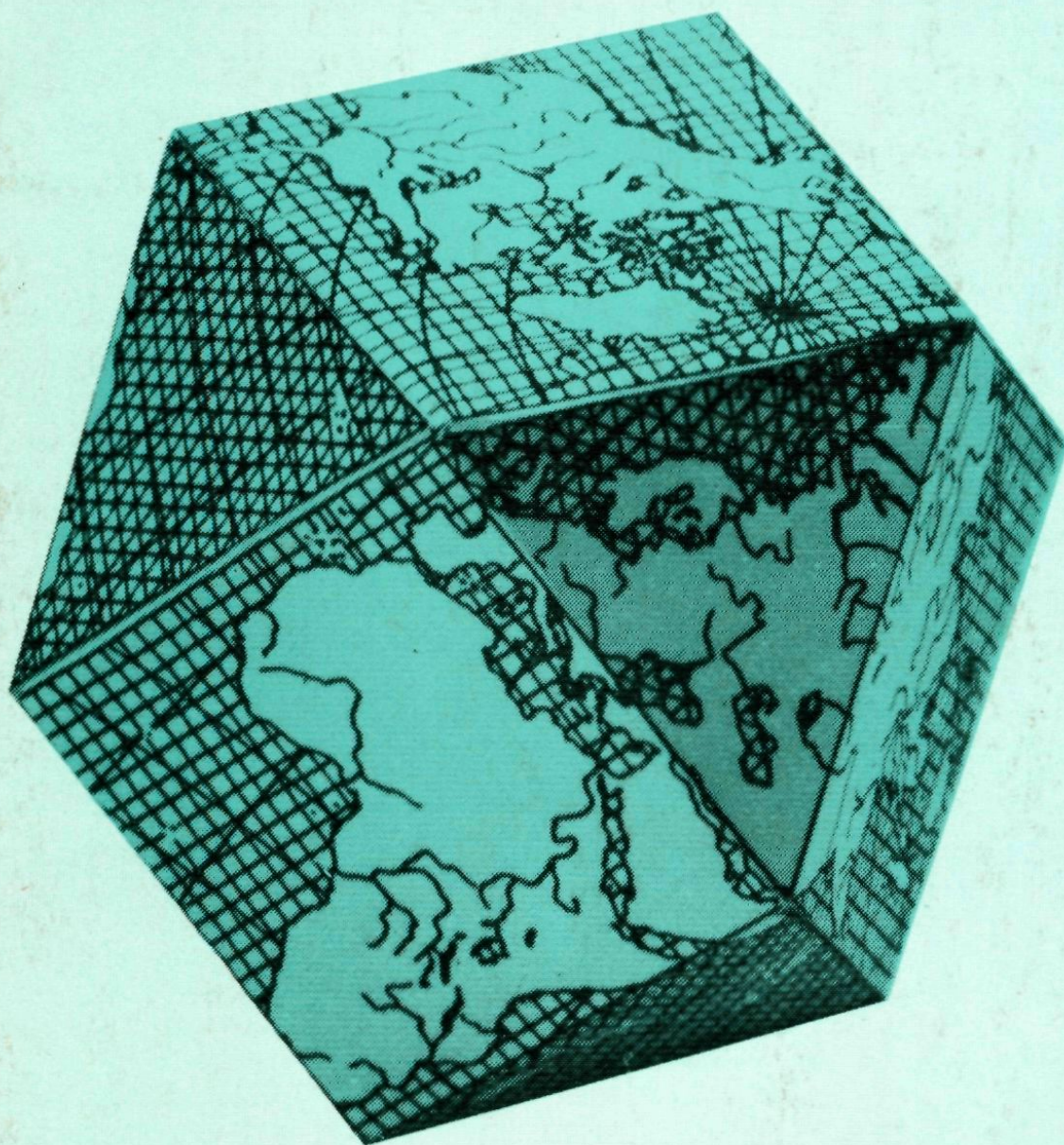




Pythagoras

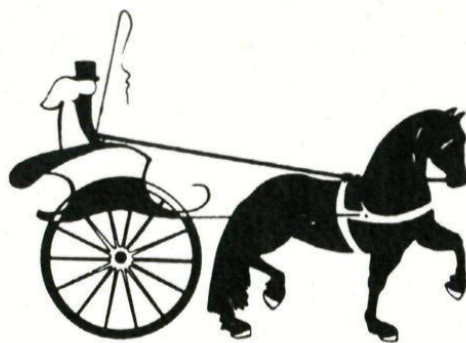


wiskunde tijdschrift voor jongeren

stichting ivio 'lelystad

25e jaargang
nr. 5
mei 1986

Per koets door de bocht



Aan karresporen zijn interessante wiskundige onderzoeken te verrichten.

Je weet vast wel dat, als je met een auto een bocht maakt, het binnenwiel langzamer gaat dan het buitenwiel.

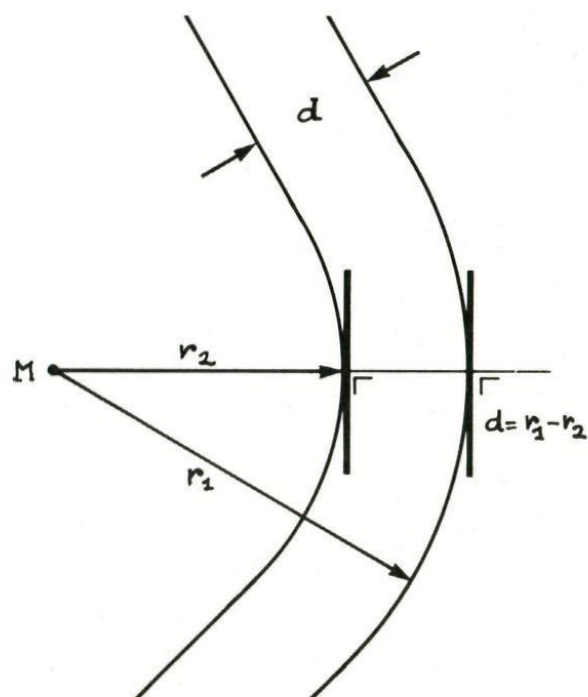
Verbaast het je als ik je vertel dat het binnenwiel soms in de bocht stilstaat, terwijl het voertuig toch vooruitgaat? Sterker nog: ik zag laatst sporen in de sneeuw waaraan je kon zien dat het binnenwiel in de bocht zelfs achteruit was gegaan!

Evenwijdige krommen

Mijn buurman rijdt nogal eens door het bos met een koets op twee wielen. Je ziet zijn vignet bij de kop van dit verhaal. Zo'n stel wielen, door een as verbonden, beschrijft al rijdend een paar evenwijdige lijnen, recht of krom. Als de koets rechtdoor gaat, bestaat het karrespoor uit twee evenwijdige lijnen. Bij het nemen van de bocht gaat dit spoor normaal over in een paar concentrische cirkeldelen (figuur 1).

Wat bedoelen we eigenlijk met evenwijdige cirkels? Spoorrails lopen evenwijdig, vind je niet, ook in de bochten. We moeten teruggaan naar de letterlijke betekenis van het woord evenwijdig: *overall even wijd*. Als de binnenrail van een spoorbaan een straal r_2 heeft en de buitenbaan een straal r_1 , is de afstand tussen beide rails over-

al $d = r_1 - r_2$. Dit afstandstuk staat overal loodrecht op de raaklijns-richtingen bij de betreffende cirkels.



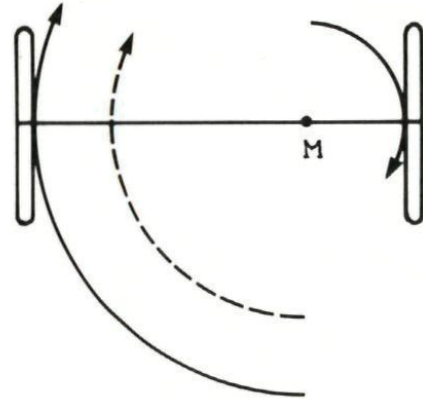
Figuur 1. Tweewieler door de bocht.

Vergroting van de afstand

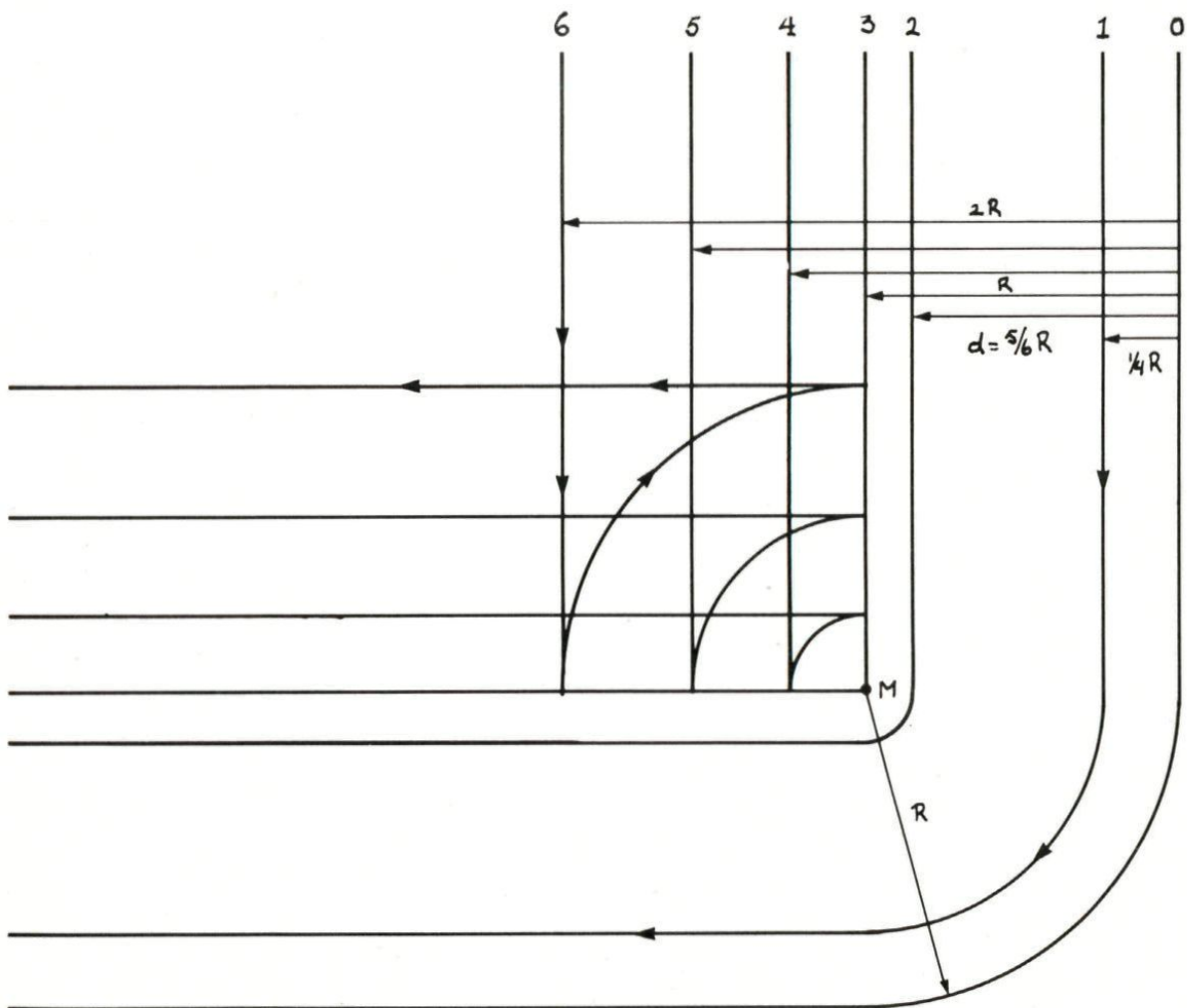
In figuur 2 hebben we het geval getekend dat de wielafstand d groter is dan de straal r_1 voor de kromme die het buitenwiel moet beschrijven. Het binnenwiel beschrijft nog wel een concentrische cirkel, maar dan in tegenovergestelde richting. In het grensgeval waarbij $d = r_1$ bestaat de evenwijdige 'binnenkromme' nog slechts uit één punt. Ga dat zelf maar na. Als de koets nu door de bocht gaat, draait de wagen om het binnenwiel, dat daarbij enige tijd stil staat.

In figuur 3 hebben we een aantal krommen geconstrueerd die evenwijdig zijn met kromme 0. Ze

zijn telkens aan de binnenzijde getekend. Het zal je duidelijk zijn dat er ook evenwijdige krommen aan de andere kant liggen. Maar die vertonen niet de complicaties die je aan de binnenkant aantreft.

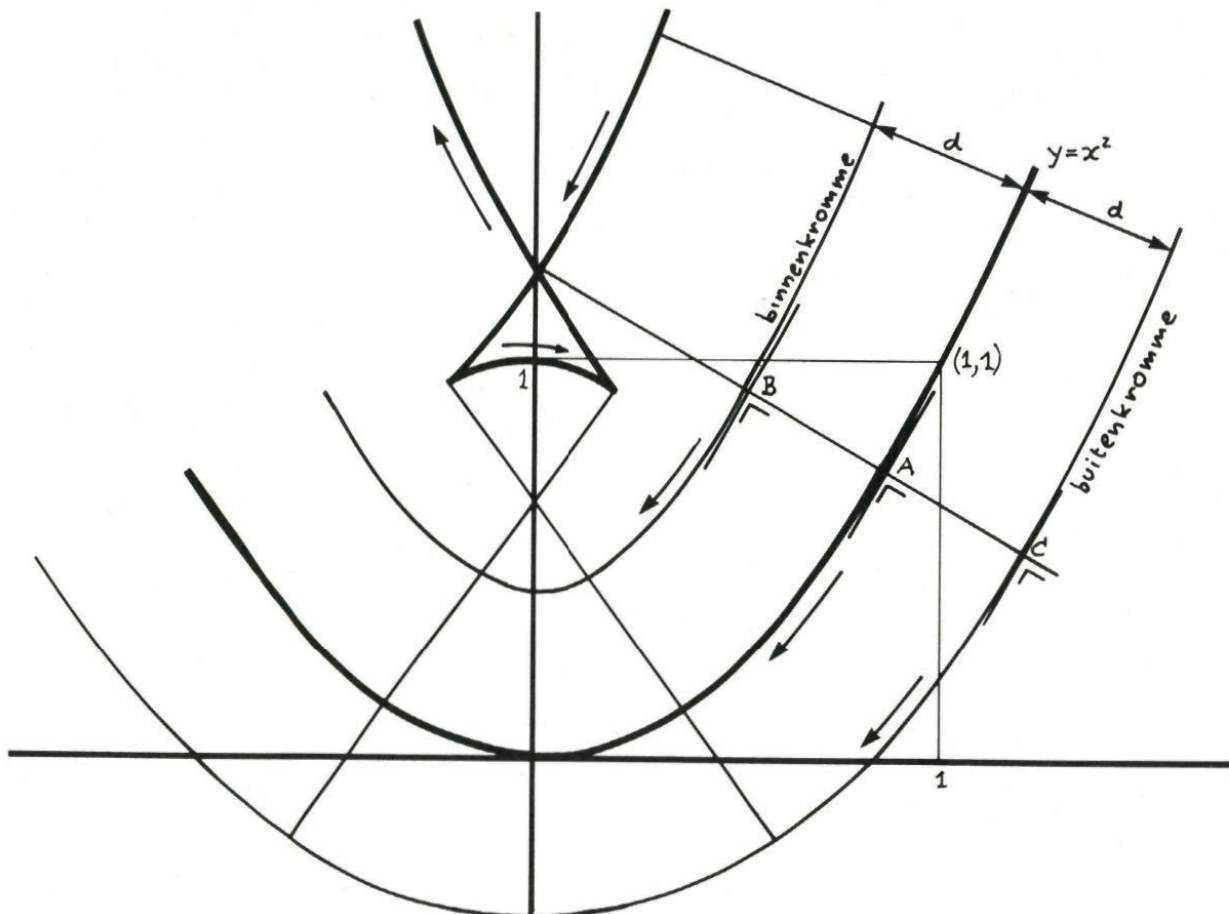


Figuur 2. Binnenwiel gaat achteruit.



Figuur 3. Evenwijdige binnenkromme voor $d < R$, $d = R$ en $d > R$.

Figuur 4. Parabool als basiskromme.

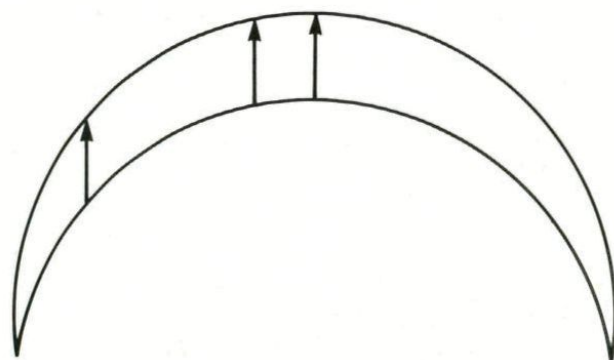


Evenwijdige van een parabool

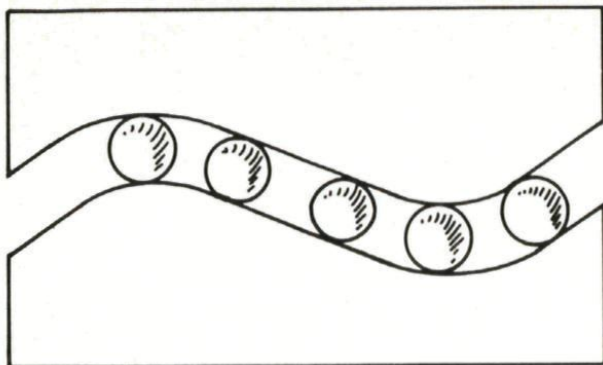
We gaan het onszelf wat moeilijker maken. Hebben andere krommen ook een stel evenwijdigen? We nemen als voorbeeld de parabool $y = x^2$. We volgen ook hier de werkwijze die we bij de cirkel hadden en we vinden er ook dezelfde problemen (figuur 4).

