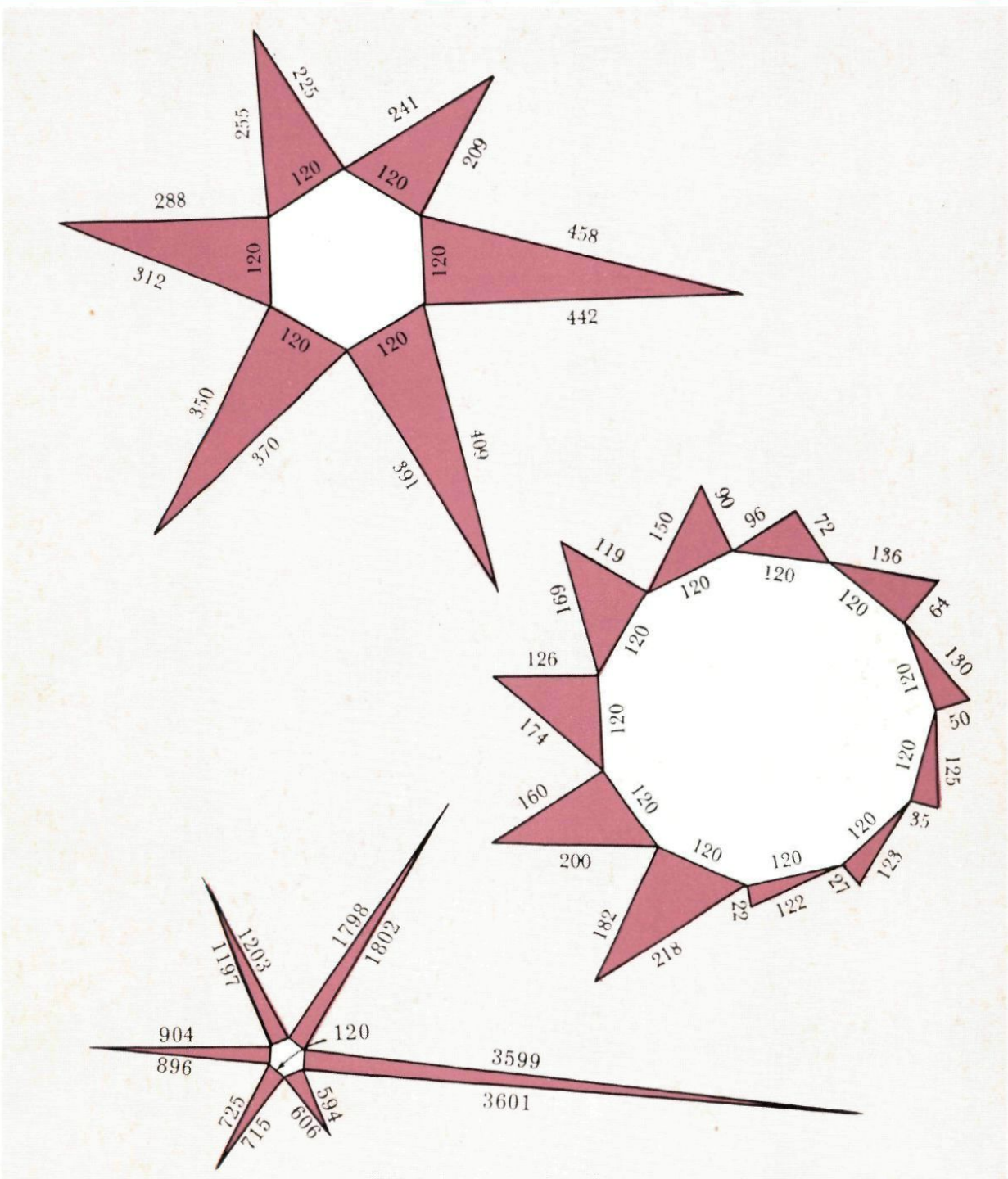


Pythagoras

wiskunde tijdschrift voor jongeren

stichting ivio 'lelystad

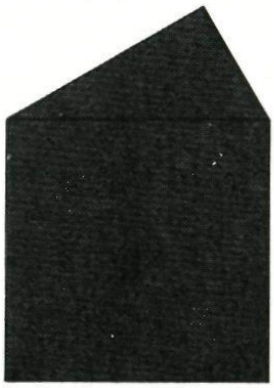
25e jaargang
nr. 3
januari 1986

Mijn pythagorashuis

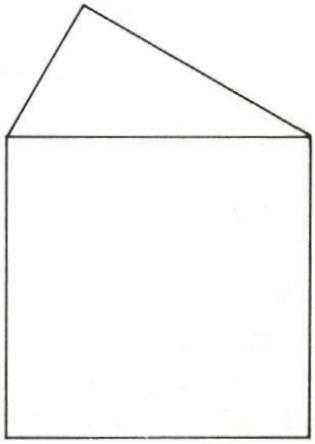
Ik woon in een pythagorashuis. Want de zolderverdieping ziet er uit als een rechthoekige driehoek terwijl de begane grond en de eerste verdieping samen precies een vierkant vormen. Tenminste wanneer je de voorgevel of de achtergevel bekijkt.
Van de architect heb ik van die gevels een paar tekeningen op verschillende schalen gekregen. Toen ik daar wat mee zat te spelen, ontdekte ik een nieuw bewijs van de *stelling van Pythagoras!*

Hieronder zie je drie schetsen van de gevels. Een grote van de achtergevel en twee kleintjes van de voorgevel. En weet je wat ik ontdekte?
Ik kon de twee kleine tekeningen zó op de grote leggen, dat de kleine daken samen precies het achtergeveldak bedekten (figuur 1). En dat geeft je een bewijs van de stelling van Pythagoras. Denk maar even mee.

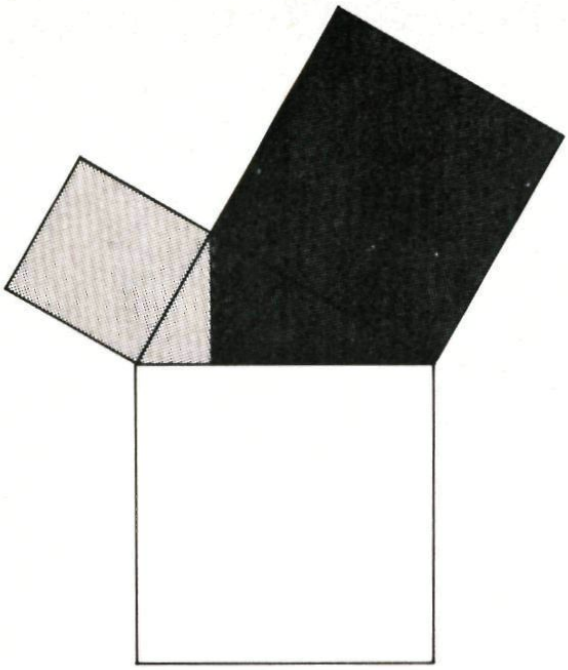
I Voorgevel



II Voorgevel



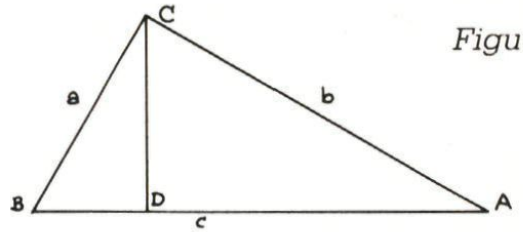
III Achtergevel



Figuur 1

In elk van de drie schaaltekeningen bestaat dezelfde verhouding tussen de oppervlakte van het dak (de driehoek) en de oppervlakte van de rest van de gevel (het vierkant). Dus de formule
opp (driehoek) $\times$ k =
opp (vierkant)
geldt met *dezelfde* factor k voor elk van de drie figuren. Omdat de daken op elkaar passen, geldt
opp (dak I) + opp (dak II) =
opp (dak III).
Alles vermenigvuldigen met k geeft
opp (vierkant I) + opp (vierkant II) = opp (vierkant III),
en dat is precies de stelling van Pythagoras.

Waarom is dit een bewijs?
Is het toeval dat de daken van de verschillende schaaltekeningen precies op elkaar pasten? In zekere zin natuurlijk wel. De schalen waren toevallig zo dat het klopte. Maar het toeval zit *alleen* in de schalen en niet in de vorm van mijn pythagorasdak. Want als je van een ander pythagorashuis (dat wil zeggen met een gevel die bestaat uit een vierkant en een andere rechthoekige driehoek) tekeningen op de juiste schaal maakt, kun je precies dezelfde truc toepassen. Het zit 'm in het volgende: als je in een rechthoekige driehoek *ABC* de hoogtelijn *CD* trekt, dan zijn de driehoeken *CBD* en *ACD gelijkvormig* met de grote driehoek *ABC*.



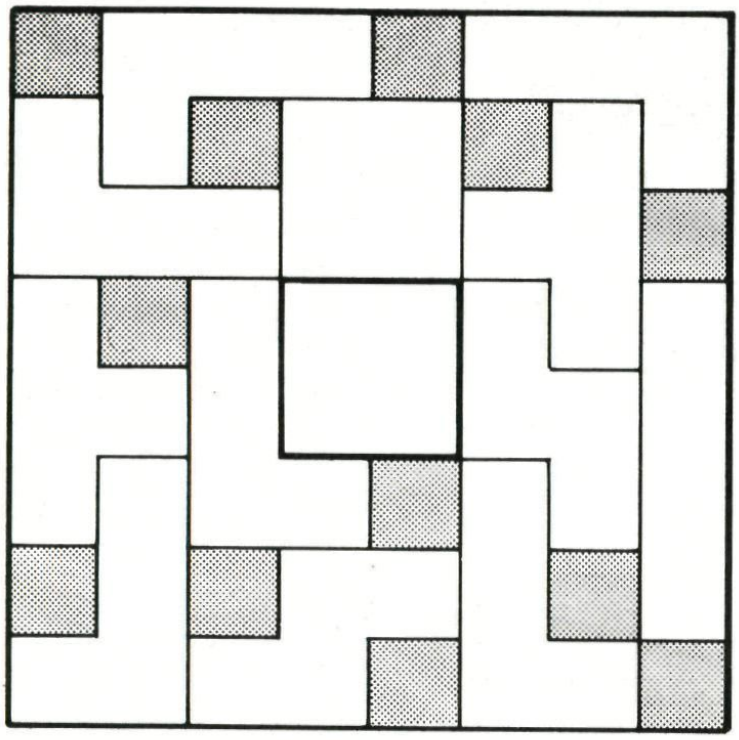
Figuur 2

Dat is alles. En uit
opp (*CBD*) + opp (*ACD*) =
opp (*ABC*)
volgt dus onmiddellijk de vergelijking voor de oppervlakten van de bijbehorende vierkanten, dat wil zeggen
$a^2 + b^2 = c^2$
en dat is de stelling van Pythagoras.

Denkertje

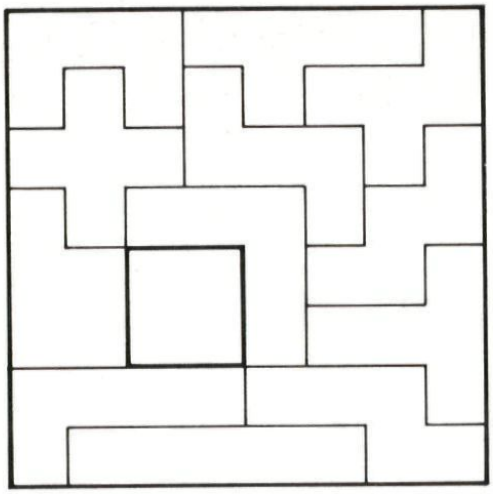
Een vraag over de indeling van de begane grond van het pythagorashuis.
Tussen aangrenzende vertrekken is er steeds maar hoogstens één deur en elk vertrek heeft ook maar hoogstens één deur naar buiten.
Er zijn (op de begane grond) in totaal twaalf deuren.
Hoeveel benedenvertrekken heeft dat huis *minstens?*
(De oplossing kun je vinden op bladzijde 20.)

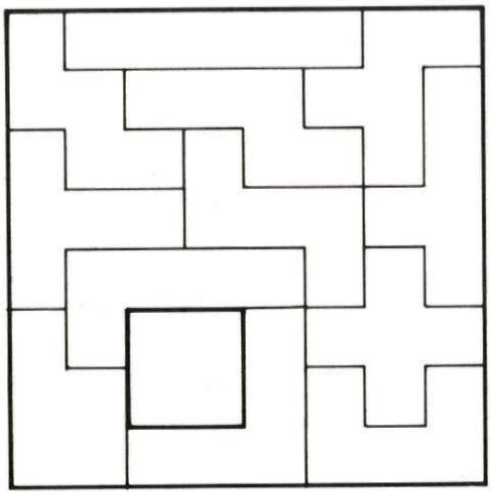
Van pentomino naar tetromino: nog meer aardige legpuzzels

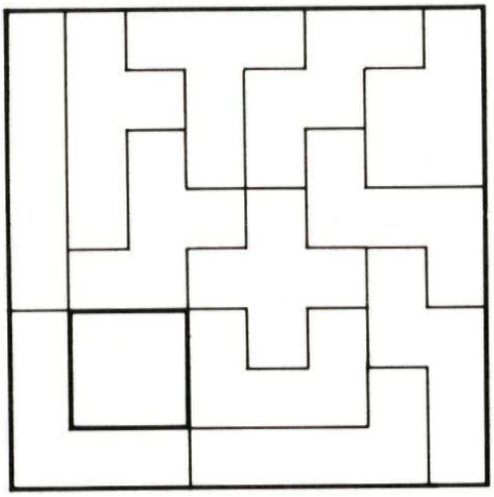


Bovenstaande figuur is ooit al eens eerder in Pythagoras opgenomen. Daarin moest je elk van de twaalf witte stukjes combineren met een aangrenzend donker vierkantje, en wel zó dat alle twaalf pentominostukjes (zie 'Een aardige legpuzzel' Pythagoras 25-2) ontstaan.
Een opgave die zeker wanneer je al wat met de pentominostukjes hebt geoefend, niet zo moeilijk is. Je wordt namelijk al een heel eind op weg geholpen door de manier waarop de witte stukjes liggen.
Als echter alleen de twaalf pentominostukjes gegeven waren en er was gevraagd daarmee zo'n vierkant met een vierkant gat in het midden te leggen, zou je er dan ook zo gemakkelijk uitgekomen zijn? Probeer het maar eens. Er zijn naast de mogelijkheid die bovenstaande figuur oplevert, nog 64 andere dus je kunt wel even vooruit.

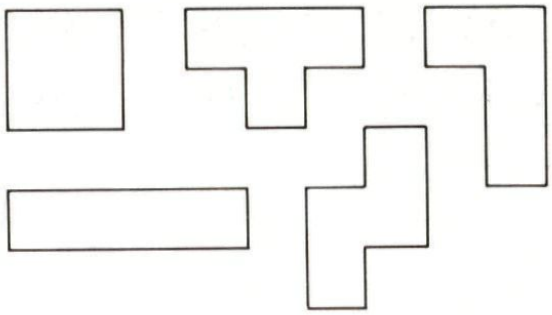
Bovendien hoeft dat gat van vier bij vier vierkantjes niet per se in het midden te komen. Het kan overal zitten, als het maar niet aan de rand is. Omdat oplossingen waarbij de rangschikkingen van de twaalf pentominostukjes met elkaar overeenkomen, als dezelfde worden beschouwd, hoeven we maar drie mogelijke andere posities van het gat te bekijken (figuur 1). Want door het vierkant over 90, 180 of 270 graden te draaien, kan elke mogelijke andere positie van het gat tot een van deze drie worden teruggebracht. En daarmee natuurlijk ook de bijbehorende oplossingen.







