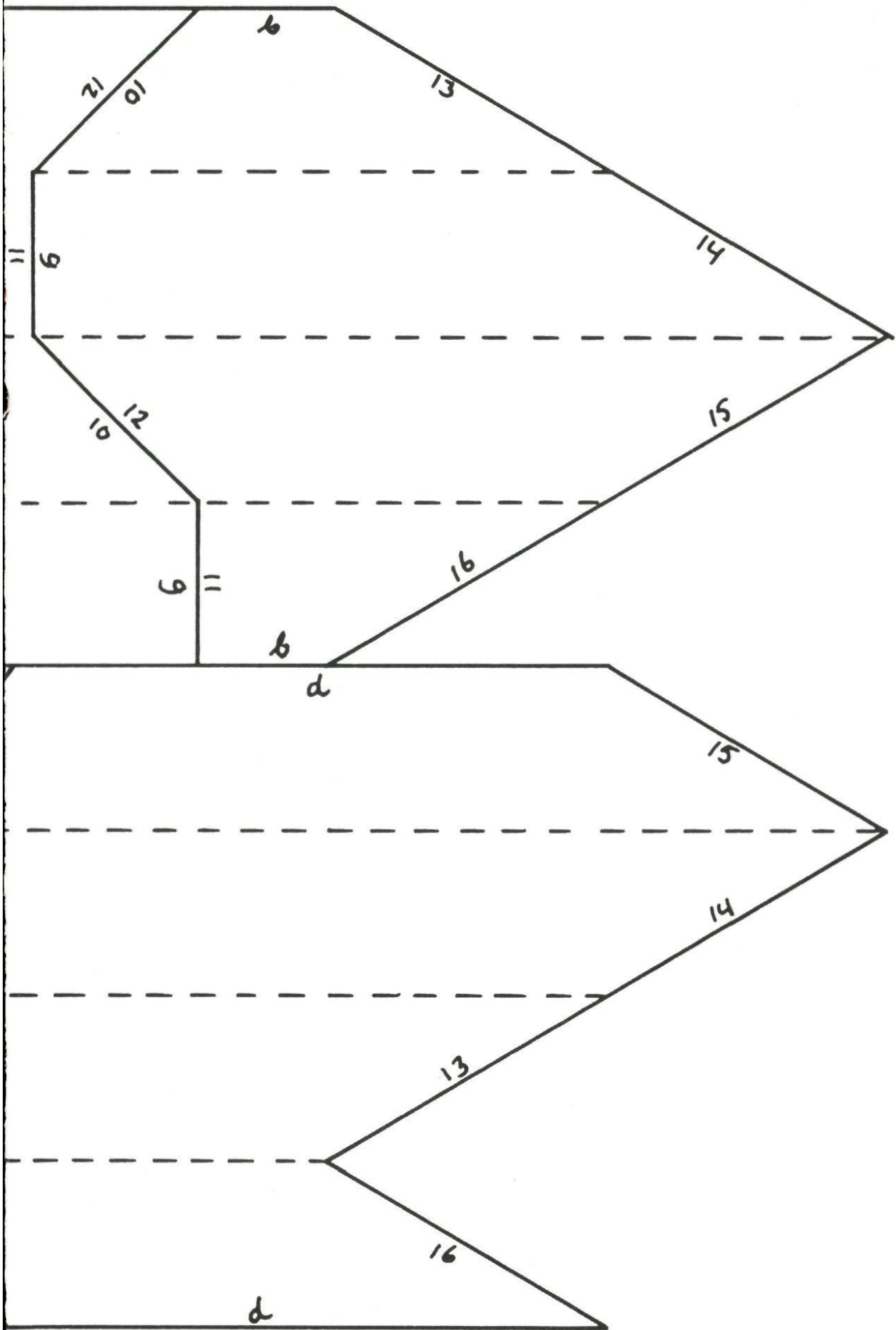


Figuur 5

opgelost voor handelsreizigers die in B, C of D wonen. Zij werken de steden in dezelfde volgorde af, maar beginnen slechts ergens anders. Dat levert dan ook geen nieuwe oplossingen. Het zojuist beschreven probleem is nog gemakkelijk te overzien. Het gaat maar om vier steden en zes verbindingswegen. Alle mogelijke hamiltonpaden en andere routes zijn dan ook snel gevonden. Je schrijft ze met hun bijhorende aantallen kilometers uit en kunt dan vaststellen wat de kortste reis is. Wat zou je er echter van denken als het gaat om een groot aantal

steden en hun verbindingswegen? Denk bijvoorbeeld aan iemand die in één treinreis alle stations in Nederland zou willen aandoen. Je ziet meteen dat een dergelijke reis nooit een hamiltonpad kan zijn (delen ervan misschien wel), want het NS-net bezit een aantal losse takken. Je zult daarom gedwongen zijn enige stations meer dan eens te passeren, maar dat is dan ook het enige dat je er vooraf van kunt zeggen. Het vinden van de kortste reis is onbegonnen werk zonder een computer die alle mogelijke routes doorrekent.

Bouwplaat bij dubbelverstek (zie bladzijde 4)



De vierkantenvierhoek

Begin met vier punten A, B, C en D (het doet er niet toe hoe ze liggen).

Verbind ze met elkaar zodat je de vierhoek $ABCD$ krijgt.

Teken op de vier zijden van $ABCD$ naar buiten toe vierkanten. Noem de middelpunten van die vierkanten P, Q, R en S . Dan zal blijken dat:

- de lijnstukken PR en QS even lang zijn en loodrecht op elkaar staan, en dat
- de middens van AC, BD, PR en QS een vierkant vormen.

Geloof je het niet? Maak dan zelf maar zo'n tekening.

En hoe zit het als je de vierkanten naar binnen in plaats van naar buiten tekent?

En hoe, als je ook de middelpunten van de vierkanten tegen de diagonalen AC en BD erbij tekent?

Je zult dan wel een nieuwe, niet te kleine tekening moeten maken.