Neem een willekeurig punt A op de parabool en bepaal er de richting van de raaklijn, door middel van differentiëren of zomaar op het oog. Teken vervolgens daar de loodlijn of normaal en pas aan weerszijden gelijke stukken d af. Zo vinden we B en C. Dit kunnen we voor elk ander punt van de parabool herhalen. De verzameling van punten B vormt de ene evenwijdige en de verzameling van punten C de andere.

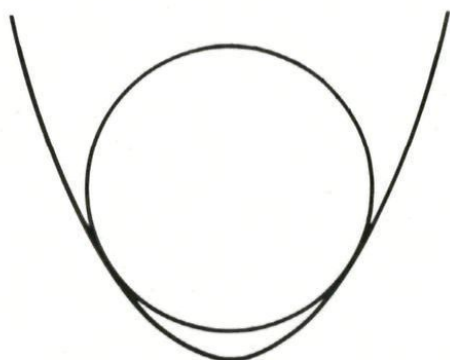
Als we d al te groot kiezen (kies bijvoorbeeld $d = 1$), dan krijgen we weer een evenwijdige met twee omkeerpunten. En het kost dan weer wat moeite om zo'n kromme als evenwijdig te accepteren.



Figuur 5. Translatie van een cirkel geeft geen evenwijdigheid.



Figuur 6. De knikkeroot.



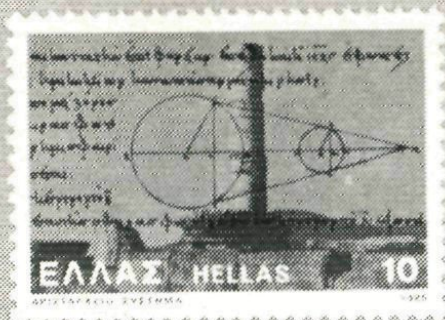
Figuur 7. Knikker te groot.

Evenwijdig door translatie?

Bij een rechte lijn kunnen we een evenwijdige krijgen door translatie (verschuiving). Maar die manier werkt bij krommen niet. Zo zie je dat in figuur 5 bij translatie van een cirkel een snijdende cirkel kan ontstaan. Als je bijvoorbeeld een golvende knikkeroot wilt maken zoals in figuur 6, dan lukt dat niet door met een figuurzaag een kromme in een plank te zagen en dan beide delen een stuk evenwijdig uit elkaar te schuiven. Als dan op een bepaalde plaats een knikker keurig past, dan loopt deze elders misschien weer vast. Er komt nog een extra probleem als de knikkers te groot zijn (figuur 7). In dat geval heeft de evenwijdige binnenkromme omkeerpunten en kun je er voor een knikkeroot weinig mee beginnen.



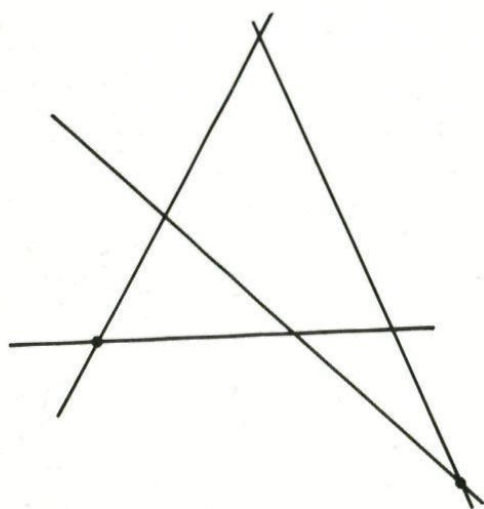
Spoorrails lopen evenwijdig, ook in de bochten.



De middenslijn van vier rechten

Teken vier rechte lijnen zó, dat alle zes de snijpunten op je papier liggen (en ook zo, dat er nergens drie of meer lijnen door één punt gaan). Let je op het al dan niet rechtstreeks verbonden zijn van die zes snijpunten, dan blijkt dat ze te verdelen zijn in drie paren, waarbij tussen de twee punten van zo'n paar geen directe verbindingslijn is getekend. Zoek nu even de drie *middens* op van die puntenparen, en leg je liniaal erlangs: ze liggen mooi op een rechte lijn! (Dit is door de Duitse wiskundige *Gauss* ontdekt in 1810).

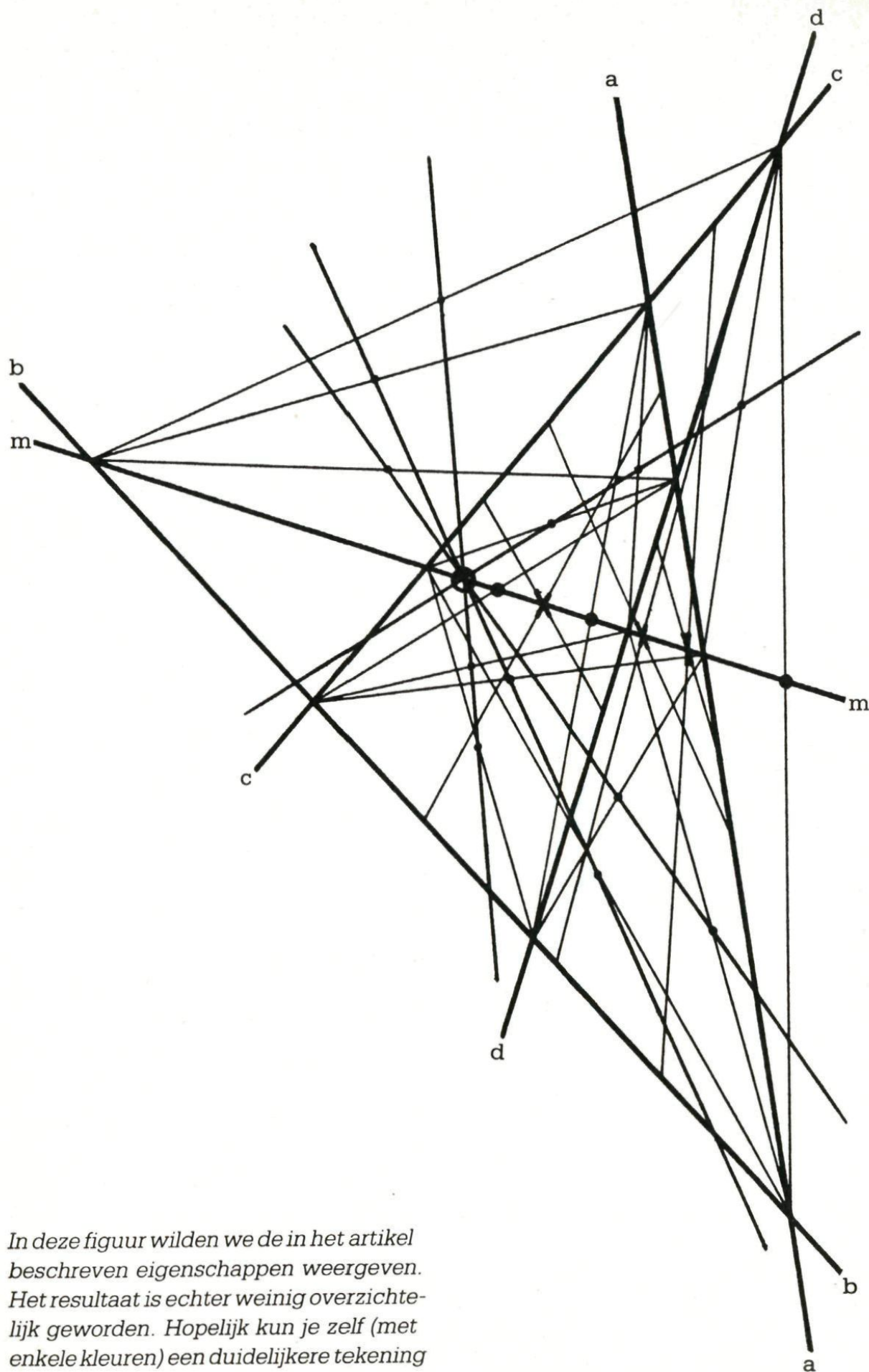
Het gaat ons hier weer niet om een bewijs. Maar alleen om te laten zien wat voor verrassende eigenschappen er ook in eenvoudige figuren (zomaar vier lijnen) besloten kunnen liggen.



Deze figuur is nog niet af. Van één (van de 3) stel onverbonden snijpunten is het midden aangegeven.



Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), een van de grootste wiskundigen van alle tijden.



In deze figuur wilden we de in het artikel beschreven eigenschappen weergeven. Het resultaat is echter weinig overzichtelijk geworden. Hopelijk kun je zelf (met enkele kleuren) een duidelijkere tekening maken.

Wie nog wat velletjes papier heeft, en weet wat de vectorvoorstelling van een lijn is, kan overigens zelf wel een bewijs uitschrijven: vier vectorvoorstellingen, van elk tweetal het snijpunt opschrijven, dan de middens, enz. Het is wel heel wat schrijfwerk. De meetkunde kent echter ook technieken die meer voor dit soort situaties geschikt zijn en sneller resultaat geven. Maar dat zijn dingen die buiten het schoolprogramma vallen.

Het middenspunt van vier rechten

De volgende twee toegiften zijn alleen bestemd voor degenen die het bovenstaande zelf op een flink stuk papier hebben uitgetoetst. Een beetje knoeien in de hier voorgetekende micro-figuur is niks. En bovendien blijf je er ons dan toch maar van verdenken dat we de onderlinge positie van de vier gegeven lijnen heel speciaal gekozen hebben.

Noem de vier uitgangslijnen in je tekening a, b, c en d (de volgorde doet er niet toe) en de daaruit afgeleide middenslijn m . Op die lijn m blijkt nog een bijzonder punt te liggen, de naam die we daaraan geven zag je al boven dit paragraafje staan. Je vindt dat punt door nog vier keer de constructie uit te voeren. En wel op:

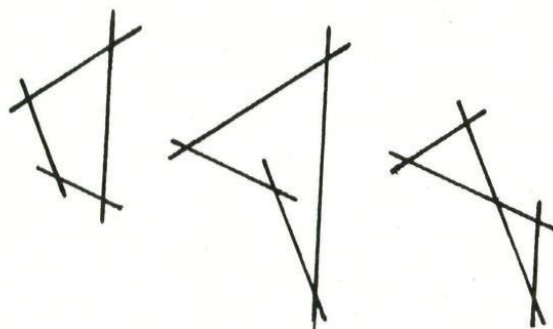
het lijnenkwartet (a, b, c, m)
 het lijnenkwartet (a, b, d, m)
 het lijnenkwartet (a, c, d, m) en
 het lijnenkwartet (b, c, d, m) .

Bij ons gaat die hele zaak door hetzelfde punt op m .

De middensmiddens

We begonnen met het zoeken van de middens tussen *niet* verbonden snijpunten van vier gegeven lijnen. Nu kijken we nog even naar de middens tussen al wél door de gegeven lijnen verbonden snijpunten.

Door vier snijdende lijnen worden steeds drie vierhoeken gevormd (waarvan altijd één met een inspringende hoek, en één met kruislingse zijden).



Verbind in zo'n vierhoek de middens van óverstaande zijden, dan blijken *de middens van die verbindingen* ook weer allemaal te liggen op de al eerder gevonden middenslijn m , de rechte van Gauss.

Het laagste maximum

Zoek zeven niet-negatieve getallen a, b, c, d, e, f en g zó dat:

- $a + b + c + d + e + f + g = 1$ en
- het maximum van de vijf getallen $(a + b + c)$, $(b + c + d)$, $(c + d + e)$, $(d + e + f)$ en $(e + f + g)$ is zo laag mogelijk.

De oplossingen staan op bladzijde 13.

Voorspoedig 1986 – uitslag

De prijsvraag uit nummer 3 van dit jaar is geweldig aangeslagen. Dat merken we uit de vele tientallen inzendingen, vaak voorzien van enthousiaste commentaren. Zeer velen zullen er heel wat uurtjes aan opgeofferd hebben! We bespreken hier de oplossingen, maar eerst komen we met de prijswinnaars.

Van de honderd gevraagde uitkomsten bleken er vier (68, 69, 73 en 99) niet precies volgens de spelregels te maken. Het maximale aantal van 96 goede antwoorden werd door *dertien* inzenders gehaald. Net daaronder waren er *elf* met 95, en *acht* met 94 goede antwoorden. Loten tussen de beste dertien leverde als prijswinnaars: *Guido Coers* uit Antwerpen, en *Robert Lukassen* uit Veldhoven. De boeke- (of waarde-)bonnen gaan naar dit tweetal. Daarnaast willen we hier ook onze bewondering uiten voor alle niet bij name genoemde noeste zoekers!

De lijst

De meeste uitkomsten zijn op meerdere manieren te maken. De in de lijst gegeven vormen zijn niet zo maar willekeurig gekozen, we namen op een speciale manier de 'eenvoudigste'. Om te kunnen zeggen hóé, moeten we de opgave wat uiteenrafelen.

De gevraagde ontbindingen van de uitkomstgetallen zijn op te vatten als *samenstellingen van functies*. Welke functies?

Volgens de aangegeven regels zijn er twee soorten in het spel:

A Functies die bij twee originele getallen, een beeld-uitkomst aangeven. Het zijn de volgende zeven:

$$\begin{array}{ll} x, y \rightarrow x + y & x, y \rightarrow x - y \\ x, y \rightarrow x \times y & x, y \rightarrow x : y \\ x, y \rightarrow x^y & x, y \rightarrow \sqrt[x]{y} \\ x, y \rightarrow x^y & \text{(het combineren} \\ & \text{van twee cijfers tot} \\ & \text{een decimaal getal).} \end{array}$$

B Functies die al bij een origineel getal de uitkomst aangeven:

$$\begin{array}{ll} x \rightarrow \sqrt{x} & x \rightarrow -x \\ x \rightarrow x! (= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot x) \end{array}$$

Omdat elke oplossing van vier originele cijfers (1, 9, 8, 6) één uitkomst maakt, weten we dat in elke oplossing juist *drie* functies van de soort A moeten voorkomen. Daarentegen kunnen de B-functies onbeperkt vaak voorkomen.

We noemen nu een oplossing het 'eenvoudigst' wanneer er zo min mogelijk functies van het soort B in voorkomen. Of ook (omdat er toch altijd drie A-functies in zitten): *als er zo weinig mogelijk van de toegelaten functies worden gebruikt*.

We hebben onze aanvankelijke lijst na het binnenkomen van de oplossingen op tal van punten kunnen verbeteren. Het is dus een combinatie geworden van het werk van velen.