Figuur 1. Drie mogelijkheden voor de opgave: leg een vierkant met een vierkant gat erin. Als het gat niet in het midden komt, kan het nog slechts drie andere posities innemen. Hier voor elk daarvan een oplossing. Geschat wordt dat er in totaal meer dan 100.000 oplossingen mogelijk zijn!

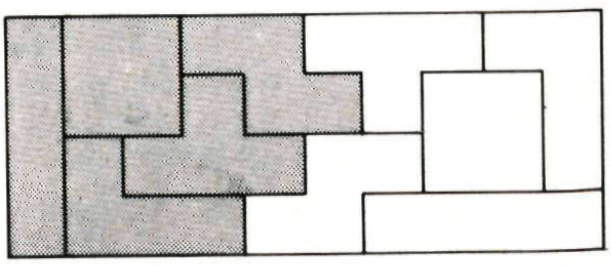


Figuur 2

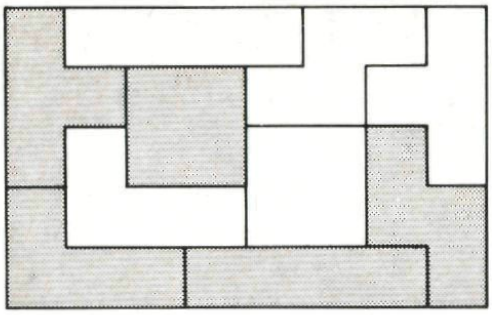
Tetromino

De witte stukjes in de begin-figuur zijn opgebouwd uit vier vierkantjes. Hoeveel verschillende patronen zitten daartussen? Of wat we je ook kunnen vragen: hoeveel verschillende patronen kun je met vier vierkantjes maken door ze met hun zijden tegen elkaar te leggen?
In een oogwenk zie je dat dat er maar vijf zijn (figuur 2).
Aha, zou je nu kunnen denken, alweer een nieuwe puzzel. Dat is slechts ten dele waar. Die vijf *tetrominostukjes*, zoals ze genoemd worden, hebben samen een oppervlakte van 20 vierkantjes. 'Mooie' figuren zijn er echter niet mee te maken. Ga maar na.

- Een rechthoek van 1 bij 20? Kan natuurlijk niet.
- Rechthoeken van 2 bij 10 of 4 bij 5?
  Probeer maar, lukt ook niet
- Een vierkant van 4 bij 4 en één stukje weglaten?
  Wij kunnen het niet.



Figuur 3



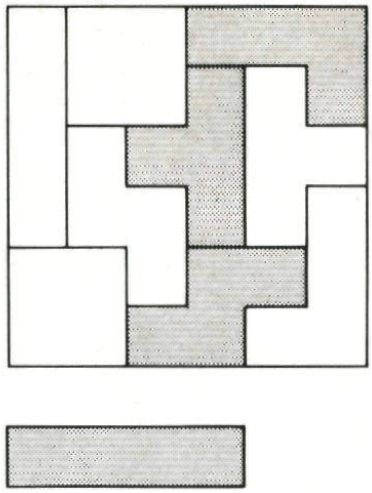
Figuur 4

Nee, aardige resultaten worden pas mogelijk wanneer je *twee* van die setjes van vijf stukjes neemt. Je hebt dan tien stukjes elk bestaande uit vier vierkantjes. Dat zou althans in theorie, kunnen leiden tot vier rechthoeken met een oppervlakte van veertig vierkantjes: een bij veertig, twee bij twintig, vier bij tien en vijf bij acht vierkantjes. Doch in de praktijk blijken alleen de laatste twee op te gaan (figuur 3 en 4). Voor beide kan dat weer op vele manieren.

Wanneer je met de pentomino niet zoveel succes hebt gehad, moet je beslist deze puzzel eens proberen. Hij is namelijk een stuk eenvoudiger.

Ook vierkanten?

Of je evenals met de pentomino ook met de tetromino vierkanten met een vierkant gat erin kunt leggen?
Dat zou dan een vierkant moeten worden van zeven bij zeven met een gat van drie bij drie. Wij vonden daar geen oplossingen voor (maar dat zegt niet alles!). Wel slaagden we erin om een vierkant van zes bij zes vierkantjes te leggen en één stukje over te houden (figuur 5). Zou dat ook nog op andere manieren kunnen?

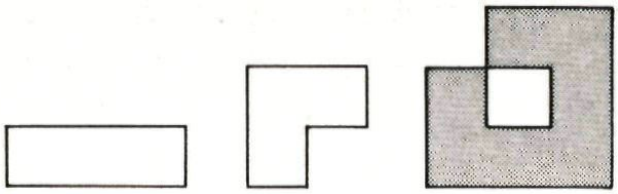


Figuur 5

Polyomino's

Stukjes die zijn opgebouwd door een gegeven aantal vierkantjes op alle mogelijke manieren met de zijden tegen elkaar te leggen, worden aangeduid met de verzamelnaam *polyomino's*. Per gegeven aantal vierkantjes hebben ze dan nog weer een aparte naam (een samentrekking van een Grieks telwoord en 'omino'). Met twee daarvan hebben we nu uitgebreid kennisgemaakt: de tetromino en de pentomino. Daarnaast heb je nog de monomino, de domino, de tromino, de hexomino, de heptomino, enz. Met de monomino (één stukje van een vierkantje), de domino (één stukje van twee vierkantjes, het alom bekende *dominostukje*) en de tromino (twee stukjes van drie vierkantjes, figuur 6A) valt weinig te puzzelen. Zes vierkantjes kunnen op *vijfendertig* verschillende manieren met de zijden tegen elkaar gelegd worden (had je dat aantal ook gevonden?). Samen vormen ze de *hexomino*. Je kunt ermee gaan puzzelen, maar bedenk wel dat erkende puzzelaars hebben be-

wezen dat ze op geen enkele manier in de vorm van een rechthoek gelegd kunnen worden!
Bij stukjes die bestaan uit zeven (heptomino) of meer vierkantjes, is de lol eigenlijk wel definitief over. Bij de *heptomino* met zijn 108 stukjes verlies je niet alleen snel het overzicht, maar er zit ook een heel vervelend stukje tussen (figuur 6B). Dat kun je maar beter niet mee laten doen, als je tenminste nog de moed hebt om na te gaan of met die heptominostukjes



Figuur 6

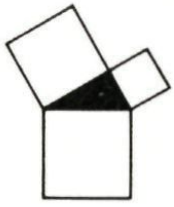
een of andere rechthoek te leggen is. Bij de *octomino* (stukjes die bestaan uit acht vierkantjes) kom je meer van die vervelende stukjes tegen. Zoek zelf maar eens uit hoeveel.

Prijsvraag: voorspoedig 1986

Probeer de natuurlijke getallen van 1 tot en met 100 uit te drukken in de cijfers 1, 9, 8 en 6. En wel zó dat de volgorde van die cijfers daarbij niet verandert. Bovendien mag elk cijfer slechts één keer per uitdrukking voorkomen. Je mag gebruikmaken van machtsverheffen, de tekens $\times$, $+$, $-$, $:$, $\sqrt{}$, ! en haakjes. (Het uitroepteken betekent 'faculteit', $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.)

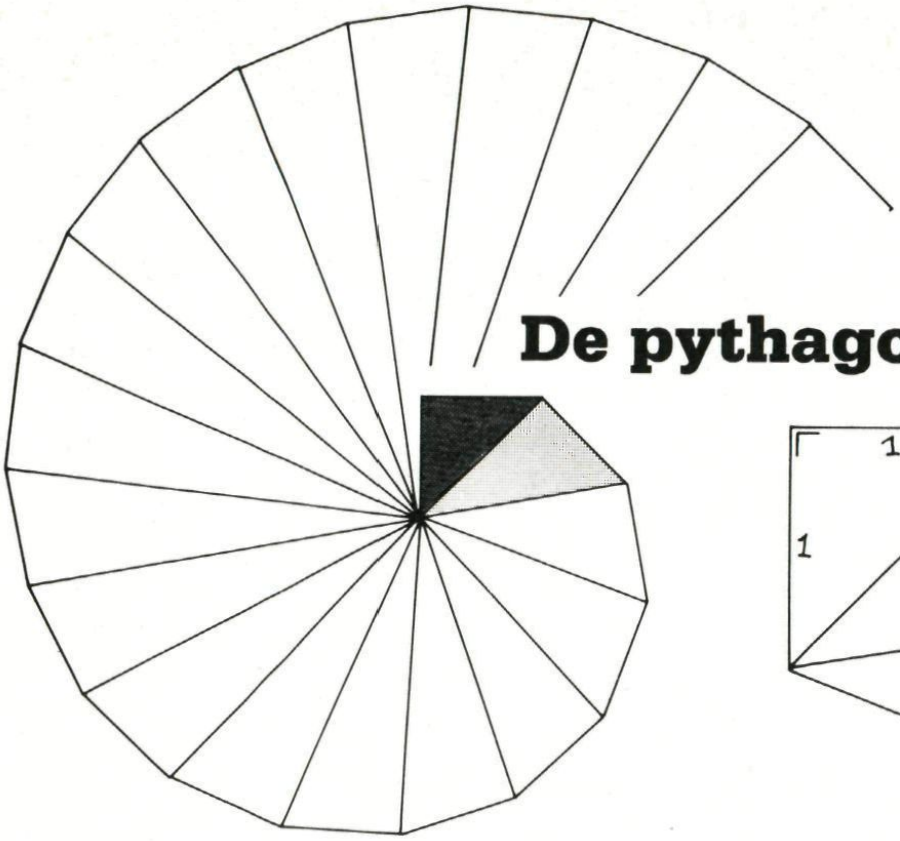
Enkele voorbeelden:

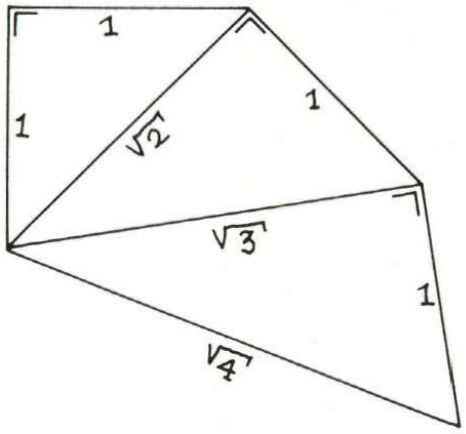
$1 = (1 \times \sqrt{9}) - 8 + 6$
$2 = 1 + \sqrt{9} - 8 + 6$
$3 = -1 + ((\sqrt{9} \times 8) : 6)$
$4 = -1 + \sqrt{9} + 8 - 6$
. . .
$33 = 198 : 6$
. . .
$35 = -1 + (\sqrt{9! : 8!})! \times 6$
. . .
$100 = (1 + 9)^{8-6}$



Het is echter lang niet zeker of dit voor alle natuurlijke getallen van 1 tot en met 100 wel mogelijk is (wij hebben zelf nog steeds enkele 'gaten'). Stuur daarom je resultaten ook al zijn ze onvolledig voor 1 maart 1986 naar het redactiesecretariaat:
Klaas Lakeman, Cornelis Krusemanstraat 60^{II}, 1075 NS Amsterdam.
Onder (de meest) volledige inzendingen worden twee boekebonnen verloot.

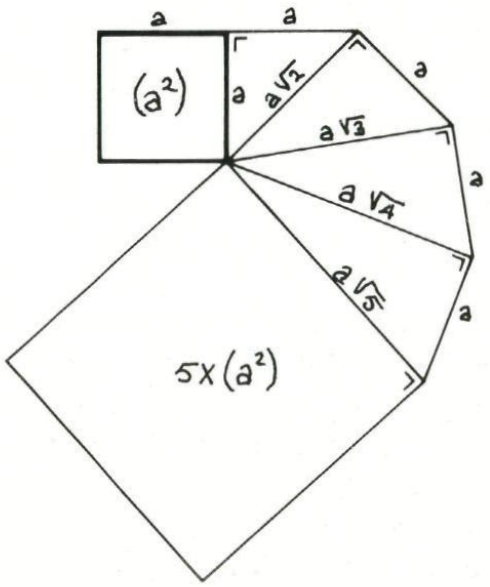
De pythagorasspiraal

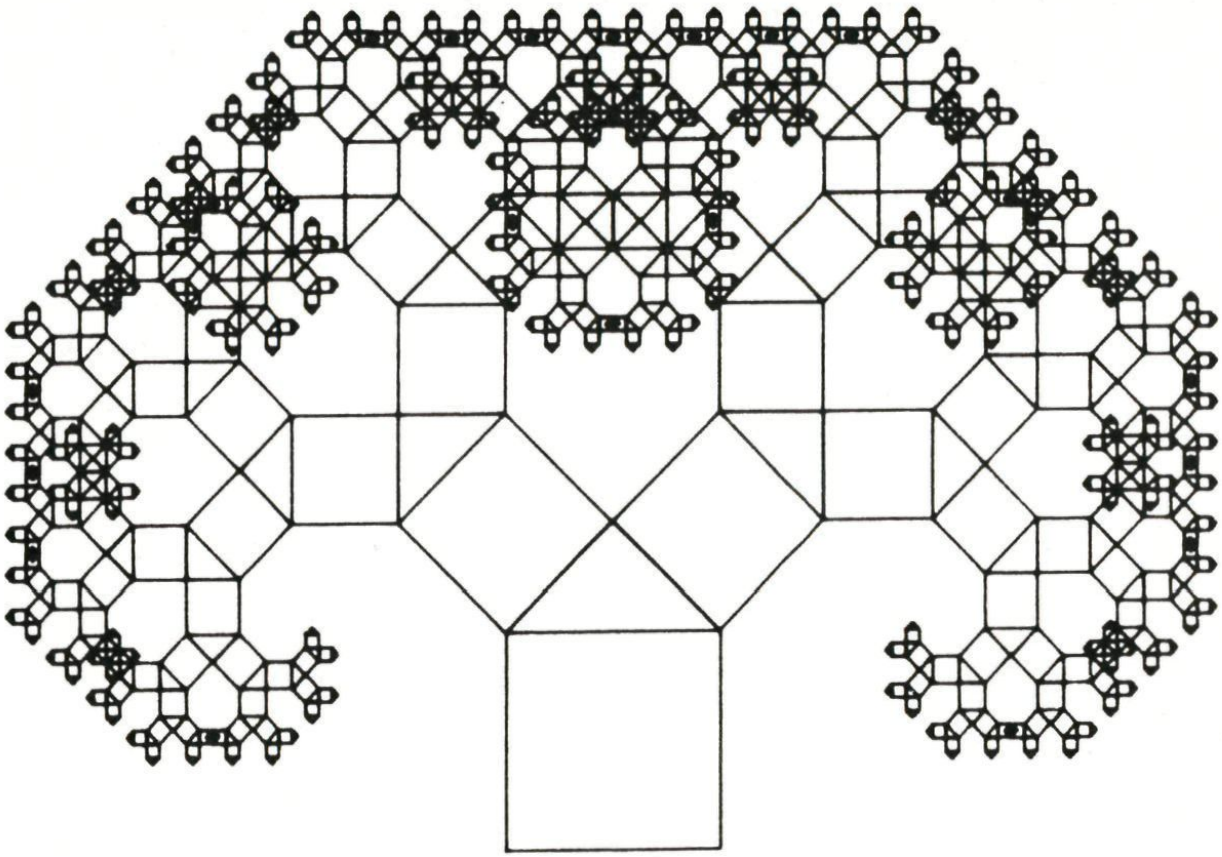




Hoe is deze fraaie spiraal tot stand gekomen?
Begin met een gelijkbenige rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 1. De schuine zijde is dan $\sqrt{2}$.
Maak een volgende rechthoekige driehoek door loodrecht op de schuine zijde van de eerste een lijnstukje met lengte 1 te plaatsen. De schuine zijde van deze driehoek wordt dan volgens de *stelling van Pythagoras* $\sqrt{3}$.
De volgende driehoeken ontstaan op dezelfde wijze. Steeds een lijnstukje met lengte 1 loodrecht op de schuine zijde van de voorgaande driehoek plaatsen. De opeenvolgende schuine zijden worden dan $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, enz. Een handig hulpmiddel om wortels te tekenen?

