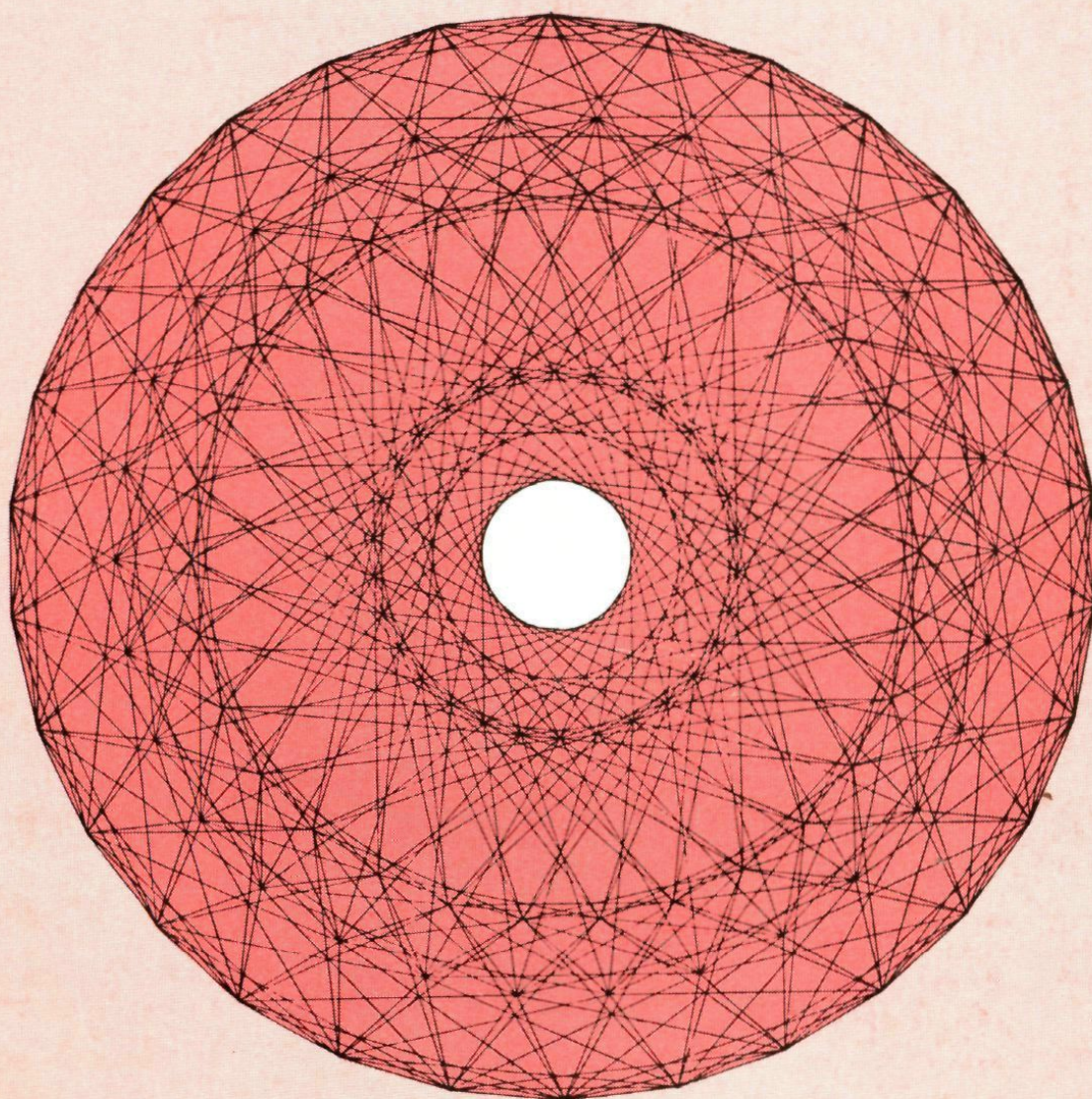




Pythagoras



wiskunde tijdschrift voor jongeren

stichting ivio 'lelystad

25e jaargang
nr. 6
juli 1986

Achilles en de schildpad

Ter inleiding van het artikel 'Eindeloze optellingen' op bladzijde 8 halen we de oude paradox van Achilles en de schildpad nog eens op.

De vlugvoetige Achilles wordt uitgedaagd door de snelste schildpad van het oude Griekenland. Beiden zijn zeer regelmatige lopers, ze houden steeds dezelfde snelheid aan: Achilles 10 m/s en de snelle schildpad 1 m/s. De laatste heeft bij de start een voorsprong van honderd meter bedongen.

Verscheidene Griekse filosofen en wiskundigen zijn naar de baan gekomen, onder wie de beroemde *Zeno* uit de Griekse kolonie Elea in Zuid-Italië. Ze bespreken de kansen van beide lopers. Hun (verrassende?) conclusie blijkt te zijn dat *Achilles niet zal winnen!*

Hij haalt de schildpad nooit in want:

als Achilles na 100 m lopen het startpunt S_0 van de schildpad bereikt, is deze inmiddels 10 m verder (plaats S_1); Achilles gaat door naar S_1 , maar als hij daar aankomt, is de schildpad weer 1 m verder (plaats S_2);

als Achilles S_2 bereikt, is de schildpad 10 cm verder (S_3);

als Achilles S_3 ... , ... 1 cm verder (S_4);

als Achilles S_4 ... , ... 1 mm verder (S_5);

als Achilles S_5 ... , ... 0,1 mm ...

als ... , ... 0,01 mm ...

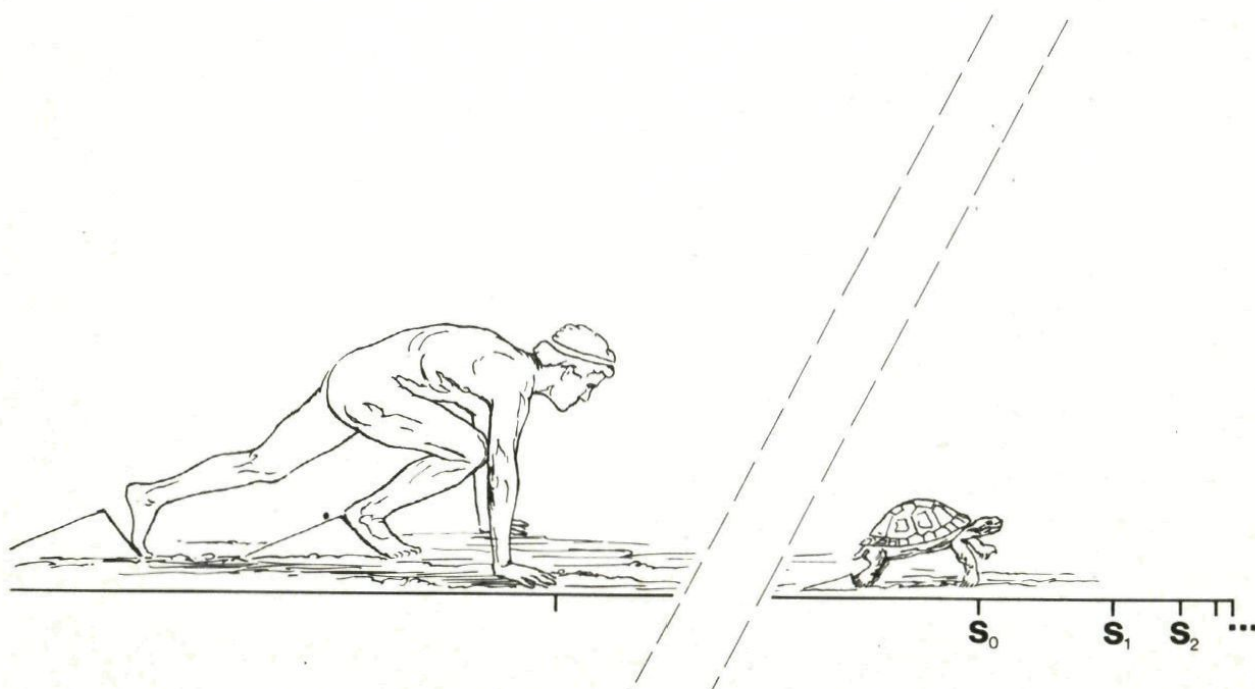
als ... , ... 0,001 mm ...

...

...

...

...



En dús, concluderen de geleerde heren, zal Achilles de schildpad wél zo goed als helemaal inhalen maar nóóit passeren. Of toch wel? Als je denkt van wél, dan zal er toch *ergens* een punt van de baan moeten zijn waar ze *precies gelijk* liggen. Hoever ligt dat punt bij het startpunt van Achilles vandaan?

Volgens de redenering van de geleerden zal die afstand gelijk zijn aan het totaal van:

$$100\text{ m} + 10\text{ m} + 1\text{ m} + 0,1\text{ m} + 0,01\text{ m} + 0,001\text{ m} + 0,0001\text{ m} + \dots, \text{ enz.}$$

Maar zo'n optelling zonder einde kan toch nooit tot een uitkomst leiden?

Het startschot klinkt, de lopers liggen meteen op snelheid, en ... Achilles passeert de schildpad!! De geleerden zien het voor hun ogen gebeuren, en ze zien ook precies wáár het inhaalpunt is.

Conclusie: bij zulke eind-loze optellingen kan het tóch zinvol zijn om over het bestaan van een 'totaal' te spreken. Het lukt alleen niet om dat totaal te vinden via de gewone regels voor het optellen van breuken. Dat zou een werk zijn zónder einde, waarmee vaak wel een benaderend, maar nooit een exact antwoord gevonden wordt. Voor dat laatste heb je een andere truc nodig, probeer daarvoor de onderstaande herleiding te volgen.

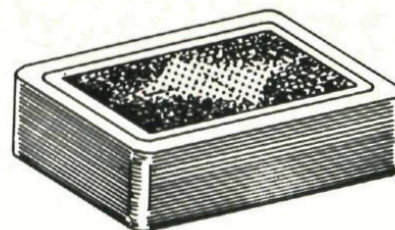
$$\begin{aligned} 100 + 10 + 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + \dots &= \\ &= 1/9 \times 9 \times (100 + 10 + 1 + 0,1 + 0,01 + \dots) = \\ &= 1/9 \times (10-1) \times (100 + 10 + 1 + 0,1 + 0,01 + \dots) = \\ &= 1/9 \times \left[\begin{array}{l} 10 \times (100 + 10 + 1 + 0,1 + 0,01 + \dots) + \\ -1 \times (100 + 10 + 1 + 0,1 + 0,01 + \dots) \end{array} \right] = \\ &= 1/9 \times \left[\begin{array}{l} 1000 + 100 + 10 + 1 + 0,1 + 0,01 + \dots + \\ -100 - 10 - 1 - 0,1 - 0,01 - \dots \end{array} \right] = \end{aligned}$$

Nu de 'truc': tussen de haken vallen de twee eindloze staarten tegel elkaar weg. Over blijft alleen

$$\begin{aligned} &= 1/9 \times 1000 = \\ &= 111\frac{1}{9} \end{aligned}$$

Het eindloze is toch bedwongen: het inhaalpunt ligt op $111\frac{1}{9}$ meter van het startpunt van Achilles. En dat klopte juist met wat de toeschouwers hadden waargenomen.

Waar zitten de azen?



Als een stapeltje van 52 speelkaarten goed geschud is, valt er weinig interessants te zeggen over de vraag op welke plaats in het stapeltje de schoppen-aas zit. Die kaart kan natuurlijk evengoed bovenop zitten als onderop, of op één van de 50 plaatsen daartussen.

Kijken we naar de plaats van twee speciale kaarten, laten we zeggen de twee zwarte azen, dan is de kans dat die op de 7e en de 24e plaats zitten evengroot als dat ze op de 30e en de 49e plaats zitten. Die kans is weer voor elk tweetal plaatsnummers evengroot. Nog steeds weinig interessant. Maar nu het volgende:

*Iemand legt een goed geschud spel kaarten (dicht) voor je op tafel, en vraagt je te raden op welke plaats **de bovenste zwarte aas** zit. Nadat je een plaatsnummer genoemd hebt, wordt gekeken of het klopt, in dat geval krijg je een taart. Welk nummer zou je noemen?*

Duidelijk is dat die eerste zwarte aas niet op de laatste (de 52e) plaats kan zitten, want de andere zwarte aas moet er-nog ná komen. Maar de plaatsen 1 t/m 51 zijn allemaal mogelijk. Maakt het nu weer niet uit welke je kiest?

Het verrassende (?) antwoord

De kansen zijn nu wel degelijk verschillend. Als je daaraan twijfelt moet je het maar eens echt uitproberen (een keer of tien/twintig).

De allereerste plaats van het stapeltje blijkt je de grootste kans te geven op de taart. Hoe is zo'n resultaat te beredeneren? Wel, als je alle (*gelijkwaardige*) plaatsnummer-combinaties voor de twee zwarte azen opschrijft – van af (1;2) tot aan (51;52) zijn dat er 1326 – dan zitten daar 51 paren bij met het nummer 1 als laagste. En er is maar één enkele combinatie met nummer 51 als laagste.

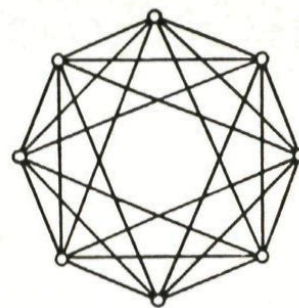
Zo is ook te beredeneren dat je voor de *tweede* zwarte aas juist moet gokken op de *laatste* plaats.

Met alle vier de azen

We kijken niet meer naar de kleur van de azen, en kunnen dan vragen: welke plaats gok je voor de eerste aas?, welke voor de tweede?, welke voor de derde?, en welke voor de vierde aas?

Misschien dat je ook al vóór dat je in de vijfde of de zesde klas wat van kansrekening leert, wel kunt uitvlooien dat de plaatsnummers waar je bij die vier vragen op moet gokken **1, 18, 35** en **52** zijn. (Als je tenminste van taart houdt.)

De regelmatige 16-cel

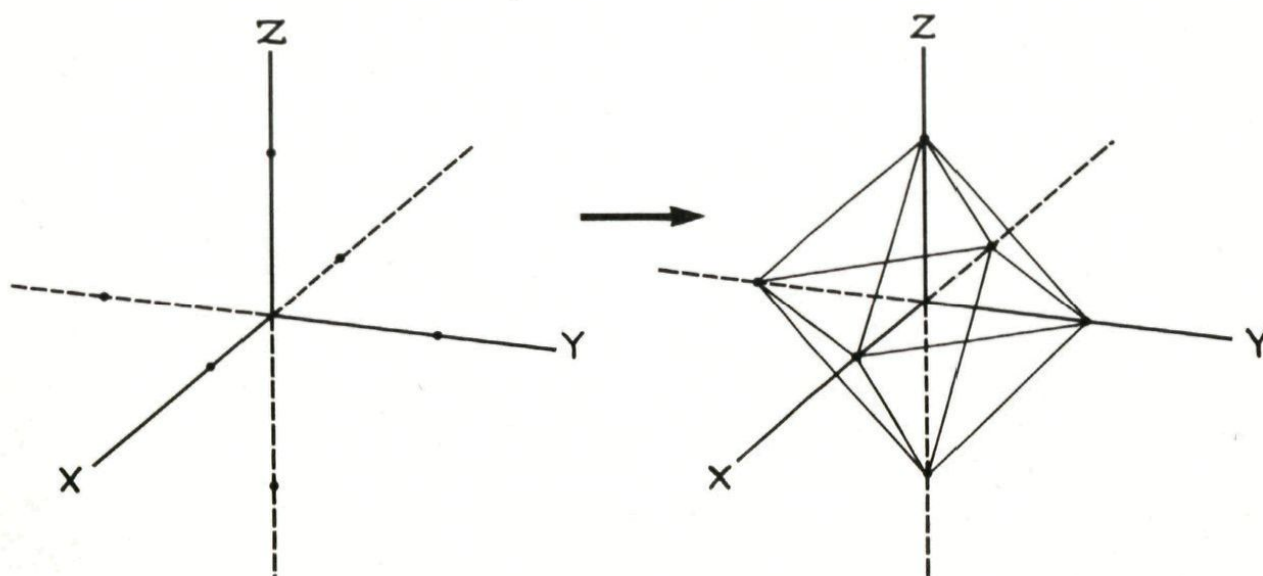


De regelmatige 16-cel ontstaat door een constructie- of tekenvoorschrift voor een regelmatig achthoekig vlak voort te zetten in de 4-D ruimte. Net als bij de hyperkubus en de regelmatige 5-cel zullen we weer laten zien hoe dat gaat. Daarna zullen we de 16-cel op de 3-D ruimte projecteren. Aan de hand van een weergave van die projectie laten we dan zien dat de 16-cel te noteren is als $C_{16} = (8, 24, 32, 16)$.