0 = (1 - 9 + 8) x 6	40 = 1 - 9 + 8x6	80 = -1 + 9 ⁸⁻⁶
1 = 1 ⁹⁸⁶	41 = -1 + $\sqrt{9} \times (8+6)$	81 = 1x9 ⁸⁻⁶
2 = 1 ⁹ x8 - 6	42 = (-1 ⁹ +8)x6	82 = 1 + 9 ⁸⁻⁶
3 = 1 ⁹ +8 - 6	43 = 1 + $\sqrt{9} \times (8+6)$	83 = -1x $\sqrt{9}$ + 86
4 = -1 - 9 + 8 + 6	44 = -1 - $\sqrt{9}$ + 8x6	84 = 1 - $\sqrt{9}$ + 86
5 = 19 - 8 - 6	45 = -1x $\sqrt{9}$ + 8x6	85 = -1 ⁹ + 86
6 = 1 - 9 + 8 + 6	46 = 1 - $\sqrt{9}$ + 8x6	86 = 1 ⁹ x86
7 = 1 ⁹⁸ +6	47 = -1 ⁹ + 8x6	87 = 1 ⁹ + 86
8 = 1 + 9 - 8 + 6	48 = 1 ⁹ x8x6	88 = -1 + $\sqrt{9}$ + 86
9 = 1x $\sqrt{9}$ ⁸⁻⁶	49 = 1 ⁹ + 8x6	89 = 1x $\sqrt{9}$ + 86
10 = -1 + 9 + 8 - 6	50 = -1 + $\sqrt{9}$ + 8x6	90 = 1 + $\sqrt{9}$ + 86
11 = 1x9 + 8 - 6	51 = 1x $\sqrt{9}$ + 8x6	91 = -1 + 98 - 6
12 = 1 + 9 + 8 - 6	52 = 1 + $\sqrt{9}$ + 8x6	92 = 1x98 - 6
13 = 1 + 9x8:6	53 = -1 + 9!:8!x6	93 = 1 + 98 - 6
14 = 1 ⁹ x8 + 6	54 = (1 ⁹ +8)x6	94 = -1 + 9 + 86
15 = 1 ⁹ + 8 + 6	55 = 1 + 9:8!x6	95 = 1x9 + 86
16 = (-1+9) ^{8:6}	56 = -1 + 9 + 8x6	96 = 1 + 9 + 86
17 = 19 - 8 + 6	57 = 1x9 + 8x6	97 = 1 + ($\sqrt{9}$)!! : 8 + 6
18 = 1x9x(8-6)	58 = 1 + 9 + 8x6	98 = (1+($\sqrt{9}$)!) x (8+6)
19 = 1 + 9x(8-6)	59 = 1x $\sqrt{9}$ + 8!:6!	99 =
20 = (1+9)x(8-6)	60 = (-1+ $\sqrt{9}$ +8)x6	100 = (1+9) ⁸⁻⁶
21 = 19 + 8 - 6	61 = 1 + $\sqrt{((- \sqrt{9}+8) \times 6)}$	101 = -1 + (9+8)x6
22 = -1 + 9 + 8 + 6	62 = (1 + ($\sqrt{9}$)!)x8 + 6	102 = 1x(9+8)x6
23 = 1x9 + 8 + 6	63 = 1x9!:8:6!	103 = 1 + (9+8)x6
24 = 1 + 9 + 8 + 6	64 = (1+9-8) ⁶	104 = 1x98 + 6
25 = 1 + ($\sqrt{9}$ x8:6)!	65 = -1 + 9x8 - 6	105 = 19 + 86
26 = (1+ $\sqrt{9}$)x8 - 6	66 = 1x9x8 - 6	106 = $\sqrt{\sqrt{(1+9)^8}} + 6$
27 = $\sqrt{(1^9 + 8 + 6)}$	67 = 1 + 9x8 - 6	107 =
28 = (-1+ $\sqrt{9}$)x(8+6)	68 =	108 = (1+9+8)x6
29 = -19 + 8x6	69 =	109 =
30 = 1x $\sqrt{9}$ x8 + 6	70 = (-1+9)x8 + 6	110 = (1+ $\sqrt{9}$)! + 86
31 = 1 + $\sqrt{9}$ x8 + 6	71 = $\sqrt{(1+(9-8+6)!)}$	111 =
32 = (1+ $\sqrt{9}$)!x8:6	72 = (1 + $\sqrt{9}$ +8)x6	112 = (-1+9)x(8+6)
33 = 19 + 8 + 6	73 =	113 = -1 + (- $\sqrt{9}$ +8)! - 6
34 = (-1 + ($\sqrt{9}$)!)x8 - 6	74 = (1+9)x8 - 6	114 = 1x(- $\sqrt{9}$ +8)! - 6
35 = -1 + (($\sqrt{9}$)!) ⁸⁻⁶	75 = 19 + 8!:6!	115 = 1 + (- $\sqrt{9}$ +8)! - 6
36 = (1- $\sqrt{9}$ +8)x6	76 = -1 - 9 + 86	116 =
37 = 1 + (($\sqrt{9}$)!) ⁸⁻⁶	77 = -1 + 9x8 + 6	117 =
38 = 19x(8-6)	78 = 1x9x8 + 6	118 = (-1 + ($\sqrt{9}$)!)! - 8 + 6
39 = -1x9 + 8x6	79 = 1 + 9x8 + 6	119 = -1 + ($\sqrt{9}$ +8-6)!

Het echt helemaal systematisch afzoeken van alle mogelijkheden lijkt ons onuitvoerbaar. We kunnen dus ook niet bewijzen dat er echt geen mogelijkheden zijn voor de overgebleven 'gaten'. Voor aanvullingen en verdere vereenvoudigingen blijven we ons aanbevolen houden. Uit de lijst blijkt dat in 42 van de 100 gevraagde gevallen geen verdere vereenvoudiging mogelijk is: de gegeven oplossingen bevatten in die gevallen geen enkele B-functie.

De gaten toch gevuld?

Over de toelaatbaarheid van de volgende vondsten zal meer of minder twijfel kunnen bestaan, we telden ze niet mee bij de 'gewone' goede oplossingen. Sommige vallen buiten de schoolwiskunde.

$$73 = 1 \times 9 \times 8 + \sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{\sqrt{6}}}}}$$

$$99 = 1 \times 98 + \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{\sqrt{6}}}}}}$$

Verschillende inzenders gaven dergelijke benaderingen. Eén schreef: 'Mijn rekenmachientje geeft na dertig wortels precies 1 voor de wortelterm'.

$$73 = 1 + 9 \times 8 + \sqrt{-6}$$

$$99 = 1 + 98 + \sqrt{-6}$$

De wortel uit een negatief getal bestaat tóch niet.

$$73 = 1 + 9 \times 8 + 6'$$

$$99 = 1 + 98 + 6'$$

De afgeleide van een constante is nul (het accent duidt op differentiëren).

$$73 = 1 + 9 \times 8!! : 6!!$$

$$99 = \sqrt{(1 + (\sqrt{9})! \times 8)!!} - 6$$

In bepaalde onderdelen van de wiskunde komen formules voor die mooi kort kunnen worden opgeschreven met de *dubbelfactiteit-functie*:

$$n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n \quad (n \text{ oneven})$$

$$n!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n \quad (n \text{ even})$$

Deze notatie is niet algemeen gebruikelijk, waarschijnlijk vanwege de kans op verwarring met: $(n!)!$

$$99 = 1 \times 9 + \frac{6!}{8}$$

Helaas. . . de regels schreven ':' als teken voor.

$$68 = [-1 + \dots + (\sqrt{9})!] + 8 \times 6$$

$$69 = (1-9) + \dots + (8+6)$$

$$99 = (1+\sqrt{9}) + \dots + (8+6)$$

Driedubbel fantastisch!!! De termen van de optelling groeien natuurlijk steeds met 1 aan. Deze list werd gevonden door de prijswinnaar Guido Coers.

Moeilijke gevallen

Verreweg de moeilijkste van de gevraagde honderd splitsingen bleek nummer 71, de oplossing uit de lijst is echt een toevalstreffer!

Daarna volgden in moeilijkheid de nummers 97, 27 en 32. Er volgen hier nog wat varianten voor deze probleem-gevallen:

$$71 = \sqrt{(1 + ((\sqrt{9})!)! \times 8 - 6!)}$$

$$71 = \sqrt{(1 - ((\sqrt{9})!)! + 8 \times 6!)}$$

$$27 = \sqrt{(1 + \sqrt[9]{8})^6}$$

$$27 = \sqrt{(1 - (\sqrt{9})! + 8)^6}$$

$$27 = \sqrt{(1 \times 9! : 8! + 6!)}$$

$$27 = \sqrt{\sqrt{(1 \times 9! : 8!)^6}}$$

$$27 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{(1 \times 9)^{8 \times 6}}}}}$$

$$32 = \sqrt{((-1 + \sqrt{9}) \times \sqrt{8^6})}$$

$$32 = -(1 + \sqrt{9})! + 8! : 6!$$

Verder nog wat elegante en verrassende oplossingen:

$$5 = 1 + \sqrt[9]{8^6}$$

$$25 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{19^8 + 6}}}$$

$$45 = \sqrt{\sqrt{(1 + \sqrt{9})^{-8} \times 6!}}$$

$$29 = \sqrt{(1 + (-\sqrt{9} + 8)! + 6!)}$$

$$33 = \sqrt{(1 + ((\sqrt{9})!)! + 8) + 6}$$

$$82 = \sqrt{(1 + \sqrt{9} + 8! : 6)}$$

$$89 = \sqrt{(1 + (\sqrt{9} + 8) \times 6!)}$$

$$199 = \sqrt{(1^9 + 8! - 6!)}$$

$$107 = (1 + (\sqrt{9})!)!! + 8 - 6$$

$$25 = 1 - [(-9) + (-8) + \dots + 6]$$

$$188 = (-1) + (\sqrt{9})! + \dots + (8 \times 6)$$

Reductie van de spelregels

Aan het slot van al het gepuzzel kijken we nog even terug naar de gekozen regels. Kan misschien één van de toegelaten bewerkingen geheel vermeden worden? In ieder geval geldt dat voor de *afrekking* (want elke afrekking kan vervangen door de optelling van het tegengestelde).

Voor de andere bewerkingen haalden we uit de inzendingen de volgende resultaten met betrekking tot 'gewone' splitsingen van de getallen tot honderd:

- Als *delen* verboden is, komt er alleen een extra gat bij 97.
- Als alleen *machtsverheffen* verboden is, ontstaan er gaten bij 87 en 100.
- Als alleen *combineren van cijfers tot decimale getallen* verboden is, ontstaan er gaten bij 91, 92 en 93.

Twee inzenders hebben ook alvast maar de opgave voor volgend jaar (1-9-8-7) beantwoord!

Twee-honderd-zeven-tien-duizendste

De gewone dagelijkse huis-tuin-en-keuken-taal is niet altijd even geschikt als het gaat om het aanduiden van wat grotere, samengestelde getallen. Dit blijkt bijvoorbeeld als je de betekenis van het bovenstaande titelwoord probeert te noteren met behulp van de gewone getsymbolen. Systematisch zoeken geeft maar liefst *elf* verschillende betekenissen:

$$\frac{217}{1000} \text{ of } \dots \text{ of } \frac{2}{117\ 000} \text{ of } \dots \text{ of } 2\frac{107}{10\ 000} \text{ of } \dots \text{ of } 207\frac{10}{1000}$$

of het rangtelwoord: **217 000ste**.

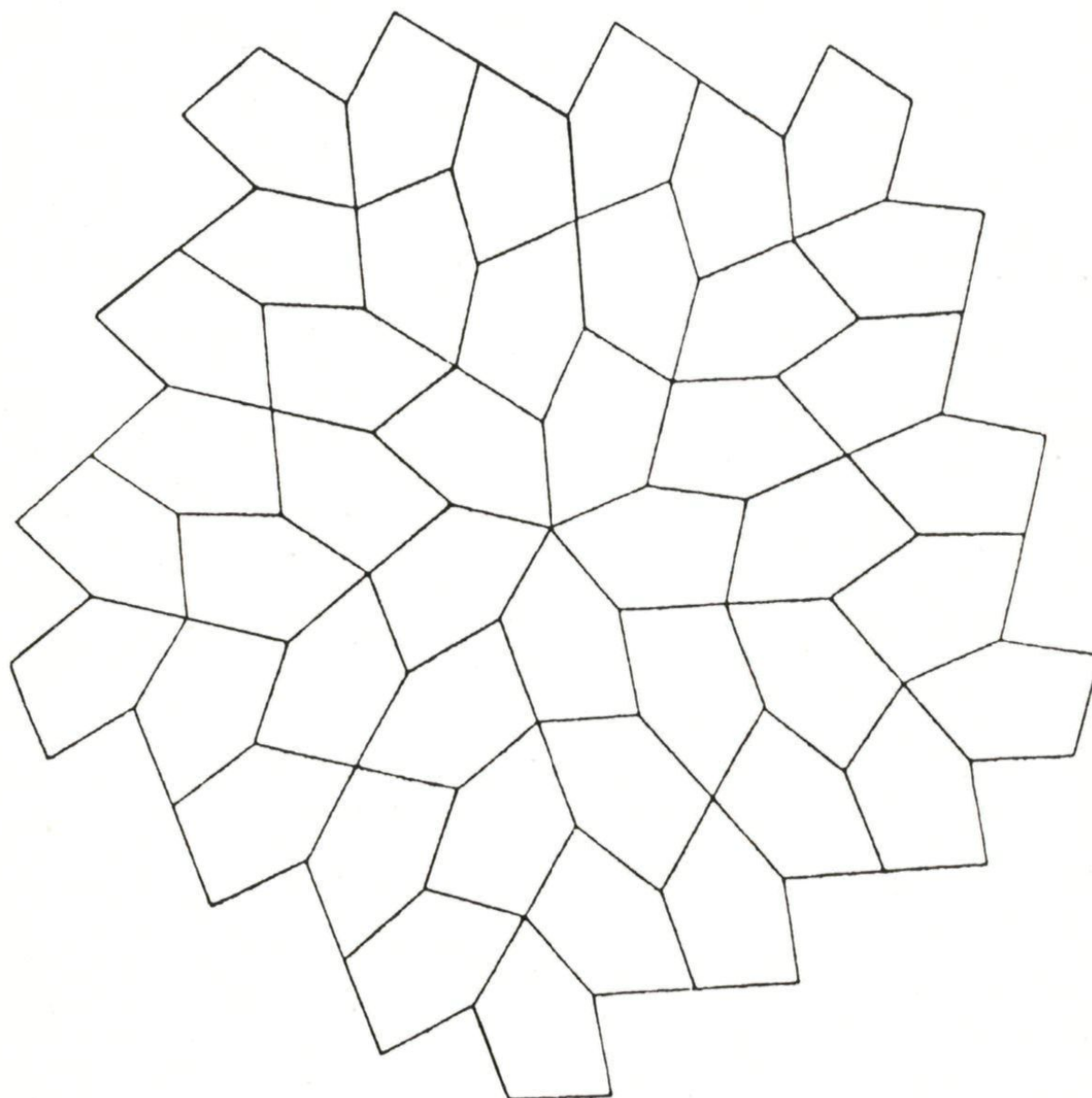
(De zes weggelaten breuken zoek je zelf maar op.)

Er bestaan wel regels voor het al dan niet aaneenschrijven en voor koppeltaken-gebruik bij het in woorden uitschrijven van getalnamen. Maar zó zinvol zijn die regels niet. Ze zorgen namelijk in niet alle gevallen voor onderscheid.

Een vijfhoeksvulling

De figuur hiernaast toont een verdeling van het vlak in congruente vijfhoeken. (Congruent wil zeggen dat de stukjes allemaal precies op elkaar passen, zo nodig na omkering.)

Als je even naar de figuur kijkt komen al snel een aantal vragen omhoog.



Hirschhorn's tegelpatroon (ontleend aan ons Australische zusterblad Parabola). Met een paar kleurpotloden zijn heel wat verborgen regelmatigheden aan het licht te brengen. Het is dan wel handig om eerst een paar fotokopieën te maken (of de figuur overtrekken). Je kunt dan ook een paar tegeltjes uitknippen en proberen of deze structuur nog verder uit te breiden is.

Zijn alle stukjes rechtstreeks-congruent?

Of zijn er ook bij die op hun kop liggen (*spiegel*-congruent zijn) vergeleken bij de vijf stukjes van de ster in het midden?

Je merkt al gauw dat het laatste het geval is.

Zijn de vijf zijden van de stukjes even lang?

Vrijwel nergens liggen twee stukjes met 'dezelfde' zijde tegen elkaar. Uit het aanpassen van verschillende zijden volgt natuurlijk lengte-gelijkheid. Het is dus zoeken naar een keten van gelijkheden waarin alle vijf de zijden zijn opgenomen.

Hoe gaat het patroon verder?

- Kan de betegeling verder voortgezet worden?
- Onbeperkt ver?
- Op slechts één manier?
- Komt de vijf-ster uit het midden verderop nog vaker voor?

Hoe groot zijn de hoeken?

In elk hoekpunt is de som van de samenkomende hoeken 360° . Geeft dat voldoende vergelijkingen om er de grootte van alle vijf de hoeken eenduidig uit op te lossen? Of blijft er nog variatie in de hoeken mogelijk?

We denken de antwoorden op al deze vragen wel te kennen.

Volgens ons volgt uit het gegeven patroon dat in ieder geval vier van de vijf zijden van elke tegel even lang zijn. En verder dat de grootte van twee van de hoeken van de basistegel vastligt.

Van de vier afmetingen (3 hoeken en 1 zijde) die nu nog niet bekend zijn, is er nog juist één vrij te kiezen. Waarna de rest vastligt. Kiezen we de lengte van de vijfde zijde van de tegel gelijk aan de andere vier (wat een voor de hand liggende keuze is) dan is voor de hoekgrootten te vinden: 72° , $149,8^\circ$, $82,3^\circ$, 108° , $127,9^\circ$ (rondgaande). Op de vragen onder het kopje 'Hoe gaat het patroon verder' hebben wij als antwoorden achtereenvolgens: ja-ja-ja-nee.

De redeneringen die tot deze resultaten leiden, lijken ons voor de meeste lezers minder interessant. En misschien zijn ze wel fout. Als iemand andere antwoorden heeft, horen we dat wel.

Nog een slotvraag

We zeiden zojuist dat de lengte van één zijde nog vrij te kiezen was. Maar betekent dat ook dat die zijde de lengte *nul* mag hebben, en er dus een betegeling door congruente vierhoeken resulteert? Of is er voor die zijde een minimale lengte groter dan nul? En ook een maximale lengte?