Vierkant-vergroting
Hoe teken je een vierkant met een oppervlakte die bij voorbeeld vijf keer zo groot is als die van een gegeven vierkant?
We beginnen met een vierkant met zijden *a* en dus een oppervlakte a^2 (figuur hiernaast). Daarna via lijnstukjes met lengte *a* een stukje van de pythagorasspiraal. Op de rechthoekige driehoek met schuine zijde $a\sqrt{5}$ komt dan het gevraagde vierkant.

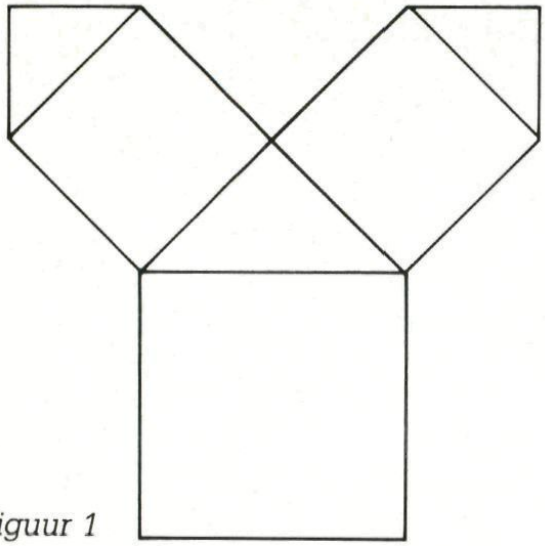




Een heelal vol inkt

De boomvormige structuur van de figuur hierboven is oorspronkelijk in 1941 door A. E. Bosman uit Baarn getekend. Je ziet er een eindeloze herhaling in van de grondfiguur die de *stelling van Pythagoras* in beeld brengt. Men spreekt daarom wel van de *boom van Pythagoras*.
De opbouw is als volgt: teken eerst een vierkant (de dikke stam), met daarop een rechthoekige gelijkbenige driehoek. Op de beide rechthoekszijden daarvan komen weer vierkanten, daarop weer gelijkbenige rechthoekige driehoeken, enz. (figuur 1). Je ziet, een eenvoudig tekenvoorschrift dat zoals in de figuur hierboven het geval was, gemakkelijk door een computer kan worden uitgevoerd.

Begrensde oneindigheid
De oppervlakte van de boom is oneindig groot en dat lijkt in tegenspraak met wat we zien: een duidelijk begrensde figuur.
Toch is zowel die oneindigheid als die begrensdheid gemakkelijk aan te tonen. Laten we beginnen met de oneindigheid van de oppervlakte (figuur 2). We gaan uit van vierkant A dat een oppervlakte heeft van 1 dm^2. De beide kleinere vierkanten B hebben volgens de stelling van Pythagoras samen dezelfde oppervlakte als vierkant A, dus ook 1 dm^2. Dan volgen er vier vierkantjes C en het is duidelijk dat de gezamenlijke opper-



Figuur 1

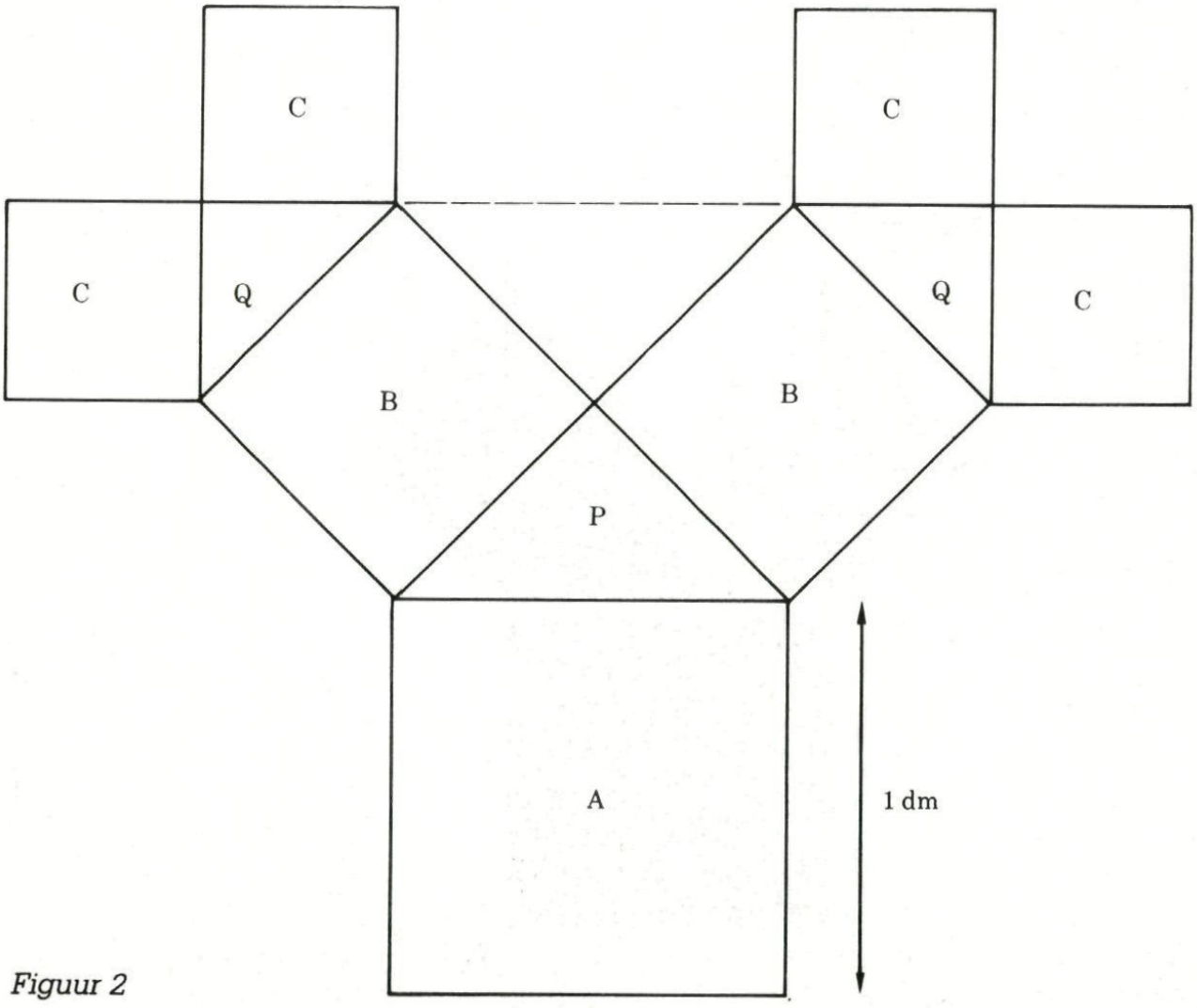
vlakte van deze vierkantjes weer 1 dm^2 is. En dat gaat zo maar door. De oppervlakte groeit dus bij elke volgende stap in de constructie met 1 dm^2 aan. De totale oppervlakte van alle vierkanten in de boom van Pythagoras is dus oneindig groot. En dan hebben we het nog niet eens over de driehoekjes gehad!

Het eerste driehoekje P heeft een oppervlakte van $^1/_4$ dm^2. De beide volgende driehoekjes Q hebben samen ook een oppervlakte van $^1/_4$ dm^2. . . en ga zo maar door. Dus de oppervlakte van alle driehoekjes samen is ook oneindig.

Is de oppervlakte van de boom van Pythagoras dan tweemaal oneindig?

Natuurlijk niet: tweemaal oneindig blijft oneindig.

Als je de boom wat nauwkeuriger bekijkt, dan zie je ook wel dat het zeker niet onmogelijk is dat de oppervlakte oneindig is, want na een aantal constructiestappen komen we terecht op een plaats

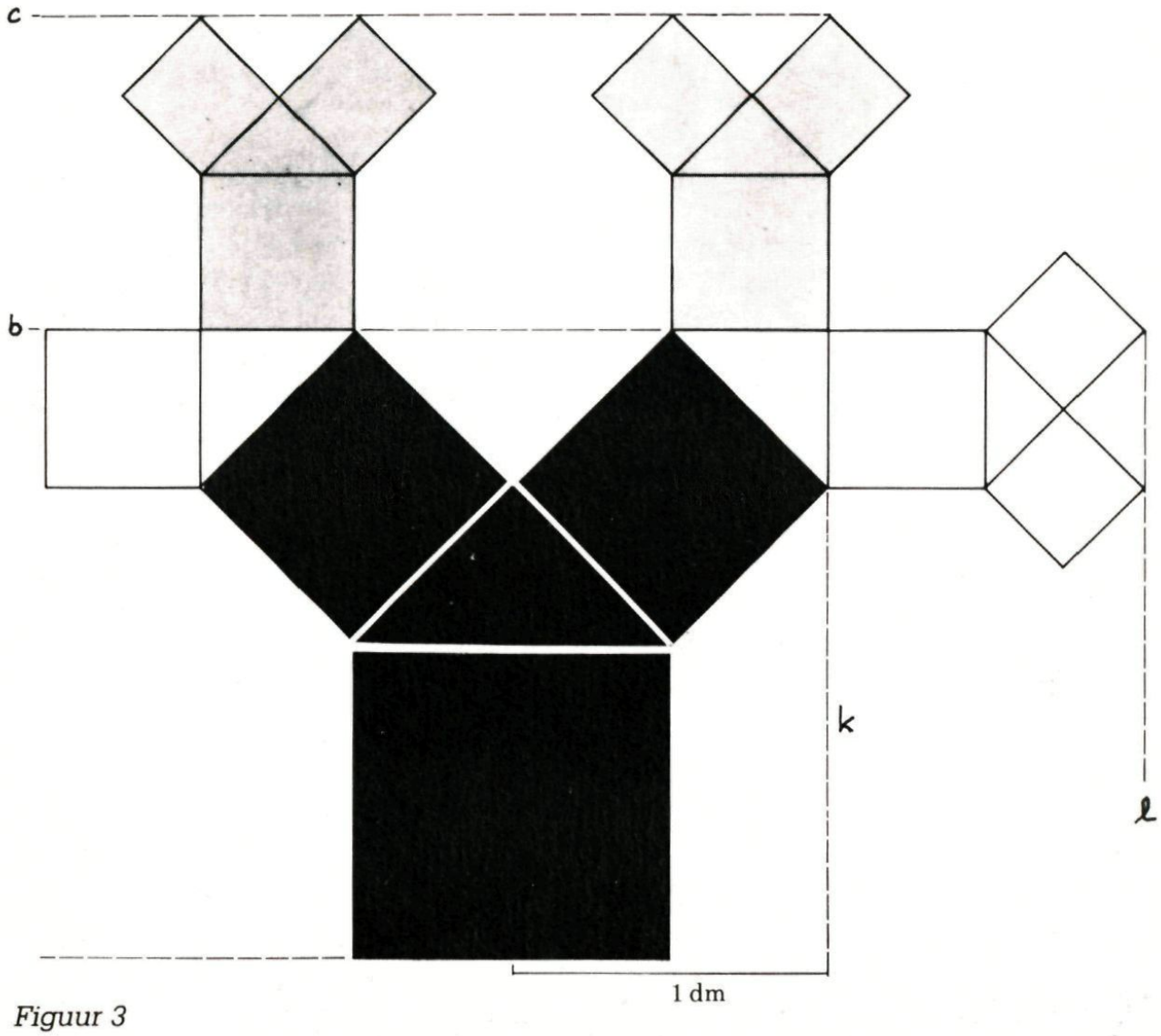


Figuur 2

waar al een deel van de boom getekend is. Zo ontstaan op een aantal plaatsen oneindig veel lagen over elkaar heen.

Hoeveel inkt?

Nu we het toch over die oneindigheid hebben: hoeveel inkt zou er nodig zijn om de boom helemaal tot in alle (letterlijk) oneindig fijne details te tekenen?
Waarschijnlijk kun je er zelf wel achter komen dat daar oneindig veel inkt voor nodig is.
We moeten hier echter reëel blijven: de vierkanten en driehoekjes zouden al gauw vollopen. Laten we daarom eens aannemen dat de lijndikte in dezelfde verhouding afneemt als de grootte van de afzonderlijke figuurtjes, dan kan van vollopen geen sprake zijn. De begrenzing van de boom zal dan onzichtbaar zijn, omdat daar de lijntjes oneindig dun worden.
Hoeveel inkt zou er nodig zijn om de boom van Pythagoras op zo'n manier helemaal te tekenen?
We maken het ons gemakkelijk en laten voor deze berekening de helft van de vierkanten buiten beschouwing. Vergelijken we vierkant A met de vier vierkanten C. De omtrek van A is 4 dm, die van de vierkanten C samen is 8 dm. Omdat de grootte van elk vierkant C tweemaal zo klein is als die van A, moeten we volgens



Figuur 3

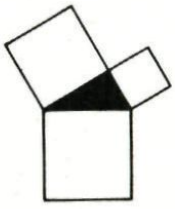
afspraak de lijndikte voor C halveren. Het komt er dus op neer dat voor het tekenen van vierkant A evenveel inkt wordt gebruikt als voor de vier vierkanten C. En je begrijpt nu wel hoe het verder gaat . . . er is weer oneindig veel inkt nodig.
Dat is toch wel enigszins verwonderlijk: voor deze begrensde tekening waarvan de randen ragfijn worden (tot zelfs onzichtbaar toe), is niettemin een hoeveelheid inkt nodig die het hele heelal (verondersteld dat dit oneindig is) zou vullen!

Hoogte en breedte

Laten we nu de begrensdheid eens nader bekijken (figuur 3). Hoe hoog wordt de boom en hoe breed?
We kunnen een aantal horizontale lijnen *a, b, c,* enz. trekken en wel zó dat zich tussen twee van die lijnen altijd een hele *pythagorasfiguur* (driehoek plus drie vierkanten) bevindt.
Als de zijde van het eerste grote vierkant 1 dm is, is de donkere figuur in haar geheel 2 dm hoog. De lichtere figuren tussen de lijnen *b* en *c* zijn half zo hoog, dus 1 dm. Zonder nu nog meer evenwijdige lijnen te tekenen, kunnen we voorspellen wat de totale hoogte van de boom wordt:
$2 + 1 + {}^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_8 + {}^1/_{16} + \ldots$ dm.
Hoewel deze optelling oneindig doorgaat, is het totaal toch niet oneindig groot. De tussen-uitkomsten van de optelling zijn $2, 3, 3{}^1/_2, 3{}^3/_4, 3{}^7/_8, 3{}^{15}/_{16}, 3{}^{31}/_{32}, \ldots$ waaruit een benaderde totale hoogte volgt van niet meer dan 4 dm.

De breedte vinden we het eenvoudigst als we letten op de witte pythagorasfiguur die naar rechts loopt. Deze ligt tussen de verticale lijnen *k* en *l* en is even groot als de lichtgrijze figuur die naar boven loopt.
We kunnen nu hetzelfde verhaal vertellen als hiervoor. Vanaf *k* gaan we steeds met kleiner wordende stapjes naar rechts over een totale afstand van:
$1 + {}^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_8 \ldots$
wat nadert tot 2 dm. Met het middenstuk erbij geeft dat een totale boombreedte van 6 dm.