Een rondwandeling zoals bij voorbeeld $A-B-D-C-A$ is als een (buitenmodels) vierhoek te beschouwen. Twee aan twee verbinden van de middelpunten van de langs de route gelegen vierkanten (pas op: alle vier rechts van de wandelrichting, óf alle vier links ervan) levert alweer gelijke en loodrechte lijnstukken.

Zo ook voor de rondwandeling $B-C-A-D-B$.

In elk van de gevallen is net als in de gegeven figuur weer een vier-middens-vierkant te tekenen. Als je het goed doet, moeten de middelpunten van die vierkanten samenvallen, juist in het zwaartepunt van de oorspronkelijke punten A, B, C en D .

De vierkanten-driehoek en nog gekker

Hierboven zeiden we dat de genoemde eigenschappen voor elke vierhoek $ABCD$ gelden. Dus

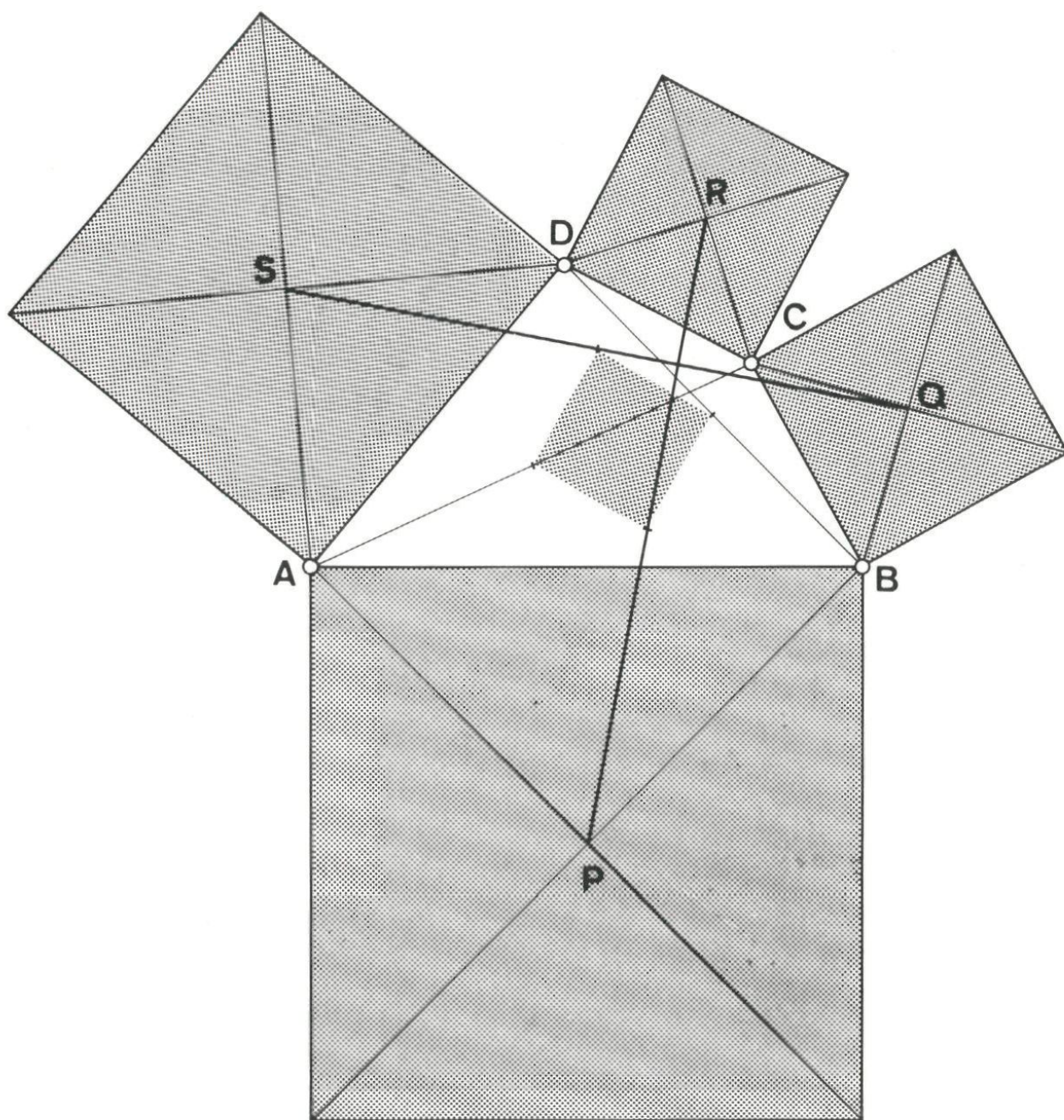
óók als twee hoekpunten (zeg C en D) erg dicht bij elkaar liggen. Hoe wordt de figuur als C en D (en dus ook R) helemaal samenvallen?

Weer anders:

- hoe wordt de figuur als vierhoek $ABCD$ één hoek van 180° heeft?
- hoe als twee hoeken naast elkaar allebei 180° zijn (en de beide andere dus 0°)?
- hoe als twee overstaande hoeken beide 180° zijn?
- hoe als C en D samenvallen en hoek B 180° is?
- hoe als C en D samenvallen en eveneens A en B ?
- hoe als B, C en D samenvallen?

Bewijzen

De uit de figuur blijkende eigenschappen kunnen natuurlijk ook *bewezen* worden. Dat kan op drie manieren: met 'congruentie', met 'transformaties' en met 'vectoren'. Eenvoudig te vinden zijn die bewijzen echter niet. Wie er nieuwsgierig naar is kan ze toegestuurd krijgen. Zend daartoe een brief aan het redactiesecretariaat met er op vermeld 'Bewijzen vierkantenvierhoek' en er in een aan jezelf geadresseerde en gefrankeerde envelop.



Prima, Prima!



Een priemgetal is een getal dat enkel deelbaar is door 1 en door zichzelf. Dat wist je waarschijnlijk wel. Voorbeelden van priemgetallen zijn 2, 3, 5, 7, 11, enz. tot en met $2^{132049} - 1$, het grootste getal waarvan we tot nu toe zeker weten dat het een priemgetal is.