Het laagste maximum: oplossing

$$(a, b, c, d, e, f, g) = (1/3, 0, 0, 1/3, 0, 0, 1/3)$$

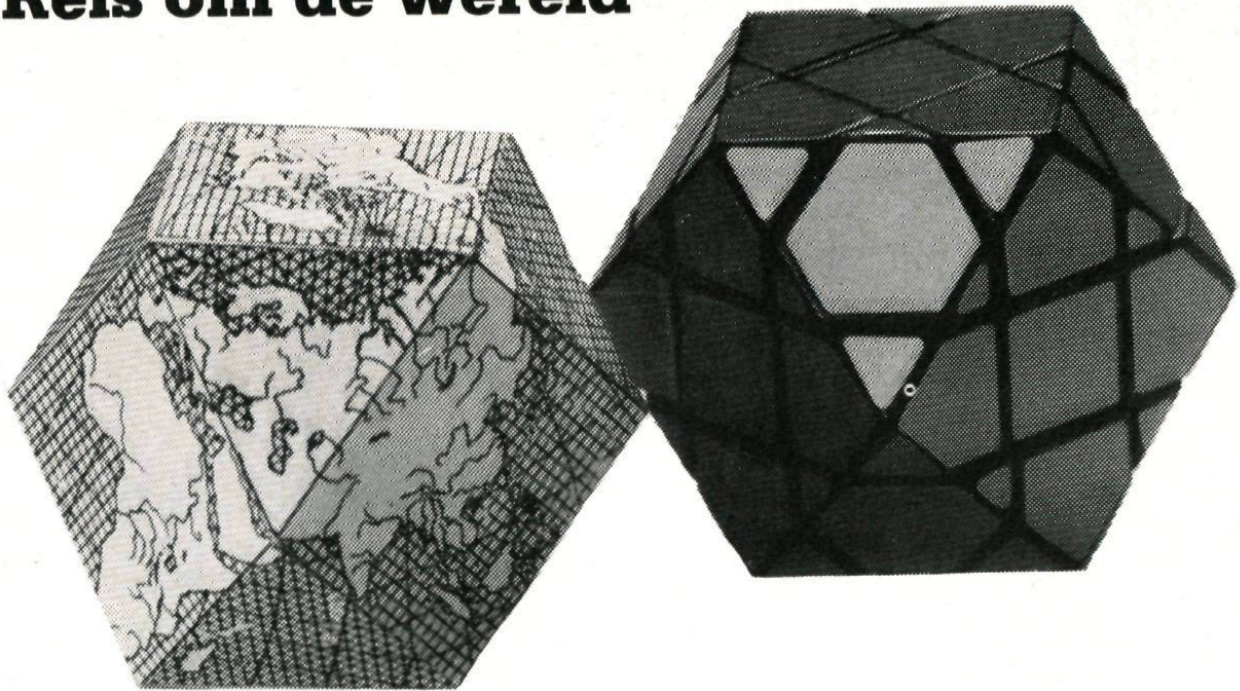
Het maximum van opvolgende drietallen is hier $1/3$.

Als $a < 1/3$ dan is $(b + c + d) > 1/3$ of $(e + f + g) > 1/3$;

als $a > 1/3$ dan is $(a + b + c) > 1/3$.

Dus een minimaal maximum vereist $a = 1/3$, en evenzo $d = g = 1/3$.

Reis om de wereld



Landkaarten waarop een tamelijk groot deel van de aarde in kaart is gebracht, vertonen soms behoorlijke afwijkingen. Landen aan de rand van de kaart worden meestal naar verhouding veel groter afgebeeld dan die in het midden. Kijk bijvoorbeeld maar eens naar figuur 1. De daar weergegeven wereldkaart is ontstaan door alle punten op het oppervlak van de aardbol als het ware vanuit het middelpunt op de mantel van een cilinder te projecteren (*mercatorprojectie*). Naast deze methode zijn tal van andere projecties bedacht. Doch alle leiden tot kaarten waarbij de vervorming vanuit het midden naar de randen steeds toeneemt.

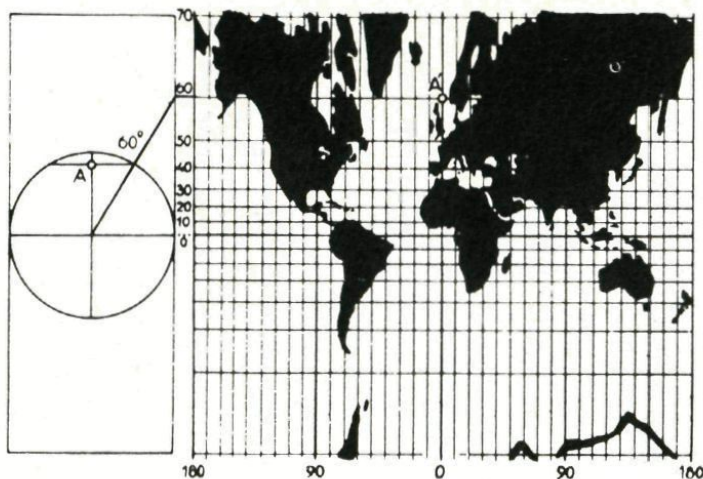
In 1943 publiceerde de Amerikaanse architect en uitvinder *Richard Buckminster Fuller* (1895-1983) zijn *dymaxion map*. Dat was een wereldkaart met overal ongeveer dezelfde, zij het geringe vervormingen. De kaart kwam tot stand volgens een methode die tot dan toe nog niet eerder door kaartenmakers werd gebruikt. Reden voor Buckminster Fuller om daarop een patent aan te vragen, wat hem in 1946 werd verleend. De gebruikte techniek staat sindsdien dan ook te boek als de '*dymaxion projection*'.

In dit artikel zullen we nagaan hoe de *dymaxion map* tot stand kwam. Daarna zullen we op enkele bijzonderheden van de kaart nader ingaan.

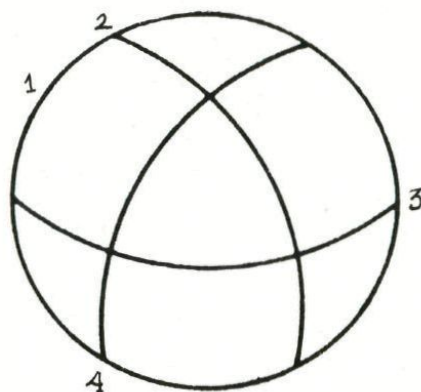
Geen projectie

Over de wereldbol trok Buckminster Fuller vier *grootcirkels*. Dat zijn cirkels waarvan het middelpunt samenvalt met dat van de bol. Deze cirkels snijden elkaar op twaalf plaatsen. Ze verdelen

elkaar daarbij in zes gelijke stukken (bogen van 60 graden). Het boloppervlak is daardoor opgedeeld in acht onderling gelijke boldriehoeken en zes onderling gelijke bolvierhoeken (figuur 2).



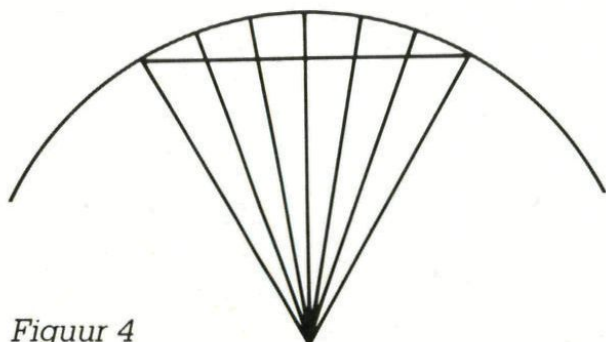
Figuur 1. Mercatorprojectie.



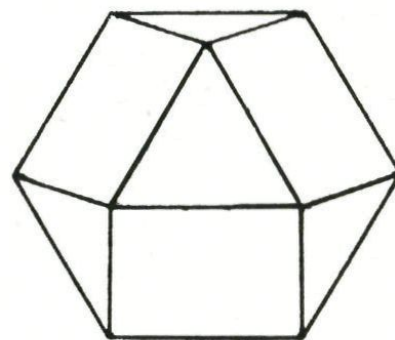
Figuur 2

De snijpunten van die grootcirkels vormen echter ook de hoekpunten van een half-regelmatig veelvlak: een afgeknotte kubus (figuur 3), door Buckminster Fuller 'vector equilibrium' genoemd. Overeenkomstig het patroon op de bol bestaat dit veelvlak uit veertien (platte) zijvlakken, acht even grote gelijkzijdige driehoeken en zes gelijke vierkanten.

Op die veertien zijvlakken van de afgeknotte kubus worden de bijbehorende gedeelten van de bol afgebeeld. Dat zou natuurlijk kunnen door die veertien boldelen één voor één op een zijvlak van de afgeknotte kubus naar binnen toe te projecteren. Maar dan zou de vervorming lang niet overal ongeveer even groot worden, zoals figuur 4 al voor één boogdeel laat zien.



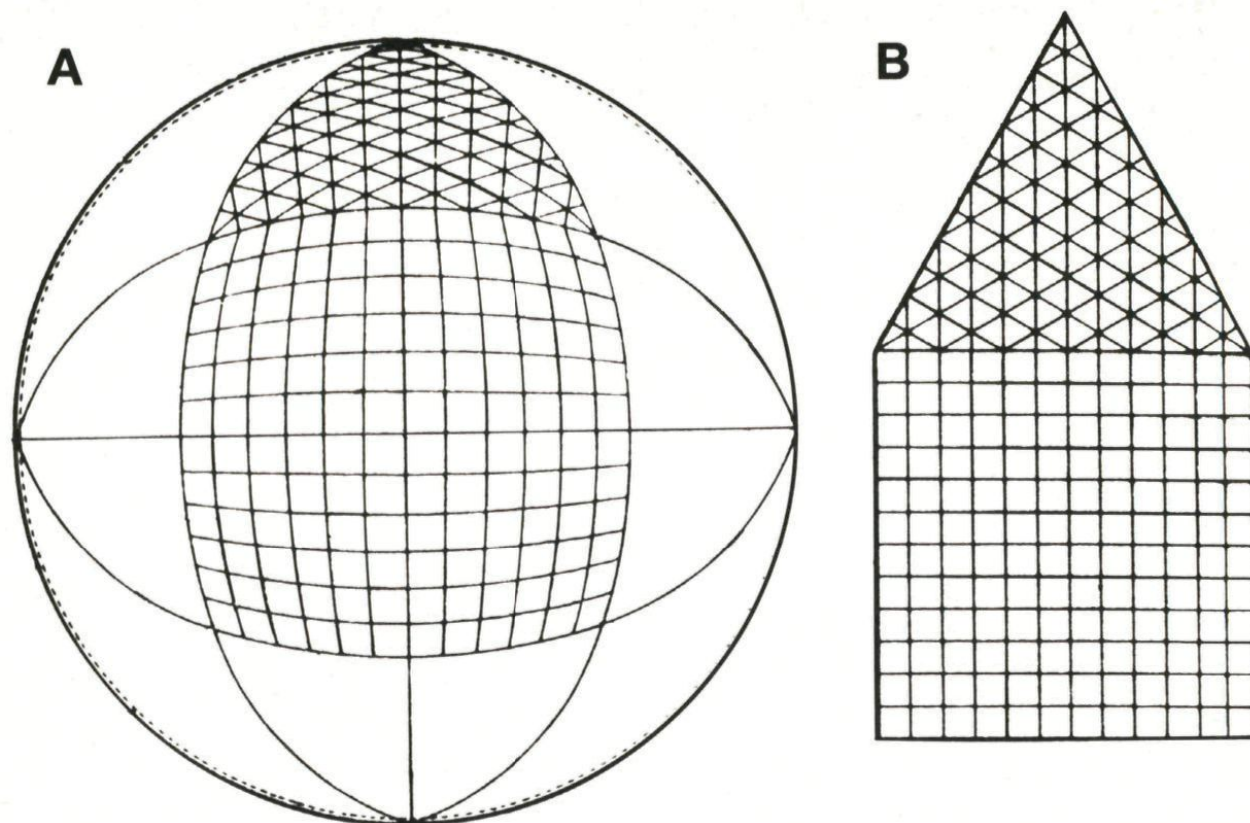
Figuur 4



Figuur 3. Afgeknotte kubus.

Van roostervakje naar roostervakje

Buckminster Fuller heeft het daarom dan ook anders aangepakt. De bolvierhoeken en de boldriehoeken worden voorzien van een fijnmazig rooster. Daartoe worden op elk van de boogdelen op onderling gelijke afstanden stippen gezet. Omdat alle boogdelen even lang zijn, komen er op elk evenveel stippen. Met grootcirkels door deze stippen kan elke bolvierhoek netjes regelmatig worden onderverdeeld in een rooster van kleine bolvierhoekjes, en elke boldriehoek in een rooster van kleine boldriehoekjes (figuur 5A).



Figuur 5. A. Onderverdeling van de bolvierhoeken en boldriehoeken.
B. Onderverdeling van de zijvlakken van het half-regelmatig veertienvlak.

Evenzo worden de zijvlakken van het veertienvlak van een *rechtlijnig* rooster voorzien. Binnen de vierkanten kleinere vierkantjes en binnen de driehoeken kleinere driehoekjes. Op elk van de ribben worden namelijk op gelijke afstanden van elkaar even veel stippen gezet als op de boogdelen. Daarna worden tussen deze stippen evenwijdige lijnen loodrecht op de zijden van de vierkanten en driehoeken getrokken (figuur 5B).

Per bolvierhoek of boldriehoek kan vervolgens de inhoud van elk roostervakje zo goed mogelijk worden overgebracht naar het overeenkomstige roostervakje binnen een vierkant of driehoek van het veertienvlak. Voor elk roostervakje gaat dat gepaard

met een geringe, nauwelijks zichtbare vervorming. Want per slot van rekening is elk roostervakje van de bol, hoe klein ook, een *gebogen* oppervlak, dat wordt overgebracht naar een *plat* oppervlak.

De dymaxion map

Het resultaat is een wereldkaart in de vorm van een uitslag van het half-regelmatige veertienvlak (figuur 6). Door de eerste vier grootcirkels op de werelddbol een beetje handig te kiezen, is elk werelddeel bijna in z'n geheel op één vierkant of driehoek terechtgekomen. En doordat boven de zeeën een aantal lengte- en breedtecirkels zijn aangegeven, is na te gaan dat de vervormingen inderdaad gering zijn.

Figuur 6. De dymaxion map.