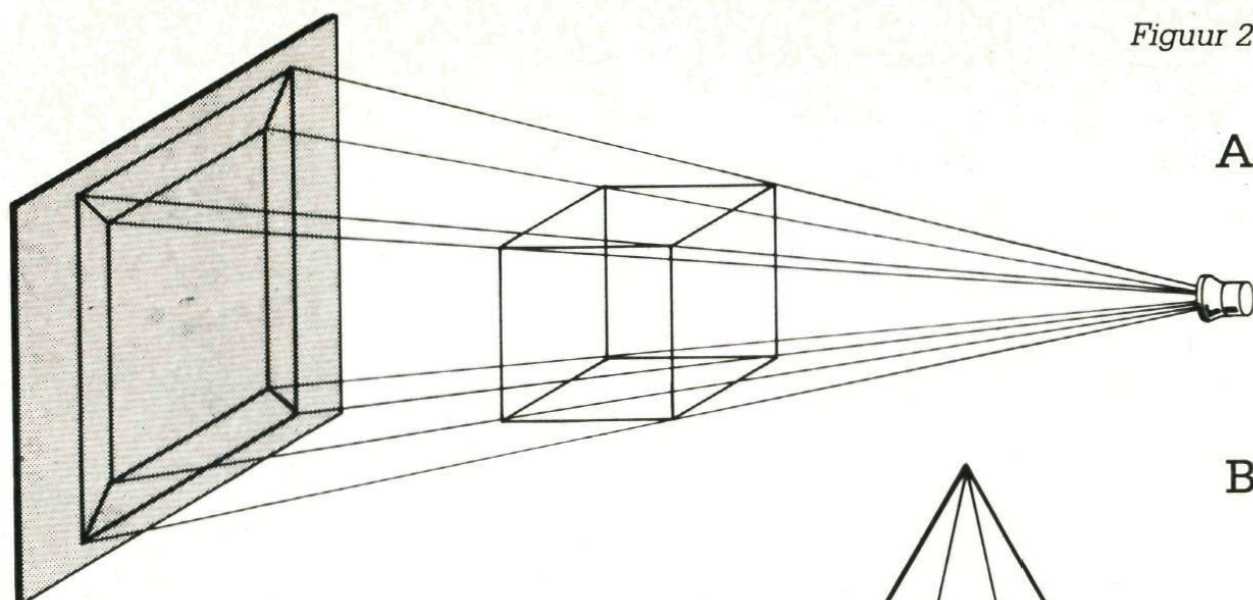
Het regelmatig achthoekig vlak

We gaan uit van een rechthoekig assenstelsel voor de 3-D ruimte. Dat bestaat uit drie loodrecht op elkaar staande assen (een x-as, een y-as en een z-as) die elkaar snijden in één punt O, de oorsprong. Wanneer we op elk van die assen aan weerskanten van O gelijke stukken afpassen, dan krijgen we zes punten (figuur 1A).

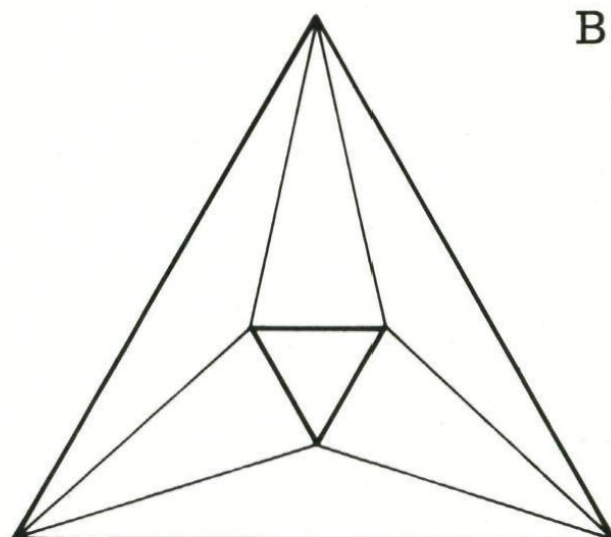
Hieruit kan het regelmatig achthoekig vlak worden geconstrueerd. Daarvoor moet je telkens drie punten die op verschillende assen liggen, met elkaar door rechte lijnen verbinden. Dat kan op acht verschillende manieren. Elk van die manieren levert een regelmatig driehoek, en alle acht driehoeken samen vormen het regelmatig achthoekig vlak (figuur 1B).



Figuur 1. Constructie van een regelmatig achthoekig vlak.



B



De regelmatige 16-cel

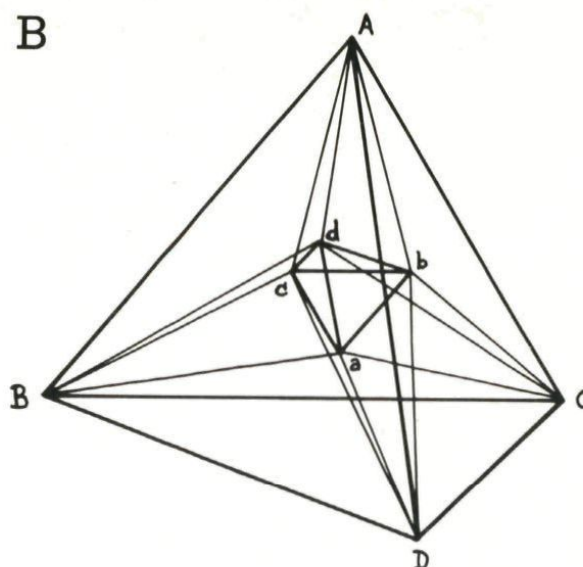
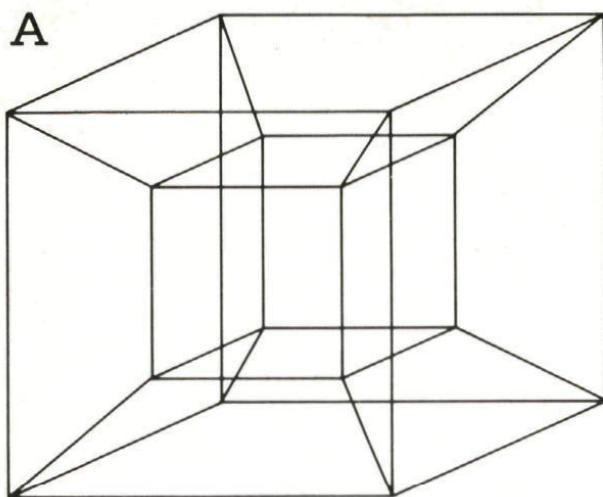
De zojuist beschreven bewerking kun je ook in de 4-D ruimte uitvoeren. Het rechthoekige assenstelsel bestaat daar uit vierloodrecht op elkaar staande assen, die alle weer door een gezamenlijk punt O, de oorsprong, gaan. Passen we wederom op elk van die vier assen aan weerszijden van O gelijke stukken af, dan krijgen we in totaal acht punten. Daarvan ga je nu telkens vier punten die op verschillende assen liggen, met elkaar door rechte lijnen verbinden. Dat kan op *zestien* manieren. Elke manier levert een regelmatig viervlak. Het resultaat wordt dus een figuur die wordt 'begrensd' door *zestien* regelmatige viervlakken: de *regelmatige 16-cel*.

Geleerd van Hyper

Natuurlijk wil je iets 'tastbaars' voor je zien. Daarom zullen we de regelmatige 16-cel op de 3-D ruimte projecteren, en die projectie vervolgens in een tekening weergeven. Dat gaat op de manier die Hyper de Piep ons in 'Reis in vier dimensies' (Pythagoras 25-4) voor de hyperkubus heeft geleerd (figuur 2A). (Officieel wordt deze

methode overigens *perspectivistische projectie* genoemd.)

We zullen dat eerst aan een draadraam van het regelmatig achthoekig demonstreren. Dat houden we zó voor een wand dat twee driehoekige zijvlakken er evenwijdig aan lopen. Houden we op enige afstand van dat draadraam een lamp, en schijnen we daarmee in de richting van de wand, dan zie je op de wand hetzelfde als in figuur 2B. De twee driehoekige zijvlakken evenwijdig aan de wand zijn niet vervormd. Het zijn regelmatige driehoeken gebleven, ook al is de een (de driehoek het dichtstbij de wand) wat kleiner dan de ander. De andere zes driehoekige zijvlakken zijn vervormd. Het zijn nog wel driehoeken, maar niet regelmatig meer.



Figuur 3. A Projectie van de hyperkubus als kubus in een kubus.

B Projectie van de 16-cel als viervlak in een viervlak.

Met een draadraam van de regelmatige 16-cel kan Hyper hetzelfde doen. We krijgen daar dan een projectie van op de 3-D ruimte. En als we die in een (tweedimensionale) tekening weergeven krijgen we figuur 3B. We zien daarin een groot regelmatig viervlak $ABCD$ met daarbinnen een kleiner $abcd$ dat op zijn kop staat. Op het hoekpunt met dezelfde letter na, is ieder hoekpunt van het grote viervlak verbonden met de hoekpunten van het kleine. Dus A met b , c en d , maar niet met a , enz.

$C_{16} = (8, 24, 32, 16)$

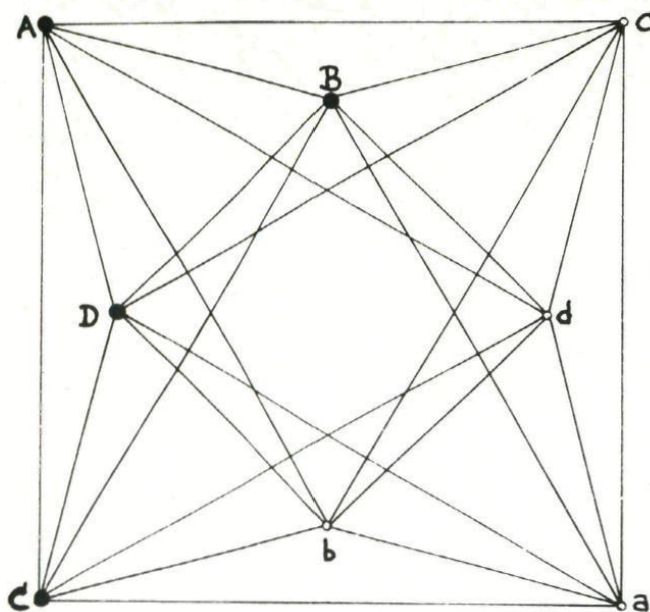
Aan de hand van figuur 3 zijn niet alleen de zestien 'begrenzende' regelmatige viervlakken terug te vinden, maar zijn ook andere eigenschappen gemakkelijk na te gaan. Zoals we al zagen, heb je een groot viervlak $ABCD$ en een klein viervlak $abcd$. In de 4-D ruimte zouden die 'tegenover elkaar' liggen.

Dan heb je de 4 viervlakken $Abcd$, $Bacd$, $Cabd$ en $Dabc$, en 4 die (althans in notatie) daaraan te-

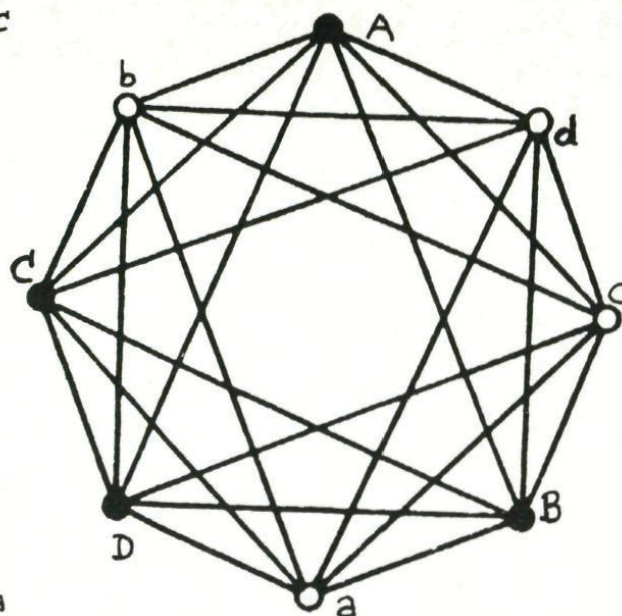
gengesteld zijn: $aBCD$, $bACD$, $cABD$ en $dABC$. En ten slotte heb je nog 6 viervlakken die te noteren zijn met twee hoofdletters en twee kleine letters: $ABcd$, $AbCd$, $AbcD$, $abCD$, $aBcD$, en $aBCd$. Dus je komt inderdaad op $1+4+6+4+1 = 16$ regelmatige viervlakken uit.

Dat er 8 hoekpunten zijn wisten we al. Het aantal ribben komt overeen met het aantal verbindingslijnen, en is gelijk aan 24 (ga zelf maar na!) Blijft nog over het aantal zijvlakken, alle bestaande uit regelmatige driehoeken. Dat zijn er 32. Ga maar na: 4 van het grote viervlak, 4 van het kleine, 4 keer 3 verbindingsvlakken van één hoekpunt van het grote met twee van het kleine, en omgekeerd 4 keer 3 verbindingsvlakken van één hoekpunt van het kleine met twee van het grote.

Noteren we de resultaten in de vorm die we bij de regelmatige 5-cel (zie 'De regelmatige 5-cel', Pythagoras 25-5) invoerden, dan wordt dat $C_{16} = (8, 24, 32, 16)$, of korter (8, 24, 32, 16).



Figuur 4



Figuur 5

In de figuren 4 en 5 hebben we nog twee andere projecties van de regelmatige 16-cel weergegeven. Net als in het geval van de hyperkubus zul je toe moeten geven, dat die misschien wel fraai zijn, maar veel minder inzichtelijk

dan de tekening van de projectie die Hyper ons leerde. Om vergelijking van de figuren 4 en 5 met figuur 3B te vergemakkelijken, hebben we overeenkomstige hoekpunten met dezelfde letters aangegeven.

Wiskunde in Utrecht

De subfaculteit Wiskunde van de Rijksuniversiteit van Utrecht heeft een aardige brochure samengesteld waarin een rijk geschakeerd beeld wordt geschetst van de wiskunde zoals die aan deze universiteit wordt beoefend, en de banden die er zijn tussen wiskunde en allerlei toepassingsgebieden. Een paar titels van hoofdstukken: Efficiënt fietsenmaken, Kansrekening voor tanden en kiezen, Denkbeeldige machines onder elkaar. Je vindt er ook stukjes in over de werkwijze van de zuivere wiskunde, over modellen voor supernovae-uitbarstingen of oceaanstromingen, over wiskunde als schoolvak voor iedereen. Kortom, een bonte caleidoscoop vol verrassingen, zeer de moeite waard als je wel eens wat meer over wiskunde wilt weten.