Uit de zojuist gegeven definitie blijkt dat priemgetallen een bijzonder soort getallen zijn. Onder die priemgetallen bevinden zich echter ook heel bijzondere. Om daarachter te komen heb je een (liefst zo lang mogelijke) lijst met priemgetallen nodig. In boeken waarin iets over priemgetallen verteld wordt, is er meestal wel een afgedrukt. Kun je zo'n lijst niet bemachtigen, dan zul je achter je computer moeten gaan zitten. Daarmee kun je dan zelf zo'n lijst samenstellen. Uiteraard is daar natuurlijk een programma voor nodig. Als je geluk hebt, heb je wel ergens een boek waarin zo'n programma staat (In sommige handleidingen wordt er zelfs wel eens een gegeven!). Dat kun je dan eenvoudig overnemen.

Is het geluk niet met je? Dan zit er niets anders op dan zelf aan het programmeren te gaan. Je weet dan in ieder geval hoe het programma in elkaar zit, zodat je het straks gemakkelijker kunt uitbreiden.

Zo krijg je een prima programma

Voordat we verder gaan, volgen er eerst enkele aanwijzingen voor degenen die zelf een programma moeten maken. Van elk natuurlijk getal zul je apart na moeten gaan of het een priemgetal is. Je begint bij 2, daarna 3, enz. Dat gaat dus met een FOR . . . NEXT lus. Van elk getal G kun je dan nagaan of het deelbaar is door elk van de getallen kleiner dan G . Dat is echter omslachtig, want je kunt volstaan met na te gaan of G deelbaar is

door elk van de priemgetallen kleiner dan of gelijk aan de wortel uit G (Met een klein beetje inspanning kun je dat gemakkelijk zelf aantonen!).

Je moet dus zorgen dat de computer alle priemgetallen die hij heeft gevonden, niet alleen afdrukt, maar ook ergens in zijn geheugen opslaat.

Bij elke volgende gang door de FOR . . . NEXT lus moeten ze namelijk weer gebruikt worden. Bovendien zijn ze straks nodig als we het programma uitbreiden.

Prima priemgetallen

Het getal 719 is een priemgetal. Als je daar het rechter cijfer (de 9 dus) van weglaat, krijg je 71. Dat is weer een priemgetal. Haal je daar weer het rechter cijfer weg, dan krijg je 7, wederom een priemgetal.

Priemgetallen die deze eigenschap bezitten, zullen we prima R priemgetallen noemen. Onder een prima R priemgetal verstaan we dus een priemgetal dat een priemgetal blijft als de cijfers ervan achtereenvolgens van de rechterkant af worden weggelaten.



Prima R priemgetallen zijn in principe eenvoudig te vinden, als je maar een uitgebreide lijst met priemgetallen bij de hand hebt. Je kunt dan al die priemgetallen één voor één langs gaan, er het rechter cijfer van weglaten en kijken of het dan verkregen getal in de lijst voorkomt. Is dat zo, dan laat je daar weer het rechter cijfer van weg en kijkt of het aldus verkregen getal ook in de lijst voorkomt, enz. Totdat je natuurlijk een getal krijgt dat maar uit één cijfer bestaat. Is dat ook een priemgetal, dan is het priemgetal waarmee je

begon, een prima R priemgetal. Dat zoekwerk kun je ook uitbesteden aan je computer. Zeker als je toch al een programma hebt, waarmee je die lijst met priemgetallen door je computer laat samenstellen. Even dat programma uitbreiden en telkens wanneer je computer een priemgetal gevonden heeft, gaat hij ook na of het een prima R priemgetal is. En dat laat je hem dan aangeven met een R achter dat priemgetal!

Ook prima!

Laten we nu eens kijken naar het priemgetal 337.

Laat daar niet achtereenvolgens steeds het rechter cijfer van weg, maar het linker cijfer. Je krijgt dan eerst 37 en daarna 7. Dat zijn beide weer priemgetallen. Het priemgetal 337 is dan ook een voorbeeld van een prima L priemgetal. Dus naast prima R priemgetallen kunnen we ook prima L priemgetallen onderscheiden. De definitie van een prima L priemgetal zul je waarschijnlijk zelf wel kunnen afleiden uit die van een prima R priemgetal.

Je raadt nu natuurlijk al wat er gaat komen!

Precies, aan de hand van een lijst met priemgetallen kun je ook de prima L priemgetallen opsporen. Uiteraard kun je ook je programma nog verder uitbreiden, zodat de computer van een priemgetal ook nagaat of het soms een prima L priemgetal is. En dat moet hij dan aangeven met een L achter dat priemgetal.

Er zit hier nog een klein addertje onder het gras. Kijk maar eens naar 307. Dat is een priemgetal. Als je daar het linker cijfer van

weglaat krijg je 07. Tja, wat moet je daarmee aan? Laten we het ons gemakkelijk maken en in zo'n geval dat cijfer nul vergeten. Met deze afspraak is dus 307 een prima L priemgetal.



307, WAT
MOET IK
DAAR MEE?

Prima de luxe

Als je niet met een computer gewerkt hebt, heb je nu uit een lijst met priemgetallen twee nieuwe lijsten samengesteld: een met prima R priemgetallen en een met prima L priemgetallen. Ga je die lijsten met elkaar vergelijken dan komt op beide 317 voor. Dat is natuurlijk helemaal prima oftewel 317 is een prima de luxe priemgetal!

Wat je computer bij 317 doet? Die drukt achter dat getal eerst een R af en dan een L, als je programma tenminste goed werkt.

Hoeveel keer prima?

Van elk van de drie soorten prima priemgetallen hebben we hier slechts één voorbeeld gegeven. Ongetwijfeld zijn er nog veel meer. Welke? We weten het echt niet, maar zijn er wel nieuwsgierig naar. Daarom wilden we je dan ook vragen om een zo lang mogelijke lijst met prima priemgetallen naar het redactie-secretariaat te zenden. We zijn benieuwd wie met de langste lijst voor de dag komt.