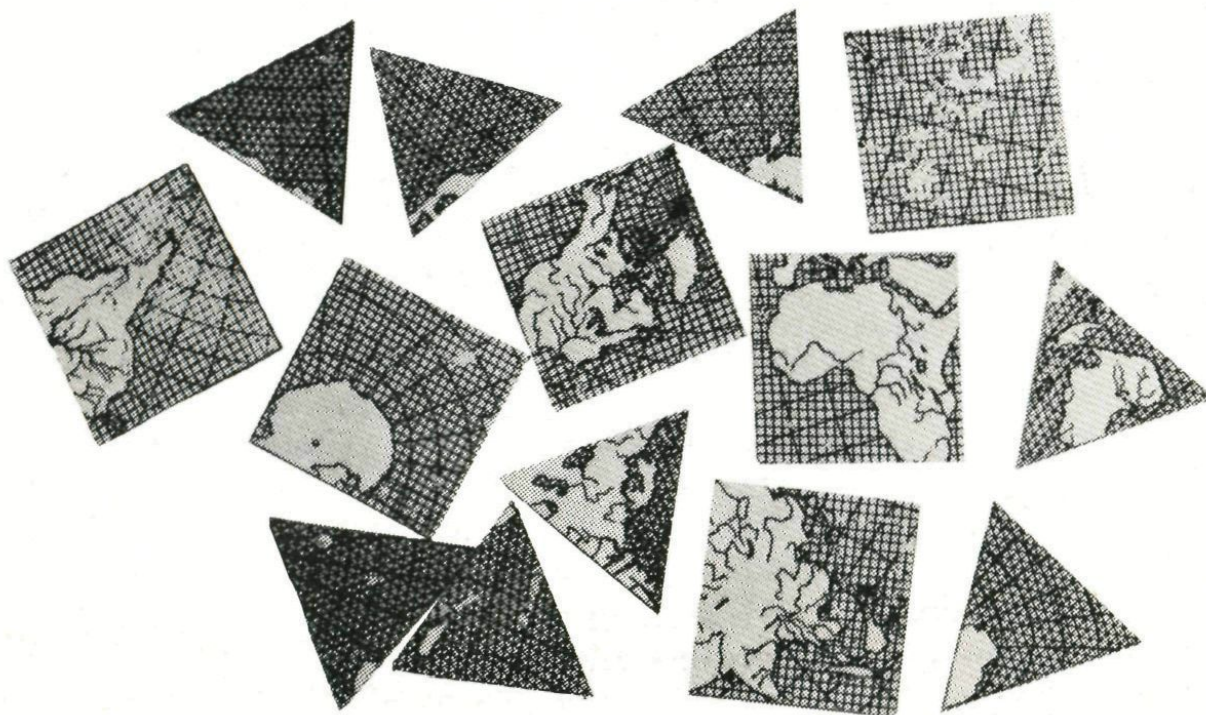


Puzzelkaart

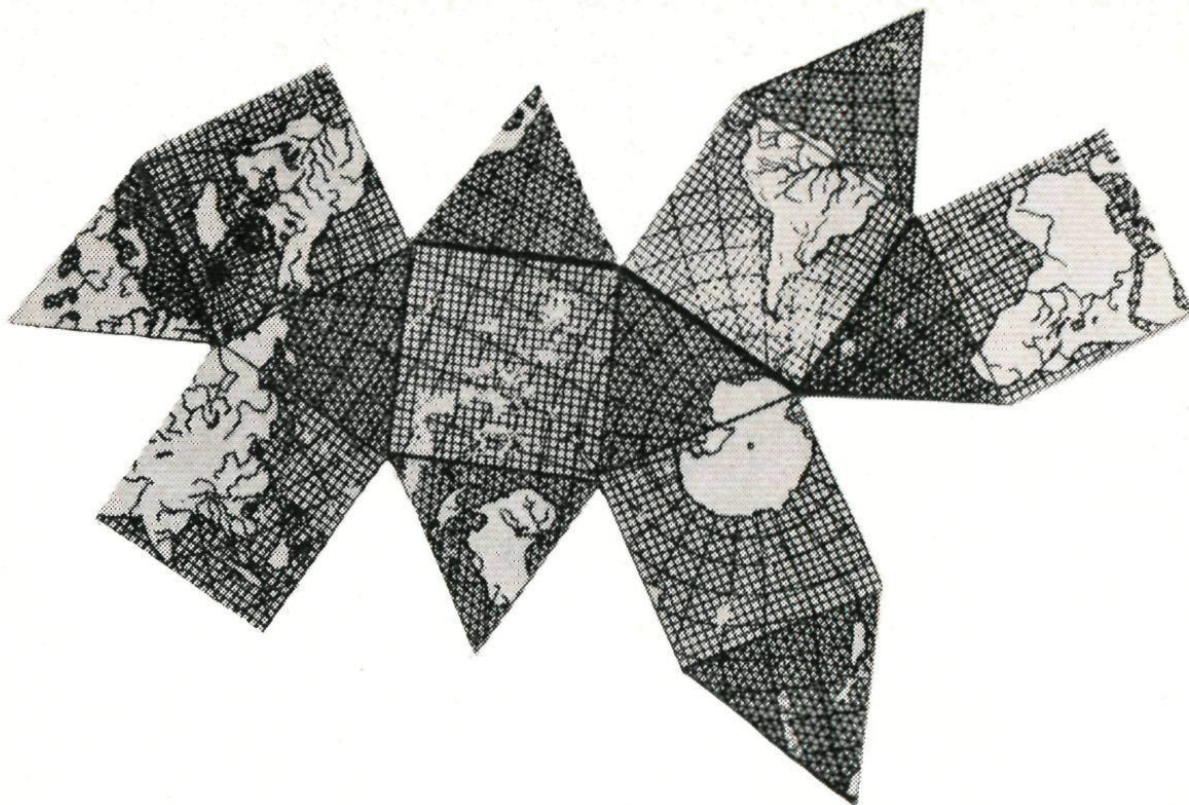
In feite bestaat de dymaxion map uit veertien kaarten (figuur 7). Daarmee kun je een 'globe' in de vorm van een veertienvlak (zoals

wij voor de foto's op de omslag en aan het begin deden) maken, of een wereldkaart naar keuze samenstellen.

Dat laatste kan tot aardige geografische bespiegelingen leiden. Buckminster Fuller geeft daar zelf een aantal voorbeelden van. Zo lijkt het volgens hem in figuur 6 alsof de wereld uit één continent bestaat (met hier en daar wat eilandjes) van alle kanten omgeven door water.



Figuur 7

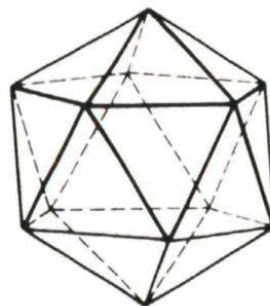


Figuur 8. Andere rangschikking van de veertien delen van de dymaxion map. Dit komt neer op een andere uitslag van het half-regelmatig veertienvlak. We zullen je maar niet vragen het aantal verschillende mogelijkheden op te zoeken, want dat is gigantisch groot.

En als je die veertien kaarten wat anders rangschikt, krijg je juist het omgekeerde: één grote wereldzee met aan de randen hier en daar wat land (figuur 8).

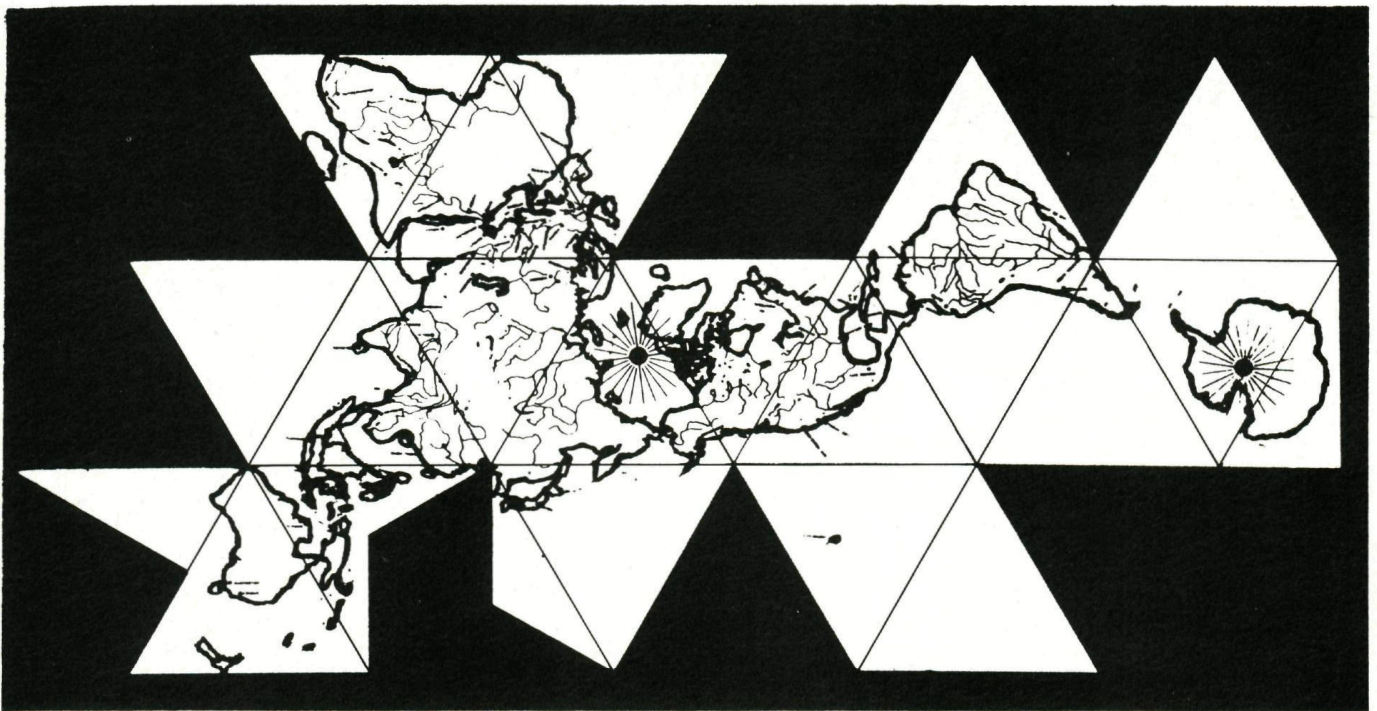
Verbeterde versie

Al lezend ben je misschien zelf al op de gedachte gekomen om andere (regelmatige) veelvlakken te beproeven. Uiteraard heeft Buckminster Fuller dat ook gedaan. De beste resultaten, dat wil zeggen relatief de minste afwijkingen, werden volgens hem verkregen bij een icosaeëder, een regelmatig veelvlak dat uit twintig gelijkzijdige driehoeken bestaat (figuur 9). Deze versie van

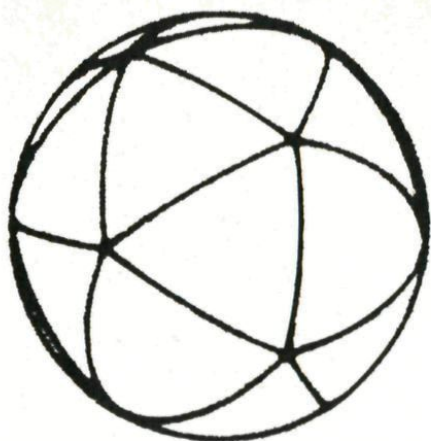


Figuur 9. Regelmatig twintigvlak.

de dymaxion map publiceerde hij omstreeks 1954 (figuur 10). De vervormingen mogen daarop dan wel zo klein mogelijk zijn, maar de werelddelen kunnen niet meer in hun geheel op één (driehoekig) kaartdeel worden afgebeeld. Daarom zijn er twee driehoeken in de omgeving van Australië in tweeën geknipt om Australië zelf en het Zuidpoolgebied als aaneengesloten stukken op de kaart te krijgen.



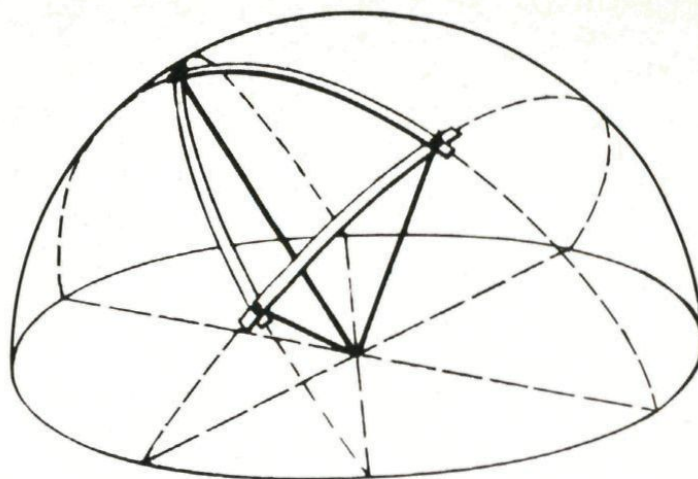
Figuur 10. Verbeterde versie van de dymaxion map in een rangschikking die door Buckminster Fuller 'World Two - Air Ocean' werd genoemd. De kaartdelen bestaan uit regelmatige driehoeken, waarvan er hier twee in tweeën geknipt zijn. Uiteraard zijn ook van deze versie heel wat andere rangschikkingen mogelijk.



Figuur 11

Geen grootcirkels

Bij deze versie van de dymaxion map moet de aardbol worden voorzien van twintig even grote boldriehoeken (figuur 11). Dat kan niet meer door enkele volledige grootcirkels te trekken, zoals bij de eerste versie. Eerst moeten



Figuur 12

de twaalf hoekpunten van het regelmatig twintigvlak op de bol worden uitgezet, waarna ze twee aan twee met elkaar kunnen worden verbonden door delen van grootcirkels (figuur 12). De verdere werkwijze komt overeen met die van de eerste versie.

Wortelvormen uit vroeger tijden

Reken uit op je rekendoosje:

$$\sqrt{5 + \sqrt{21}} + \sqrt{8 + \sqrt{55}}$$

en

$$\sqrt{7 + \sqrt{33}} + \sqrt{6 + \sqrt{35}}$$

Kun je dit zó precies benaderen dat je kunt zien welke uitkomst 't grootst is? Of zouden ze echt exact gelijk zijn?

Je rekendoosjes geeft daar geen antwoord op. En ook een grote computer geeft hier weinig hulp. De oplossing is wél te vinden in een willekeurig algebra-boek voor de tweede klas van 25 of meer jaar geleden.

(Aanwijzing: schrijf $(\sqrt{3} + \sqrt{7})^2$ zonder haakjes, en ga dan na hoe zo'n herleiding van achter naar voren te maken is.)

(uit: 'Parabola', Australië)



Model voor de Noordzee

Tijdens de stormnacht van 1 februari 1953 braken op zeer veel plaatsen in Zuidwest-Nederland de dijken door. Grote gebieden van Zeeland, Zuid-Holland en Noord-Brabant kwamen toen onder water te staan. Herhaling van een dergelijke ramp wordt uigesloten geacht door uitvoering van de Deltawerken. Deze zullen zijn voltooid wanneer in oktober van dit jaar de stormvloedkering in de Oosterschelde (foto boven) in gebruik wordt genomen.

Voordat aan de Deltawerken werd begonnen, is natuurlijk eerst het nodige onderzoek gedaan. Zo werd op het Amsterdamse *Centrum voor Wiskunde en Informatica* (toen nog het *Mathematisch Centrum*) o.a. gekeken naar de invloed van de wind en de getijstroomingen op de waterhoogten van de Noordzee. Zonder op de wiskundige technieken in te gaan, geven we hier een beschrijving van dat onderzoek.

De Noordzee als bak met water

Om het effect van de wind, met name noordwesterstormen, op de waterhoogten rond de Nederlandse kust te kunnen bestuderen, ontwierp men een (wiskundig) model van de Noordzee.

Eerst werd een eenvoudig model opgesteld. Daarin werd de Noordzee voorgesteld als een overal even diepe, rechthoekige bak met water. De afmetingen daarvan waren ca. 400 km breed, 800 km lang en 65 m diep. (Bedenk wel even dat die bak ontzettend plat is. Vergelijk dat maar eens met een vel papier met een breedte van 30 cm. Je krijgt dan een dikte van nog geen 0,05 mm.) Voor het gemak werden de invloeden van het Kanaal, het Skagerrak tussen Denemarken en Zweden, de riviermondingen en de onregelmatigheden van de kusten buiten beschouwing gelaten. Op die manier had men dus een bak die aan drie zijden omgeven was door rechtopstaande wanden en aan de vierde zijde in verbinding stond met de (oneindig diep veronderstelde) Atlantische Oceaan (figuur 1A).

Om te beginnen ging men kijken naar de gevolgen voor de waterhoogten in Hoek van Holland, indien er over de gehele bak een constante noordwestenwind ging waaien. Het water wordt dan vanuit de Atlantische Oceaan de bak in geblazen. Er ontstaat een slingerbeweging die langzaam uitsterft tot het water in een evenwichtsstand schuin omhoog tegen de Nederlandse en Belgische kust staat. Pas wanneer de wind verdwenen is, kan het water weer naar de Atlantische Oceaan terugstromen.

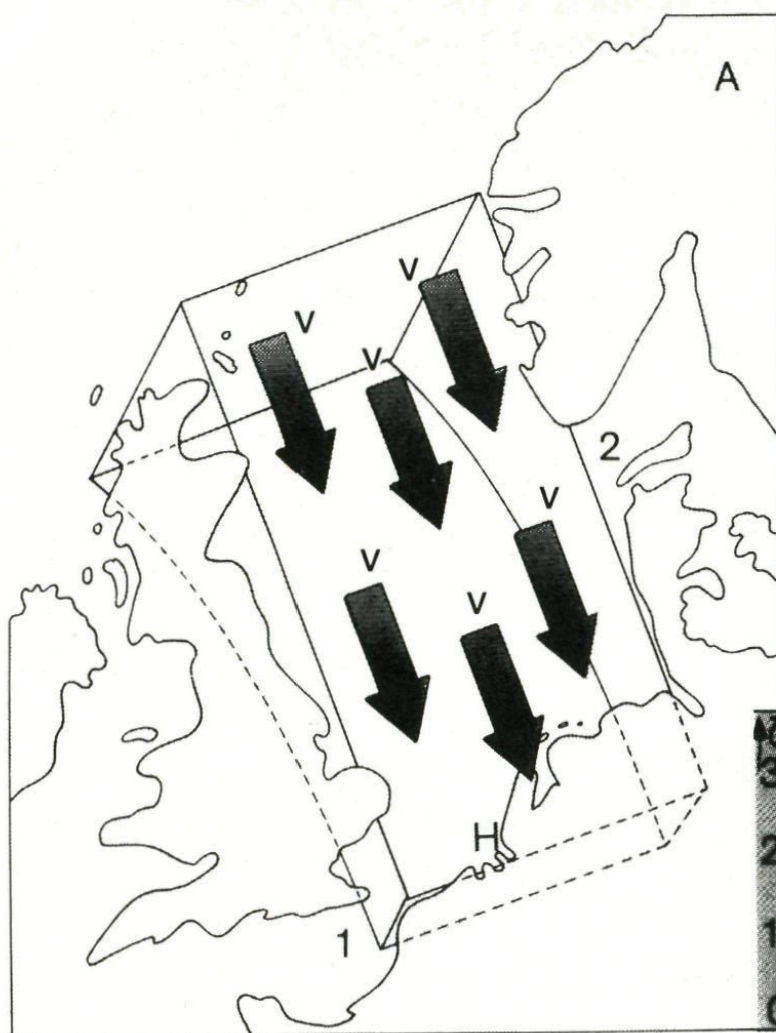
Verbeteringen

Zoals je ziet was dit wel een heel eenvoudig model. Toch gaf het al redelijke resultaten. Het werd nog beter toen men gebruik kon gaan maken van computers. Toen kon rekening worden gehouden met de invloeden van het Kanaal, het Skagerrak, een langzaam aflopende diepte (zoals in figuur 1A is aangegeven), de getijstroomingen, een veranderende windsnelheid en de draaiing van de aarde om haar as.

Vooraf dat laatste was belangrijk. Want onder invloed van de draaiing van de aarde krijgt het water dat uit de Atlantische Oceaan komt, op zijn weg een afwijking naar rechts, en hoopt zich op in de linkerbenenhoek van de bak. Net als in de werkelijkheid kreeg men toen in het model ook de grootste stijgingen van het water in de omgeving van Hoek van Holland. Bovendien traden daar die stijgingen het eerst op – eveneens net als in de werkelijkheid – en niet in de omgeving van Den Helder, zoals dat bij het eerdere eenvoudige model het geval was.