De boom heeft nog een andere interessante eigenschap. Hij herhaalt zich eindeloos: als we bij een ander vierkant beginnen krijgen we van daaruit weer de volledige pythagorasboom – alleen op een kleinere schaal.
Bovendien kun je bij voorbeeld bij de opbouw van de boom eens een ander model driehoek gebruiken.



Nog wat meer informatie hierover, en een zee van schitterende tekeningen vind je in een boekje met als titel: Bomen van Pythagoras, variaties van Jos de Mey (Aramith Uitgevers, Amsterdam, 1985).

De jacht op prima priemgetallen

In het artikel 'Prima, prima' (Pythagoras 25-1) definieerden we een *prima R priemgetal* als een priemgetal dat steeds een priemgetal blijft als de cijfers ervan achtereenvolgens van de rechterkant af worden weggelaten. Op dezelfde manier onderscheidden we *prima L priemgetallen*. En bovendien toonden we aan dat er ten minste één priemgetal was waar beide definities op van toepassing waren: 317. Dat noemden we daarom een *prima de luxe priemgetal*.
Hoeveel prima priemgetallen er zijn en welke, konden we toen onmogelijk zeggen. Maar inmiddels heeft een aantal lezers gehoor gegeven aan onze oproep en is de jacht in volle gang.

De resultaten
De spits werd afgebeten door *Frits Göbel* uit Enschede. Met een BASIC-programma dat hij door zijn Schneider CPC 464 liet uitvoeren, bereikte hij het volgende.

- Onder de getallen 1, 2, ..., 36 miljoen bevinden zich inclusief de vier priemgetallen van één cijfer (te weten 2, 3, 5 en 7) precies 80 prima R priemgetallen. Vermeldenswaard vond hij dat in dat rijtje van 80 de priemtweeling 7393931 & 7393933 voorkwam en dat het grootste getal 29399999 op vijf negens eindigde.
(Dit resultaat werd bevestigd door *Piet Bakker* uit Nieuweroord die ze niet alleen alle 80 uitschreef, maar er ook nog 37337999, 59393339 en 73939133 aan wist toe te voegen.)

- Onder de getallen 1, 2, ..., 10.000 zitten al ruim 200 prima L priemgetallen. (*Peter Deleu* uit Kuurne (B) schreef ze zelfs keurig voor ons uit en kwam tot een aantal van 205.)

- Onder de 36 miljoen komen vijftien prima de luxe priemgetallen voor. Dat zijn: 2, 3, 5, 7, 23, 37, 53, 73, 313, 317, 373, 797, 3137, 3797 en 739397.

Prima priemgetal vermoeden
Wat opviel was dat geen van de inzenders meer dan 15 prima de luxe priemgetallen wist te vinden. *P. Hartman* uit Groningen liet zijn lijstje zelfs gepaard gaan met de bewering dat er geen andere dan die 15 kunnen zijn.

Zijn 'bewijs' leek ons echter niet helemaal waterdicht. Wel konden daaruit de volgende uitspraken worden afgeleid.

1 Een prima de luxe priemgetal kan niet beginnen met of eindigen op 33, 39, 93 of 99.
2 2, 5, 23 en 53 zijn de enige prima de luxe priemgetallen waarin 2 of 5 voorkomen.
3 Elk prima de luxe priemgetal van meer dan *twee* cijfers bestaat slechts uit de cijfers 1, 3, 7 en 9.
4 Elk prima de luxe priemgetal van meer dan *vier* cijfers begint met 31, 37, 73 of 79, en eindigt op 13, 73, 37 of 97.
   Alle *tussenliggende* cijfers zijn 3 of 9.

Een nieuwe uitdaging?

Er zijn nu dus twee mogelijkheden.
Ofwel iemand fabriceert (bij voorbeeld met behulp van een uitgebreide lijst van prima L en prima R priemgetallen) een volledig bewijs voor het vermoeden dat de lijst van 15 prima de luxe priemgetallen compleet is. Ofwel iemand slaagt erin om een of meer prima de luxe priemgetallen aan de lijst toe te voegen. In dat geval, rijst natuurlijk wel weer de vraag of dáármee de lijst compleet is.

Rotatiesommen

Neem een getal van drie cijfers, zeg 257, en tel daar al z'n 'rotaties' bij op:

$$257 + 572 + 725 = 1554$$

dan is de rotatiesom deelbaar door 37 ($1554 = 42 \times \mathit{37}$).
Evenzo:

$$899 + 998 + 989 = 2886 = 78 \times \mathit{37}$$

$$360 + 603 + 036 = 999 = 27 \times \mathit{37}$$

Kun je uitzoeken of dit voor élk getal van drie cijfers geldt?

Voor getallen van een andere lengte gelden ook dergelijke deelbaarheden. Zo is de rotatiesom van een vijf-cijfer-getal altijd deelbaar door 271. Bij voorbeeld:

$$27315 + 73152 + 31527 + 15273 + 52731 = 199998 = 738 \times \mathit{271}$$

Ook al snap je niet wat hier achter zit, dan kun je door gewoon uitproberen nog wel vinden welke deler steeds voorkomt in de rotatiesom van een *twee*-cijfer-getal. En in de rotatiesom van een *vier*-cijfer-getal.
De verklaring kun je vinden op bladzijde 15.

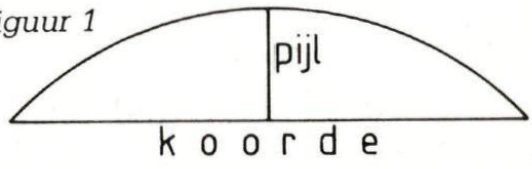
De straal van de stuwdam

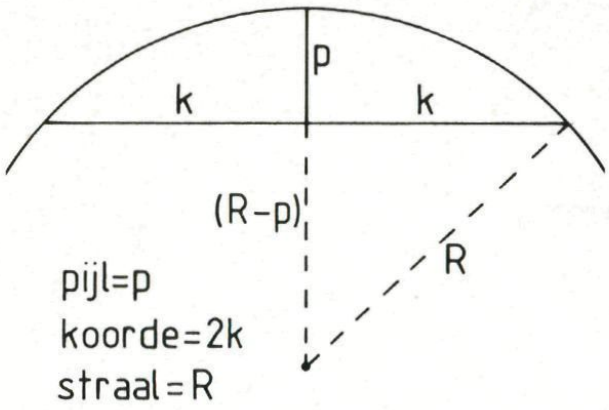
Met een aantal jongeren hielden we een bergkamp in de Alpen van Noord-Italië. Naast allerlei tochten en beklimmingen stonden ook de nodige technische zaken op het programma. Eén daarvan: bepaal de straal van de stuwdam, die het stuwmeer van Place Moulin afsluit, dat gelegen is in een van de zijdalen van de Aosta-vallei.
Zo stonden we die morgen dan op de 140 meter hoge en van boven 10 meter brede dam. Vanuit het dal werd een krachtige luchtstroom door de holle binnenwand van de dam omhoog geleid en deed de pet van een van ons met een sierlijke boog in het meer belanden.

Werkwijze
Ons gereedschap bestond uit een stuk touw en een doodgewone liniaal. We hadden namelijk besloten om de straal van die hele grote cirkel te bepalen via koorde en pijl (figuur 1). Een *koorde* is de verbindingslijn tussen twee punten van een cirkel. Een *pijl* is het lijnstuk dat het midden van de koorde met dat van de boog verbindt.

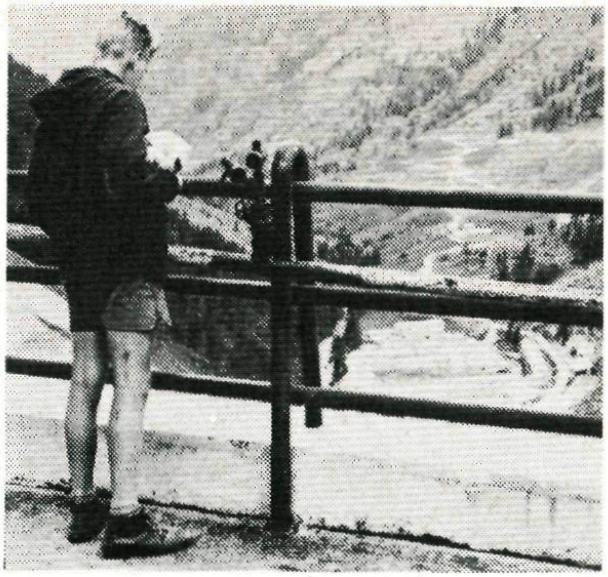
Het stuk touw gebruikten we als koorde, terwijl met de liniaal de bijbehorende pijl werd opgemeten. Het stuk touw had een lengte van 10 meter en voor de pijl vonden we 4,5 centimeter.

Figuur 1





Figuur 2. Bepaling van de straal.



Op de rand van de dam.

In figuur 2 geldt dan $p = 0{,}045$ m en $k = 5{,}0$ m.

Uitwerking

Met de *stelling van Pythagoras* konden we vervolgens de lengte van de straal R berekenen:

$R^2 = (R - p)^2 + k^2$

of uitgeschreven:

$R^2 = R^2 - 2Rp + p^2 + k^2$

of $2Rp = p^2 + k^2$ en dus

$R = (p^2 + k^2) / 2p$.

Zoals je ziet, was in ons geval p klein ten opzichte van k en bijgevolg p^2 nog meer ten opzichte van k^2, zodat we in de laatste uitdrukking p^2 konden verwaarlozen. Zo kregen we tenslotte $R = k^2 / 2\,p$ en dat leidde na invulling van k en p tot $R = 278$ m.

Betrouwbaarheid

Wat had deze meting voor waarde, of anders gezegd hoe betrouwbaar was die uitkomst van 278 m?

Tijdens het werk op de dam bleek dat speciaal de lengte van de pijl niet erg nauwkeurig te bepalen was. Je mag gerust stellen dat hij net zo goed 4 of 5 cm had kunnen zijn! En dat levert voor R waarden van 312 m (bij $p = 4$ cm) en 250 m (bij $p = 5$ cm), reken zelf maar na. Een waarde van 280 m met een speling van 10% leek ons daarom een geschikte uitkomst. Voor amateurs geen slecht resultaat, tenminste dat zeiden ze ons later bij ons bezoek aan de machinehal in de centrale van Valpelline.

Rotatiesommen-verklaring

Voor een willekeurig drie-cijfer-getal abc geldt:

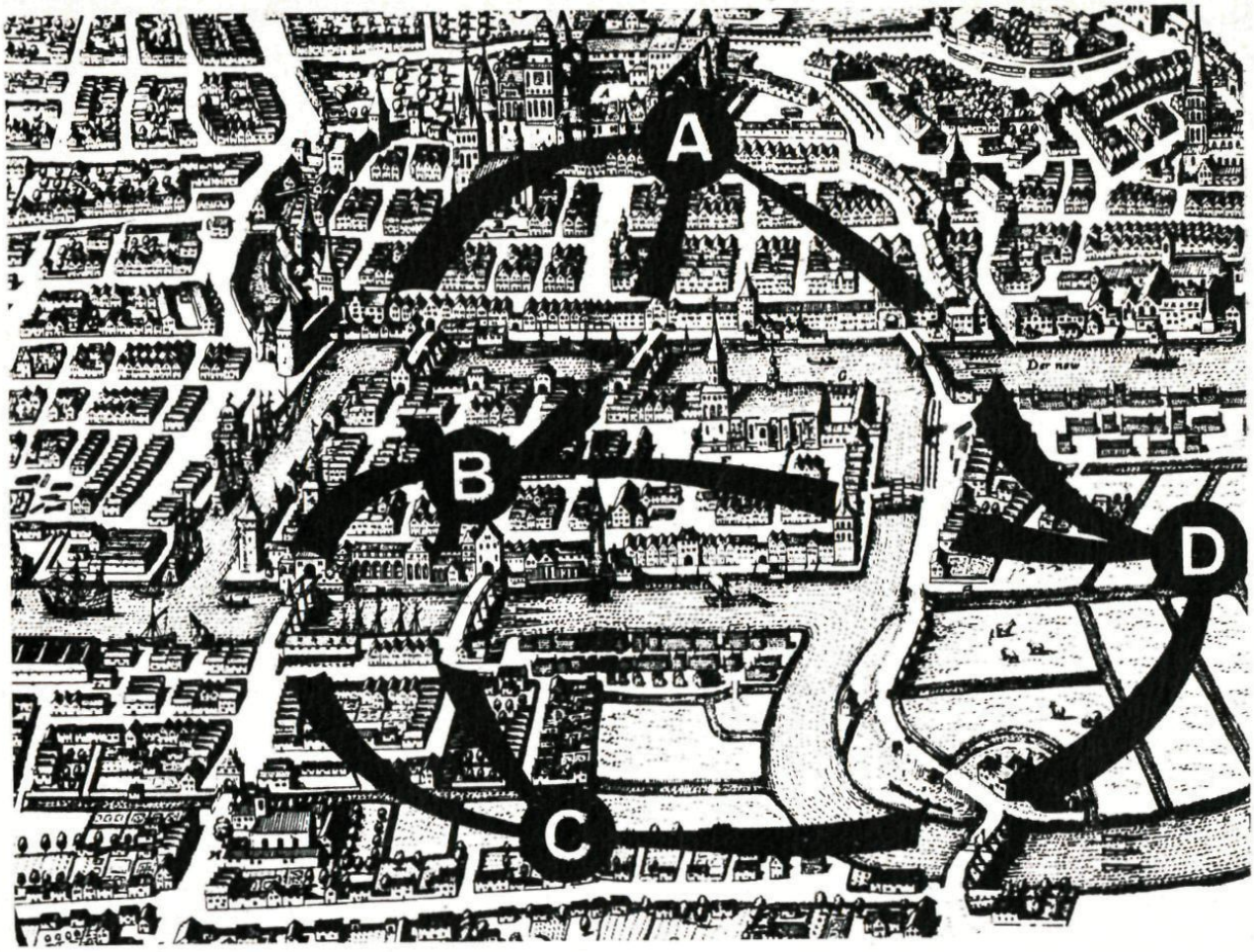
$abc + bca + cab = (100a + 10b + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) =$

$111a + 111b + 111c = 111\,(a + b + c) = 3 \cdot 37 \cdot (a + b + c)$

Bij vijf cijfers geldt op dezelfde manier:

rotatiesom van $abcde = 11111 \cdot (a + b + c + d + e) = 41 \cdot 271 \cdot (a + b + c + d + e)$.

De speciale delers volgen dus uit de ontbindingen van de getallen 11, 111, 1111, 11111, enz.

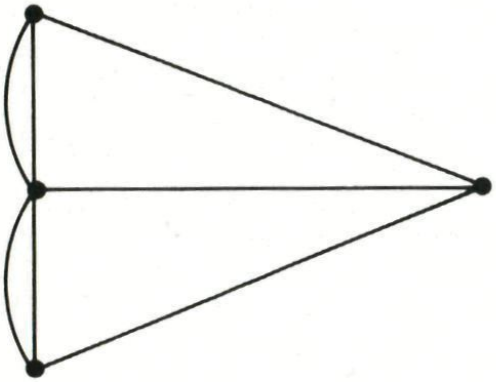


Reis door Koningsbergen

Kaliningrad, voor 1945 Koningsbergen geheten, ligt aan de oevers van en op twee eilanden in de rivier de Pregel, zo ongeveer waar deze uitmondt in de Oostzee. Omstreeks 1735 werden de verschillende delen van de stad door zeven bruggen met elkaar verbonden (figuur hierboven). De Koningsbergers hadden de gewoonte om 's zondagsmiddags door hun stad te wandelen. En het zal je wel niet verbazen dat de bruggen belangrijke schakels in de diverse wandelroutes vormden. Bijgevolg vroeg een aantal inwoners zich af of er een wandeling mogelijk was waarbij men thuis beginnend en eindigend alle bruggen juist eenmaal zou kunnen passeren.
Men slaagde er niet in daar een passend antwoord op te vinden. Daarom wendde men zich tot de Zwitserse wiskundige Leonhard Euler (1707-1783), die omstreeks die tijd aan de Academie van Wetenschappen in St.-Petersburg, het tegenwoordige Leningrad, werkte.
Net als op onze eerste twee reizen, kunnen we het ook op onze derde reis niet stellen zonder grafen. Sterker nog, deze reis vormde de aanzet tot wat later de grafentheorie zou worden. In 1736 beschreef Euler namelijk dit *Koningsberger bruggenprobleem* in de jaarlijkse uitgave van de St.-Petersburgse Academie van Wetenschappen, en dat betekende de geboorte van de grafentheorie.