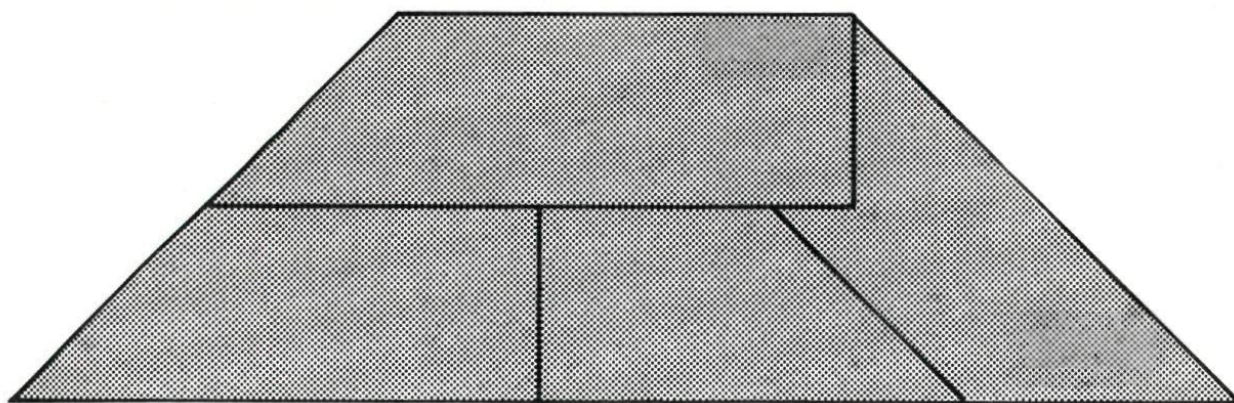
IK BEN
BENIEUWD!

Priemrecord

In het begin van dit artikel werd $2^{132049} - 1$ nog vermeld als het grootste getal waarvan we tot nu toe zeker weten dat het een priemgetal is. Dat is inmiddels alweer achterhaald. Op 18 september 1985 werd bekend gemaakt dat in de Amerikaanse stad Houston onderzoekers bij toeval op een groter priemgetal stuitten: $2^{216091} - 1$,

een getal dat bestaat uit 65.050 cijfers. Om dat in Pythagoras af te drukken zouden we bijna twintig pagina's nodig hebben.

De T-puzzel



Je ziet hier een gelijkbenig trapezium met basishoeken van 45° . Het is onderverdeeld in vier stukjes van gelijke 'dikte'. Probeer die vier stukjes zó aan elkaar te leggen dat de vorm van een hoofdletter **T** ontstaat. De 'steel' en de 'dekbalk' van die **T** zijn rechthoeken en de figuur heeft een verticale symmetrie-as.

Knip de stukjes zo precies mogelijk uit stevig papier. En dan maar puzzelen. Laat je niet te snel ontmoedigen. Ook al is het misschien lastiger dan het lijkt, het kan echt! Sterker nog, het kan op *twee verschillende manieren* (en dan bedoelen we natuurlijk niet dat je je eerste oplossing op z'n kop kunt leggen). De oplossingen komen in het volgende nummer.

Gevorderde geometristen kunnen proberen uit te zoeken hoe de maten van de stukjes gekozen zijn om beide oplossingen mogelijk te maken.

Teken $y = x^{100}$

Wie nog maar pas kennisgemaakt heeft met de grafieken van $y = x^2$, $y = x^3$, enz. is knap als hij binnen een uur met een zucht zegt: 'Oh eigenlijk helemaal niet moeilijk.'

Wie dit stadium al meerdere jaren achter de rug heeft, mag er niet meer dan een kwartier over doen om nog een schouderklopje te verdienen.

De puzzel gaat nog verder: teken $y = x^{99}$ en ook $y = x^{99.5}$. Test jezelf en kijk daarna op de laatste bladzijde of je het met ons eens kunt zijn.

De gouden cirkel

Onlangs vroeg een goede kennis me of ik een brief van hem wilde kopen. Daarvoor moest ik dan honderd gulden betalen en bovendien moest ik nog eens honderd gulden zenden aan het bovenste van de twaalf adressen die onderaan de brief vermeld stonden. Dat zou me dan tweehonderd gulden kosten.

Geen nood, want daarna kon ik het bovenste adres van de lijst schrappen en het mijne onderaan plaatsen. Vervolgens kon ik de brief voor honderd gulden aan twee van mijn vrienden doorverkopen, zodat de hele transactie me dus niets zou kosten.

Die vrienden van me moesten dan weer net zo handelen en uiteindelijk zou mijn adres bovenaan de lijst belanden en kon ik het niet onaantrekkelijke bedrag van zo'n 800 duizend gulden tegemoet zien.

de Volkskrant 10-9-1985

Kettingbrief: toch maar niet doen

Iemand in Nederland zit op dit moment heel rijk te worden. Als alles gaat zoals hij of zij het bedacht heeft, komt er zo'n 800 duizend gulden binnen. Keurig verpakt in enveloppen van elk honderd piek. Dat is de *bedenker* van de kettingbrief Gouden Cirkel, die naar het lijkt de halve randstad en Utrecht in zijn greep houdt. De Gouden Cirkel noemt zichzelf geen kettingbrief (omdat dat verboden is), maar werkt wel op de bekende kettingmanier.

Bijzonder is dat ook de brief zelf gekocht moet worden. De prijs is nog eens honderd gulden. Om quitte te draaien moet de deelnemer dus twee brieven doorverkopen. Dat houdt vaart in de brief. Wie inmiddels nog niet benaderd is voor de aanschaf, moet wel heel geïsoleerd leven.

De verspreiding gaat nogal snel, namelijk. Een rekensommetje om iedereen die nu nog meedoet te ontuchtteren: Er staan twaalf namen op de lijst. Dat betekent dat er

minstens 4096 mensen meedoen (en waarschijnlijk meer, want er zijn al wat eerste namen weggeval-
len).

Voordat nummer twaalf nummer één wordt, doen er (4096×4096) inmiddels 16,78 miljoen mensen mee. Laten we zeggen: geheel Nederland en een gedeelte van Vlaanderen. Wie daarna inschrijft heeft 33,5 miljoen deelnemers nodig. Wie daarna komt 67,1 miljoen. Het ministerie van Justitie heeft de afgelopen weken al wat vragen te verwerken gekregen over de brief. Antwoord: kettingbrieven zijn verboden in de wet op de Kansspelen. Deze brief ook.