Een resultaat

Uiteindelijk werd een computerprogramma ontwikkeld, waarmee onder allerlei weersomstandigheden de waterhoogten redelijk konden worden voorspeld. Een resultaat daarvan zie je in figuur 1B. Daarin zijn zowel de stijging van het water te Hoek van Holland als de windsnelheid tegen de tijd (t , horizontaal in uren) uitgezet. In dit geval werd verondersteld dat de wind (kromme v) langzaam opkwam (over de hele bak in gelijke mate) tot een

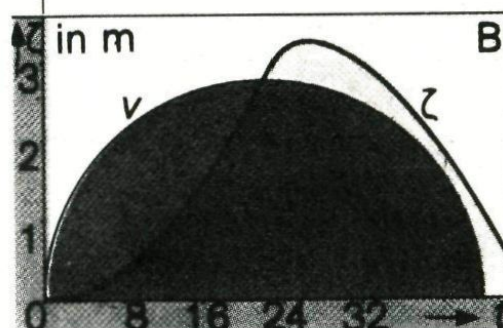


Figuur 1A. De Noordzee als een rechthoekige bak met water. Hier met naar de Atlantische Oceaan aflopende diepte.

1 Het Kanaal
2 Skagerrak
H Hoek van Holland
v Noordwestenwind

B. Resultaat

t tijd
v windsnelheid
 ζ stijging van het water



snelheid van 30 m/s, en daarna weer afnam. De stijging van de waterhoogte te Hoek van Holland, die daarvan het gevolg is, wordt weergegeven door de kromme ζ . Zoals je ziet, bereikt het water pas enige uren nadat de wind z'n grootste snelheid had, zijn maximale hoogte, te weten 3,20 m.

Opleving

Dit onderzoek werd al in het begin van de jaren zestig afgerond. De laatste jaren is het echter weer sterk in de belangstelling komen te staan. Zo kwam het bijvoorbeeld goed van pas toen men booreilanden wilde plaatsen om olie uit de bodem van de Noordzee te winnen. In Italië kon het worden gebruikt bij de bereke-

ning van de stijging van het water van de Adriatische Zee, waardoor o.a. de stad Venetië werd bedreigd. En ten slotte bewees het in India zijn nut bij de uitvoering van de havenwerken in Calcutta. Al met al waren dat redenen genoeg om de oorspronkelijke computerprogramma's te herzien en aan de nieuwste rekentechnieken aan te passen.

Werken met een model

In het algemeen verstaat men onder een (*wiskundig*) *model* een 'vereenvoudigde' beschrijving van de werkelijkheid. Net als bij het Noordzeeprobleem, is zo'n beschrijving bedoeld om te kunnen voorspellen wat er in die werkelijkheid zal plaatsvinden.

Als je voor een of ander verschijnsel eenmaal een model hebt opgesteld, kun je daarmee echter niet zo maar in het wilde weg voorspellingen doen. Je zult eerst na moeten gaan of je model goed is. Je doet daarom met je model enkele voorspellingen, en kijkt aan de hand van waarnemingen of die uitkomen. Pas als dat het geval is, mag je aannemen dat je model 'werkt'.

Je kunt dan met je model voorspellingen gaan doen, en naar aanleiding daarvan maatregelen treffen. Dus in het geval van het model voor de Noordzee, de hoogte van de dijken aanpassen aan de voorspelde waterhoogten. Daarbij moet je de werkelijkheid echter niet uit het oog verliezen en bijvoorbeeld geen windsnelheden kiezen die in de praktijk nooit voorkomen.

Soms kun je zelfs de uitwerking van die maatregelen met je model weer nagaan. Zo kun je dan precies uitzoeken welke maatregel het beste resultaat geeft.

Ten slotte nog het volgende:

- 1 Bedenk wel dat 'vereenvoudigde beschrijving' niet wil zeggen dat zo'n beschrijving ook eenvoudig is. Het tegendeel is meestal waar. Het opstellen van een model dat een beetje

werkt, vereist dikwijls een hoeveelheid rekenwerk waar met potlood, papier en een eenvoudige rekenmachine geen beginnen aan is. Vandaar dat het 'in model brengen' van allerlei verschijnselen pas goed mogelijk is geworden toen de computer zijn intrede deed.

- 2 Met een model boots je de werkelijkheid zo goed mogelijk na. *Simuleren* noemt men dat. Dat betekent dat je model helemaal niet zo in elkaar hoeft te zitten als de werkelijkheid. Het moet zich alleen maar net zo gedragen als de werkelijkheid. (Zo heb je in het geval van de Noordzee geen bak met water in je computer zitten, om maar wat te noemen!)
- 3 Elk model heeft zijn beperkingen. Tenslotte benader je de werkelijkheid. Hoe meer en hoe betere waarnemingen je doet, des te beter komen die beperkingen aan het licht. Als je daar geen genoeg mee wilt nemen, zul je je model steeds weer opnieuw aan moeten passen. Ook daaraan komt een einde. Elke aanpassing brengt namelijk weer extra rekenwerk met zich mee en uiteindelijk zal dan blijken dat je computer dat niet aankan, ook al is dat een supercomputer.

Denkertjes

De vergelijking $19x + 86y = 1986$ heeft natuurlijk $(x, y) = (100, 1)$ als oplossing. Er is echter nóg een oplossing in de positieve gehele getallen. Welke? (Misschien kun je je rekendoosjes hier goed gebruiken.)

(uit: Mathematical Pie, nummer 107)

Maak een zin van deze on-zin

En twee getal door door door deelbaar deelbaar is, is een drie ook als het zes.

Pi in 15 (!) tweeën

We komen nog even terug op het stukje 'Pi in $(2^2)^2$ tweeën' in het vorige nummer. Daar werd gevraagd om de benaderingsformules voor π (van Brent en Salamin) te schrijven met een minimaal aantal tweeën. De stand op dit moment is:

$$\pi_0 = 2 \quad (1 \text{ twee})$$

$$\pi_1 = \left(\frac{\sqrt{2} + 2}{2} \right)^2 \quad (4 \text{ tweeën})$$

$$\pi_2 = \left(\frac{\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{2}}}{2} \right)^{2+2} / (\sqrt{2} - (\sqrt{2})^{-2}) \quad (8 \text{ tweeën})$$

$$\pi_3 = \frac{\left[\left(\frac{\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{2}}}{2} \right)^2 \cdot \sqrt{2/\sqrt{2} - \sqrt{2}} + \sqrt{2} \right]^2}{[(2 - \sqrt{2}) \cdot 2 - \sqrt{2}] \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2}} \quad (15 \text{ tweeën})$$

De laatste vorm (voor π_3) betekent een geheel onverwachte verbetering van de 16-tweeën-vorm die we in het vorige nummer gaven.

Voor wie het narekent: benaderende uitkomsten zijn

(2) 2,9142136 3,1405792 3,1415926

Drinkersparadijs

Bijgaand berichtje stond op 24 april 1984 op de economische pagina van NRC Handelsblad. Hoeveel borrels schijn je daar voor één gulden te kunnen kopen?

Wat zal er bedoeld zijn?

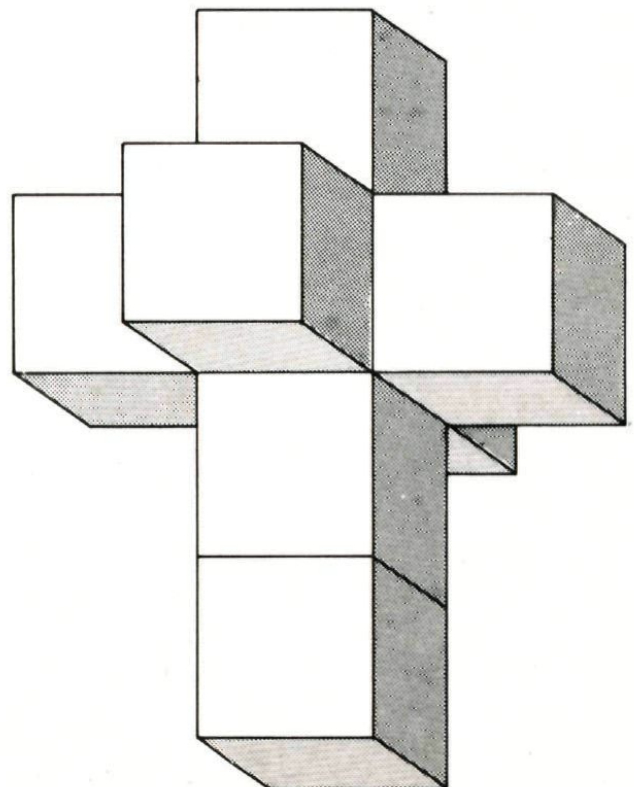
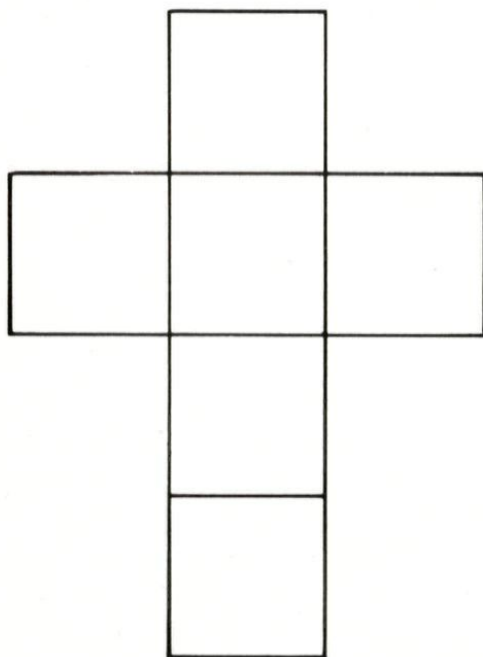
Neem eens aan dat de cijfers zelf correct zijn, en dat alleen de 'nullen' aan de drank zijn geraakt. Hoeveel liter (en hoeveel gulden) denk je dat er dan in 1983 door elk van de 113 miljoen Japanners gemiddeld zal zijn opgedronken?

TOKIO, 24 april — De Japanners hebben vorig jaar in totaal 526 miljard liter wijn, bier, whisky en sake gedronken, ruim 3 procent meer dan in 1982. Bier werd het meest gedronken, ruim 66 procent van alle alcohol houdende dranken, gevolgd door sake met ruim 18 procent. Wijn en whisky scoorden laag, respectievelijk 1 en 5 procent van het totale Japanse drankgebruik. In totaal gaven de Japanners ruim 60 miljoen gulden uit aan drank.

De regelmatige 5-cel

Nog een uitstapje naar de vierde dimensie

In het vorige nummer maakten we een 'uitstapje' naar de vier-dimensionale ruimte of afgekort 4-D ruimte (zie 'Reis in vier dimensies' en 'Hyperkubus in stukjes zagen'). Daarin kwamen we de hyperkubus of *tesseract* tegen, een regelmatige (vier-dimensionale) figuur die is afgeleid van de kubus. Geholpen door Hyper de Piep lukte het ons om de hyperkubus op de drie-dimensionale ruimte (afgekort 3-D ruimte) te projecteren. Aan de hand van die projectie kwamen we te weten hoe de hyperkubus in elkaar zou moeten zitten. Hij wordt begrensd door acht gelijke kubussen. Daarom spreekt men ook wel van *regelmatige 8-cel*. Verder slaagden we erin om de hyperkubus 'open te klappen'. De manier waarop we dat aanpakten, kwam overeen met het openvouwen van een kubus. Zo kregen we een tastbare drie-dimensionale bouwplaat van de hyperkubus (figuur rechtsonder). Naast de regelmatige 8-cel kennen we nog een aantal regelmatige vier-dimensionale figuren. Eén daarvan is de *regelmatige 5-cel*. In dit artikel zullen we laten zien hoe je tot zo'n regelmatige 5-cel kunt komen. Daarna gaan we na hoe die in elkaar zou moeten zitten, en hoe je hem het beste op de 3-D ruimte kunt projecteren. Bovendien laten we je zien hoe je meetkunde kunt bedrijven in de 4-D ruimte, ook al kun je je van die ruimte geen enkele voorstelling maken. En uiteraard 'klappen' we de regelmatige 5-cel aan het einde van het artikel nog even 'open'!



Boven: Opende klapte kubus.

Rechts: Opende klapte hyperkubus.

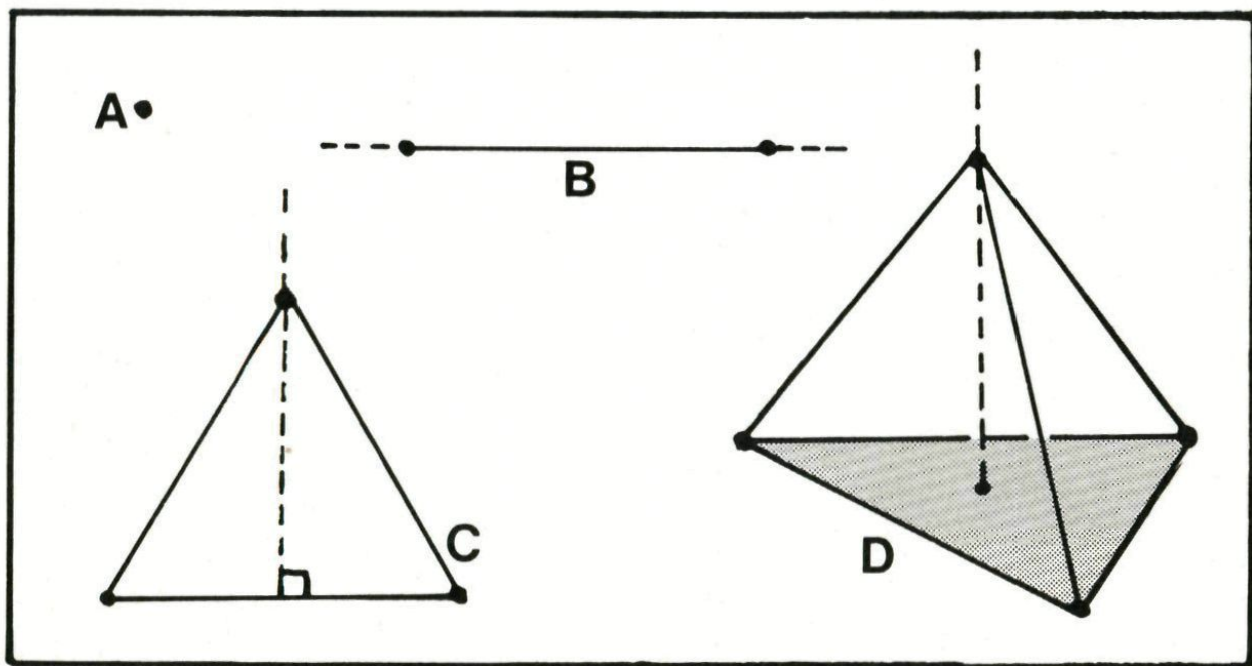
Van punt tot. . .

We gaan uit van een punt (figuur 1). Op een eenheidsafstand daarvandaan zet je een tweede punt. Daarna verbind je die twee punten door een lijnstukje (dat dus lengte 1 heeft) met elkaar. Dit lijnstukje past in een 1-D ruimte. Merk op dat wanneer je dat lijnstukje naar links en naar rechts tot in het 'oneindige' voortzet, je een volledige 1-D ruimte krijgt (figuur 1B).

We gaan nu een derde punt vastleggen. Dat moet buiten die 1-D ruimte komen op een eenheidsafstand van de andere twee. Daarna kan het door een lijnstukje van lengte 1 met die twee punten worden verbonden.

Inderdaad, dat komt neer op het tekenen van een *gelijkzijdige driehoek*. En daar zul je waarschijnlijk geen moeite mee hebben! De manier waarop we dat hier doen, mag dan misschien wat overdreven lijken, maar is

reuze handig wanneer we straks overgaan naar de 4-D ruimte. Door het midden van het lijnstukje trekken we een lijn loodrecht en op dat lijnstukje (figuur 1C). Langs die lijn kunnen we de 1-D ruimte verlaten en een 2-D ruimte binnengaan. Ergens op die lijn moet het derde punt komen. Het bepalen van de juiste plaats is een kwestie van afpassen. Op deze manier gaan we verder. Buiten die 2-D ruimte leggen we op een eenheidsafstand van elk van de andere een vierde punt vast. Langs een lijn door het midden van de driehoek (middenpunt van de omschreven cirkel) gaan we loodrecht de 2-D ruimte uit, en krijgen vervolgens te maken met een 3-D ruimte. Op die lijn moet dat vierde punt komen. Als we de juiste plaats daarvan hebben bepaald en de verbindingslijntjes met de drie andere punten hebben getrokken, hebben we een *regelmatig viervlak* (figuur 1D).



Figuur 1. Van punt naar. . .

A punt, B lijnstukje, C regelmatige driehoek, D regelmatig viervlak.

Tot zo ver is alles gemakkelijk voor te stellen en bevatte ons verhaal misschien weinig nieuws. Maar het is beslist niet overbodig, want we weten nu hoe we te werk moeten gaan om een vijfde punt buiten de ons zo vertrouwde 3-D ruimte te vinden.