Het Koningsberger bruggenprobleem

Euler construeerde uit de plattegrond van Koningsbergen een graaf (figuur 1). De verschillende delen van de stad vormden daarin de *knooppunten* en de bruggen de *kanten*. Daardoor kon het probleem worden omgezet in de vraag of je startend in één van de vier knooppunten alle kanten van de graaf precies eenmaal zou kunnen passeren alvorens in het punt van uitgang terug te keren. De knooppunten mogen daarbij meer dan één keer worden aangedaan.

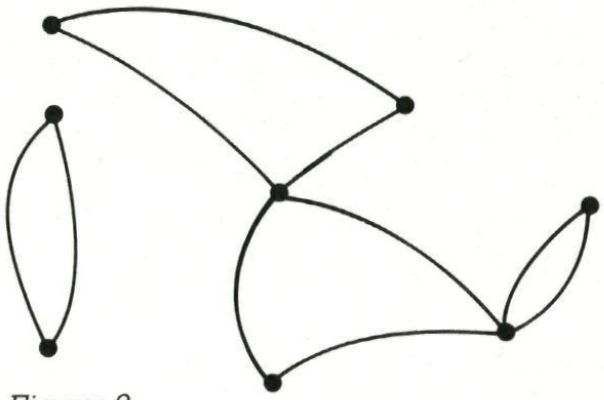


Figuur 1

Euler toonde aan dat zo'n 'reis' onmogelijk was. Kijk maar, telkens wanneer je een knooppunt via een kant benadert, moet je er via een andere kant weer uit. Dus elk knooppunt moet evenveel *ingaande* als *uitgaande* kanten bezitten. Anders gezegd: in elk knooppunt moet een even aantal kanten samenkomen.
Bij de graaf uit figuur 1 is dat niet het geval. In alle vier knooppunten komt zelfs een oneven aantal kanten samen! Dus is de gevraagde 'reis' door Koningsbergen niet mogelijk.

Eulerpad

Zo'n rondgang door een graaf, waarbij je alvorens weer in het punt van uitgang terug te keren *alle* kanten precies éénmaal passeert, heet een *eulerpad*. Om een eulerpad in een graaf te maken, moet in alle knooppunten een even aantal kanten samenkomen. Maar dat is niet voldoende zoals je in figuur 2 kunt zien. In elk knooppunt van de daar getekende graaf komt weliswaar een even aantal kanten samen, maar je kunt niet van elk knooppunt naar elk ander knooppunt komen. En dat is óók nodig om een eulerpad mogelijk te maken. Meer niet, zoals Euler heeft bewezen nadat hij het Koningsberger bruggenprobleem had 'opgelost'.
Wil je dus kijken of een willekeurige graaf een eulerpad bezit, dan moet je nagaan of er in elk knooppunt een even aantal kanten samenkomt én of je van elk knooppunt naar elk ander punt kunt komen.

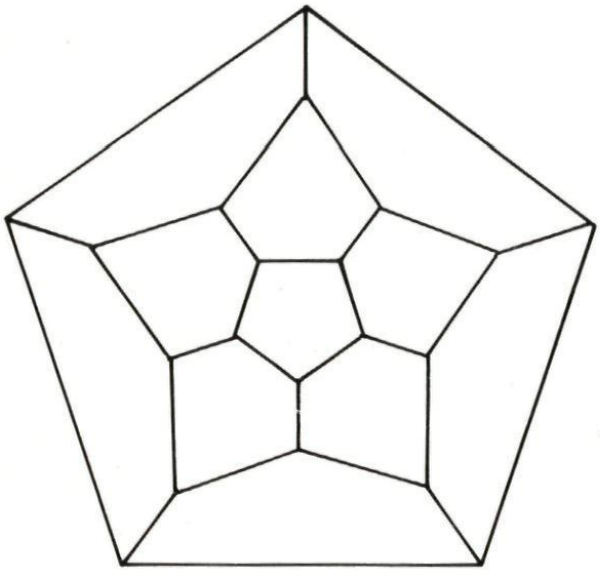


Figuur 2

Eulerpad over een twaalfvlak?

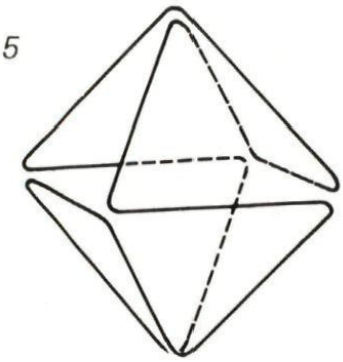
Op onze eerste reis (Pythagoras 25-1) hebben we gezien dat een regelmatig twaalfvlak een hamiltonpad bezat. Dat was een tocht langs de ribben waarbij je beginnend op een of ander hoekpunt en daar weer eindigend, onderweg elk der andere hoekpunten precies éénmaal aandeed.

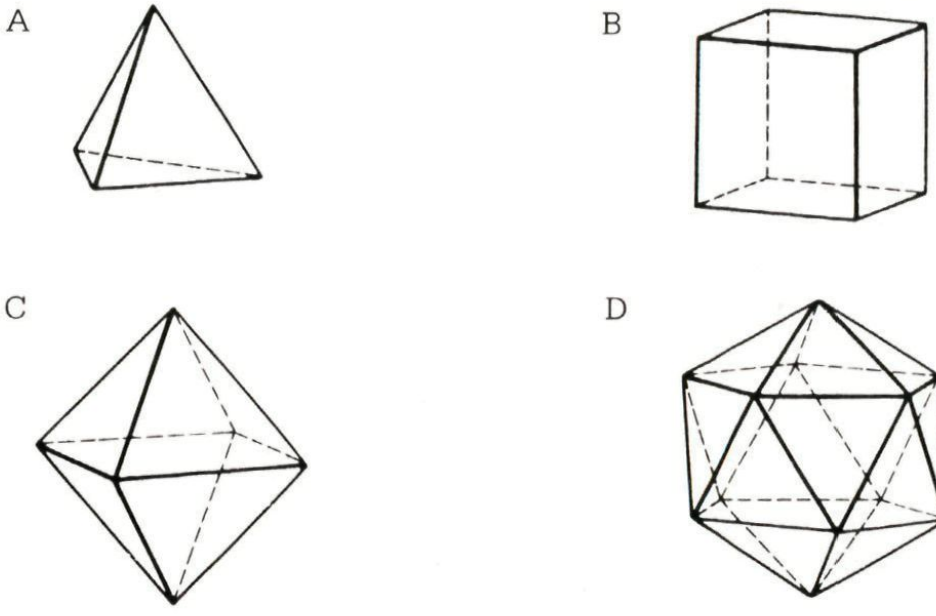
We kunnen ook eens nagaan of er over zo'n regelmatig twaalfvlak een eulerpad mogelijk is. Bekijk daartoe de bijbehorende graaf (figuur 3). In alle knooppunten (hoekpunten) komen drie kanten (ribben) samen. Een eulerpad is hier dus niet mogelijk.
Kijken we nog even naar de vier andere regelmatige veelvlakken, dan blijkt dat er alleen over het regelmatig achtvlak een eulerpad mogelijk is (figuur 4). Dat betekent bij voorbeeld dat van het regelmatig achtvlak een draadraam verkregen kan worden door één stuk draad op een bepaalde manier te buigen (figuur 5). Bij de andere regelmatige veelvlakken kan dat niet.



← *Figuur 3. Het regelmatig twaalfvlak als graaf weergegeven. In elk knooppunt komen drie kanten samen, waardoor een eulerpad niet mogelijk is.*

Figuur 5





Figuur 4. Netwerken (in feite drie-dimensionale grafen) van de vier andere regelmatige veelvlakken: A het viervlak, B de kubus, C het regelmatig achtvlak en D het regelmatig twintigvlak (icosaëder). Alleen bij het regelmatig achtvlak komt in elk knooppunt (hoekpunt) een even aantal kanten (ribben) samen. Het regelmatig achtvlak bezit dus een eulerpad.

Paardetocht langs een eulerpad?

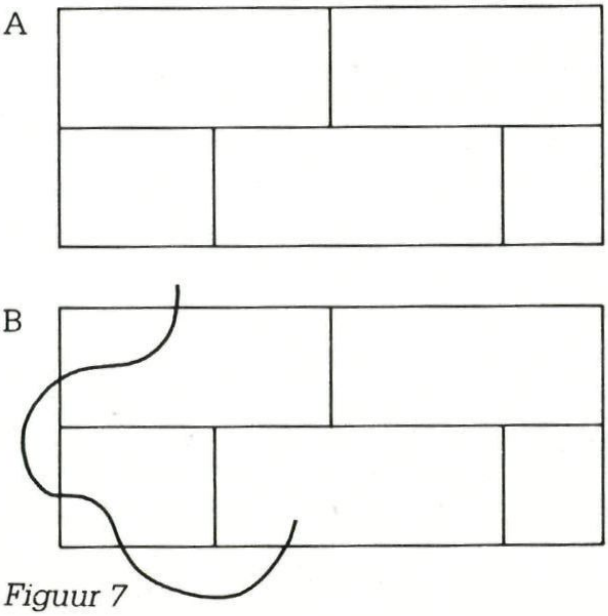
In 'Reis over een schaakbord II' (Pythagoras 25-2) heb je gezien dat je met een paard alle velden van het schaakbord aan kunt doen zonder meer dan eenmaal op hetzelfde veld te komen.
Nu kun je je afvragen of het mogelijk is om met een paard via een eulerpad het schaakbord af te gaan. Let wel, je moet daartoe *alle* zetten die er met een paard gedaan kunnen worden precies éénmaal doen, alvorens op het veld van uitgang terug te keren. De velden mogen daarbij meer dan een keer worden aangedaan.
Helaas (of misschien ben je er wel blij om), lukt dat niet.
Hoe je daar achter kunt komen?
Je zou alle velden die op een paardesprong-afstand van elkaar liggen door een lijntje kunnen verbinden. Dat levert een graaf op waarin die lijntjes de kanten en de velden de knooppunten vormen. En dan maar kijken of aan de voorwaarden voor het bezitten van een eulerpad wordt voldaan.
Zo'n graaf is echter moeilijk te tekenen. Maar gelukkig is dat niet nodig.
In figuur 6 is voor elk veld van het schaakbord aangegeven hoeveel paardesprongen er naartoe (er vandaan kan natuurlijk ook) leiden. We weten dan hoeveel kanten er in elk knooppunt van de overeenkomstige graaf samenkomen. Zoals je ziet zijn er acht knooppunten (velden) waar een oneven aantal kanten samenkomt. Een paardetocht langs een eulerpad is dus niet mogelijk. Althans op een acht bij acht bord. Voor borden van ander formaat moet je dat zelf eens uitzoeken.

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

Figuur 6

Slingerlijn

Probeer met een slingerlijn alle lijnstukjes in het netwerk van figuur 7A precies eenmaal te doorsnijden. In figuur 7B hebben we een begin gemaakt om duidelijk aan te geven wat de bedoeling is. Uiteraard mag je ook anders beginnen!
Gaat het niet?
Probeer dan eens te kijken of je het probleem zó kun formuleren dat het neerkomt op het zoeken naar een eulerpad.



Figuur 7

Geen tovervierkanten maar vierkanten

Bij een gewoon tovervierkant (half-magisch vierkant) moet de som van de getallen in elke rij en elke kolom steeds hetzelfde zijn. Daar is in bijgaand getallenvierkant geen sprake van. Er is echter wel iets anders aan de hand.

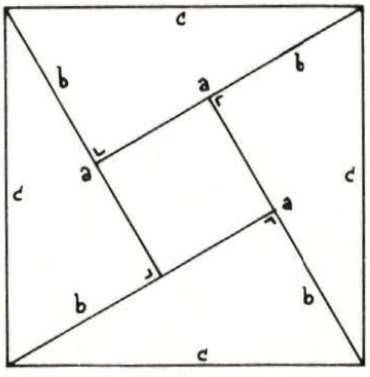
Neem er maar eens vijf getallen uit waarvan er geen twee in dezelfde rij of dezelfde kolom staan (bij voorbeeld de vijf onderstreepte getallen of de vijf met een stippellijntje eronder). Tel die bij elkaar op en de som wordt . . .
Mee eens dat zo'n vijftal op
$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
manieren te kiezen is?
Hoeveel van die 120 vijftallen hebben als som 666?

Hoe bestaat het! Of kun je zelf ook wel zo'n vierkant maken?

191	125	248	169	116
114	48	171	92	39
202	136	259	180	127
135	69	192	113	60
130	64	187	108	55

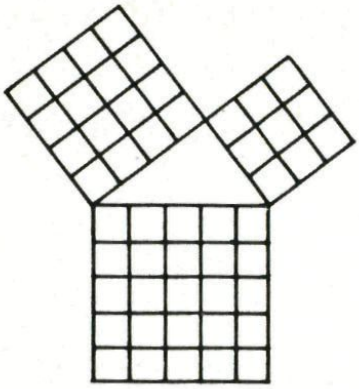
Oplossing denkertje (bladzijde 2)

Vijf. Eén van de mogelijke indelingen stond al boven de opgave! Overigens blijkt dat niet alleen de gevel, maar ook deze plattegrond een bewijs van de beroemde stelling bevat.

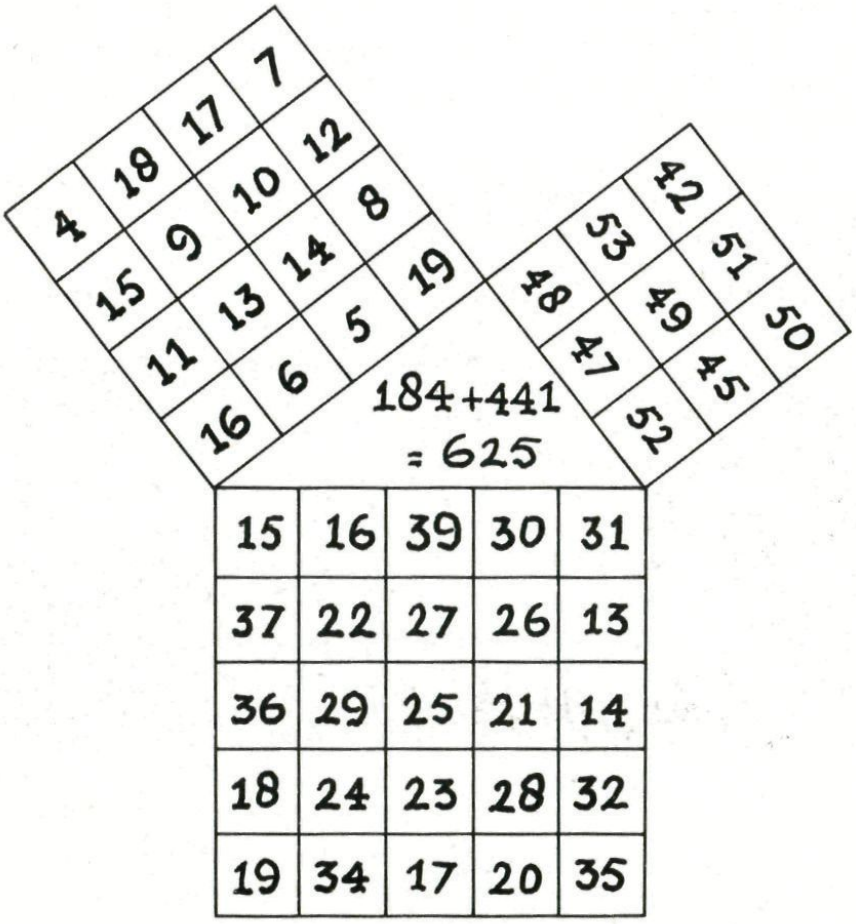


Het omtreksvierkant (met zijden c) is hier verdeeld in vier halve rechthoeken (met zijden a en b) en een raamloos vierkant halletje (met zijden $a - b$) in het midden. Voor de oppervlakten van deze onderverdeling (zie figuur) kunnen we schrijven:
$c^2 = 4 \times \frac{1}{2}ab + (a - b)^2 =$
$2ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2$.