De brochure, die onder andere aan alle scholen in Nederland is toegestuurd, is verkrijgbaar bij de *Subfaculteit Wiskunde van de Rijksuniversiteit Utrecht*, Postbus 80010, 3508 TA UTRECHT (tel. 030-531433).

Eindeloze optellingen

De titel lijkt te slaan op iets onzinnigs: als je steeds doorgaat met optellen wordt het totaal almaar groter. Je beweegt je verder en verder in de richting van het oneindige en het lijkt niet in het minste interessant om met het saaie optelwerk eindeloos door te gaan.

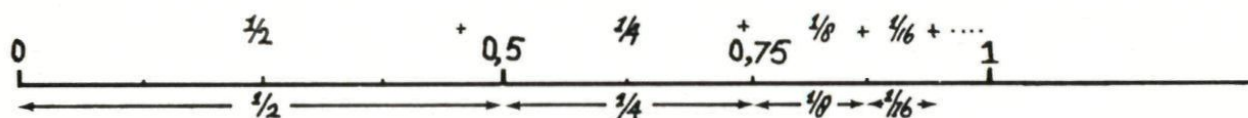
Maar vergis je niet. Er is een speciaal soort eindeloze optellingen die juist wél interessant zijn. Over zulke (*convergerende*) optellingen gaat dit stukje.

Het simpelste voorbeeld van dit soort is

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \text{enzovoort.}$$

Er worden hier geen gehele getallen opgeteld, maar breuken. En wel breuken die snel kleiner en kleiner worden, zódanig dat het opgetelde totaal niet meer naar het oneindige dóórloopt. Het blijkt dat er een bepaalde vaste grens is aan te geven die nooit helemaal precies bereikt wordt, hoe lang je ook verder gaat met optellen. Je noemt dat de grenswaarde of limietwaarde van zo'n oneindige optelling.

De vraag is nu natuurlijk: waar ligt die grens, bij welk punt van de getallenlijn. Het voorbeeld van hierboven wordt simpel als je er een plaatje bij denkt, een stuk(je) getallenlijn:



Al optellend ga je van links naar rechts en je komt steeds dichterbij de grens van 1. De afstand die je er nog vóór bent wordt steeds weer gehalveerd, maar hoe lang je ook doorgaat, helemaal bereiken doe je die 1 niet!

Voor de eindeloze optelling $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \text{enz.}$ is 1 dus de limietwaarde. Nogal slordig zeggen we ook wel (omdat het een korter woord is) dat 1 de *som* is van de eindeloze optelling.

Met je rekendoosje

Zoek je nu je rekenmachientje op, en maak daarmee een flink stuk van dezelfde optelling $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \text{enz.}$

Het totaal komt snel dicht onder de 1. Hopelijk heb je een doosje waarmee je direct in het geheugen kunt optellen, dan hoeft je bij elke stap alleen het venstergetal te halveren.

Nu wat moeilijker gevallen. Probeer weer met je machientje te vinden waar de grenzen liggen van de volgende optellingen:

$$\frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \text{enz.} \rightarrow \dots ? \quad (A_3)$$

$$\frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5} + \text{enz.} \rightarrow \dots ? \quad (A_4)$$

Iets ingewikkelder:

$$\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \text{enz.} \rightarrow \dots ? \quad (B_1)$$

$$\frac{1^2}{2^1} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \frac{4^2}{2^4} + \frac{5^2}{2^5} + \text{enz.} \rightarrow \dots ? \quad (B_2)$$

$$\frac{1^3}{2^1} + \frac{2^3}{2^2} + \frac{3^3}{2^3} + \frac{4^3}{2^4} + \frac{5^3}{2^5} + \text{enz.} \rightarrow \dots ? \quad (B_3)$$

En zo kun je verder gaan met steeds hogere machten in de tellers (of ook nog met een ander grondtal in de noemers).

Als je bij het intoetsen nergens een vergissing maakt, zie je steeds een grens naderbij komen. Elders in dit nummer vind je wat die grenzen zijn. Nog andere varianten zijn:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \text{enz.} \rightarrow \dots ? \quad (C_1)$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \text{enz.} \rightarrow \dots ? \quad (C_2)$$

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \text{enz.} \rightarrow \dots ? \quad (C_3)$$

En zo voort.

Of ook nog:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{enz.} \rightarrow \dots ? \quad (D_3)$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{enz.} \rightarrow \dots ? \quad (D_4)$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \text{enz.} \rightarrow \dots ? \quad (D_5)$$

De grenswaarde blijkt vaak een breuk te zijn. Op je rekendoosje vind je alleen een decimale benadering van die breuk, het is niet altijd makkelijk om terug te vinden bij welke breuk die benadering hoort. En het is ook nog zo, dat veel eindeloze optellingen niet een breuk als 'som' hebben, maar een *irrationaal* getal (zoals $\sqrt{2}$ of π). Twee voorbeelden:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{enz.} \rightarrow \frac{\pi^2}{6}$$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{enz.} \rightarrow e \text{ (het euler-getal)}$$

Zulke ingewikkelde uitkomsten zijn niet meer te vinden door maar een stuk van de optelling te maken op je machientje (of op een grotere machiene) en dan te raden naar de echte grens. In de loop der tijden zijn er allerlei handigheidjes en systemen bedacht om zónder de optelling echt uit te voeren toch de grenswaarde te vinden. En, ook

belangrijk, om uit te maken of er wel een grenswaarde bestaat. Een verraderlijk voorbeeld is al het simpele:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \text{enz.} \rightarrow \dots ?$$

Je kunt op je machientje erg lang doorwerken zonder te kunnen zien welke grens je benadert. En op de lange duur worden de afrondingen van de breuken te groot om nog een betrouwbaar resultaat te geven. Via een handigheidje is aan te tonen dat deze optelling *geen* grens kent: als je maar lang genoeg doorgaat met optellen kom je over de 10, over de 100, over de 1000, ja over elke mogelijke grens heen. (De breuken in deze optelling vormen de zogenaamde *harmonische rij*; meer hierover vind je in een extra kader.)

Met een computer

Als je toegang hebt tot een computer kun je het voortdurende intoetsen automatiseren met een 'programma'. Je kunt dan ook in moeilijker gevallen op zoek gaan naar optel-grenzen. Bijvoorbeeld:

$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{4 \cdot 6 \cdot 8} + \text{enz.} \rightarrow \dots ? \quad (\text{E})$$

$$\frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \text{enz.} \rightarrow \dots ? \quad (\text{F})$$

Afwisselend optellen en aftrekken geeft weer andere resultaten. Bij alle hierboven genoemde voorbeelden is dat te proberen. Verrassende uitkomsten zijn:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \text{enz.} \rightarrow \ln 2$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{enz.} \rightarrow \frac{1}{4} \pi$$

$$2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^1} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{2^5} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{2^7} + \text{enz.} \rightarrow \sqrt{5}$$

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \text{enz.} \rightarrow \sqrt{2}$$

En zelfs:

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \text{enz.} \rightarrow \sin x$$

$$1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{enz.} \rightarrow \cos x$$

waarbij voor x elk getal mag worden ingevuld (met $\sin$ en $\cos$ als functies van hoeken in radialen). Neem bijvoorbeeld $x = 0$ of $\pi/6$ of $\pi/4$ of $\pi/3$ of $\pi/2$. Vooral bij kleine x -waarden wordt de grens al snel dicht benaderd. We zeggen in zo'n geval dat de som goed convergeert.

Na zoveel voorbeelden moet het niet moeilijk zijn om zelf nog weer andere te bedenken. Niet alleen de optellingen maar ook de variatiemogelijkheden zijn eindeloos.

Over hetzelfde onderwerp hebben we al eerder geschreven, zie Pythagoras 20-4 en 21-5.

Waarom hoort er bij de harmonische rij geen totaal?

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \text{enz.} =$$

(Verdeel deze optelling in stukken die steeds eindigen als de noemer een macht van 2 is.)

$$= (1) + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}) + (\frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \dots + \frac{1}{32}) + (\frac{1}{33} + \frac{1}{34} + \dots + \frac{1}{64}) + \text{enz.} \quad (1)$$

Kijken we naar de optelling tussen haakjes, dan is de *laatste* breuk steeds de *kleinste*. En verder is het *aantal* breuken tussen twee haakjes steeds gelijk aan *de helft van de laatste noemer*.

Het totaal van (1) zal dus zeker groter zijn dan het totaal van:

$$(1) + (\frac{1}{2}) + (2 \times \frac{1}{4}) + (4 \times \frac{1}{8}) + (8 \times \frac{1}{16}) + (16 \times \frac{1}{32}) + (32 \times \frac{1}{64}) + \text{enz.} = \\ = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \text{enz.} \quad (2)$$

Duidelijk zal zijn dat bij deze laatste eindeloze optelling géén bepaald getal als totaal is aan te nemen: als je lang genoeg doorgaat met optellen, ga je over alle grenzen heen. Maar de termen van optelling (1) waren zelfs nog groter dan die van (2), en daarom zal aan (1) ook zeker geen eindig totaal kunnen worden toegekend.

Nog anders

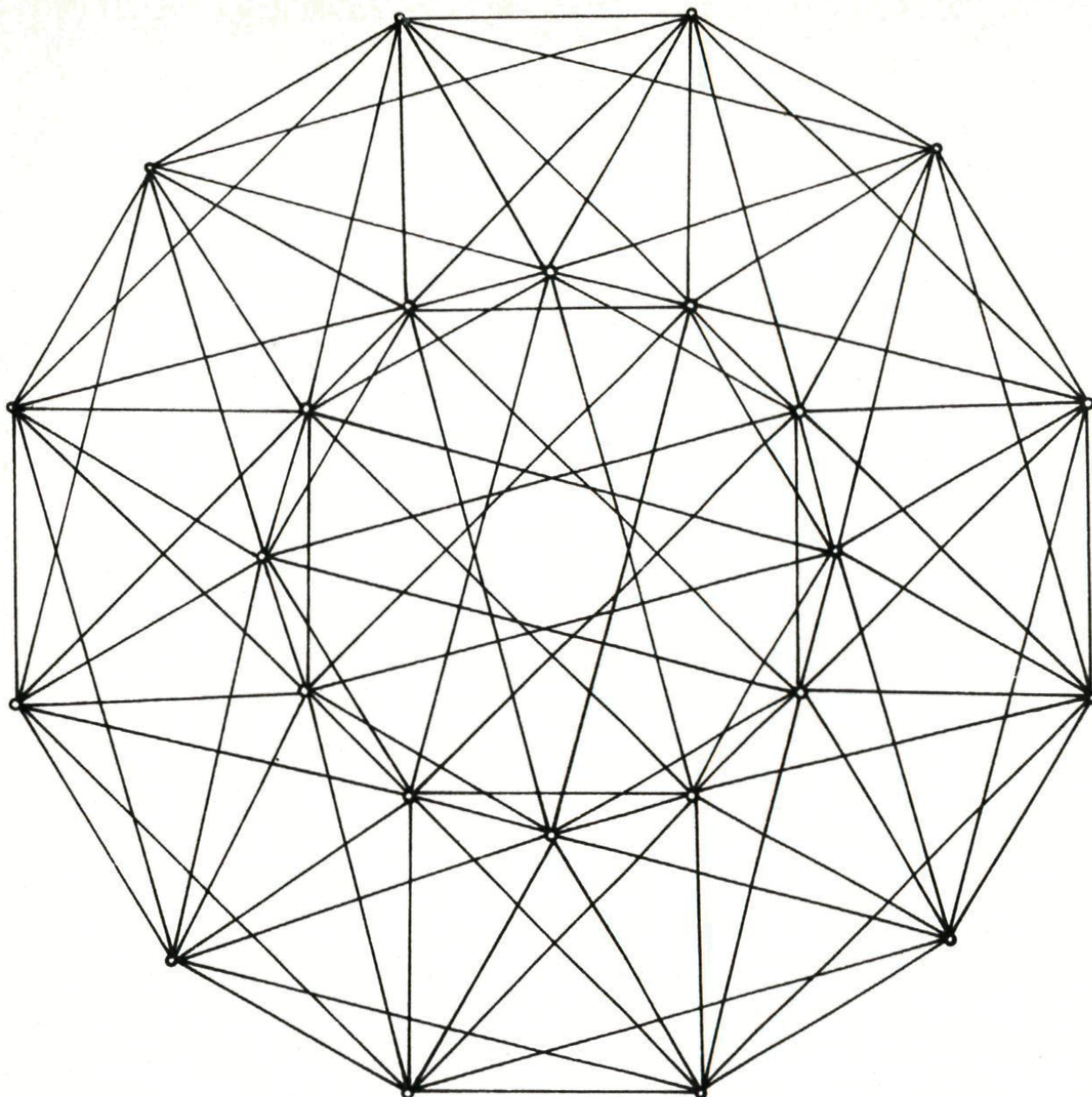
Dat het idee van een *eindig totaal* voor optelling (1) tot absurde consequenties leidt, zie je ook nog aan het volgende. De eindvorm is precies de beginvorm, maar tegelijkertijd óók gróter! Dus die vormen stellen niet een bepaald getal voor:

Het totaal van $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \text{enz.}$
zal groter zijn dan $> \quad = \quad > \quad = \quad > \quad =$

het totaal van $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \text{enz.}$
en dit is gelijk aan

het totaal van $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \text{enz.}$

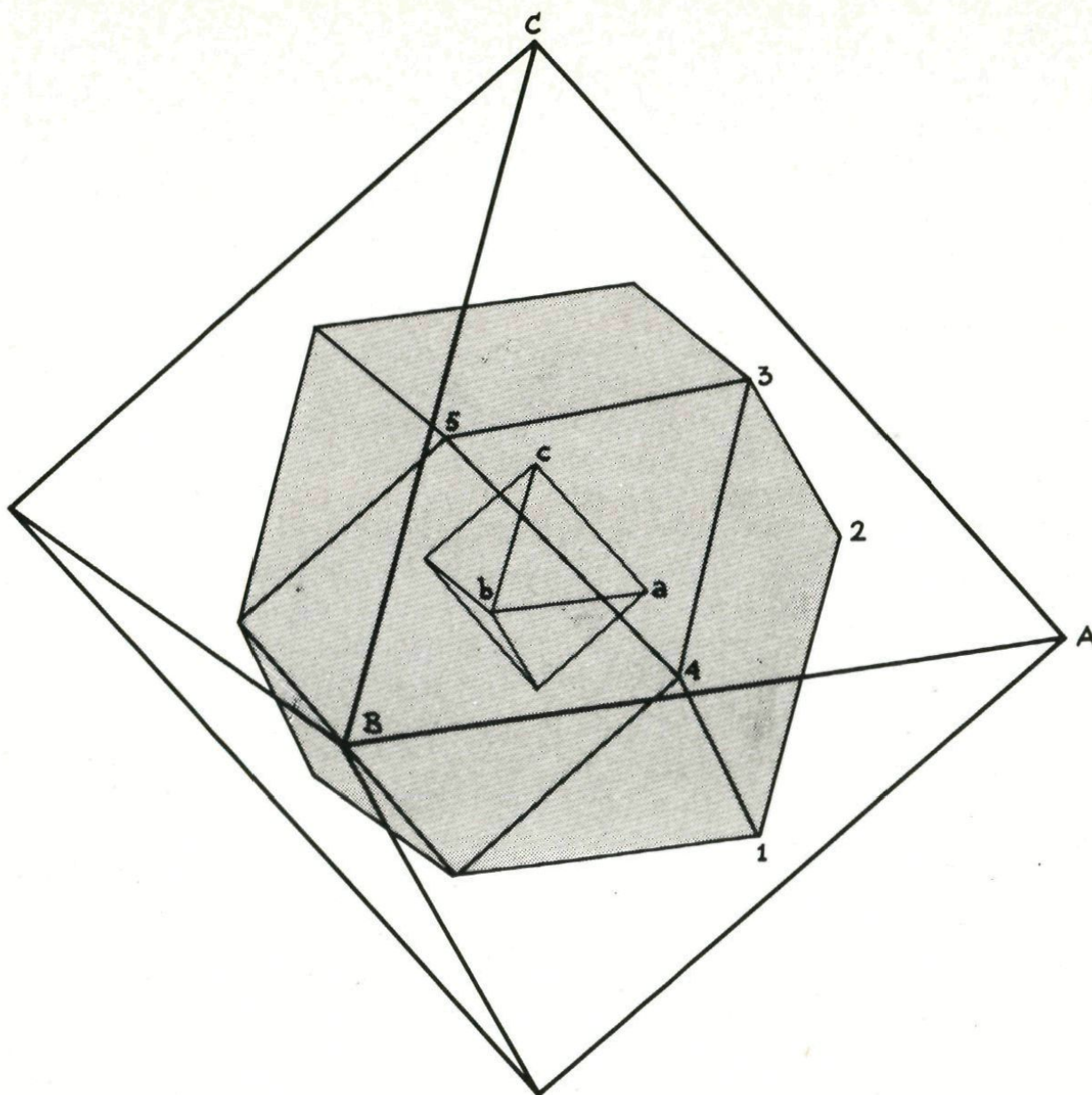
Soms is het verleidelijk om toch te spreken van het totaal van (1), namelijk het totaal *oneindig*. Je moet dan echter goed in de gaten houden dat 'oneindig' niet een getal is waar de rekenregels van gewone getallen voor gelden. En er wordt ook *niet* een bepaald punt van de wedstrijd baan door aangewezen waar Achilles de schildpad passeert.