Vanwege artikel 1 van de wet: „Het is verboden om mee te dingen naar prijzen of premies als de aanwijzing van winnaars geschied door enige kansbepaling, waar de deelnemer geen overwegende invloed op kan uitoefenen.” De Hoge Raad bepaalde dit artikel al in 1932 van toepassing op kettingbrieven.

Dat alles onder de 'codenaam' *De gouden cirkel*. Uitdrukkelijk werd er bij de brief vermeld dat het niet om een kettingbrief ging, maar lezers van het artikel 'Hoe werkt een kettingbrief?' uit Pythagoras jaargang 24 nummer 2 weten natuurlijk wel beter. Zij kunnen dan ook wel raden wat ik deed. Niet kopen dus!

In de ban van de gouden cirkel

Zoals je in bijgaand kranteartikel (de Volkskrant 10-9-1985) kunt lezen wordt er nogal wat aandacht aan de gouden cirkel besteed. Heel Nederland is er de laatste maanden van in de ban. Op de radio lieten mensen weten dat ze al enkele duizenden gulden hadden ontvangen en spoorde luisteraars aan om toch maar vooral mee te doen.

Ben jij al benaderd? Zo niet, dan kan het niet uitblijven dat dat een dezer dagen wel zal gebeuren. Wees dan echter gewaarschuwd, want de vooruitzichten zijn zelfs nog somberder dan volgens het 'rekensommetje' in bijgaand kranteartikel.

Hoe rijk wordt de bedenker?

Zit er op dit moment echt iemand in Nederland heel rijk te worden? Dat is nog maar de vraag. Laten we eens aannemen dat de bedenker van de gouden cirkel het goed heeft aangepakt. Dan heeft hij na het schrijven van de betreffende brief een lijst met twaalf adressen gemaakt, waarbij zijn eigen adres onderaan de lijst staat. De andere elf adressen zijn afkomstig van goede kennissen van hem. Die heeft hij van te voren moeten inlichten over zijn bedoelingen, want zodra hij de gouden cirkel

start krijgen die mensen enveloppen met honderdjes toegezonden.

Goed, de bedenker start de gouden cirkel en verkoopt de brief aan twee kennissen die niet op de lijst voorkomen. Hij verdient alvast tweehonderd gulden, want hij heeft de brief niet eerst moeten kopen en hoeft ook geen honderdje naar het bovenste adres te sturen. Na deze eerste ronde is het totale aantal deelnemers dus drie: namelijk de bedenker en zijn twee eerste kopers.

Nu gaat de tweede ronde in. Die twee kennissen sturen aan het bovenste adres elk honderd gulden, schrappen dat adres van de lijst, voegen hun eigen adres toe en verkopen elk twee brieven. De bedenker komt daardoor bij vier brieven op de elfde plaats van de lijst. Het totale aantal deelnemers is dus

$$1 + 2 + 4 = 7.$$

Zo gaat dat verder. Voor het ideale geval dat de ketting nergens breekt staan de resultaten in de tabel op de volgende bladzijde. Zoals je daarin ziet is het totale aantal deelnemers na de drieëntwintigste ronde 16.777.215 hetgeen betekent dat dan wel zo'n beetje de hele Nederlandse bevolking meedoet. Dat is natuurlijk een ideaal wat in de praktijk *nooit* haalbaar is. Voor de bedenker zijn de twaalfde en de dertiende ronde belangrijk. Na de twaalfde ronde staat hij bij 4.096 brieven bovenaan de lijst. De 4.096 eigenaren van die brieven verkopen in de dertiende ronde elk weer twee brieven en de kopers daarvan moeten de bedenker elk honderd gulden sturen. De bedenker ontvangt dus f 819.200,—.

ronde	aantal deelnemers per ronde		totaal aantal deelnemers		
	$2^0 =$	1	1		
1	$2^1 =$	2	3	12	
2	$2^2 =$	4	7	11	
3	$2^3 =$	8	15	10	
4	$2^4 =$	16	31	9	
5	$2^5 =$	32	63	8	
6	$2^6 =$	64	127	7	
7	$2^7 =$	128	255	6	
8	$2^8 =$	256	511	5	
9	$2^9 =$	512	1.023	4	
10	$2^{10} =$	1.024	2.047	3	
11	$2^{11} =$	2.048	4.095	2	12
12	$2^{12} =$	4.096	8.191	1	11
13	$2^{13} =$	8.192	16.383		10
14	$2^{14} =$	16.384	32.767		9
15	$2^{15} =$	32.768	65.535		8
16	$2^{16} =$	65.536	131.071		7
17	$2^{17} =$	131.072	262.143		6
18	$2^{18} =$	262.144	524.287		5
19	$2^{19} =$	524.288	1.048.575		4
20	$2^{20} =$	1.048.576	2.097.152		3
21	$2^{21} =$	2.097.152	4.194.303		2
22	$2^{22} =$	4.194.304	8.388.607		1
23	$2^{23} =$	8.388.608	16.777.215		

Deelnemers die geld krijgen

Deelnemers die quitte spelen

plaats van de bedenker op de lijst

plaats op een lijst om nog geld te krijgen

Eerlijk zullen we alles delen

Stel nu dat jij tot de kennissenkring van de bedenker behoorde. De bedenker komt naar je toe en stelt voor om jou bij de start bovenaan de lijst te plaatsen. Jij ontvangt dan van de twee deelnemers aan de eerste ronde elk honderd gulden. Daarna verdwijnt jouw naam van de lijst. Zou jij dat nemen, jij f 200,— en de bedenker f 819.200,—? En zouden al die andere tien mensen van de beginlijst dat pikken? Zij ontvangen tenslotte ook veel minder dan de bedenker.

Nee natuurlijk niet. Het zit er dik

in dat niet één man, maar minstens twaalf mensen die gouden cirkel gezamenlijk hebben opgezet en dat ze hebben afgesproken al het geld dat ze gezamenlijk binnen krijgen eerlijk te delen. Ook dat levert elk van de beginners nog een niet te versmaden bedrag op. Reken maar eens uit hoeveel dat is.