Pythagorische magie?



Ons vignet op de omslag is een uitbeelding van *stelling van Pythagoras:* in een rechthoekige driehoek is . . . enz. of $a^2 + b^2 = c^2$. Voor de 3-4-5-driehoek is dat in de figuur hierboven nog eens verduidelijkt door de vierkanten te voorzien van ruitjes van gelijke afmetingen. Het aantal ruitjes in het onderste vierkant (kwadraat van de schuine zijde) is gelijk aan de som van de ruitjes in de twee schuinstaande vierkanten (kwadraten van de rechthoekszijden).
Nu kun je in elk van die vierkanten getallen plaatsen, en wel zó dat je drie magische vierkanten krijgt. De som van de getallen in elke rij, elke kolom en elke diagonaal is per vierkant steeds hetzelfde. Op zich niets bijzonders. Alleen is in dit geval de som van *alle* getallen in het onderste magische vierkant gelijk aan die van *alle* getallen in de twee schuinstaande vierkanten samen.

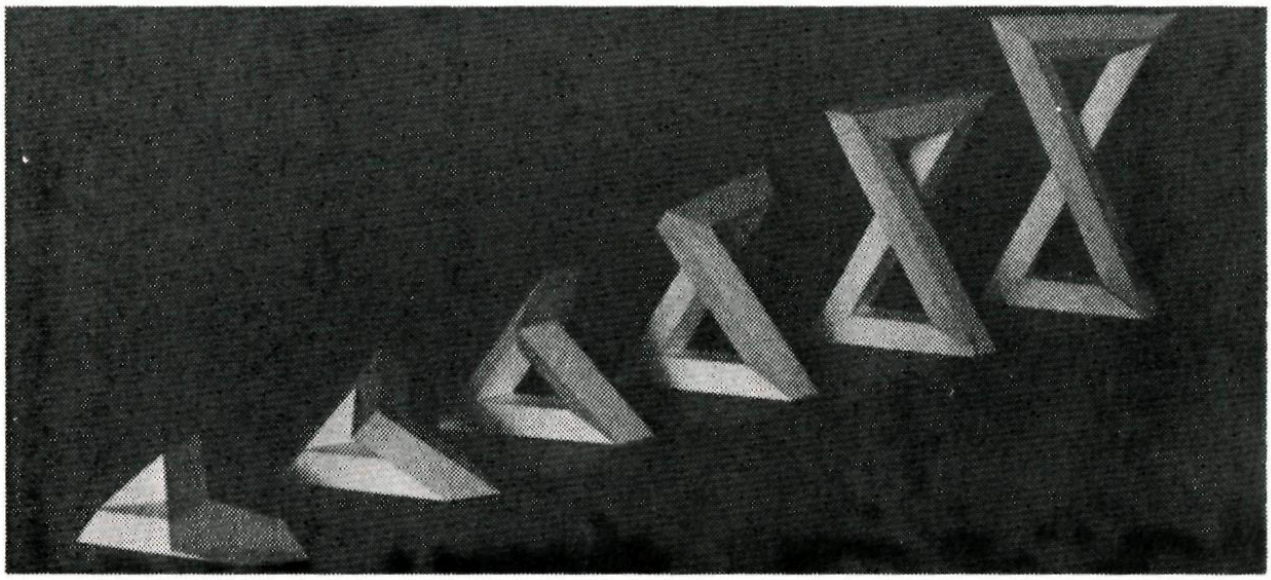


Kwartslag-vierbalken

Dit stukje gaat in op de prijsvraag-opgaven uit het artikel 'Dubbelverstek' in het eerste nummer van deze jaargang.
Van verschillende soorten vierbalken-met-een-kwartslag worden beschrijvingen gegeven. En wel op een manier die het knutselaars zo gemakkelijk mogelijk probeert te maken zélf die modellen met wat knip- en plakwerk uit een papieren bouwplaat samen te stellen. Van vier voorbeelden zijn de uitgerekende maten vermeld, van andere oplossingen kun je zelf de maten berekenen met behulp van de gegeven formules. Schrik niet van de ingewikkeldheid van die formules. Je hoeft er niets van te begrijpen, zelfs niet wat *sin*, *cos* en *tan* precies betekenen. Je moet er alleen op je rekenmachine de uitkomsten van kunnen uitrekenen.

Vrijheden in de oplossingen
Sluitende kwartslag-vierbalken zijn er in vele soorten en maten. Bij willekeurige keuze van maar liefst zeven verschillende afmetingen, blijkt het toch nog mogelijk om een sluitende oplossing te vinden die aan de voorwaarden voldoet. Natuurlijk is de *schaal* van het geheel vrij te kiezen, zelfs in twee opzichten.

– De *lengte* van één van de ribben bepaalt of je een groot of een klein model krijgt (en hoe groot het papier voor je bouwplaat moet zijn).
– De *dikte* van de vierkante balken bepaalt of het model massief of spichtig wordt. Deze dikte moet niet te groot gekozen worden, daar anders twee kruisende ribbe-balken elkaar in de weg kunnen zitten.



In deze zes vierbalken varieert de 'möbius-slag' van links naar rechts $^{2}/_{4}$, $^{1}/_{4}$, $^{0}/_{4}$, $^{1}/_{4}$, $^{2}/_{4}$ en $^{3}/_{4}$ slag.
Het vierde exemplaar van links is de vierbalk die aan het slot beschreven wordt, met vier gelijke hoeken en vier identieke knikvormen.

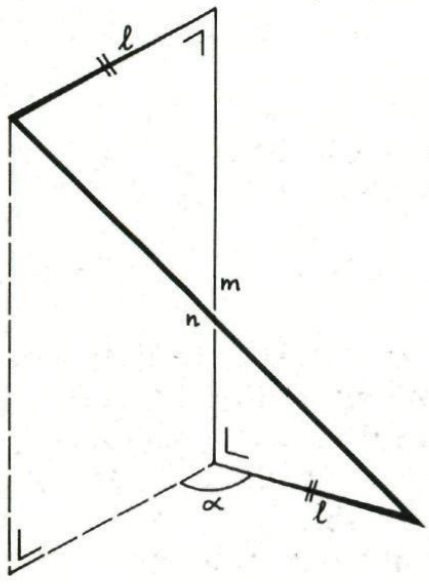
Een derde vrijheid zit in de *draaiing* van de ribbe-balken om de eigen as. Van iedere sluitende vierbalk bestaan oneindig veel varianten die allemaal hetzelfde frame van lengten en hoeken hebben, maar die verschillen voor wat betreft de stand van de balkdoorsnede. In de voorbeelden hieronder is steeds een speciale 'mooie' stand van de balkdoorsnede gekozen, maar ze zijn nog allemaal te verdraaien. (Enigszins vergelijkbaar met de manier waarop een FIXO-FLEX schakelbandje van een horloge binnenstebuiten te draaien is.)

Twee typen

Naast de genoemde vrijheden is de grootte van nog *vier* zijden of hoeken van de vierbalk willekeurig te kiezen, hoewel binnen zekere grenzen. In de hierna beschreven oplossingen zijn die keuzen op twee verschillende manieren nader beperkt.

Bij type I is er één ribbe die met z'n beide buren rechte hoeken maakt, terwijl die buren onderling even lang zijn.

Bij type II zijn de overstaande ribben twee aan twee even lang (en daarmee noodzakelijkerwijze de overstaande hoeken twee aan twee even groot).



Figuur 1

Type-I-oplossingen

Hier is nog één afmeting vrij te kiezen, we nemen daarvoor de grootte van α, de hoek tussen de gelijke kruisende ribben l (figuur 1).

Uit het bouwplaatschema (figuur 2, volgende bladzijde) kun je nu zelf een echte bouwplaat afleiden door voor α een waarde te kiezen (tussen 45° en 180°). Na ook de lengte l van de gelijke ribben, en de dikte d van het vierkante profiel gekozen te hebben (bij voorbeeld 6 cm en 2 cm), volgen de andere maten uit onderstaande formules.

$$m = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha + 1}{(1+\sqrt{2})\tan\frac{1}{2}\alpha - 1}\, l$$

$$n = \frac{1 + \sqrt{8} - \sin\alpha - \cos\alpha}{1 + \sqrt{2} - \cot\frac{1}{2}\alpha}\, l$$

$$p = \tfrac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})\cos^{-1}\tfrac{1}{2}\alpha + -\sqrt{2}\cos\tfrac{1}{2}\alpha\right) d$$

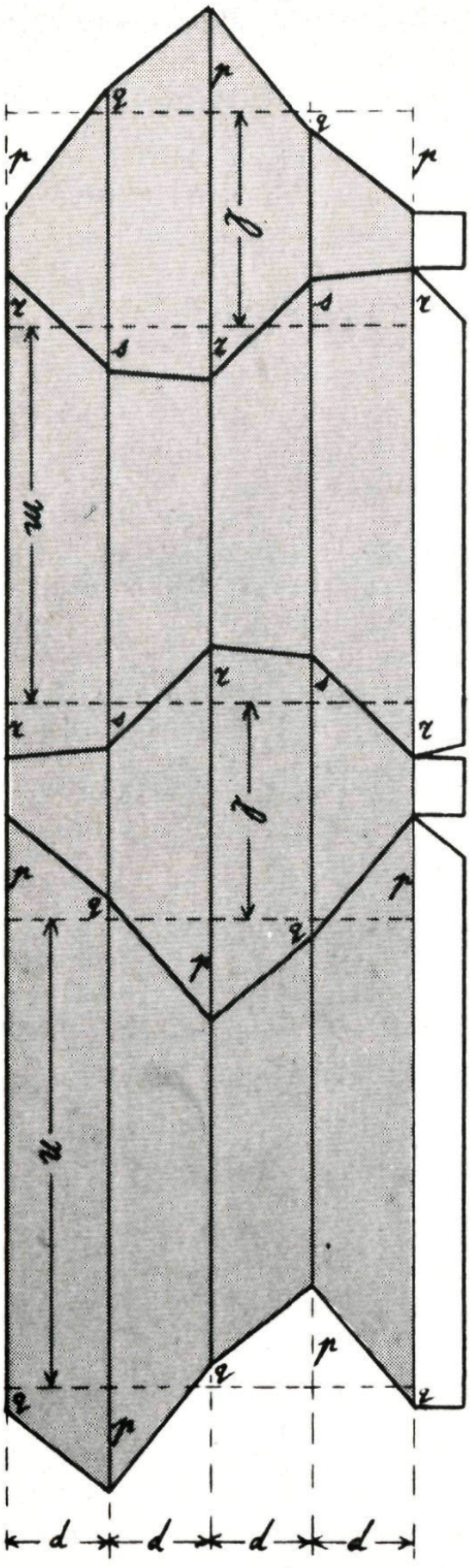
$$q = \tfrac{1}{2}\left(\cos^{-1}\tfrac{1}{2}\alpha - \sqrt{2}\sin\tfrac{1}{2}\alpha\right) d$$

$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cos\tfrac{1}{2}\alpha\, d$$

$$s = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sin\tfrac{1}{2}\alpha\, d$$

Voor $\alpha = 90°$ ontstaat de vierbalk waarop gedoeld werd in de hint aan het slot van het artikel in het eerste nummer: één hele en twee halve zijvlaksdiagonalen van een kubus en de verbinding van de twee zijvlakscentra.

De maten van z'n bouwplaat zijn:



Figuur 2. Bouwplaatschema type I (twee gelijke overstaande ribben, beide loodrecht op een derde).

$m = \sqrt{2}\, l$
$n = 2\, l$
$p = {}^1/_2\,(1 + \sqrt{2})\, d$
$q = {}^1/_2\,(-1 + \sqrt{2})\, d$
$r = s = {}^1/_2 d$

Nog enkele bijzondere gevallen.
- Voor $\alpha = 135°$ ontstaat een oplossing met balklengten l, ${}^1/_2 l$, l en $({}^1/_2 + \sqrt{2})l$.
- Voor $\alpha = 106{,}70762°$ blijken drie balken even lang te moeten zijn: l, l, l en 1,89076 l.

Type-II-oplossingen

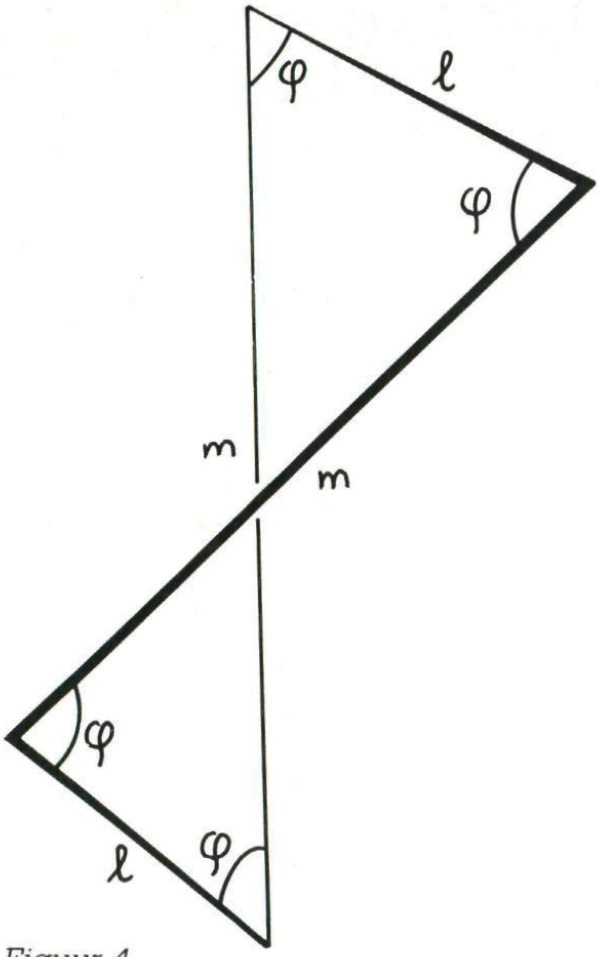
De vierbalk van de bouwplaat uit het eerste nummer was van dit type. En wel met de volgende maten, behorend bij het schema van figuur 3.

$m = \sqrt{2}\, l$
$p = q = ({}^1/_2 + {}^1/_2\sqrt{2})\, d$
$r = {}^1/_2\sqrt{2}\, d$
$s = t = 0$
$u = (1 + {}^1/_2\sqrt{2})\, d$
$v = w = {}^1/_2 d$

Door draaiing van de ribbebalken om hun eigen as is het mogelijk om de knikken bij de hoekpunten *twee aan twee* dezelfde vorm te geven. De maten zijn dan

$m = \sqrt{2}\, l$
$p = u = {}^1/_4\sqrt{(20 + 7\sqrt{8})}\, d \approx 1{,}58d$
$q = r = t = v = {}^1/_4\sqrt{(4 + \sqrt{8})}\, d \approx 0{,}65d$
$s = w = {}^1/_4\sqrt{(4 - \sqrt{8})}\, d \approx 0{,}27d$

In beide juist beschreven speciale vierbalken zijn de hoeken die telkens door twee opeenvolgende ribben gevormd worden, gelijk aan 90°, 45°, 90° en 45°
Het blijkt ook mogelijk om die vier hoeken allemaal gelijk te laten zijn, zeg φ (figuur 4).