Langs een loodlijn door het midden van het regelmatig viervlak zouden we de 3-D ruimte kunnen verlaten. We zouden zover langs die lijn kunnen bewegen, totdat we van elk van de vier andere punten precies een afstand 1 verwijderd zijn. Waar dat vijfde punt dan moet komen, is in een apart kader voorgerekend.

Van 4-D naar 3-D

Als de plaats van dat vijfde punt is bepaald, en de verbindingslinies naar de andere vier punten zijn getrokken, hebben we een vier-dimensionale figuur. De enigszins deftige naam daarvoor is *pentahedroïde*, maar meestal heeft men het over *regelmatige 5-cel*. Willen we ons daar enige voorstelling van maken, dan moeten we hem eerst op de 3-D ruimte zien te projecteren. Dankzij onze aanpak bij de opbouw van de regelmatige 5-cel, is zo'n projectie gemakkelijk uit te voeren. Om daar wat handigheid in te krijgen, zullen we eerst het regelmatige viervlak op een

Daar komt het vijfde punt

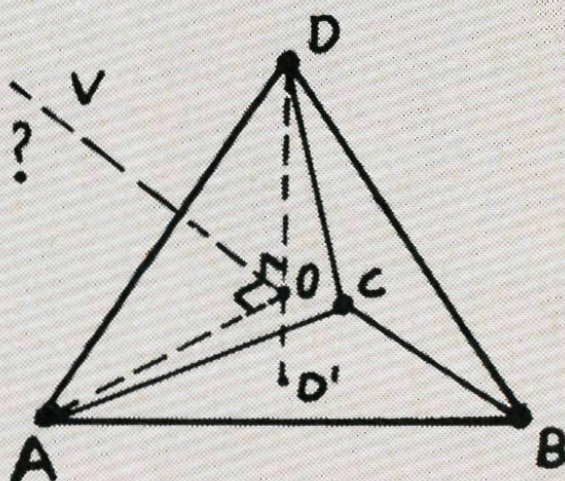
We gaan uit van een regelmatig viervlak $ABCD$ (zie figuur), waarvan de zes ribben (te weten AB , BC , CA , AB , BD en CD) gelijk aan 1 zijn. Het midden O van dit viervlak (o.a. gelegen op de hoogtelijn DD' vanuit D .) is tevens het middelpunt van de omschreven bol.

Voor de straal R van die omschreven bol geldt:

$$R = OA = OB = OC = OD = \frac{1}{4}\sqrt{6}.$$

Vanuit O trekken we een lijn loodrecht op de 3-D ruimte van het viervlak. Deze lijn staat dan dus loodrecht op alle lijnen binnen de 3-D ruimte. Op die loodlijn door O moet het vijfde punt V komen. De afstand OV stellen we voorlopig gelijk aan x .

Nu kunnen we zeggen dat de driehoeken VOA , VOB , VOC en VOD congruent zijn. Ze zijn namelijk rechthoekig in O , hebben de zijde VO (is gelijk aan x) gemeenschappelijk en de zijden OA , OB , OC en OD zijn gelijk.



Bij gevolg zijn dus ook de lijnstukjes VA , VB , VC en VD gelijk, zodat V even ver af ligt van de punten A , B , C en D . Toepassing van de stelling van Pythagoras in de rechthoekige driehoek VOA levert dan:

$$VA^2 = OA^2 + x^2.$$

Met $OA = \frac{1}{4}\sqrt{6}$ geeft dat:

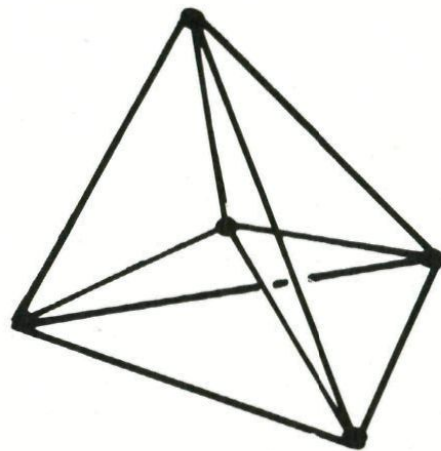
$$VA^2 = \frac{3}{8} + x^2.$$

VA moet gelijk worden aan 1, want zover liggen ook A , B , C en D van elkaar af, dus: $1 = \frac{3}{8} + x^2$.

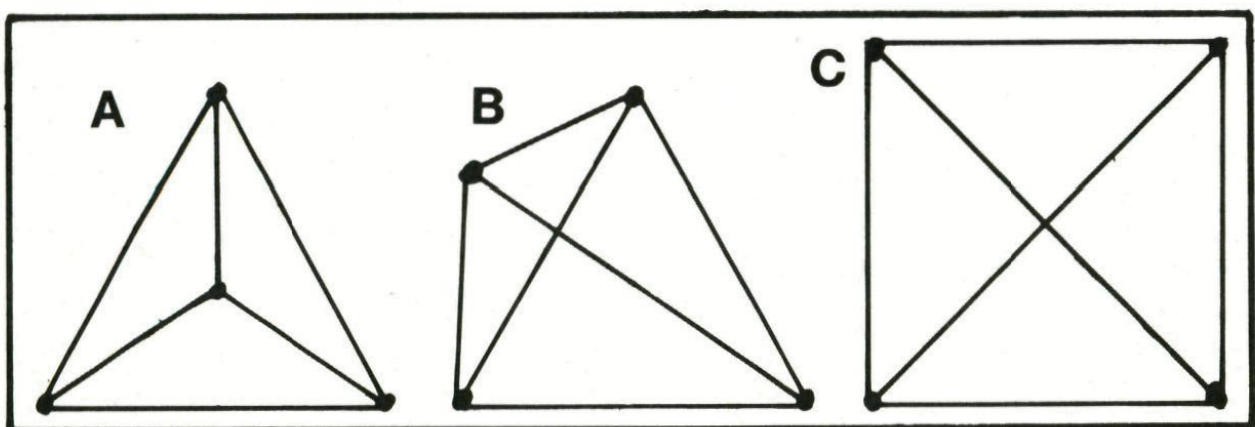
Daaruit volgt: $x = \frac{1}{4}\sqrt{10}$.

(twee-dimensionaal) plat vlak projecteren. Het vierde hoekpunt (de top) van het regelmatige viervlak werd verkregen door langs een loodlijn de 2-D ruimte te verlaten (figuur 1D). We begeven ons nu wat verder op die lijn, en kijken vervolgens langs die lijn naar de 'onder' ons liggende 2-D ruimte. Het lijkt dan alsof het regelmatige viervlak platgeslagen is op de 2-D ruimte (figuur 2A). Het vierde hoekpunt valt daarbij samen met het midden van de regelmatige driehoek. Als we een beetje naast die as gaan zitten, dan krijgen we een ander beeld. Het vierde hoekpunt valt dan buiten de regelmatige driehoek (figuren 2B en 2C)! Hetzelfde doen we nu bij de regelmatige 5-cel. We verlaten de 3-D ruimte langs de lijn waarop het vijfde en laatste hoekpunt kwam te liggen, en kijken naar de 'onder' ons liggende 3-D ruimte. We zien dan het vijfde hoekpunt samenvallen met het midden van het regelmatige viervlak. In figuur 3 zie je een weergave van die projectie op ons twee-dimensionale papier. Omdat we de 3-D

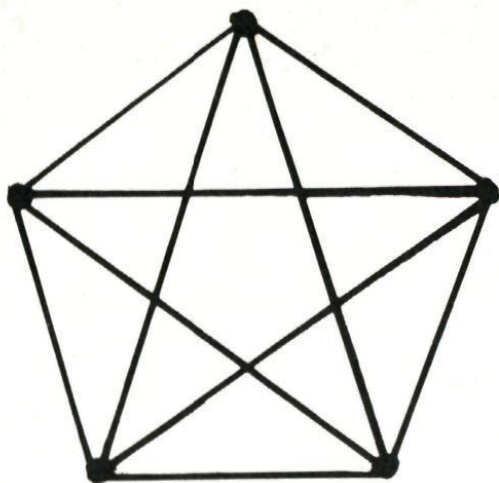
ruimte uit eigen ervaring kennen, kost het ons weinig moeite om daar een drie-dimensionale voorstelling van te maken. Net als bij het regelmatige viervlak zijn ook bij de 5-cel andere weergaven in het platte vlak mogelijk. Zo zijn de figuren 4 en 5 ook (twee-dimensionale) weergaven van diezelfde projectie van de regelmatige 5-cel op de 3-D ruimte. Het is echter heel wat lastiger om uit die figuren op te maken hoe een regelmatige 5-cel in elkaar zit, dan uit figuur 3.



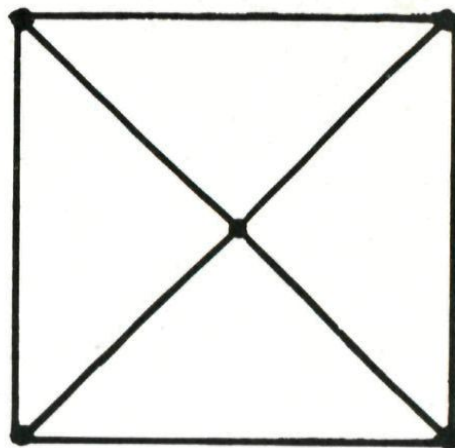
Figuur 3. Weergave van de projectie van een regelmatige 5-cel op de 3-D ruimte. Het punt dat in de 4-D ruimte ligt valt hier samen met het midden van een regelmatig viervlak.



Figuur 2. Projecties van een regelmatig viervlak op het platte vlak. In B en C valt de top buiten het grondvlak. Je krijgt dan een vierhoek en een vierkant met hun diagonalen. Het snijpunt van die diagonalen moet niet als hoekpunt worden meegeteld!



Figuur 4. Nog een weergave van de projectie van een regelmatige 5-cel. Het komt neer op een regelmatige vijfhoek met zijn diagonalen.



Figuur 5. Een vierkant met zijn diagonalen. Ook dit is een weergave van de projectie van een regelmatige 5-cel op de 3-D ruimte.

Kort en krachtig

Zoals uit figuur 1D is op te maken, bevat het regelmatig viervlak 4 hoekpunten die allemaal twee aan twee met elkaar worden verbonden door 6 even lange ribben. Hij wordt begrensd door 4 even grote regelmatige driehoeken, waarvan er in elk hoekpunt steeds drie samenkomen. Met andere woorden: een regelmatig viervlak bestaat uit 4 congruente regelmatige driehoeken, die twee aan twee een ribbe en drie aan drie een hoekpunt gemeenschappelijk hebben.

Aan de hand van figuur 3 kunnen we nagaan hoe de regelmatige 5-cel in elkaar zit. Hij bestaat uit 5 hoekpunten die allemaal twee aan twee met elkaar worden verbonden door 10 even lange ribben. Voor het gemak hebben we die bij de opbouw maar de lengte 1 gegeven. Verder zijn er 10 even grote regelmatige driehoeken in te onderscheiden, en wordt de figuur – althans in de 4-D ruimte – 'begrensd' door 5 even grote regelmatige viervlak-

ken. (Aan dat laatste heeft de regelmatige 5-cel zijn naam te danken.) Denk erom dat je het viervlak dat in figuur 3 de 'omhullende' vormt, ook meetelt!

Als je het net als bij het regelmatig viervlak kort en krachtig uit zou willen drukken, kun je zeggen dat de regelmatige 5-cel is opgebouwd uit 5 congruente regelmatige viervlakken, die twee aan twee een gelijkzijdige driehoek, drie aan drie een ribbe en vier aan vier een hoekpunt gemeenschappelijk hebben. Of nog korter met $C_5 = (5, 10, 10, 5)$, of desnoods alleen maar $(5, 10, 10, 5)$, waarbij de getallen achtereenvolgens slaan op het aantal hoekpunten, het aantal ribben, het aantal zijvlakken en het aantal veelvlakken (cellen).

Simpeler kan niet

Onder de regelmatige figuren in de 4-D ruimte is de regelmatige 5-cel de eenvoudigste. Diagonalen, diagonaalvlakken en (drie-dimensionale) diagonaalruimten zijn er niet mogelijk.

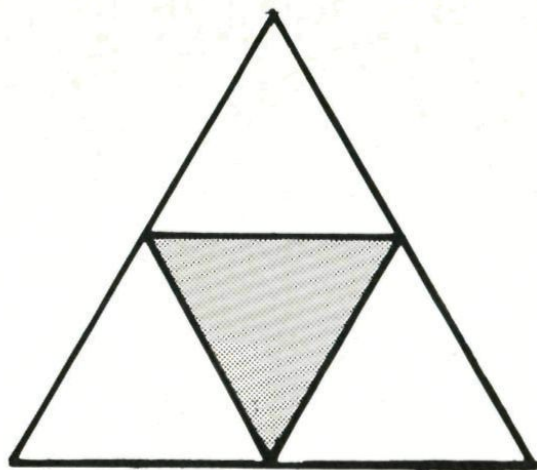
Kijken we nog even naar de 1-D ruimte, de 2-D ruimte en de 3-D ruimte, dan zie je dat daar achter-eenvolgens het lijnstukje, de gelijkzijdige driehoek en het regelmatige viervlak de eenvoudigste regelmatige figuren vormen. Lijnstukje, gelijkzijdige driehoek, regelmatige viervlak en regelmatige 5-cel behoren dan ook tot de familie van de *simplex*en. Dat zijn de eenvoudigste figuren die binnen een bepaalde ruimte mogelijk zijn. het goed: een simplex voor een bepaalde ruimte hoeft niet per se regelmatig te zijn. Dus ook alle mogelijke andere driehoeken, viervlakken en 5-cellen behoren tot de familie van de simplexen.

Opengeklapte 5-cel

We stelden vast dat een regelmatig viervlak wordt begrensd door 4 congruente regelmatige driehoeken die twee aan twee door een ribbe met elkaar zijn verbonden. Als je drie van die zes verbindingslijnen lossnijdt, dan kun je het regelmatig viervlak openvouwden. Neem je daarvoor de drie opstaande ribben, dan krijg je figuur 6.

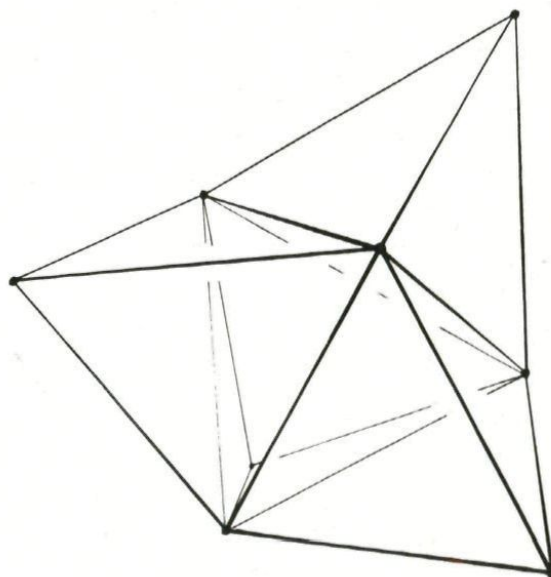
Zoals uit figuur 3 was op te maken, wordt de regelmatige 5-cel 'begrensd' door 5 even grote regelmatige viervlakken. Die worden steeds twee aan twee door een regelmatige driehoek met elkaar verbonden. Als we de regelmatige 5-cel open willen klappen, zijn we gedwongen een aantal van die verbindingsvlakken los te snijden.

In de 4-D ruimte kunnen dan vier van de vijf viervlakken om een niet losgesneden verbindingsvlak worden gedraaid. Het resultaat



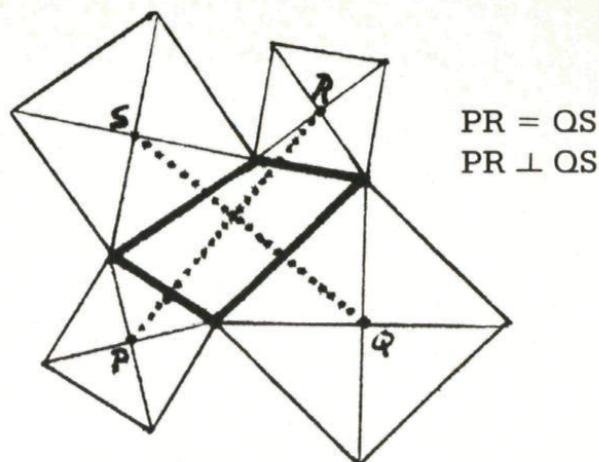
Figuur 6. Opengeklapt regelmatig viervlak.

wordt dan een gewoon drie-dimensionaal voorwerp. Dat bestaat uit een regelmatig viervlak waarbij op elk zijvlak een even groot regelmatig viervlak is gezet (figuur 7). Het wordt begrensd door twaalf gelijke regelmatige driehoeken, maar is toch geen regelmatig twaalfvlak!



Figuur 7. Opengeklapte regelmatige 5-cel. We zien hier direct drie van de vier 'naar buiten geklapte' regelmatige viervlakken zitten. Het vierde gaat helemaal schuil achter het middelste dat op zijn plaats is gebleven. Het is met dunnere lijnen aangegeven.