De regelmatige 24-cel

De regelmatige 24-cel zullen we niet meer van het begin af aan opbouwen. Vanuit het regelmatige achthoek is dat wel mogelijk, maar een beschrijving daarvan is niet eenvoudig, en zou enkele bladzijden vergen. Daarom krijg je dan ook direct een (twee-dimensionale) weergave van een projectie van de 24-cel op de 3-D ruimte (figuur hierboven). Daarin kun je al gemakkelijk nagaan dat het aantal hoekpunten gelijk is aan 24, en het aantal ribben 96.

Verder kun je er ook al enigszins uit opmaken dat de zijvlakken driehoeken moeten zijn. Hoeveel dat er zijn is nauwelijks uit te maken. Laat staan dat je alle 24 cellen weet aan te wijzen! In dit artikel zullen we je er echter van proberen te overtuigen dat er inderdaad 24 cellen zijn met de vorm van een regelmatig achthoek.

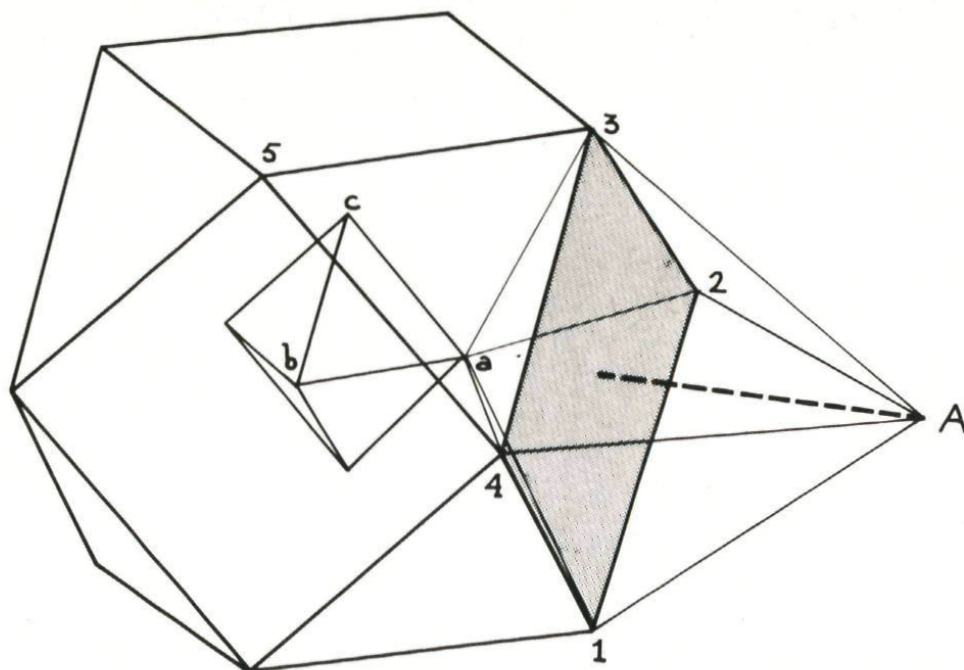


Figuur 1. Een groot regelmatig achthoekvlak (aangegeven met ABC...), met daarin een half-regelmatige veertienvlak (aangegeven met 12345...), en daar weer in een klein regelmatig achthoekvlak (aangegeven met abc...).

$C_{24} = (24, 96, 96, 24)$

We gaan uit van figuur 1: een regelmatig achthoekvlak met daarin een half-regelmatig veertienvlak en daar weer in een regelmatig achthoekvlak. Anders dan de figuur aan het begin is die ontstaan door de regelmatige 24-cel op de 3-D ruimte te projecteren op de manier die Hyper de Piep ons geleerd heeft. Dus volgens de perspectivische projectiemethode. Alleen

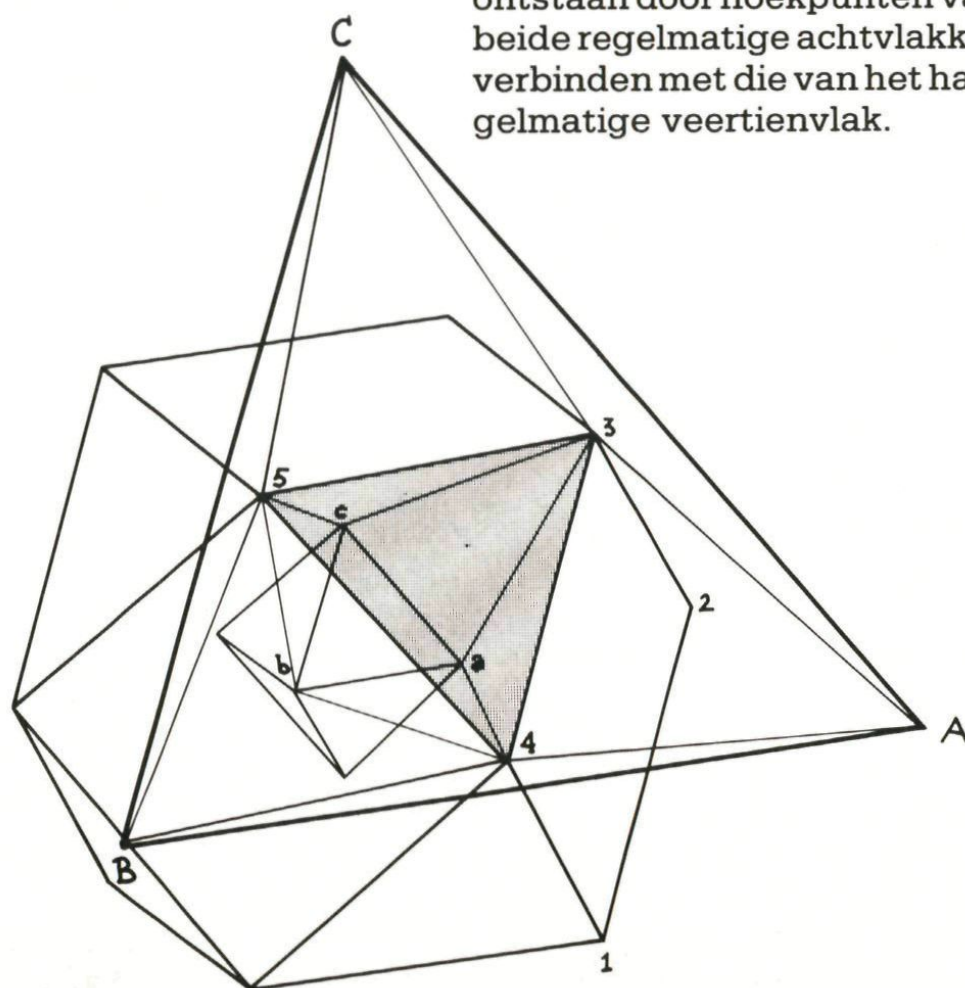
hebben we daar lang niet alle verbindingslintjes in aangegeven. Anders zou dat net als bij de figuur aan het begin ook weer tot een onoverzichtelijk geheel leiden. Alle hoekpunten vind je er echter wel in terug. Want de in totaal 24 hoekpunten van figuur 1 (6 van elk achthoekvlak en 12 van het veertienvlak) vormen de geprojecteerde hoekpunten van de regelmatige 24-cel.



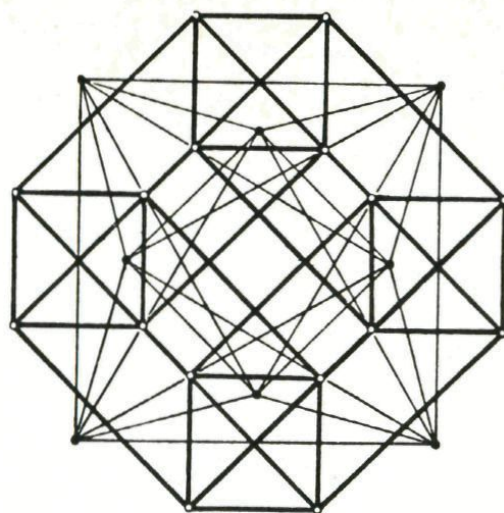
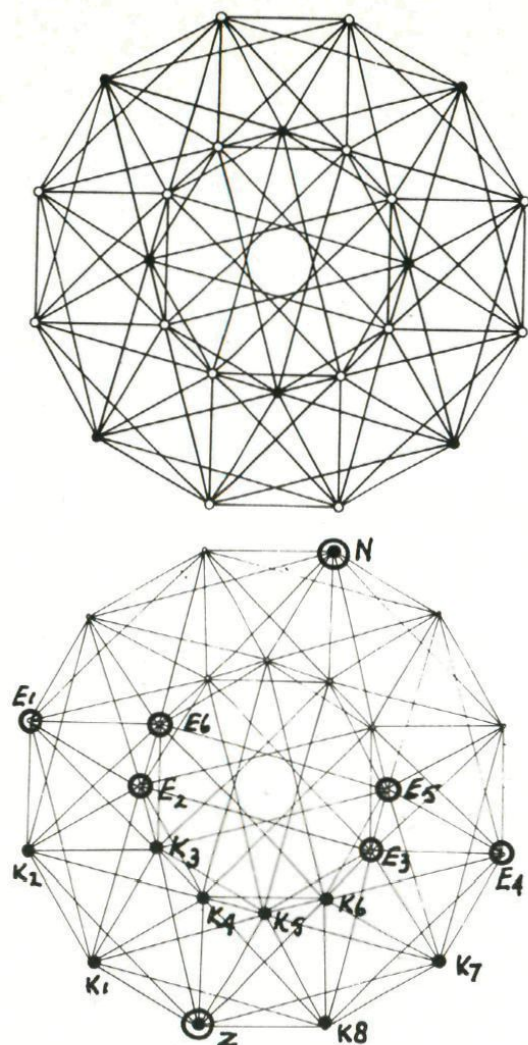
Figuur 2

Zoals we al eerder zagen bij de projectiemethode van Hyper (zie 'De regelmatige 16-cel', bladzijde 4), vormen ook hier weer het grote regelmatige achthoek en het kleine daarbinnen twee 'begrenzen-

de' cellen die in de 4-D ruimte 'tegenover elkaar' liggen. Die 'begrenzende' veelvlakken of cellen bestaan dus uit regelmatige achthoeken, en we hebben er alvast 2. De overige 22 cellen ontstaan door hoekpunten van de beide regelmatige achthoeken te verbinden met die van het half-regelmatige veertienvlak.



Figuur 3



Figuur 4. A De met een stip aangegeven 8 hoekpunten van de regelmatige 24-cel vormen een regelmatige 16-cel; de overige 16 hoekpunten een hyperkubus (zie B). C De 24 hoekpunten van de 24-cel kunnen ook als volgt worden verdeeld. Ga uit van twee diametrale punten N en Z; van Z gaan 8 ribben uit ZK_1, ZK_2, ZK_3 , enz. De punten K_1, K_2, K_3 , enz. vormen een kubus. Hetzelfde geldt voor N. De overige 6 hoekpunten E_1, E_2 , enz. vormen een regelmatig achthoekig vlak.

Aan weerskanten van vierkant 1234 van dat veertienvlak ligt een hoekpunt A van het grote en een hoekpunt a van het kleine achthoekig vlak. Door A en a met 1, 2, 3 en 4 te verbinden hebben we (weliswaar in projectie) er een cel bij (figuur 2). Zo kunnen we ook bij de overige 5 vierkanten van het veertienvlak te werk gaan. Dat levert ons dan nog eens 5 cellen op.

Als we al die verbindingslijnen ook daadwerkelijk zouden hebben getekend, dan zouden tevens de hoekpunten van de regelmatige driehoeken van het veertienvlak verbonden zijn met de hoekpunten van een grote driehoek (bijvoorbeeld 3, 4 en 5 met A, B en C) en die van een kleine (bijvoor-

beeld 3, 4 en 5 met a, b en c, figuur 3). Per driehoek van het veertienvlak levert dat dus steeds 2 cellen in de vorm van een achthoekig vlak. Aangezien het veertienvlak 8 regelmatige driehoeken bezit, krijgen we er op die manier 16 cellen bij. Zo komen we in totaal dus op $2+6+8+8 = 24$ 'begrenzende' achthoekig vlakken of cellen!

Die 24 'begrenzende' achthoekig vlakken bezitten 8×24 zijvlakken. Ieder zijvlak behoort echter tot 2 achthoekig vlakken. Dus het totale aantal zijvlakken is $\frac{1}{2} \times 8 \times 24 = 96$. Zo zijn we nu toch alles over de regelmatige 24-cel te weten gekomen, en kunnen hem dus noteren als $C_{24} = (24, 96, 96, 24)$, of korter $(24, 96, 96, 24)$.

De jacht op prima priemgetallen II

De buit is binnen



In het artikel 'Prima, prima!' (Pythagoras 25-1) hebben we het gehad over *prima R priemgetallen*, *prima L priemgetallen* en *prima de luxe priemgetallen*. Een prima R priemgetal is een priemgetal dat steeds een priemgetal blijft als de cijfers ervan achtereenvolgens van de rechterkant af worden weggelaten. Hetzelfde geldt voor prima L priemgetallen, maar dan worden de cijfers achtereenvolgens van de linkerkant af weggelaten. Een prima de luxe priemgetal is zowel prima R als prima L priemgetal.

Naar aanleiding van eerder genoemd artikel ontvingen we lijsten met prima priemgetallen. De resultaten daarvan werden vermeld in 'De jacht op prima priemgetallen' (Pythagoras 25-3). Het bleek dat geen van de inzenders meer dan 15 prima de luxe priemgetallen kon vinden. Er werd zelfs beweerd dat het er niet meer dan 15 konden zijn. Het bewijs daarvoor leek ons echter niet helemaal waterdicht. Daarom vroegen we op basis van een aantal uitspraken over prima priemgetallen een volledig bewijs te leveren, dan wel meer prima de luxe priemgetallen aan te dragen. Het bewijs is nu volledig gemaakt en daarmee is het vermoeden bevestigd dat er niet meer dan 15 prima de luxe priemgetallen zijn.