Figuur 4

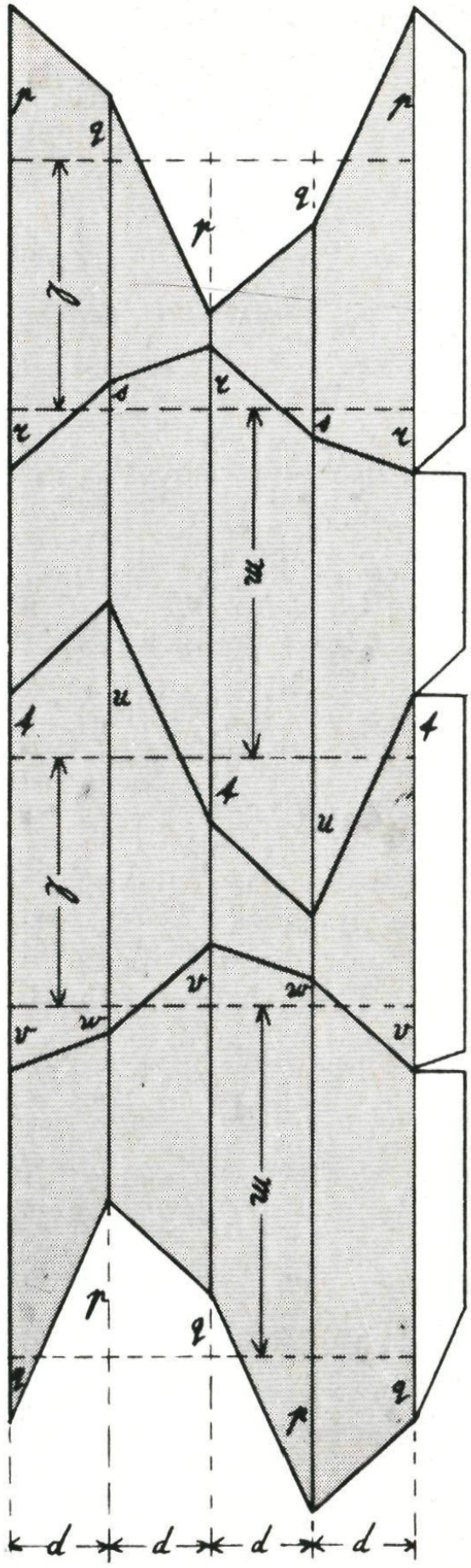
Om dan een sluitende kwartslag-vierbalk te krijgen moet voldaan zijn aan

$$l/m + m/l = 1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \\ + \tfrac{1}{4}(2 - \sqrt{2})\,(\cos\varphi + \cos^{-1}\varphi)$$

De fraaiste

Kiezen we $\varphi = 65{,}53°$ ($\cos\varphi = -1 + \sqrt{2}$) dan ontstaat de regelmatigste kwartslag-vierbalk die we kennen. Want het is dan mogelijk om de ribbe-doorsnede zó te draaien dat *alle vier* knikken precies dezelfde vorm hebben. De bouwplaatmaten zijn dan

$$m = \sqrt{2}\,l$$
$$p = r = u = v = \tfrac{1}{4}\sqrt{(8 + 6\sqrt{2})}\,d \approx 1{,}02d$$
$$q = s = t = w = \tfrac{1}{4}\sqrt{(2\sqrt{2})}\,d \approx 0{,}42d$$

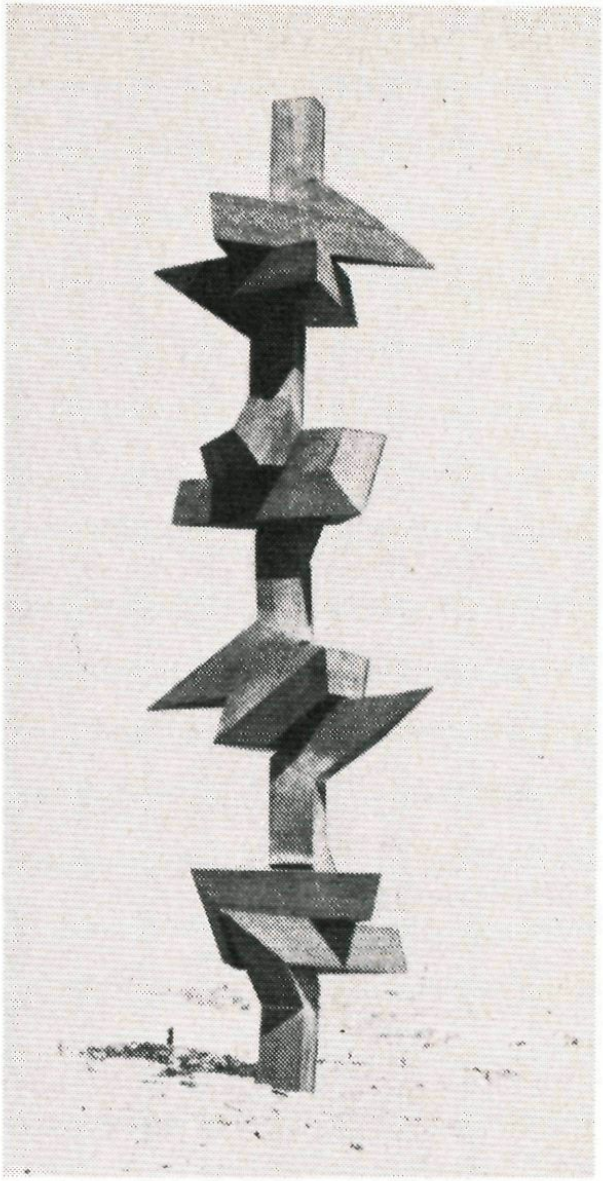


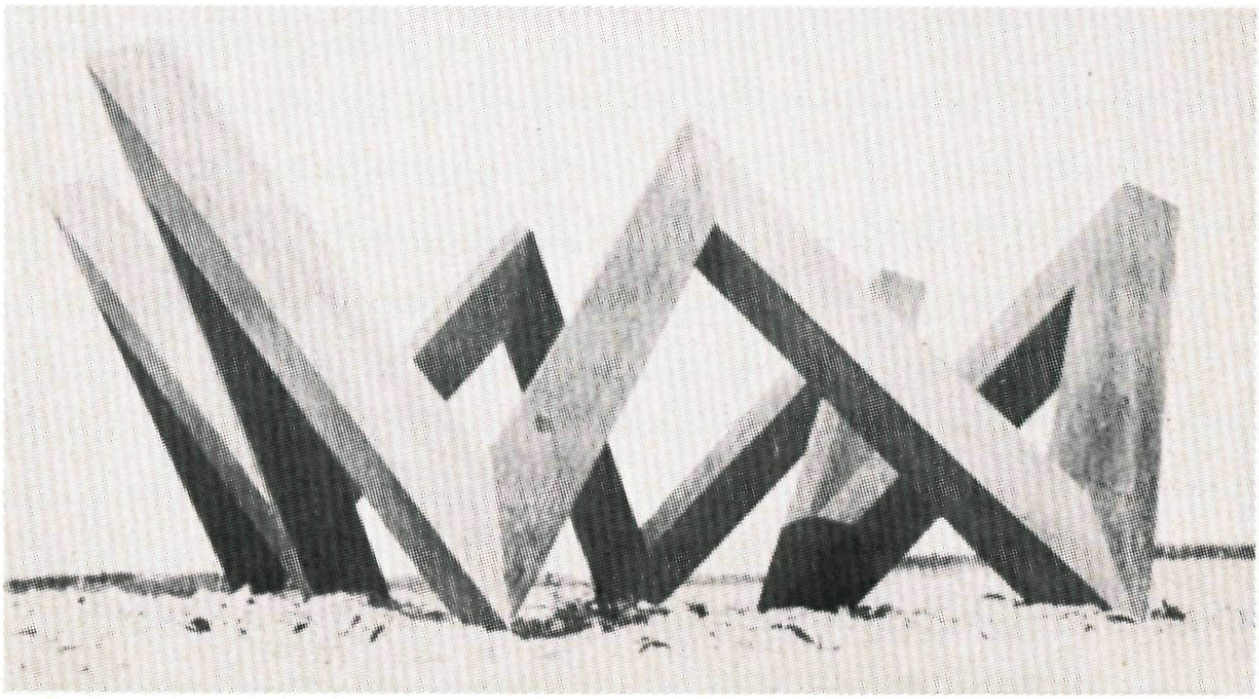
Figuur 3. Bouwplaatschema type II (overstaande ribben twee aan twee gelijk).

Formules

Je zult je wel afvragen hoe we aan alle formules en uitkomsten gekomen zijn, de afleidingen staan er namelijk niet bij. We hebben die weggelaten omdat ze verscheidene bladzijden vol niet bijzonder boeiende herlèidingen vereisen. De benodigde soort wiskunde is op zichzelf niet bepaald moeilijk, maar de tussenvormen zijn vaak zó lang dat het erg moeilijk is het overzicht erover te houden. Het vereist nogal wat ervaring om te weten met welke kunstgrepen een formule van een halve bladzijde te vereenvoudigen is tot een halve regel.

We willen best bekennen dat het ons ook heel veel uren gekost heeft om de hier gegeven resultaten (en nog wat andere) te vinden. En ook dat we in die reusachtige herleidingen vele malen fouten maakten, die pas later aan het licht kwamen bij het in elkaar zetten van de bouwplaat. De vierbalk bleek dan vaak eerst op geen stukken na sluitend!





Twee andere dubbelverstek-constructies van Popke Bakker.

Pythagoras Olympiade

Nieuwe opgaven

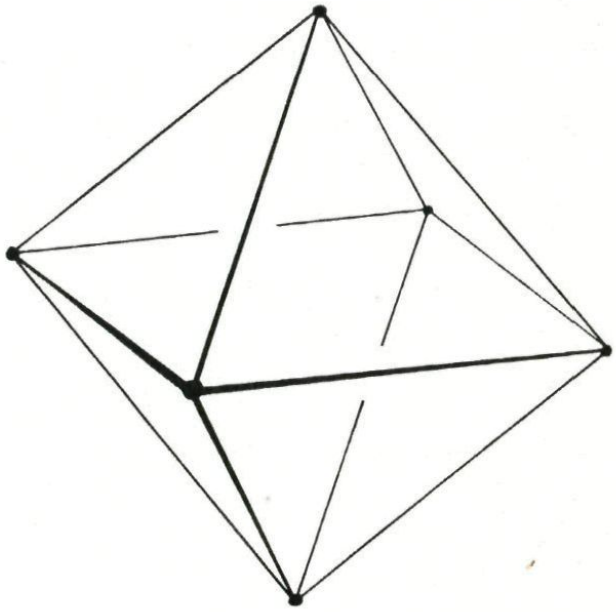
Oplossingen vóór 15 maart insturen naar: *Pythagoras Olympiade, Marinus de Jongstraat 12, 4904 PL OOSTERHOUT (NB).* Vermeld op elk (éénzijdig beschreven) vel je naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas. Verder moet elke oplossing op een nieuw vel beginnen, want we corrigeren ze afzonderlijk. We bekijken alleen goed leesbare oplossingen die volledig zijn uitgewerkt, met verklarende tekst in goed lopende zinnen. Verdere informatie over de wedstrijd vind je in nummer 2 van deze jaargang op bladzijde 26.

PO 84

Laat a_n het grootste gehele getal zijn dat kleiner is dan $n\sqrt{2}$.
Bewijs dat er in de rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ oneindig veel gehele machten van 2 voorkomen.

PO 85

Elk van de zes hoekpunten van een regelmatig achtvlak met ribbenlengte 1 is het middelpunt van een bol met straal 1. Het lichaam S is de doorsnijding van die zes bollen. (S bestaat dus uit alle punten die tegelijk in alle zes bollen zitten.)
Bepaal de *diameter* van S, d.w.z. bepaal de maximale afstand tussen twee punten van S.



Een regelmatig achtvlak (zie PO 85)

Oplossingen en prijswinnaars van de opgaven PO 72-76

PO 72

Op een bord zitten 16 lampjes gerangschikt in een cirkel. Elk lampje kun je met een schakelaartje aan of uit zetten. Bovendien is er een rode knop waarmee je de toestand van alle lampjes tegelijk kunt beïnvloeden. De nieuwe toestand van elk lampje hangt daarbij uitsluitend af van de toestand van dat lampje en z'n rechterbuurlamp vóór het drukken. Namelijk als L zo'n lampje is, dan geldt:

- waren L en z'n buurman beide aan, of beide uit, dan gaat (of blijft) L aan;
- was één van beide aan, en de ander uit, dan gaat (of blijft) L uit.

Bewijs dat alle lampjes branden als je, uitgaande van een willekeurige begintoestand, 16 keer achter elkaar op de rode knop hebt gedrukt.

Oplossing van *Suzanne Hulscher* (Amstenrade, 6 vwo) (enigszins bewerkt):
Nummer de lampjes 1 t.e.m. 16. Noem de toestand waarin lampje i zich bevindt $p(i)$, en definieer $p(i) = 0$ als het lampje aan is, en $p(i) = 1$ als het uit is.
We rekenen *modulo 2*, dat wil zeggen dat we afspreken dat $0 + 0 = 0$, $1 + 0 = 0 + 1 = 1$ en $1 + 1 = 0$. Dan is na een druk op de knop de nieuwe toestand van lampje i gegeven door $p(i) + p(i + 1)$. Bekijk nu de toestand van het eerste lampje.
Begin: $p(1)$.
Na 1 keer drukken: $p(1) + p(2)$.
Na 2 keer drukken: $p(1) + 2p(2) + p(3)$.
Na 3 keer drukken: $p(1) + 3p(2) + 3p(3) + p(4)$.
.....
Na 15 keer drukken:
$\binom{15}{0}p(1) + \binom{15}{1}p(2) + \ldots + \binom{15}{15}p(16)$.

Na 16 keer drukken (let er op dat het 17e lampje weer het eerste lampje is!):
$2 \cdot p(1) + 16 \cdot p(2) + \ldots + 16 \cdot p(16)$.
Alle coëfficiënten zijn nu *even* getallen, en dat betekent dat de som nul is, wat ook de waarden van de $p(i)$ was. Lampje 1 is dus na 16 keer drukken aan, en hetzelfde geldt natuurlijk ook voor alle andere lampjes.

Er waren 23 inzendingen, waarvan 14 correct. Prijzen: *Joris van der Hoeven* (Pieterburen) en *Ben Moonen* (Hoensbroek, 6 vwo).

PO 73
Voor elk natuurlijk getal n verstaan we onder $S(n)$ de som van de cijfers van n. Bepaal (zonder rekenmachine of computer)
1. alle n waarvoor $n + S(n) = 19841985$,
2. alle n waarvoor $n + S(n) = 19851984$,

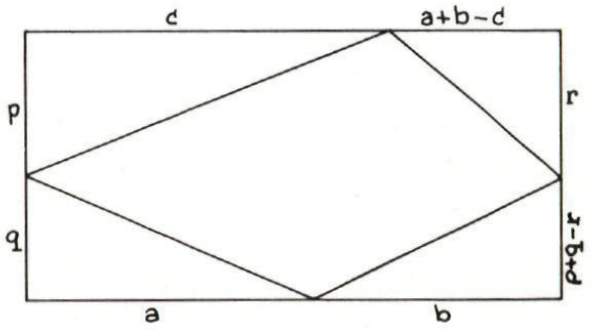
of bewijs dat zulke getallen n niet bestaan.