De vierhoeksstelling van Van Aubel



We zijn nog wat meer te weten gekomen over de geschiedenis van het probleem van de 'vierkantenvierhoek' (eerder behandeld in de nummers 1 en 2 van deze jaargang). Over de oorsprong, en over de manier waarop het toen bewezen werd. Het probleem blijkt al meer dan een eeuw lang velen te boeien en uit te dagen.

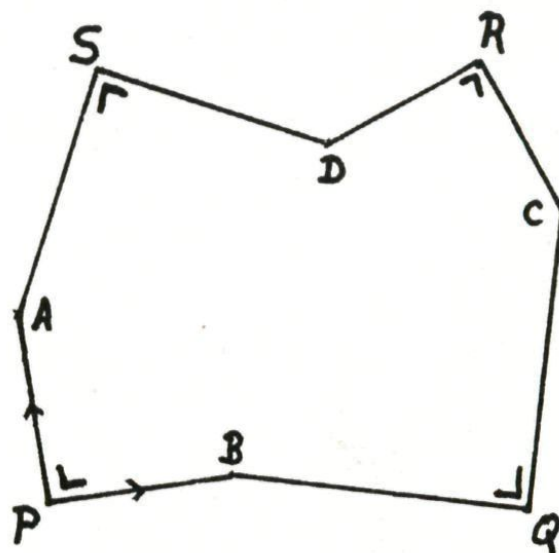
De oorsprong (?)

Uit naspeuringen in bibliotheken bleek dat de eigenschap mogelijk voor het eerst gevonden is in de tweede helft van de vorige eeuw, door een leraar aan het Atheneum te Antwerpen *Dr. H. van Aubel*. De oudste vermelding die we nu kennen komt voor in de jaargang 1878 van het Belgische tijdschrift *Nouvelle correspondance mathématique*. Door Van Aubel en anderen zijn er in de jaren daarna nog tal van varianten en uitbreidingen op gepubliceerd. De eigenschap zelf wordt in verschillende boeken aangehaald als: de vierhoeksstelling van Van Aubel.

Een bewijs van toen

De bewijzen die destijds werden gegeven doen in zekere opzicht modern aan: er werd gerekend met translaties, rotaties en vectoren. Alleen werden die namen toen nog niet gebruikt; gesproken werd van de 'equipollentiemethode'. Zo'n bewijs komt neer op het volgende:

Als figuur is niet méér nodig dan wat hieronder staat. Van de willekeurige vierhoek zijn alleen de hoekpunten *A, B, C* en *D* aangegeven. En van de vierkanten op de zijden (met centra *P, Q, R* en *S*) spelen alleen de getekende halve diagonalen een rol.



Als we ons op reis denken langs de zijden van deze achthoek, dan geldt dat de verplaatsing *PA* even groot is als de verplaatsing *PB*, maar de richting ervan is een

kwartslag (tegen de klok in) verdraaid. Iets dergelijks geldt voor de lijnstukken die bij *Q*, bij *R* en bij *S* samenkomen.

We kijken nu in het bijzonder naar twee reizen van *P* naar *R*, één langs de route via *B*, *Q*, *C* en één via *A*, *S*, *D*. Beide reizen samen zijn opgebouwd uit in totaal acht deelverplaatsingen:

PB, BQ, QC, CR, PA, AS, SD, DR.

Vervangen we deze stuk voor stuk door verplaatsingen die even groot zijn, maar in richting een kwartslag tegen de klok in verdraaid, dan krijgen we (ga maar na in de figuur) het volgende achttal:

PA, QC, QB, RD, BP, DS, AS, CR.

Dit blijken juist de verplaatsingen te zijn die voorkomen in de beide

wegen van *Q* naar *S*, zie alweer de figuur. Alleen de volgorde ervan is anders. Maar omdat het resultaat van een aantal verplaatsingen niet afhangt van de volgorde waarin je ze achter elkaar zet, geeft het totaal van de acht verdraaide deelverplaatsingen precies twee keer de reis van *Q* naar *S*.

Conclusie: het resultaat *QS* is even lang als, en qua richting loodrecht op het resultaat *PR*.

Als reactie op het 'Griekse-kruisbewijs' uit nummer 2, ontvingen we van *J. N. S. Calis* uit Voorst nog een bewijs dat hoofdzakelijk gebruikmaakt van congruente driehoeken. Dit soort meetkunde voerde jarenlang in het onderwijs de boventoon. Het bovenstaande oude Belgische vonden we echter aardiger.

Pi opnieuw op rijm

Op de oproep uit nummer vier ontvingen we nog een aantal pi-rijmen. Die van *E. C. Buissant des Amorie* uit Amstelveen vonden we het aardigst. Het stopt bij de 32e decimaal, want dat is de eerste nul!

Wie π voor 't eerst optekende

3 1 4 1 5 9

en daarna nacht aan nacht geplaagd berekende,

2 6 5 3 5 8 9

schreef natuurlijk vel na vel.

7 9 3 2 3

Nochtans, arme fanaat

8 4 6

(ja, ietwat laat)

2 6 4

met een computer kun je sneller benaderen, jawel!

3 3 8 3 2 7 9 5 0



Pythagoras Olympiade



Nieuwe opgaven

Oplossingen vóór 30 juni insturen naar: *Pythagoras Olympiade, Marinus de Jongstraat 12, 4904 PL OOSTERHOUT (NB)*. Vermeld op elk (éénzijdig beschreven) vel je naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas. Verder moet elke oplossing op een nieuw vel beginnen, want we corrigeren ze afzonderlijk. We bekijken alleen goed leesbare oplossingen die volledig zijn uitgewerkt, met verklarende tekst in goed lopende zinnen. Verdere informatie over de wedstrijd vind je in nummer 2 van deze jaargang op bladzijde 26.

PO 88

Gegeven zijn zeven verschillende gehele getallen groter dan nul en kleiner dan duizend. Toon aan dat je er altijd drie uit kunt kiezen met de eigenschap dat elk van die drie kleiner is dan het produkt van de andere twee.

PO 89

Toon aan dat voor elk reëel getal x geldt:

$$x^6 - 6x^5 + 30x^4 - 120x^3 + 360x^2 - 720x + 720 > 0.$$

Oplossingen en prijswinnaars van de opgaven PO 80 en 81

PO 80

a Toon aan dat het getal

$k = 1985! - 1984!$ op precies 1985 nullen eindigt als je het in het tweetallig stelsel uitschrijft.

b Hoe kun je in het algemeen aan de schrijfwijze van een getal n in het tweetallig stelsel zien of het getal $k(n) = n! - (n-1)!$ in dat stelsel op precies n nullen eindigt?

Opmerking: Deze opgave is verzonden door de oud-deelnemers aan de Pythagoras Olympiade *Harold de Boer* uit Nijeven en *Bart de Smit* uit Amsterdam op de terugreis uit Praag na hun deelname aan de Internationale Wiskunde Olympiade 1984.

Oplossing van *Remko Kootstra* (Ommen) (enigszins bewerkt):

Als in de binaire schrijfwijze van het natuurlijke getal n precies k enen voorkomen, dan eindigt $n!$ op $n-k$ nullen. Bewijs: met volledige inductie. Voor $n=1$ klopt het. Stel nu dat het voor n geldt, dan bewijzen we dat het ook voor $n+1$ geldt.

- 1 Als n even is, dan bevat $n+1$ precies één 1 meer dan n , want de laatste 0 wordt in een 1 veranderd. Als $n!$ eindigt op $n-k$ nullen, is het deelbaar door 2^{n-k} . Hetzelfde geldt dan voor $(n+1)!$, want $n+1$ is oneven. Wegens $n-k = (n+1) - (k+1)$ klopt de bewering dus.
- 2 Als n oneven is, eindigt n op een zeker aantal, zeg s , enen. Die worden in $n+1$ allemaal nul, en de nul vóór die s enen verandert in een 1. Als n dus k enen bevat, dan bevat $n+1$ precies $k-s+1$ enen. Volgens

de inductieveronderstelling eindigt $n!$ op $n-k$ nullen. Het getal $n+1$ eindigt op s nullen, dus $(n+1)!$ eindigt op $(n-k)+s=(n+1)-(k-s+1)$ nullen, waarmee het bewijs voltooid is.

Bekijk nu het getal

$$n! - (n-1)! = (n-1) \cdot (n-1)!$$

Dit getal eindigt binair op n nullen dan en slechts dan als het aantal nullen waarop $n-1$ eindigt, plus het aantal nullen waarop $(n-1)!$ eindigt gelijk is aan n . Uit het bovenstaande volgt dat $n-1$ dan even moet zijn, en op precies één nul meer moet eindigen dan er enen in voorkomen. Met andere woorden, bevat $n-1$ precies t enen, dan moet $n-1$ op $t+1$ nullen eindigen. Voorbeelden: $n-1 = 100$ (binair, dus decimaal $n-1 = 5$), $n-1 = 101000$ (decimaal: $n-1 = 40$) en $n-1 = 11111000000$ (decimaal: $n-1 = 1984$).

Er waren 12 inzendingen, die allemaal onderdeel a correct oplosten, maar alleen *Remko* gaf voor het tweede deel een overtuigend bewijs. Alleen hij krijgt dus een prijs voor deze opgave.

PO 81

Aan het begin van een feestje met 9 deelnemers hebben sommige mensen elkaar ter begroeting gezoend. Bewijs dat minstens één van de volgende twee beweringen waar is:

- 1 Er zijn minstens drie mensen die elkaar geen van alle gezoend hebben.
 - 2 Er zijn minstens vier mensen die elkaar allemaal gezoend hebben.
- (Het zoenen was steeds wederzijds: ieder die een zoen kreeg, gaf er ook een terug.)

Oplossing van *Joris van der Hoeven* (3 vwo, Pieterburen):

Het is niet mogelijk dat elk van de deelnemers 5 andere gezoend heeft en 3 niet, want $(9 \times 3)/2$ is geen geheel getal. Daarom moet een van de deelnemers

- a 4 of minder deelnemers hebben gezoend, of
- b 6 of meer deelnemers hebben gezoend.

a Dan zijn er 4 of meer deelnemers die hij niet gezoend heeft, en als 2 of meer hiervan elkaar niet gezoend hebben dan is voorwaarde 1 vervuld. Als de vier of meer overgeblevenen elkaar wel allemaal gezoend hebben, dan is voorwaarde 2 vervuld.

b Als één van deze 6 (of meer) twee anderen (of minder) heeft gezoend, en twee (of meer) van de drie (of meer) overgeblevenen elkaar niet gezoend hebben, dan is voorwaarde 1 vervuld. Als de drie (of meer) overgeblevenen elkaar wel allemaal gezoend hebben, dan is voorwaarde 2 vervuld.

Als één van deze 6 (of meer) overgeblevenen echter drie (of meer) anderen heeft gezoend, en 2 (of meer) van deze drie (of meer) elkaar ook, dan is aan 2 voldaan. Als deze drie (of meer) elkaar echter geen van alle gezoend hebben, dan is aan 1 voldaan.

Er waren 7 inzendingen; alleen die van *Joris van der Hoeven*, *Remko Kootstra* (Ommen), en *Dirk Ophoff* (Bedum) waren correct. Prijzen: *Joris van der Hoeven* en *Dirk Ophoff*.



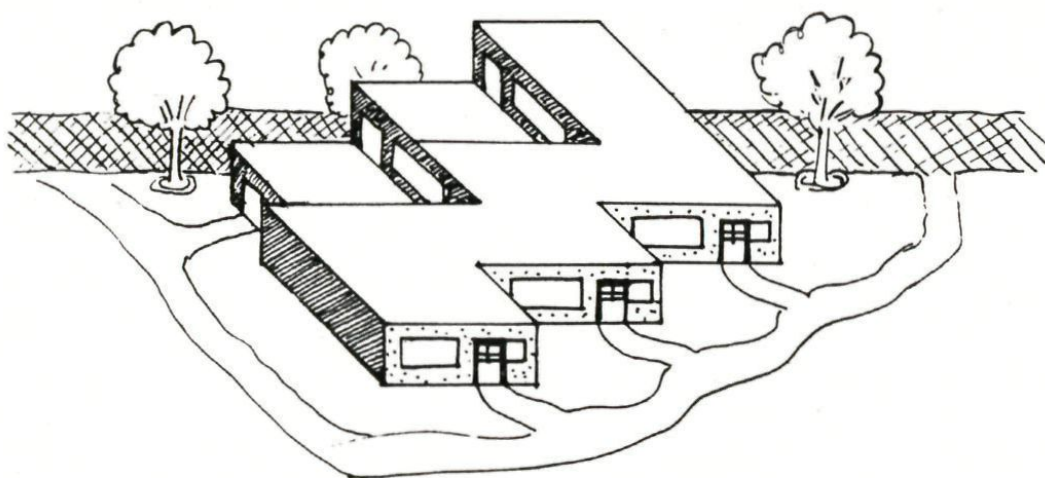
Redactioneel

In dit nummer zoals beloofd, de uitslag van onze prijsvraag 'Voorspoedig 1986'. Ook andere tijdschriften schreven prijsvragen uit die betrekking hadden op 1986. Zo vroeg het Duitse *Bild der Wissenschaft* het jaartal 1986 in een wiskundige formulering te verwerken. Twee inzendingen die in dat blad gepubliceerd werden, willen we hier noemen. Dat zijn $1^3 = 9^3 - 8^3 - 6^3$ van Paul Sahmel uit Oberhausen, en $(1+9)^2 = 8^2 + 6^2$ van Hugo Grathwohl uit Reutlingen.

Wat betreft de prima priemgetallen: de jacht duurt nog voort. We ontvingen enkele inzendingen, en gaan nu na of die tot vermeldenswaardige resultaten leiden.

Op bladzijde 26 vind je opnieuw een artikel over een regelmatige vierdimensionale figuur ('De regelmatige 5-cel'). In het volgende nummer zullen we nog een aantal van dergelijke figuren behandelen, zodat je dan een volledig overzicht van deze figuren hebt.

Van andere strekking is echter de onmogelijke figuur die *Theo Smits* uit Nijmegen ons samen met het onmogelijke dam-schaakbord (zie vorig nummer) ons zond: een huis waarin je zonder ook maar één trap te hoeven klimmen, kunt genieten van een heerlijk uitzicht, zoals Theo Smits zijn tekening toelicht.



Tekeningen: Armand Haye, Amsterdam.

Foto's en andere illustraties: Martin Rense, Amsterdam (omslag, blz. 14, 17, 18); Nederlandse Spoorwegen, Utrecht (blz. 4); Hessel Pot, Woerden (blz. 6, 32, 33); Rijkswaterstaat/Deltadienst, Zierikzee (blz. 21); Klaas Lakeman, Amsterdam (blz. 27, 28, 29, 30, 31); Jan van de Craats, Oosterhout (NB) (blz. 31); Theo Smits, Nijmegen (blz. 36).

© 1986 Redactie Pythagoras - ALLE RECHTEN VOORBEHOUDEN, NADruk OF WEERGAVE, GEHEEL OF GEDEELTELIJK, IN WELKE VORM DAN OOK, ZONDER SCHRIFTELIJKE TOESTEMMING VAN DE REDACTIE VERBODEN.

Pythagoras wiskunde tijdschrift voor jongeren

Een uitgave onder auspiciën van de Stichting Christiaan Huygens en de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Redactie: Jan van de Craats, Klaas Lakeman, Hessel Pot, Hans de Rijk.

Redactiesecretariaat: Klaas Lakeman, Cornelis Krusemanstraat 60^{II}, 1075 NS Amsterdam (NL).

Inhoudsopgave no 5, 25^e jaargang

Per koets door de bocht / **1**

Henk Mulder

De middenslijn van vier rechten / **5**

Hessel Pot

Het laagste maximum / **7, 13**

Voorspoedig 1986-uitslag / **8**

Hessel Pot/Klaas Lakeman

Twee-honderd-zeven-tien-duizendste / **11**

Hessel Pot

Een vijfhoeksvulling / **12**

Hessel Pot

Reis om de wereld / **14**

Martin Rense

Wortelvormen uit vroeger tijden / **20**

Model voor de Noordzee / **21**

Klaas Lakeman

Denkertjes / **24**

Pi in 15 (!) tweeën / **25**

Hessel Pot

Drinkersparadijs / **25**

Hessel Pot

De regelmatige 5-cel / **26**

Klaas Lakeman

De vierhoeksstelling van Van Aubel / **32**

Hessel Pot

Pi opnieuw op rijm / **33**

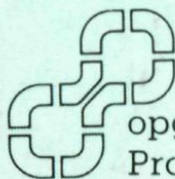
E. C. Buissant des Amorie

Pythagoras Olympiade / **34**

Jan van de Craats

Redactioneel / **36**

Pythagoras is een uitgave van
stichting ivio lelystad



voor onderwijs en
volksontwikkeling
opgericht in 1936 door
Prof. dr. Ph.A. Kohnstamm

Abonnementsprijzen per jaar

Nederland / Europa* f 19,50

België Bfrs 390

Overigelanden f 29,50

Losse nummers f 5,—

Gecomb. abon. met

Archimedes f 35,—

* Europa m.u.v. de Oostblokl.

stichting ivio lelystad, postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL).
tel. 03200-26514.

Postgiro Nederland: 287934. Postcheck België: 000-0130850-94

Bankrelatie: NMB. Lelystad rek. crt. nr. 66.27.11.653