De uitspraken

We waren al gekomen tot de volgende uitspraken:

- 1 Een prima de luxe priemgetal kan niet beginnen met of eindigen op 33, 39, 93, of 99.
- 2 2, 5, 23 en 53 zijn de enige prima de luxe priemgetallen waarin de cijfers 2 of 5 voorkomen.
- 3 Elk prima de luxe priemgetal van meer dan twee cijfers bestaat slechts uit de cijfers 1, 3, 7 en 9.
- 4 Elk prima de luxe priemgetal van meer dan vier cijfers begint met 31, 37, 73 of 79, en eindigt op 13, 73, 37 of 97.

Alle *tussenliggende* cijfers zijn 3 of 9.

Een bewijs

Hier is een bewijs van *Pascal Rutten* uit Arnhem. Het gaat als volgt:

Een prima de luxe priemgetal (van meer dan vier cijfers) moet eindigen op 13, 73, 37 of 97. Door daarvoor drieën en negens te plaatsen (uitspraak 4) moet dit steeds weer een priemgetal opleveren. Door systematisch uitschrijven – zoals hieronder is gedaan – kun je dan maximaal tot een lengte van vijf cijfers komen,

namelijk 39397 of 99397. (Steeds wanneer een getal geen priemgetal is, is een ontbinding gegeven.)

313

$$913 = 11 \times 83$$

373

$$973 = 7 \times 139$$

337

937

397

997

3313

$$9313 = 67 \times 139$$

3373

$$9373 = 7 \times 1339$$

$$3337 = 47 \times 71$$

9337

$$3937 = 31 \times 127$$

$$9937 = 19 \times 523$$

$$3397 = 43 \times 79$$

9397

$$3997 = 7 \times 571$$

$$9997 = 13 \times 769$$

$$33313 = 7 \times 4759$$

$$93313 = 11 \times 8483$$

$$33373 = 23 \times 1451$$

$$93373 = 7 \times 13339$$

$$39337 = 139 \times 283$$

$$99337 = 7 \times 14191$$

39397

99397

$$339397 = 19 \times 17863$$

$$939397 = 29 \times 32393$$

$$399397 = 347 \times 1151$$

$$999397 = 7 \times 142771$$

Op grond hiervan kan een prima de luxe priemgetal maximaal zeven cijfers bevatten, namelijk 39397 of 99397 plus één van de vier combinaties van twee begin-cijfers (zie uitspraak 4).

Die acht getallen van zeven cijfers kunnen echter *geen van alle* een

prima de luxe priemgetal zijn. Ga maar na, van de rechterkant af cijfers weglaten leidt steeds tot getallen (cursief gedeelte) die deelbaar zijn:

$$3139 \quad 397(:43) \quad 319 \quad 9397(:11)$$

$$37393 \quad 97(:61) \quad 3799 \quad 397(:29)$$

$$7339 \quad 397(:41) \quad 7399 \quad 397(:7)$$

$$793 \quad 9397(:13) \quad 799 \quad 9397(:17)$$

Dus prima de luxe priemgetallen van zeven cijfers bestaan niet.

Prima de luxe priemgetallen kunnen maximaal uit zes cijfers bestaan. Het zoeken naar prima de luxe priemgetallen kunnen we dus beperken tot de priemgetallen kleiner dan 1 000 000. Zoals blijkt uit 'De jacht op prima priemgetallen' zijn alle priemgetallen onder de 36 000 000, een getal van acht cijfers, al onderzocht. Dat leverde 15 prima de luxe priemgetallen op. En dat moeten ze dan ook allemaal zijn!

Anders beginnen

Jer kunt er ook van uitgaan dat een prima de luxe priemgetal (van meer dan vier cijfers) moet beginnen met 31, 37, 73 of 79. Door daar drieën of negens achter te zetten, moet je ook steeds weer een priemgetal krijgen.

Systematisch uitschrijven is dan in principe heel wat meer werk. Maar je kunt dat bij vijf cijfers staken. Je hebt dan twee getallen die niet deelbaar zijn: 37339 en 73939. Daar kun je één van de vier combinaties van twee eindcijfers achter zetten. Je krijgt dan acht getallen van zeven cijfers, die *geen van alle* een prima de luxe priemgetal kunnen zijn. Dat kun je nagaan door van de linkerkant af cijfers weg te laten, wat steeds tot getallen leidt waarvan we

hierboven de deelbaarheid al hebben aangetoond. En dat bevestigt de conclusie dat prima de luxe priemgetallen maximaal zes cijfers kunnen bevatten.

Ook alle prima R priemgetallen

In totaal werden er 83 prima R priemgetallen gevonden. *Frits Göbel* uit Enschede, *A. Boons* uit Tilburg, *Piet Bikker* uit Nieuweroord en *Guido Caers* uit Schilde (België) lieten zien dat er niet meer zijn. En aangezien er van die 83 prima R priemgetallen slechts 15 prima L zijn, levert dat ook niet meer dan 15 prima de luxe priemgetallen op!

Om in te zien dat er niet meer dan 83 prima R priemgetallen zijn, merkten zij op dat de lijst compleet is tot aan 100 miljoen. Met andere woorden: eventuele andere prima R priemgetallen hebben negen of meer cijfers. De 5 prima R priemgetallen van acht cijfers zijn:

A = 23399339
B = 29399999
C = 37337999
D = 59393339
E = 73939133

Eventuele grotere prima R priemgetallen krijg je (uitsluitend) door hier iets achter te zetten. De enige kanshebbers voor het volgende

cijfer zijn 3 en 9 (anders is het nieuwe getal deelbaar door 2, 3 of 5), maar de tien getallen die we dan krijgen, zijn ook deelbaar. De kleinste priemdelers daarvan zijn vermeld in de volgende tabel:

A3 deelbaar door 193
A9 deelbaar door 173
B3 deelbaar door 7
B9 deelbaar door 29
C3 deelbaar door 7
C9 deelbaar door 23
D3 deelbaar door 23
D9 deelbaar door 11941
E3 deelbaar door 127
E9 deelbaar door 9521

Prima L priemgetallen

Vooralsnog ziet het er naar uit dat aan de prima L priemgetallen geen einde komt. Ze kunnen namelijk alle cijfers bevatten; enkel het laatste cijfer moet een 3 of een 7 zijn, zoals *Guido Caers* opmerkte. Door gebruik te maken van nullen kon hij gemakkelijk enkele grote prima L priemgetallen opsporen:
1000000097, 2000000137 en 4000000007.

Overigens moet je wel bedenken dat het prima priemgetal zijn *geen* eigenschap is van de getallen zelf, maar van de tientallige schrijfwijze, zoals *J. K. Timmer* uit Hengelo opmerkte! Voor andere talstelsels is het anders.

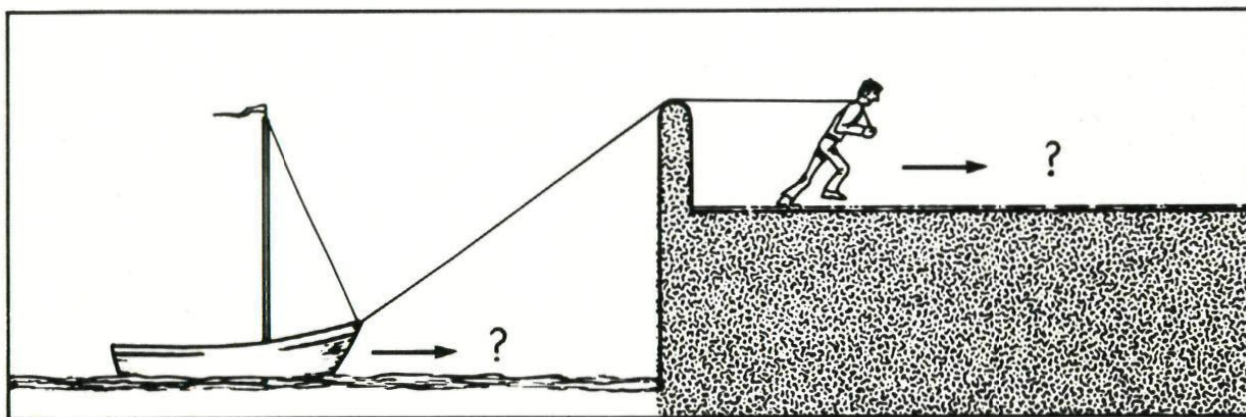
De prima de luxe priemgetallen

2 3 5 7 23 37 53 73 313 317 373 797
3137 3797 739397

De prima R priemgetallen

2	79	733	3793	31193	293999	2939999
3	233	739	3797	31379	373379	3733799
5	239	797	5939	37337	373393	5939333
7	293	2333	7193	37339	593933	7393913
23	311	2339	7331	37397	593993	7393931
29	313	2393	7333	59393	719333	7393933
31	317	2399	7393	59399	739391	23399339
37	373	2939	23333	71933	739393	29399999
53	379	3119	23339	73331	739397	37337999
59	593	3137	23399	73939	739399	59393339
71	599	3733	23993	233993	2339933	73939133
73	719	3739	29399	239933	2399333	

Denkertjes



Bootje

Gaat het bootje sneller / even snel / minder snel vooruit als de trekkende persoon op de wal?

100-meter-race

A, B en C lopen een 100-meter-race.

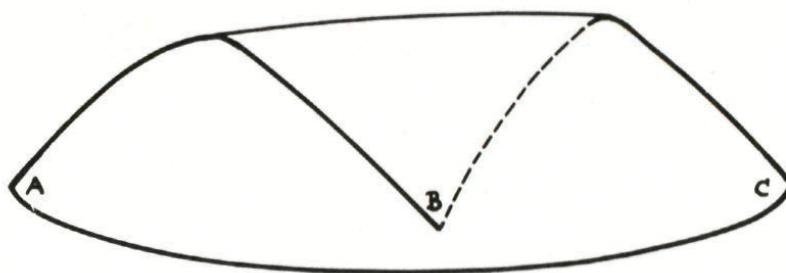
Als A over de streep gaat, ligt B 5 meter achter;

als B over de streep gaat, ligt C 4 meter achter.

Hoeveel achterstand (in cm) had C op B toen A finishte?

(Uit: Mathematical Digest, Zuid-Afrika)

Reis over eenzijdige oppervlakken



Bovenstaande figuur is de weergave van een ruimtelijk object, dat door de maker ervan 'Triangular surface in space' is genoemd. Om uit die schets op te maken hoe dat ding precies in elkaar zit, valt niet mee. Maar als je er eenmaal achter bent, is het eigenlijk heel eenvoudig: die triangular surface is niets anders dan een variant op de bekende band van Möbius. Laten we maar eens kijken hoe dat zit.

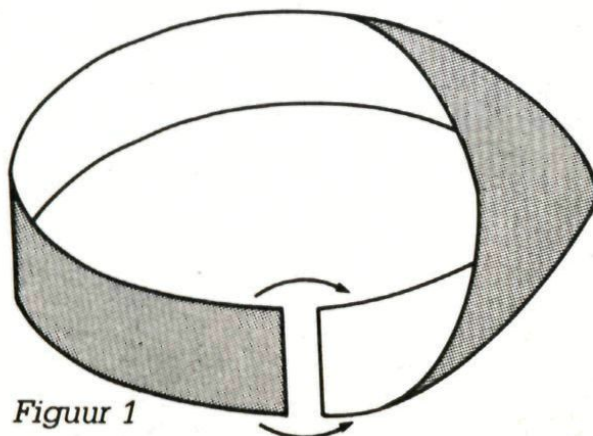
Band zonder einde

Max Bill (geb. 1908) is een Zwitsers ontwerper. In 1935 maakte hij een kunstwerk dat hij 'Endless ribbon' (Band zonder einde) noemde. Hij dacht dat hij de eerste was die een dergelijk object had vervaardigd. Daarom was hij nogal teleurgesteld toen hem werd verteld dat het in de wiskunde bekend stond als de 'Band van Möbius'. De Duitse wis- en sterrenkundige *August Ferdinand Möbius* (1790-1865) had het namelijk al beschreven in een artikel dat vlak na zijn dood verscheen. De teleurstelling van Max Bill was zó groot dat hij verder onderzoek naar soortgelijke objecten staakte. Pas in de jaren vijftig kon hij daar weer toe komen. Vanaf die tijd ontwierp hij ongeveer 25 objecten met maar één kant of enkelzijdige oppervlakken zoals Bill dat zelf noemde. Daaronder was 'Triangular surface in space' (1956): een ruimtelijke driehoek waarvan alle zijden even lang zijn en alle drie de hoeken recht.

Band van Möbius

Voordat we daar op in kunnen gaan, moeten we de möbiusband eerst wat nader bekijken. Je kent hem waarschijnlijk wel. Je kunt hem gemakkelijk maken van een strook papier. Je legt er een slag in en plakt dan de uiteinden aan elkaar (figuur 1).

Bij die band kun je niet meer van een voor- of achterkant spreken, want er is maar één kant. Dat wordt vooral benadrukt door 'Band van Möbius II' (1963) van de Nederlandse graficus *M. C. Escher* (1898-1972). Daarin laat hij negen mieren achter elkaar over die ene kant lopen (figuur 2).



Figuur 1

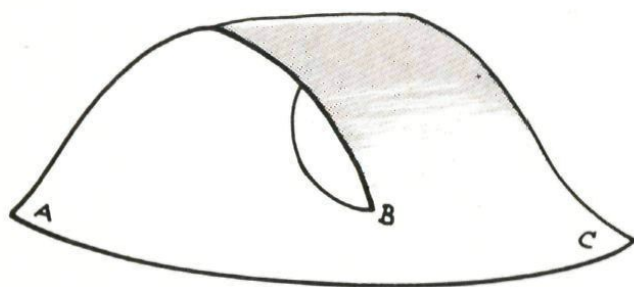


Figuur 2. 'Band van Möbius II' van M. C. Escher.

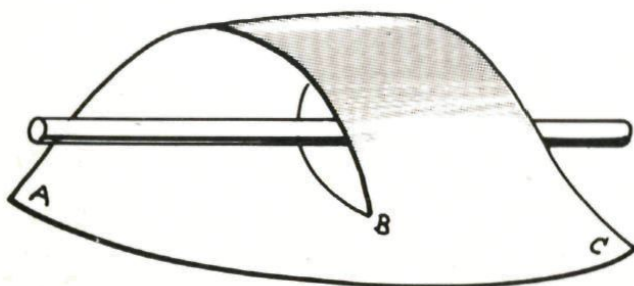
Triangular surface in space

Zoals gezegd, is de figuur aan het begin een door Max Bill getekende weergave van de triangular surface in space. A , B en C zijn de hoekpunten. De zijden AB en AC zijn in hun geheel zichtbaar, de derde zijde, BC , slechts gedeeltelijk (het gestippelde stuk kun je niet zien).