Oplossing van *Wout Smit*, 5 vwo, Ubbo Emmiuslyceum, Stadskanaal:
1 Het getal n is een getal van 8 cijfers, dus $S(n)$ is maximaal $8 \times 9 = 72$. n begint dus met 198419 . . Noem de laatste twee cijfers a en b, dan is dus $n = 19841900 + 10a + b$. Dan is $S(n) = 32 + a + b$, zodat $19841900 + 10a + b + 32 + a + b = 19841985$, d.w.z. $11a + 2b = 53$.
Hieraan wordt door geen enkel tweetal cijfers a en b voldaan, dus zo'n getal n bestaat niet.
2 Dezelfde redenering geeft nu de vergelijking $11a + 2b = 51$, en hieraan voldoen alleen $a = 3$, $b = 9$. De oplossing is nu dus $n = 19851939$.

Er waren 35 inzendingen, allemaal correct. Prijzen: *Ron Laros* (Spijkenisse) en *Harm Jan Steenhuis* (Muntendam).

PO 74
Binnen een rechthoek R met een oppervlakte 2 ligt een vierhoek V met oppervlakte 1. Op elke zijde van R ligt een hoekpunt van V. Bewijs dat minstens één van de diagonalen van V evenwijdig is aan een zijde van R.

Oplossing van *Ben Moonen*, 6 vwo, St.-Janscollege, Hoensbroek:
Minstens één diagonaal van V is evenwijdig aan een zijde van R betekent $a = c$ of $p = r$.



Opp R = 2, dus
$(a+b)(p+q) = ap + aq + bp + bq = 2$.
Opp V = 1, dus $\frac{1}{2}aq + \frac{1}{2}pc +$
$+ \frac{1}{2}(p+q-r)b + \frac{1}{2}(a+b-c)r = 1$.
Hieruit volgt na enig omwerken
$ap - pc - ar + cr = 0$, d.w.z.
$(a-c)(p-r) = 0$, dus $a = c$ of $p = r$.

Er waren 32 inzendingen, waarvan 21 correct.
In de opgave stond: op elke zijde van R ligt een hoekpunt van V. Sommige inzenders merkten op dat dit strikt genomen ook waar is als er twee hoekpunten van V samenvallen met tegenover elkaar liggende hoekpunten van R. In dat geval hoeft natuurlijk geen van de diagonalen van V evenwijdig te zijn aan een zijde van R.
Prijzen: *Suzanne Hulscher* (Amstenrade) en *Marten van Dijk* (Den Bosch).

PO 75
Voor elk paar gehele getallen x en y groter dan nul is een getal $f(x,y)$ gedefinieerd zo, dat
1. $f(x,x) = x$ voor alle x,
2. $f(x,y) = f(y,x)$ voor alle x en y,
3. $(x + y) \cdot f(x,y) = y \cdot f(x,x + y)$ voor alle x en y.

Bepaal $f(1984, 1024)$.

Oplossing van de correcte opgave door *Dirk Ophoff*, 6 vwo, Gomaruscollege, Groningen:

$$f(1024, 1984) = \frac{1984}{960} f(960, 1024) =$$
$$= \frac{1984}{960} \cdot \frac{1024}{64} \cdot f(64, 960) =$$
$$= \frac{1984}{960}\frac{1024}{64}\frac{960}{896} f(64, 896) = \ldots$$

(telkens 64 aftrekken en getallen tegen elkaar wegstrepen) $\ldots = 496 \cdot f(64, 64) =$
$= 496 \cdot 64 = 31744$.

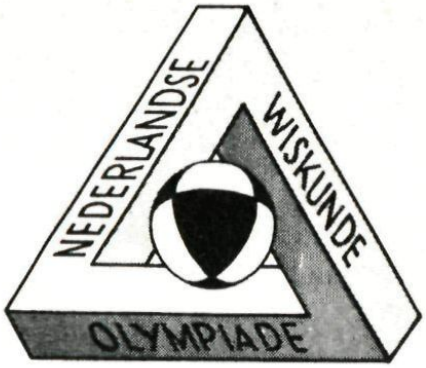
Er waren 29 inzendingen; 6 beperkten zich tot het geven van een voorbeeld waaruit blijkt dat de oorspronkelijke opgave fout was (Pythagoras 25-2 bladzijde 27), 12 stelden een correctie voor en probeerden de gecorrigeerde opgave te bewijzen. 11 vonden een correct bewijs. We hebben de prijzen verloot onder deze laatste 6 + 12 = 18 inzenders. Twee inzenders constateerden dat in de correcte versie geldt dat $f(x,y)$ het *kleinste gemene veelvoud* is van x en y.
Prijzen: *Anne-Marie Hopman* (Den Bosch) en *Hugo van der Hart* (Oegstgeest).

PO 76
In een viervlak $ABCD$ zijn de hoeken ABC, BCD en CDA recht.
Bewijs dat hoek DAB scherp is.

Oplossing van *Marek Veselka*, 5 vwo, Bonaventura College, Leiden:
B en D liggen op de bol met middellijn AC (stelling van Thales). Elk lijnstuk binnen die bol heeft een lengte die hoogstens gelijk is aan de middellijn. Gelijk kan alleen maar als het ook een middellijn is, maar dan moet het de middellijn AC snijden. BD ligt binnen de bol en snijdt AC niet (anders is $ABCD$ geen viervlak), dus is BD kleiner dan AC.
C ligt op de bol met middellijn BD. Zou de hoek bij A niet scherp zijn, dan zou A op of binnen die bol moeten liggen, maar dan zou om dezelfde redenen als boven AC kleiner zijn dan BD, tegenspraak. Dus is hoek A scherp.

Er waren 15 inzendingen, waarvan 13 correct. Prijzen: *Claudine de Baere* (Maldegem (B)) en *Marek Veselka* (Leiden).

Nederlandse Wiskunde Olympiade



Op vrijdag 7 maart 1986 zal weer de Eerste Ronde plaatsvinden van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Dat is een wiskundewedstrijd voor scholieren die nog niet in een eindexamenklas zitten. De Eerste Ronde wordt op school gehouden onder leiding van de wiskundesectie. Je krijgt drie uur de tijd om de antwoorden te vinden op een stuk of twaalf leuke, maar ongebruikelijke wiskundesommen, in moeilijkheidsgraad variërend van vrij eenvoudig tot tamelijk pittig. Half februari wordt het wedstrijdmateriaal naar de wiskundesecties van de scholen gestuurd. Vraag je leraar of je mee mag doen!

De Nederlandse Wiskunde Olympiade wordt georganiseerd door de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde. De secretaris, *dhr. H. N. Schuring, p/a CITO, Postbus 1034, 6801 MG Arnhem,* verschaft desgewenst nadere inlichtingen.
De beste honderd deelnemers aan de Eerste Ronde krijgen een uitnodiging voor de Tweede Ronde, tevens Finale, die op 12 september 1986 in de TH Eindhoven zal plaatsvinden. Die Tweede Ronde is natuurlijk een stuk moeilijker! En uit de prijswinnaars van die Finale wordt het team samengesteld dat Nederland mag vertegenwoordigen bij de 28e Internationale Wiskunde Olympiade die in juli 1987 (dus nog weer een jaar later) georganiseerd zal worden in Cuba.
Dat is voorlopig nog toekomstmuziek. Wij kijken even terug naar 1985, en geven hier de prijswinnaars van de Finale van vorig jaar. Bij gelijke score in de Tweede Ronde gaven de punten van de Eerste Ronde de doorslag. Die staan tussen haakjes vermeld.

Prijswinnaars NWO 1985

Jeroen Nijhof, Borne 32 p (30)
Alain Verberkmoes, Waalre 28 p (32)
Alec Maassen v.d. Brink, Delft 27 p (29)
Lex Warners, Utrecht 22 p (20)
Dirk Jan v.d. Heuvel, Haren 22 p (18)
Floris Merison, Bodegraven 21 p (22)
Michel van Eyck, Spijkenisse 21 p (18)
Lammert Bies, Donkerbroek 20 p (23)
Peter v.d. Heuvel, Bladel 20 p (22)
Hugo Laurman, Spijkenisse 19 p (20)

De wisselprijs voor de school met in de Eerste Ronde het hoogste puntentotaal van de beste vijf deelnemers was voor de *CSG Blaise Pascal te Spijkenisse.* Hieronder vind je de opgaven voor de Tweede Ronde van de NWO 1985. De beschikbare tijd was drie uur, en de maximale score per opgave 10 punten. In het volgende nummer komen de oplossingen.

Opgaven Nederlandse Wiskunde Olympiade, Tweede Ronde 1985

1 Voor zeker reëel getal p bestaat de oplossingsverzameling van de vergelijking
$x^3 + p\,x^2 + 3x - 10 = 0$
uit drie verschillende reële getallen a, b en c, waarbij $c - b = b - a > 0$.
Bereken p, a, b en c.

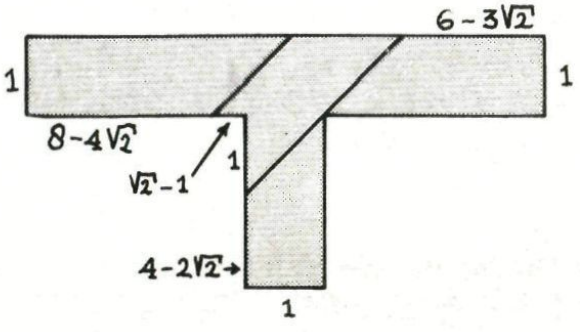
2 Hoeveel kwadraten zijn er onder de 10^{10} getallen
$x_n = 11n + 10^{11}$ $(n = 1, 2, \ldots, 10^{10})$?

3 In een fabriek moeten vierkante tafeltjes van 40 x 40 cm^2 betegeld worden met telkens vier tegels van 20 x 20 cm^2. De tegels zijn voorzien van een asymmetrisch patroon (bijvoorbeeld de letter J), en allemaal hetzelfde. Hoeveel verschillende tafeltjes kan de fabriek produceren?

4 Gegeven is een zeshoek *ABCDEF* zonder inspringende hoeken met de eigenschap dat de diagonalen *AD*, *BE* en *CF* de zeshoek telkens in twee stukken van gelijke oppervlakte verdelen.
Bewijs dat *AD*, *BE* en *CF* door één punt gaan.

Oplossing T-puzzel (Pythagoras 25-1)

Bij de T-puzzel uit nummer 1 van deze jaargang vroegen we om uit te zoeken hoe de maten van de stukjes gekozen waren om de gevraagde oplossingen mogelijk te maken. In het vorige nummer (bladzijde 32) hebben we weliswaar die oplossingen vermeld, maar vergeten die maten aan te geven. In de figuur hiernaast kun je ze alsnog vinden.



Redactioneel

Op de **omslag** zijn *alle* pythagorische driehoeken met een zijde van 120 afgebeeld. In tweeëntwintig gevallen is dit een rechthoekszijde en in slechts één geval de schuine zijde of hypotenusa. We beweren dat dit ze allemaal zijn. Behalve op de omslag hebben we ook in een aantal andere artikelen aandacht besteed aan de *stelling van Pythagoras*, zodat je dus min of meer kunt spreken van een themanummer. In de vorige jaargang heeft een serie artikelen over geheimschrift gestaan. Een deel daarvan plus een groot aantal nieuwe methoden is te vinden in het onlangs verschenen deeltje no. 2096 in de AO-reeks: 'Cryptologie, het maken en ontcijferen van geheimschrift' door *Klaas Lakeman*. De AO-reeks wordt evenals Pythagoras uitgegeven door de Stichting IVIO te Lelystad (voor adres e.d. zie achterkant omslag). Losse nummers zijn verkrijgbaar voor *f* 3,50 (inclusief verzendkosten).

Het volgende nummer
Na het verschijnen van het eerste artikel over geheimschrift (Pythagoras 24-1) zond *Philippe Stroobandt* uit Grimbergen (B) ons de volgende cijfertekst.

LQTCZ MCBDO TBPTQ MAICO GQYST VVMEI HBAMT
ZIWDS PVSZT EPIGP TMCIC STZKI HB

Hoe moet je deze tekst ontcijferen?
Vervang de eerste letter door een letter die 15 plaatsen eerder in het alfabet staat, de tweede door een letter die 8 plaatsen eerder in het alfabet voorkomt, de derde weer door een letter die 15 plaatsen eerder in het afabet voorkomt, de vierde vervolgens weer door een letter die 8 plaatsen eerder in het alfabet staat, enz. Je krijgt dan een slagzin. Tel vervolgens van elk woord daarin de letters, zet die getallen achter elkaar en je weet dan waarschijnlijk waar we in ons volgende nummer extra aandacht aan zullen besteden.

Illustraties: Cerena Ceccherini, Amsterdam (blz. 12).
Tekeningen: Armand Haye, Amsterdam; Guido Mulder (blz. 14 en 15); Subfaculteit der Wiskunde en Informatica van de Vrije Universiteit, Amsterdam (blz. 8).
Foto's: Henk Mulder, Ulvenhout (blz. 14 en 15); Hessel Pot, Woerden (blz. 22); Popke Bakker, Bergen aan Zee (blz. 26).

© 1986 Redactie Pythagoras - ALLE RECHTEN VOORBEHOUDEN, NADRUK OF WEERGAVE, GEHEEL OF GEDEELTELIJK, IN WELKE VORM DAN OOK, ZONDER SCHRIFTELIJKE TOESTEMMING VAN DE REDACTIE VERBODEN.

Pythagoras wiskunde tijdschrift voor jongeren

Een uitgave onder auspiciën van de Stichting Christiaan Huygens en de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Redactie: Jan van de Craats, Klaas Lakeman, Hessel Pot, Hans de Rijk.

Redactiesecretariaat: Klaas Lakeman, Cornelis Krusemanstraat 60^{II}, 1075 NS Amsterdam (NL).

Inhoudsopgave no 3, 25^{e} jaargang

Mijn pythagorashuis / **1**
Jan van de Craats
Denkertje / **2, 20**
Hessel Pot
Van pentomino naar tetromino: nog meer aardige legpuzzels / **3**
Klaas Lakeman
Prijsvraag: voorspoedig 1986 / **6**
Klaas Lakeman
De pythagorasspiraal / **7**
Klaas Lakeman
Een heelal vol inkt / **8**
Bruno Ernst
De jacht op prima priemgetallen / **12**
Mark Fander
Rotatiesommen / **13, 15**
J. G. van de Putte
De straal van de stuwdam / **14**
Henk Mulder
Reis door Koningsbergen / **16**
Martin Rense
Geen tovervierkant, maar een . . . / **20**
Hessel Pot
Pythagorische magie? / **21**
Klaas Lakeman
Kwartslag-vierbalken / **22**
Hessel Pot
Pythagoras Olympiade / **27**
Jan van de Craats
Nederlandse Wiskunde Olympiade / **30**
Jan van de Craats
Oplossing T-puzzel / **31**
Redactioneel / **32**

Pythagoras is een uitgave van

stichting ivio lelystad

voor onderwijs en volksontwikkeling
opgericht in 1936 door
Prof. dr. Ph.A. Kohnstamm

Abonnementsprijzen per jaar

Nederland / Europa*	*f* 19,50
België	Bfrs 390
Overige landen	*f* 29,50
Losse nummers	*f* 5,—
Gecomb. abon. met Archimedes	*f* 35,—

* Europa m.u.v. de Oostblokl.

stichting ivio lelystad, postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL). tel. 03200-26514.

Postgiro Nederland: 287934. Postcheck België: 000-0130850-94
Bankrelatie: NMB. Lelystad rek. crt. nr. 66.27.11.653