Maar nu die twee eerste kopers. Als alles goed gaat hebben die na de veertiende ronde hun geld (f 819.200,—) binnen. De bedenker kent ze en hij zal wel gek zijn als hij een gedeelte van zijn geld afstaat aan zijn elf medebegin-

ners terwijl hij de twee eerste kopers het volle bedrag binnen laat halen. Dus daar eist hij op zijn beurt weer een gedeelte van op. Zo kun je natuurlijk nog wel even doorgaan. Zeker in de eerste paar ronden, want dan is het totale aantal delers nog beperkt en is de kans groot dat iedereen elkaar nog kent.

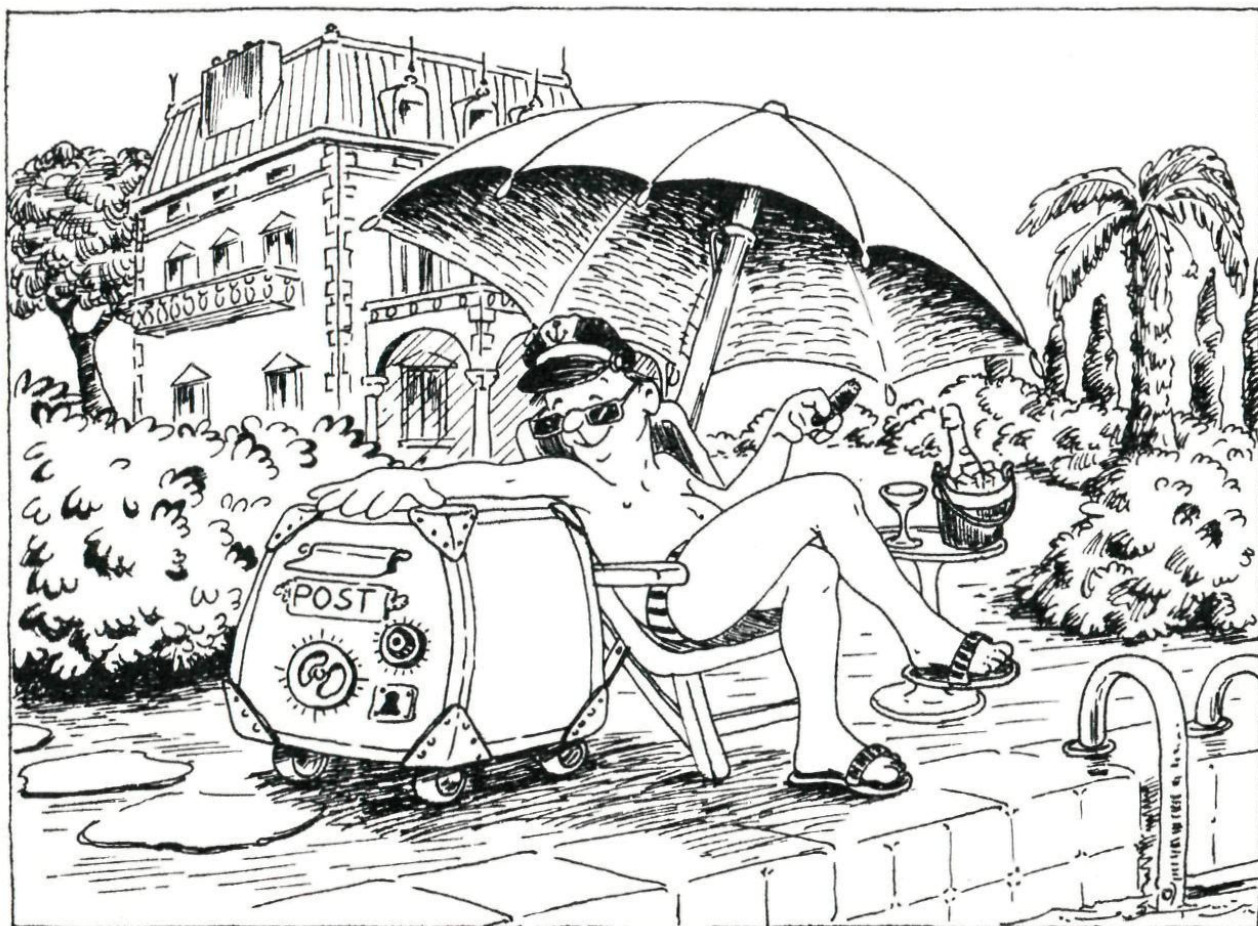
Je ziet het is geen kleinigheid voor de bedenker om al dit soort problemen te omzeilen. Of zullen die elf medebeginners echt de boel niet na rekenen en zich door de bedenker min of meer in de luren laten leggen?

Jouw kansen

'Goed,' zul je waarschijnlijk zeggen, 'die bedenker zoekt het maar uit. Hoe staat het met mijn kansen op het volle bedrag?'

Gelijk heb je, dat interesseerde mij ook toen die kennis van me die brief te koop aanbood. Het is eigenlijk eenvoudig. Je hoeft alleen maar in de tabel te kijken en even je verstand te gebruiken. In het ideale geval overschrijdt het aantal deelnemers de Nederlandse bevolking (ca. 14,5 miljoen mensen) al na de drieëntwintigste ronde. Als je dus bij de kopers van die ronde bovenaan de lijst staat (dus na de tweeëntwintigste ronde) ontvang je nog geld, ook al is het waarschijnlijk niet het volle bedrag. Je moet dus uiterlijk in de tiende ronde nog een brief kopen om in de elfde je naam onderaan de lijst te kunnen zetten en de brief doorverkopen.

Na de tiende ronde is het totale aantal deelnemers inclusief jezelf 2.047. Dat zijn er nog niet zoveel



en bijgevolg zal de overgrote meerderheid van de Nederlandse bevolking nog nooit van de gouden cirkel hebben gehoord. Je moet in de elfde ronde dus gemakkelijk twee brieven kunnen verkopen. (En daar rekent de bedenker natuurlijk ook op, want anders krijgt hij z'n geld niet!)