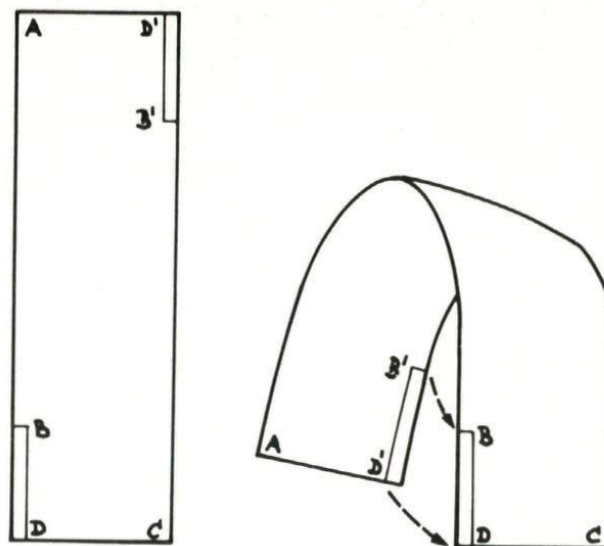
Een wat beter inzicht in de vorm van het ding krijg je echter aan de hand van figuur 3. Daarin zie je duidelijk hoe de kromming van het vlak verloopt. Als je aanneemt dat AC geheel in het vlak van de tekening ligt, dan buigt de zijde AB daaruit iets naar voren om er bij B weer in terug te keren. CB buigt dan iets uit het vlak van tekening naar achteren om er bij B weer in terug te keren. Voor A langs en iets boven B kun je dus gewoon een staaf of zo door het ding heen steken (figuur 4).



Figuur 3



Figuur 4



Figuur 5

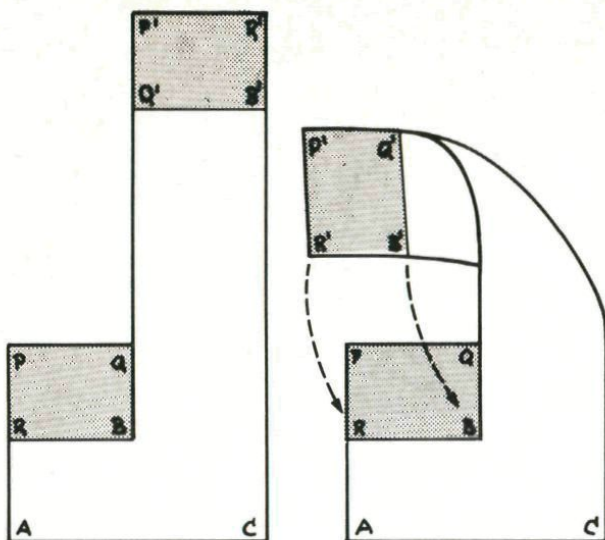
Zelf maken

De triangular surface van Max Bill bevat bollingen die je van gewoon (niet-rekbaar) papier niet kunt maken. Maar iets dat er sterk op lijkt wel. Hier volgen twee mogelijkheden.

Variant I Neem weer een strook papier, zet daar eventueel letters op als in figuur 5, krom hem om, en plak (met een stukje plakband of zo) DB tegen $D'B'$ aan.

Als je CB' en BA tweemaal zo lang kiest als CD , dan worden de drie randen even lang. (Het lijkt dan dus wat op een gelijkzijdige driehoek.)

Variant II Knip een stuk papier zoals in figuur 6. (Neem bijvoorbeeld voor AC en AP 10 cm, voor CR' 25 cm, en voor PR , PQ , $P'R'$ en $P'Q'$ 5 cm.) Knip het papier langs de lijn QB door. Krul de lange flap wat naar achteren om, draai hem een kwartslag, en plak het vierkantje $P'Q'R'B'$ op $PQBR$, zodat P' op P , Q' op Q , enz. terechtkomt. Je hebt nu echter geen driehoek maar een vierhoek. (Als je $R'C'$ gelijk neemt aan 15 cm, dan heb je zelfs een vierkant.)



Figuur 6

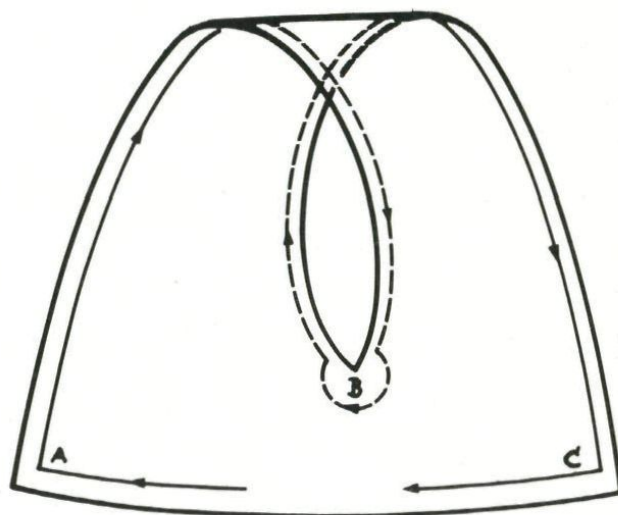
Een mier gaat rond

Variant I is weliswaar een driehoek, maar de omgeving van *B* komt *niet* overeen met die van de triangular surface van Max Bill. Bij variant II klopt dat wel, maar heb je een vierhoek. Dat beide modellen één kant hebben, is gemakkelijk na te gaan. Je kunt er bijvoorbeeld net als bij de prent van Escher een mier over laten wandelen. Die kan overal komen zonder ook maar ergens over de rand te hoeven wippen.

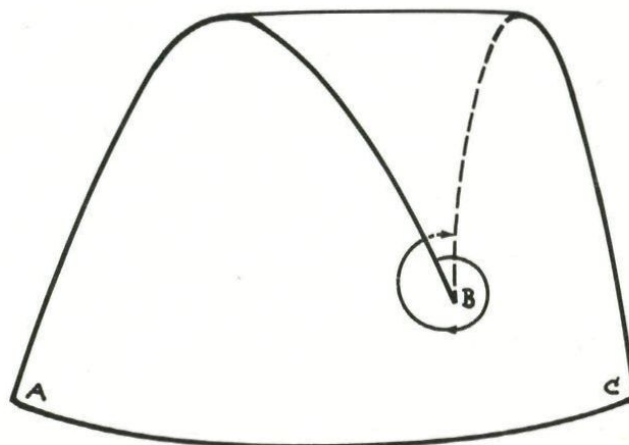
Als we een mier vlak langs de rand over het oppervlak laten wandelen, kunnen we hem gelijk de hoeken laten meten. Laten we dat maar eens doen bij variant I. We spreken af dat de mier als hij met de wijzers van de klok meedraait, een positieve hoek meet, en er tegenin een negatieve hoek. Laat de mier maar eens zo ongeveer halweg *AC* beginnen en naar *A* lopen (figuur 7). Daar meet hij een hoek van $+90^\circ$, en loopt naar *B*. Daar meet hij een hoek van -360° , en bij *C* weer een hoek van $+90^\circ$. In totaal dus -180° .

Maar daarmee is onze mier er nog

niet, want hij kan bij *B* 'doorsteken' en nóg een rondgang maken. Hij meet dan bij *A* en *C* juist -90° en bij *B* $+360^\circ$. Dus als hij het totaal van die twee rondwandelingen optelt, komt hij op 0° uit. Op dezelfde wijze kan de mier over variant II en de triangular surface rondgaan. Hij meet dan bij *B* al naar gelang de draairichting $+450^\circ$ dan wel -450° (figuur 8), dus een rechte hoek. (Het totale aantal graden kun je nu zelf wel 'nalopen'!)



Figuur 7. Wandeling van de mier.



Figuur 8

Weinig verschil na de komma

Welke cijfers na de komma geeft jouw machientje voor:

$$\frac{1}{1,6180340} = \dots$$

$$\frac{1}{2,4142135} = \dots$$

$$\frac{1}{3,3027756} = \dots$$

Als het goed is, zijn de cijfers na de komma in de uitkomst dezelfde als die onder de breukstreep in de opgave.

Is dat iets bijzonders? Kies zelf een ander getal en probeer het.

Dat gaat dus niet zo eenvoudig. En duidelijk zal ook zijn, dat het hieronder zal gaan over hoe je getallen vindt die het wél doen.

Met machten net zo iets

Voor we de zaak gaan verklappen nog even iets anders.

We schrijven g voor het getal 1,6180340. En we vragen om uit te rekenen (en de uitkomsten even netjes recht onder elkaar te schrijven: g^2 en $(1/g)^2$).

Idem met g^3 en $(1/g)^3$.

Idem met g^4 en $(1/g)^4$.

En zo verder als je nog zin hebt. Welke overeenkomst vertonen de cijfers na de komma in elk van de paren? Bij *even* exponenten gaat het iets anders dan bij *oneven*. Als het bij de laatste paar cijfers niet meer klopt, kan dat natuurlijk komen door de afrondingen die je rekendoosje maakt. Of zou bij nauwkeuriger rekenen het hele systeem niet meer gelden? Om daar achter te komen moeten we meer inzicht in de zaak zien te krijgen.

Verklaring voor g en $1/g$

Bij de eerste eigenschap gaat het om getallen g waarvoor (bij een *geheel* getal n) geldt:

$$1/g = g - n.$$

Links en rechts met g vermenigvuldigen geeft een vierkantsvergelijking ($g^2 - ng - 1 = 0$), met als positieve oplossing:

$$g = (n + \sqrt{n^2 + 4}) / 2.$$

Achtereenvolgens invullen $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ geeft voor g juist de noemers van de breuken bovenaan. Ook voor hogere n (en zelfs voor negatieve gehele n , probeer maar) levert dit uitkomsten waarvan bij omkering ($g \rightarrow 1/g$) de staart niet verandert.

Het lijkt wat op toverij dat dit juist uitkomt. Iets duidelijker wordt het misschien als we je de (vrij bekende) herleidings-truc laten zien voor breukvormen met een wortel in de noemer. De vraag is:

Waarom hebben de uitkomsten van $(n + \sqrt{n^2 + 4})/2$ en $2/(n + \sqrt{n^2 + 4})$ voor gehele n dezelfde cijferstaart na de komma?

De truc is om bij de rechter breuk zowel teller als noemer met hetzelfde te vermenigvuldigen. Dat mag, ook als we niet met een bekend getal, maar (zoals hier) met een vorm met n vermenigvuldigen. Het gaat zo:

$$2 / (n + \sqrt{n^2 + 4}) = \frac{2}{\sqrt{n^2 + 4} + n} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{(\sqrt{n^2+4}+n)} \times \frac{(\sqrt{n^2+4}-n)}{(\sqrt{n^2+4}-n)} = \\
&= \frac{2 \times (\sqrt{n^2+4}-n)}{(n^2+4)-n^2} = \\
&= (-n + \sqrt{n^2+4}) / 2.
\end{aligned}$$

En je ziet: het verschil tussen deze laatste vorm en $(n + \sqrt{n^2+4}) / 2$ is alleen (het *gehele* getal) n . De cijfers ná de komma komen voort uit de wortelvorm, en die is in beide gevallen precies dezelfde!

Verklaring voor g^2 en $(1/g)^2$

Bij deze tweede-machten (en nog meer bij de hogere machten) gaat er nogal wat werk zitten in het uitschrijven van de formules. We geven hier beknopt de redenering aan.

Wat is er te zeggen van g^2 en $(1/g)^2$, met $g = (n + \sqrt{n^2+4}) / 2$ (n geheel)?

Een gewone herleiding geeft:

$$\begin{aligned}
g^2 &= [(n + \sqrt{n^2+4}) / 2]^2 = \\
&= 1/4 [n^2 + 2n\sqrt{n^2+4} + (n^2+4)] = \\
&= (n^2 + 2 + n\sqrt{n^2+4}) / 2 \quad (1)
\end{aligned}$$

En voor het omgekeerde pas je eerst de truc toe uit het vorige paragraafje:

$$\begin{aligned}
(1/g)^2 &= [2 / (n + \sqrt{n^2+4})]^2 = \\
&= [(-n + \sqrt{n^2+4}) / 2]^2 = \\
&= \dots = \\
&= (n^2 + 2 - n\sqrt{n^2+4}) / 2 \quad (2)
\end{aligned}$$

De wortelvorm in (1) heeft nu een *plus* voor zich, en die in (2) een *min*. Dat wil zeggen dat de wortelvormen tegen elkaar wegvallen bij *optellen*. Je krijgt dan:

$$g^2 + (1/g)^2 = \dots = n^2 + 2.$$

De uitkomst van de opgetelde vormen blijkt dus een *geheel* getal (bij *gehele* n).

Verklaring voor g^3 en $(1/g)^3$

Vervangen van g door de vorm met n en dan uitwerken, geeft nu in beide gevallen een *plus* voor de wortel-term. Die vallen dus tegen elkaar weg bij *afrekking*, en het verschil

$$g^3 - (1/g)^3 = n^3 + 3n$$

blijft weer *geheel*.

Zo kun je dóórgaan met hogere machten. Bij even exponenten k is $(g^k + (1/g)^k)$ geheel, en bij oneven exponenten $(g^k - (1/g)^k)$.

Uitkomsten bij 'Eindeloze optellingen'

$$A_3 = \frac{1}{2} \quad A_4 = \frac{1}{3} \quad A_n = \frac{1}{n-1}$$

$$B_1 = 2 \quad B_2 = 6 \quad B_3 = 26 \quad B_0 = 1, B_n = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} B_i$$

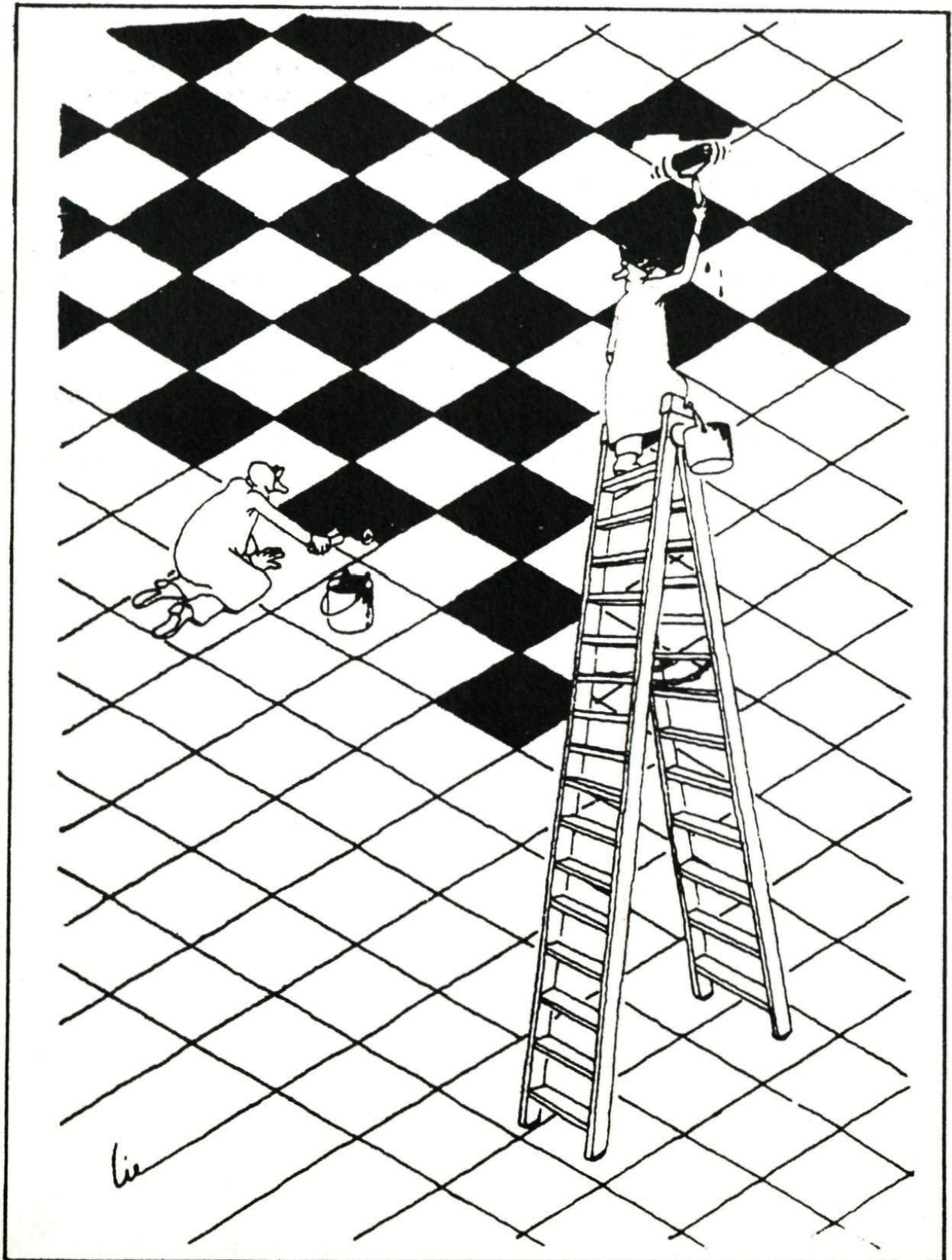
$$C_1 = 1 \quad C_2 = \frac{3}{4} \quad C_3 = \frac{11}{18} \quad C_n = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} C_{n-1}$$

$$D_3 = \frac{1}{4} \quad D_4 = \frac{1}{18} \quad D_5 = \frac{1}{96} \quad D_n = \frac{1}{n \cdot n!}$$

$$E = \frac{11}{96} \quad F = \frac{1}{8}$$

Tentoonstelling Onmogelijke Figuren

Als alles goed gaat wordt op 19 september in het Utrechtse Museum voor Hedendaagse Kunst een tentoonstelling Onmogelijke Figuren geopend. Zoals je hieronder kunt zien, wordt er al hard aan gewerkt.