Als je nú echter nog zo'n brief aangeboden krijgt, kun je er donder op zeggen dat je in een ronde terecht komt die elf of hoger is. Er is namelijk zoveel ruchtbaarheid aan de gouden cirkel gegeven dat het totale aantal deelnemers zeker al hoger moet zijn dan 2.047, om nog maar te zwijgen van het aantal mensen dat na kennisgeving afziet van meedoen! Dat laatste is ook van belang, want dat houdt in dat de ketting eerder ten einde is. Nu nog kopen betekent dus dat je absoluut geen geld moet verwachten. Bovendien is de kans groot dat het je net zo zal vergaan als mijn kennis. Nadat ik hem het nodige had voorgerekend en onze hele vriendenkring aandachtig toe had zitten luisteren, kon hij zijn twee brieven aan de straatstenen niet meer kwijt. Als of het mijn schuld was dat hij een strop had van tweehonderd gulden, heeft hij me een paar dagen zuur aan zitten kijken. Tenslotte heeft hij er zich toch maar bij neergelegd, want hij begreep uiteindelijk zelf ook wel dat zelfs in de ideale situatie zeker de helft van het totale aantal deelnemers (namelijk de 8.388.608 aan de drieëntwintigste ronde!) een dergelijk lot beschoren is. Het geld dat de deelnemers tot en met de tiende ronde krijgen moet immers toch ergens vandaan komen. Want je dacht hopelijk toch niet dat de

gouden cirkel uit het niets geld te voorschijn tovert en dat *iedere* deelnemer enorm rijk wordt?

De praktijk

Tot nu toe zijn we steeds uitgegaan van de *ideale situatie*: niemand breekt de ketting en iedereen die gevraagd wordt, doet ook mee. Zoals je gezien hebt, geeft dat al een somber beeld, maar de praktijk is zo mogelijk nog somberder.

Na het doorrekenen van de ideale situatie zullen velen er niet meer over peinen om nog mee te doen. Voeg daar nog degenen bij die zonder meer al niet meedoen omdat ze te klein zijn of eerder vervelende ervaringen met kettingsbrieven hebben gehad, en je komt tot een groot deel van de Nederlandse bevolking.

Voor sommigen echter blijft dat gigantische bedrag dat in het vooruitzicht wordt gesteld, heel verleidelijk. Ook al zien ze in dat het tot niets leidt, toch zullen ze onder motto's als 'Je kan nooit weten . . .' of 'Baat het niet, het schaadt ook niet' op een lijst willen staan. Temeer daar dat in principe niets hoeft te kosten, als ze maar twee brieven door weten te verkopen. Om daar zeker van te zijn gaan ze eerst informeren bij allerlei kennissen of die een brief willen kopen, voordat ze zelf tot kopen overgaan. Die kennissen vragen even bedenktijd en doen intussen natuurlijk hetzelfde. Zo komt er dus een hele keten tot stand, die uiteraard weer net zo hard afgebroken wordt, zodra er een paar mensen daarin geen zekerheid krijgen omtrent de verkoop van de door hun nog te kopen brief. En daarmee gaat op-

Goed inpakken kettingbrief helpt ook niet

De Centrale Directie van de PTT heeft nog niets in de gaten, zegt een woordvoerder. Maar op plaatselijk niveau veroorzaakt de kettingbrief Gouden Cirkel (Dag-in Dag-uit 10 september, U-pagina vandaag) de postkantoren al wat overlast.

Geld mag alleen per brief worden verstuurd, wanneer deze wordt aangetekend. Maar omdat kettingbrieven verboden zijn, wordt de deelnemer afgeraden dit te doen. De instructie in de brief luidt juist om het geld „onzichtbaar” te ma-

ken door het bijvoorbeeld in carbonpapier in de brief te sluiten.

Volgens waarnemend directeur C. Bootsman van het post-sorteercentrum in Schagen houden de mensen zich daar goed aan. „Juist door de manier van verpakken worden de sorteerders op zulke brieven geattendeerd”, zegt hij.

Vaak wordt het geld zo goed ingepakt dat de brief zwaarder wordt dan gebruikelijk. Of dikker dan normaal. Er worden nogal wat brieven met geld onderschept, volgens Bootsman. Gebruikelijk is een paar per maand. Nu tien tot vijftien per week.

De geadresseerden kunnen de brief dan wel zelf ophalen, na betaling 13 gulden voor het „ambtshalve aantekenen”.

de Volkskrant 14-9-1985

nieuw een groot aantal mogelijke deelnemers verloren.

De bedenkers hebben dit voorzien, en raden bijgevolg iedereen af om zo te handelen. Je begrijpt nu waarom. Maar hoevelen zullen daar in de praktijk gehoor aan geven?

Weer anderen bellen voordat ze besluiten te kopen de bovenste van de lijst op en vragen hoe het gaat. Ja, wat denk je dat die zal antwoorden? Zelfs al zit die man al weken op zijn eerste honderdje te wachten, dan zal hij nog zeggen dat het geld binnenstroomt. Dacht je nou werkelijk dat hij tegen iemand die op het punt staat hem geld te sturen, zal zeggen dat die gouden cirkel helemaal niet werkt!

Als de cirkel werkt . . .

Zeker als je al in de eerste ronden in de ketting wordt opgenomen,

is het helemaal niet uitgesloten dat je geld toegestuurd krijgt. Je hebt dan echter wel kans dat de PTT roet in het eten gaat strooien, want al die geldzendingen moeten worden aangetekend. De straf die op ontduiking staat levert nog niet zo'n grote verliespost, maar je moet er ook op rekenen dat de belasting altijd op de loer ligt. En dat kon weleens een grotere tegenvaller zijn. Dus als er al mensen zijn die iets hebben 'verdiend' aan de gouden cirkel, dan zullen ze het wel laten dat van de daken te schreeuwen. Niet alleen vanwege de belasting, maar ook vanwege de justitie, want meedoen aan een kettingbrief is nog steeds bij de wet verboden!

Kort en goed, als je meedoet, is de kans groot dat je om uiteenlopende redenen nooit meer iets hoort, ook al werkt de gouden cirkel voor een klein beetje.