Nieuwe reuzenontbinding

362232590504406868214617272006414447138055859511851874054762224427178428941 =
104167755499168696693743867494211841*3477396520339709531699943780276325113101

Op het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) te Amsterdam is een nieuw wereldrecord gevestigd. CWI-medewerkers *Herman te Riele*, *Walter Lioen* en *Dik Winters* slaagden erin op de Control Data CYBER 205 supercomputer van het Amsterdams Academisch Rekencentrum SARA een getal van 75 cijfers te ontbinden in twee grote priemfactoren (getallen die alleen door één en zichzelf deelbaar zijn). Het getal komt voor op een onlangs door het Amerikaans Wiskundig Genootschap gepubliceerde lijst met honderden getallen waarvan ontbinding gewenst is. Het vorige record stond sinds 1984 op naam van Sandia Laboratories in de VS. Daar werd op een CRAY X/MP supercomputer – momenteel de grootste concurrent van de CYBER 205 als 'getallen-kraker' – een getal van 71 enen ontbonden (zie Pythagoras 24-4 'Een reuzenontbinding'). In de VS is al wel een getal van 81 cijfers gekraakt door acht parallel rekenende 'gewone' SUN-computers, maar dat vergde 1260 uur rekentijd. De CWI-berekening kostte slechts 12,2 uur.

Deze recordjacht dient niet alleen als maat voor de rekenkracht van de meest geavanceerde computers. Sinds enkele jaren worden produkten van grote priemgetallen gebruikt bij het vercijferen en ontcijferen van vertrouwelijke boodschappen (door militairen, banken, e.d.). Omdat het praktisch onmogelijk is om uit het produkt de samengestelde priemgetallen terug te vinden, wordt de vercijfering als zeer veilig beschouwd (zie Pythagoras 24-4 'Geheimschrift IV'). 'Veilige' getallen moeten dus in ieder geval veel groter zijn dan het CWI-record.

Rijen zonder groepsherhaling

Op het stukje 'Binaire rijen zonder groepsherhaling' (Pythagoras 25-2), kwam een reactie binnen van *Gerard Vermeulen* (5 havo) uit Ede. Met een programma in BASIC dat heel handig gebruikmaakte van string-opdrachten wist hij alle mogelijkheden af te zoeken. Zo bewees hij dat de *langste* rij met nullen en enen *zonder* 'groepsherhaling' (d.i. hetzelfde patroon van nullen en enen tweemaal direct naast elkaar) de lengte *achttien* heeft:

0 1 0 0 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 1 1 0 1

Nog onbeantwoord blijft de vraag naar hoe lang je herhalingsvrij kunt doorgaan wanneer je per positie uit *drie* (in plaats van twee) symbolen mag kiezen. Volgens het systeem van Gerard (steeds voorrang geven aan het zo laag mogelijke cijfer) krijg je een beginstuk zoals hieronder staat. Er lijkt voorlopig nog op geen stukken na een einde aan te komen.

000100020001002000210001002000100020001100010020001000200012..

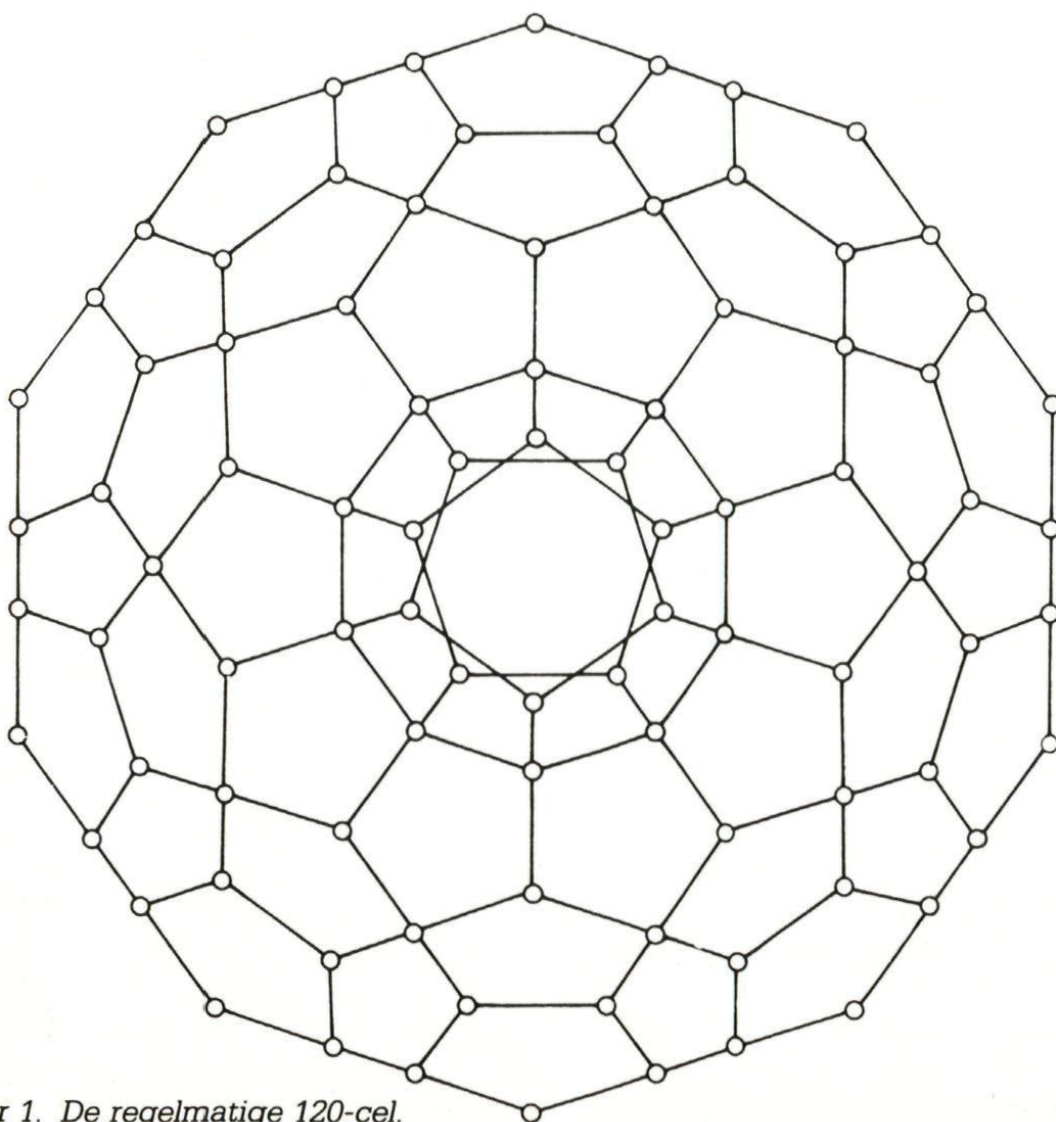
De laatste loodjes

De regelmatige 120- en 600-cel

We zijn er bijna. Naast de regelmatige 5-cel (Pythagoras 25-5), 8-cel of hyperkubus (Pythagoras 25-4), 16-cel en 24-cel zijn er in de 4-D ruimte nog twee regelmatige figuren: een met 120 cellen en een met maar liefst 600 cellen! Het zal je waarschijnlijk niet verbazen dat deze nog ingewikkelder in elkaar zitten dan de 24-cel. Uitvoerige behandeling kunnen we daarom maar beter uit ons hoofd zetten.

Weergaven van projecties van deze figuren op de 3-D ruimte kunnen soms tot bijzonder fraaie resultaten leiden. Kijk nog maar eens naar de **omslag**, waar één van de vele mogelijke projecties van de regelmatige 600-cel is weergegeven. Misschien was je zelfs al geboeid door die afbeelding zonder te weten wat hij voor zou moeten stellen!

De projectie op de omslag werd voor het eerst in 1901 door de Nederlandse wiskundige van Oss getekend.



Figuur 1. De regelmatige 120-cel.

De regelmatige 120-cel

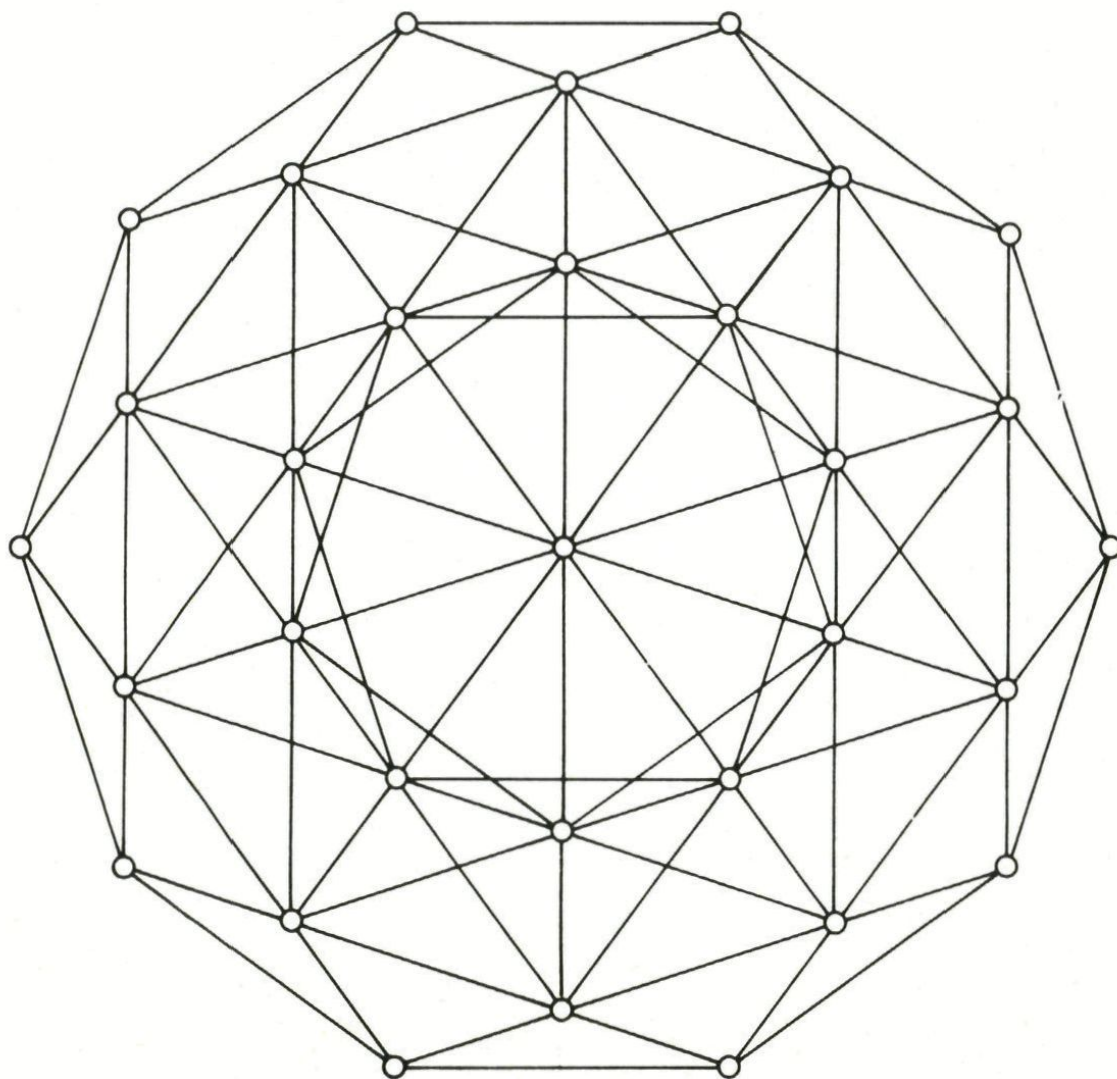
Behalve 120 cellen, bezit de regelmatige 120-cel niet minder dan 600 hoekpunten, 1200 ribben en 720 zijvlakken. Dus te noteren als $C_{120} = (600, 1200, 720, 120)$. De cellen hebben de vorm van een regelmatig twaalfvlak (je weet wel, een regelmatig veelvlak opgebouwd uit 12 regelmatige vijfhoeken). En evenals bij zo'n twaalfvlak zijn de zijvlakken van de 120-cel regelmatige vijfhoeken. Figuur 1 is een weergave van een projectie op de 3-D ruimte, maar wel zó dat daarbij een aantal hoekpunten en ribben over elkaar zijn komen te liggen.

De regelmatige 600-cel

De cellen van de regelmatige 600-cel hebben evenals die van de regelmatige 5-cel en 16-cel, de vorm van een regelmatig viervlak. Dus de zijvlakken zijn net als bij een viervlak gelijkzijdige driehoeken, en dat zijn er 1200.

Verder zijn er 720 ribben en 120 hoekpunten. De notatie is dus $C_{600} = (120, 720, 1200, 600)$ of zo je wilt $(120, 720, 1200, 600)$.

In figuur 2 is de regelmatige 600-cel zó geprojecteerd dat er – net als in figuur 1 bij de regelmatige 120-cel – een aantal hoekpunten en ribben over elkaar heen zijn komen te liggen.