Redactioneel

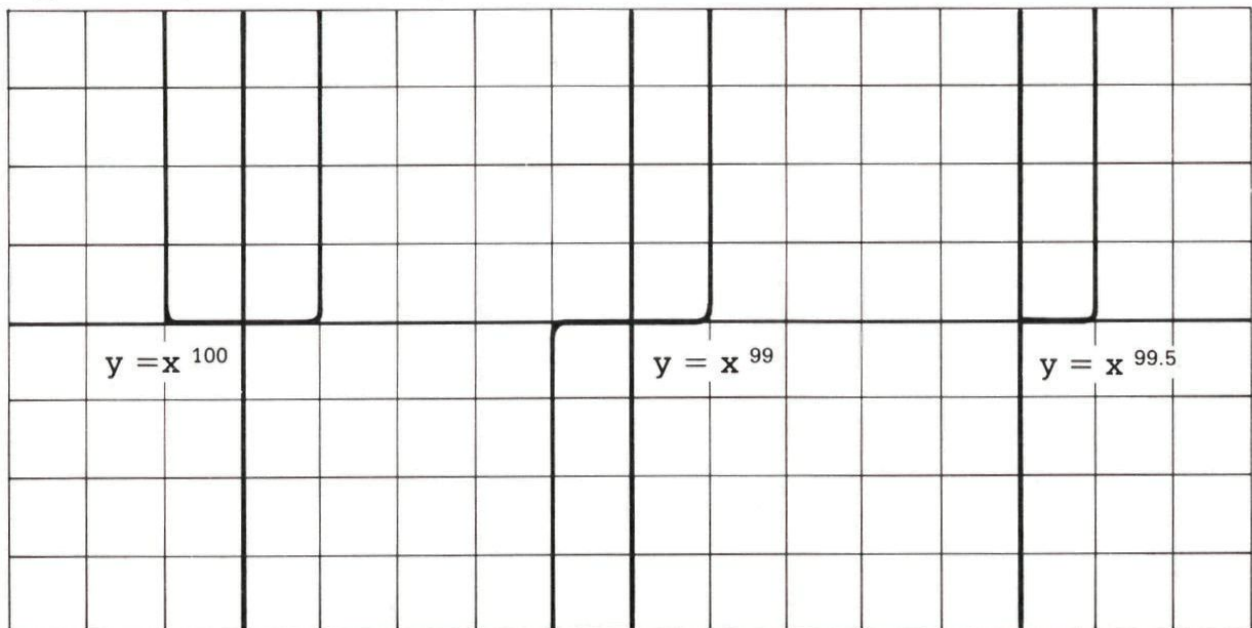
Dit was dan het eerste nummer van de 25e jaargang. Niet meer uitgegeven door Wolters-Noordhoff, maar door de Stichting IVIO. Trouwe lezers zullen waarschijnlijk enkele veranderingen hebben bespeurd.

Allereerst is het formaat gewijzigd, en daarmee ook de vormgeving. (Onze oudere lezers zullen nog wel weten dat de eerste negen jaargangen van Pythagoras hetzelfde formaat hadden.) In plaats van vier nummers verschijnen voortaan zes nummers, die door de postbode bij je thuis worden bezorgd.

Op de tweede plaats zullen sommige lezers de PYTHAGORAS OLYMPIADE missen. Die lezers kunnen we geruststellen, want daarmee wordt in het volgende nummer gestart.

Verder hebben enkele redactieleden helaas wegens tijdgebrek moeten besluiten om de redactie te verlaten. We eindigen dan ook met hen te bedanken voor hun inspanningen in het verleden.

Oplossing van Teken $y = x^{100}$



Had je dat zelf ook gevonden binnen de tijd?

Illustraties: Serena Ceccherini, Amsterdam.

Tekeningen: Armand Haye, Amsterdam; Popke Bakker, Bergen aan Zee; Bruno Ernst, Utrecht.

© 1985 Stichting Christiaan Huygens - ALLE RECHTEN VOORBEHOUDEN, NADruk OF WEERGAVE, GEHEEL OF GEDEELTELIJK, IN WELKE VORM DAN OOK, ZONDER SCHRIFTELIJKE TOESTEMMING VAN DE REDACTIE VERBODEN.

Pythagoras wiskunde tijdschrift voor jongeren

Een uitgave onder auspiciën van de Stichting Christiaan Huygens en de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

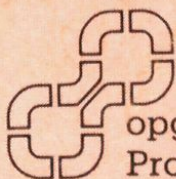
Redactie: Jan van de Craats, Klaas Lakeman, Hessel Pot, Hans de Rijk.

Redactiesecretariaat: Klaas Lakeman, Cornelis Krusemanstraat 60^{II},
1075 NS Amsterdam (NL).

Inhoudsopgave no 1, 25^e jaargang

Dubbelverstek /	1
<i>Popke Bakker</i>	
Onmogelijke eenbalken /	6
<i>Bruno Ernst</i>	
Reis over een twaalfvlak /	9
<i>Martin Rense</i>	
Bouwplaat bij dubbelverstek /	14
<i>Popke Bakker</i>	
De vierkantenvierhoek /	16
<i>Hessel Pot</i>	
Prima, prima /	18
<i>Mark Fander</i>	
De T-puzzel /	21
<i>Hessel Pot</i>	
Teken $y = x^{100}$ /	21
<i>Hans de Rijk</i>	
De gouden cirkel /	22
<i>Klaas Lakeman</i>	
Redactioneel /	28

Pythagoras is een uitgave van
stichting ivio lelystad



voor onderwijs en
volksontwikkeling
opgericht in 1936 door
Prof. dr. Ph.A. Kohnstamm

Abonnementsprijzen per jaar
Nederland / Europa* f 19,50
België Bfrs 390
Overigelanden f 29,50
Losse nummers f 5,—
Gecomb. abon. met
Archimedes f 35,—
* Europa m.u.v. de Oostblokl.

stichting ivio lelystad, postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL).
tel. 03200-26514.

Postgiro Nederland: 287934. Postcheck België: 000-0130850-94
Bankrelatie: NMB. Lelystad rek. crt. nr. 66.27.11.653