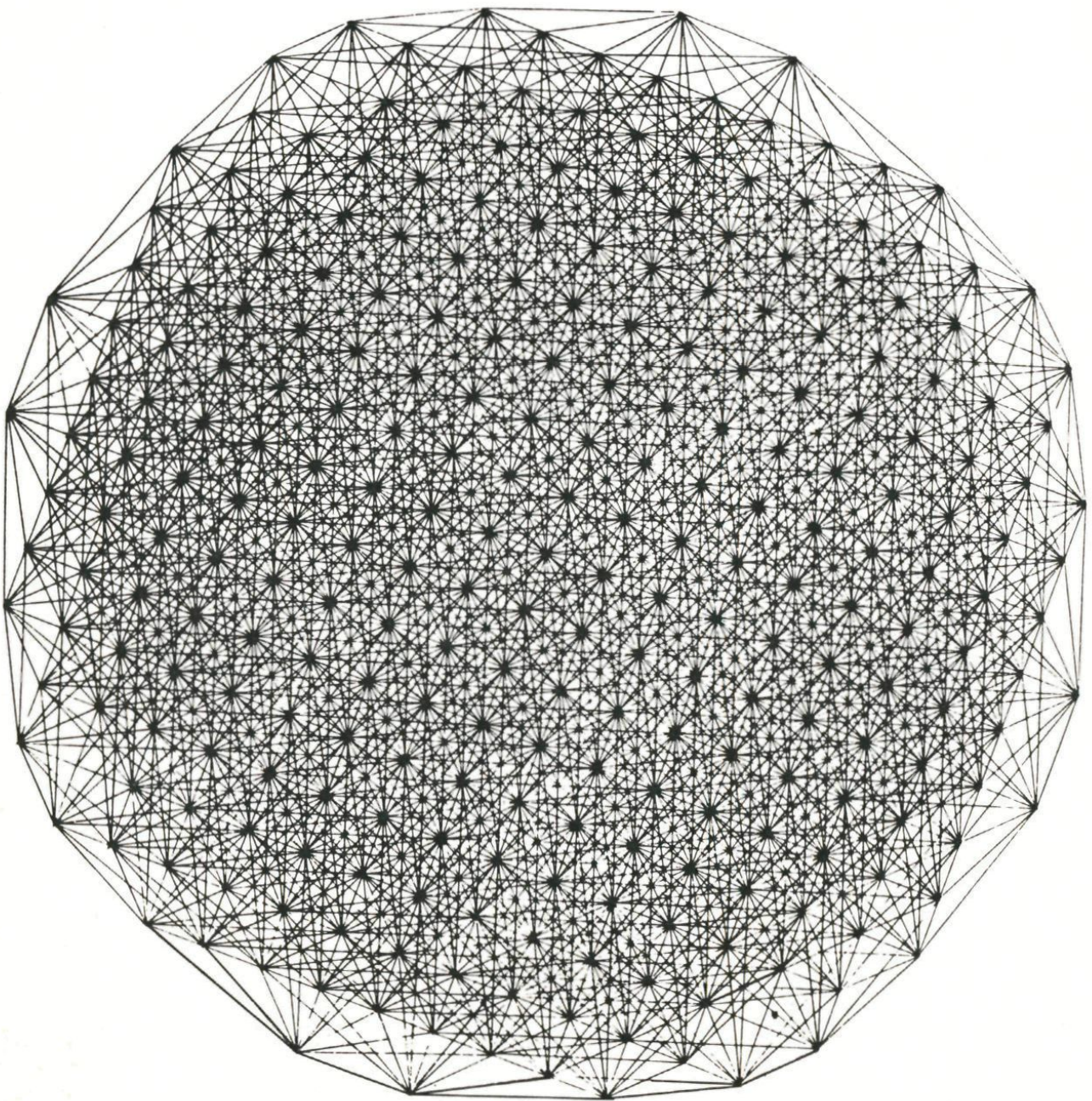


Figuur 2. De regelmatige 600-cel.

Hogere dimensies

In de 3-D ruimte zijn er *vijf* regelmatige veelvlakken: viervlak, kubus, achthoek, twaalfvlak en twintigvlak. Zoals we hebben gezien, zijn er in de 4-D ruimte *zes* regelmatige figuren te vinden (*polytopen* noemt men dat ook wel). Als je gaat kijken naar een 5-D ruimte, dan worden dat er geen zeven, maar slechts *drie*. Sterker nog: *elke* ruimte van hogere dimensie heeft er slechts *drie*! Ze zijn te verkrijgen door de

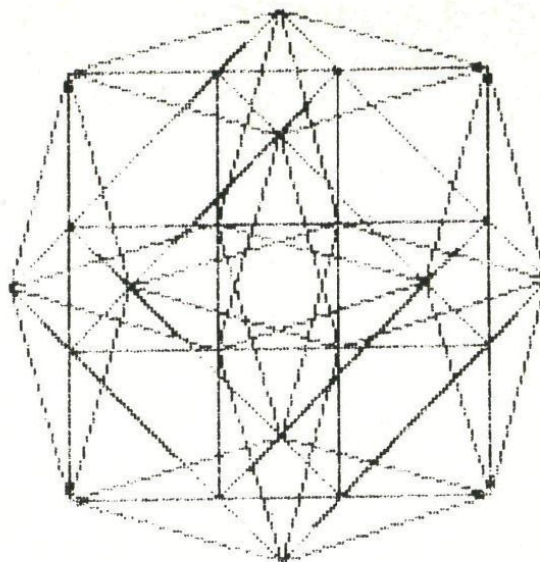
teken- of constructie-voorschriften die we bij de regelmatige 5-cel, de hyperkubus en de regelmatige 16-cel ontmoet hebben, in die hoger dimensionale ruimten voort te zetten. Waartoe dat kan leiden zie je bijvoorbeeld in figuur 3. Dat is een projectie van een twaalf-dimensionale kubus – een soort super hyperkubus dus – op het platte vlak, gemaakt door de eerstejaarsstudent *Arjan van Dijk* voor de brochure 'Wiskunde in Utrecht' (zie bladzijde 7).



Figuur 3. Super hyperkubus.

Projecteren met de computer

Er zijn ook andere projecties van de 4-D polytopen mogelijk dan wij hebben beschreven. Met een computer met enige grafische mogelijkheden (en eventueel een plotter) kun je daarmee zelf experimenteren. Daartoe schreef *Prof. Lauwerier* uit Amsterdam een aantal programma's (in IBM-BASIC); hiernaast bijv. een 24 cel. Hoe je de listings daarvan kunt krijgen, is aangegeven op bladzijde 23 van nummer 4.



Priemreeksen

In het artikel 'Even door priemen' (Pythagoras 25-2) hebben we het gehad over *priemreeksen*. Dat waren rijen priemgetallen (eindigend op een niet-priem) waarbij elke volgende term gelijk is aan het 'tweevoud-plus-een' van z'n voorganger.

Tot nu toe kwamen de langste voorbeelden uit België. Zowel *Guido Caers* uit Schilde als *Peter Deleu* uit Kuurne vonden een rij met zes priemgetallen:

$89 \rightarrow 179 \rightarrow 359 \rightarrow 719 \rightarrow 1439 \rightarrow 2879 \rightarrow 5759$ (deelbaar door 13)

Guido heeft de eerste tienduizend priemgetallen allemaal als beginterm geprobeerd en vond nóg een rij met zes priemgetallen: beginnend bij 63419. Bovendien merkte hij op dat priemreeksen volgens dit recept weinig kans hebben om erg lang te worden. Als je namelijk start met een priemgetal waarvan het laatste cijfer een 1, 3 of 7 is, dan stuit je altijd binnen enkele stappen op een veelvoud van 5:

$..1 \rightarrow ..3 \rightarrow ..7 \rightarrow ..5$

Alleen rijen die uitgaan van priemgetallen die eindigen op 9, kunnen – in theorie althans – langer worden. En dat maakt het zoeken naar de langste rij natuurlijk een stuk eenvoudiger.

Het beste recept

Ook het 'beste' priemreeks-recept staat tot nu toe op naam van Guido Caers: $p \rightarrow 3p + 70$, enz. Beginnend bij 2017 levert dit een rij op met maar liefst *elf* priemgetallen.

Zoals je uit Guido's opmerkingen bij het door ons gegeven recept op kunt maken, heeft hij dit 'beste' recept niet gevonden door zomaar lukraak wat te proberen. Hij heeft echt gericht gezocht. Het zou te ver voeren om zijn aanpak hier ook nog uit de doeken te doen. Als er lezers zijn die even goede of zelfs betere recepten weten te vinden, dan komen we daar in de toekomst graag nog eens op terug.

Pythagoras Olympiade



Nieuwe opgaven

Oplossingen vóór 1 september insturen naar: *Pythagoras Olympiade, Marinus de Jongstraat 12, 4904 PL OOSTERHOUT (NB)*. Vermeld op elk (éénzijdig beschreven) vel je naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas. Verder moet elke oplossing op een nieuw vel beginnen, want we corrigeren ze afzonderlijk. We bekijken alleen goed leesbare oplossingen die volledig zijn uitgewerkt, met verklarende tekst in goed lopende zinnen. Verdere informatie over de wedstrijd vind je in nummer 2 van deze jaargang op bladzijde 26.

PO 90

Gegeven zijn drie reële getallen a, b, c groter dan 1. Bewijs:
 $4(abc + 1) > (a + 1)(b + 1)(c + 1)$.

PO 91

Gegeven zijn een massieve kubus met ribben ter lengte 2, en een massief regelmatig viervlak met ribben ter lengte 3.

Is het mogelijk ze zó in een bundel evenwijdige lichtstralen te houden (denk bijvoorbeeld aan zonnestralen) dat het viervlak geheel in de schaduw van de kubus verdwijnt?

(Geef een volledig gemotiveerd antwoord!)

Oplossingen en prijswinnaars van de opgaven PO 82-85

PO 82

Er is een klok met twaalf in plaats van twee wijzers. In de beginstand wijst elke wijzer een ander uur aan, zodat ze samen een regelmatige ster met twaalf punten vormen. Alle wijzers lopen met een constante snelheid (maar ze lopen niet allemaal even snel).

Op een bepaald moment staan alle wijzers tegelijk op de 3. Kan het voorkomen dat ze op zeker moment allemaal tegelijk op een ander cijfer staan?

(Geef een volledig gemotiveerd antwoord!)

Oplossing van Sybrand Dijkstra, Kortrijk (B) (6 Koninklijk Atheneum Kort-

rijk), Jeroen Nijhof, Borne (6 vwo, RK Lyceum 'De Grundel') en Jack van Rijswijck, Venlo (6 vwo, RSG 'Den Hulster'):

Bekijk de wijzers W_2 en W_3 (de wijzers die in het begin op de 2 en de 3 staan). Als hun snelheden resp. v_2 en v_3 zijn, is de afgelegde weg op tijdstip t resp. $v_2 t$ en $v_3 t$. Op het moment t_0 dat alle wijzers voor het eerst tegelijk op de 3 staan, is de afgelegde weg van W_2 en W_3 resp. gelijk aan $12n_2 + 1$ en $12n_3$ (met n_2 en $n_3 \in \mathbb{N}$; een volledige rondgang stellen we op 12). Dan geldt dus $t_0 = (12n_2 + 1)/v_2 = (12n_3)/v_3$, anders gezegd: $(v_2)/(v_3) = (12n_2 + 1)/(12n_3)$. Op het moment t_1 dat W_2 en W_3 beide op een cijfer $3 + c$ staan (neem voor het gemak $c \in \{-2, -1, \dots, 9\}$), zijn de

afgelegde wegen respectievelijk $12m_2 + c + 1$ en $12m_3 + c$, en hieruit volgt net als boven

$$(v_2)/(v_3) = (12m_2 + c + 1)/(12m_3 + c) \\ \text{zodat } (12m_3 + c)(12n_2 + 1) = \\ = 12n_3(12m_2 + c + 1).$$

Het rechterlid is een twaalfvoud. In het linkerlid is de factor $(12n_2 + 1)$ echter noch door 3, noch door 2 deelbaar, dus de andere factor $12m_3 + c$ moet een twaalfvoud zijn.

Hieruit volgt dat ook c een twaalfvoud is, dus W_2 en W_3 kunnen *alleen op het cijfer 3* samenkomen. Hetzelfde geldt daarom ook voor alle wijzers tegelijk.

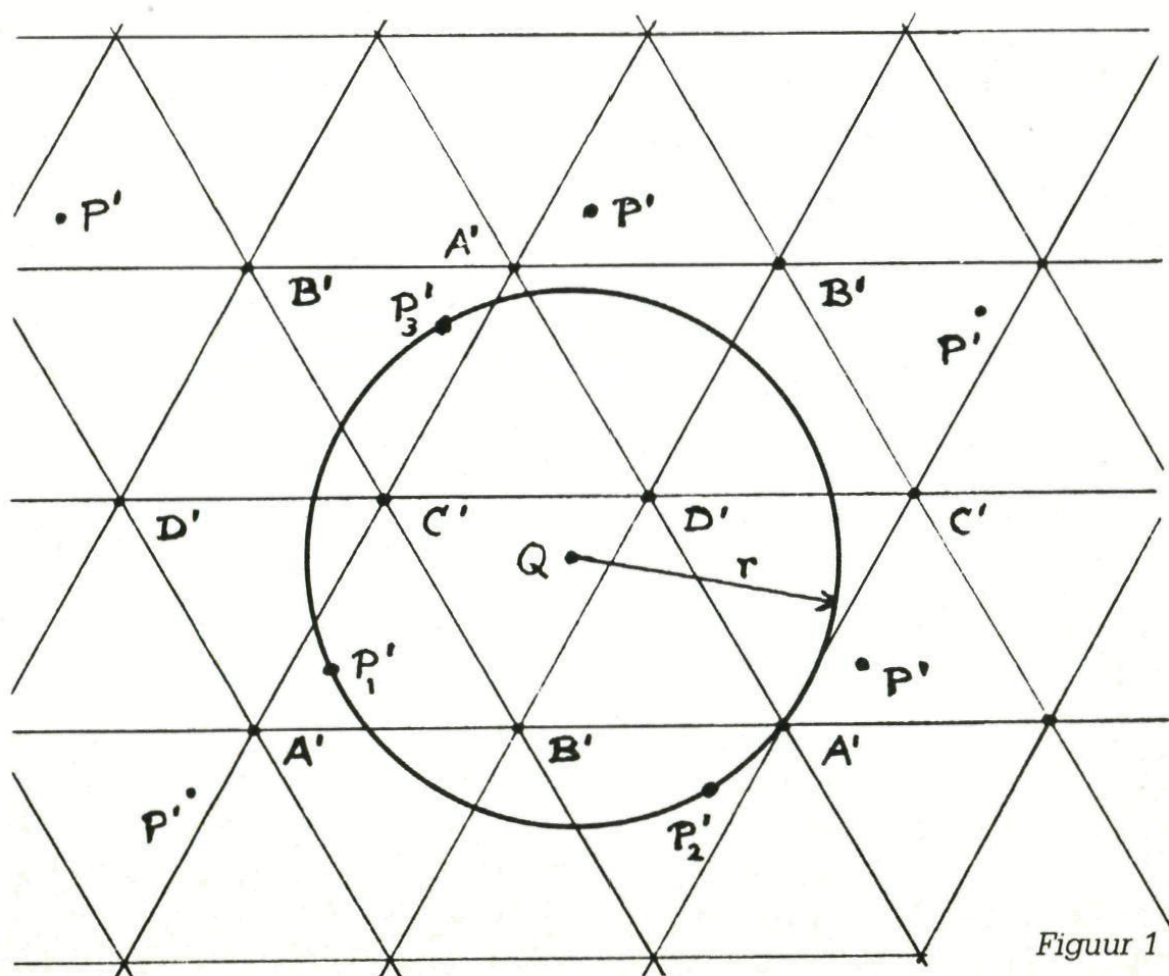
Opmerking: sommige inzenders gingen er ten onrechte zonder verdere motivatie van uit dat (in de notatie van hierboven) t_1 een geheel veelvoud van t_0 moet zijn.

Verdere correcte oplossingen: *Jaap Brand*, Zaandam (5 vwo, Montessori

Lyceum, Amsterdam) en *Marc de Jong*, Schalkhaar (5 vwo, Geert Groote College, Deventer). Er waren 7 incorrecte inzendingen. Prijzen: *Marc de Jong* en *Jeroen Nijhof*.

PO 83

Op het oppervlak van een bol is er voor bijna elk tweetal punten precies één *kortste pad* dat die punten verbindt: span maar een touwtje tussen die punten op het boloppervlak. Als de twee punten echter diametraal tegenover elkaar liggen, dan zijn er oneindig veel 'kortste paden' (denk maar aan de globe met daarop alle meridianen die noord- en zuidpool verbinden). Bekijk nu het oppervlak van een massief *regelmatic viervlak*. Bewijs dat er op dat oppervlak bij elk punt P een punt Q bestaat zo, dat er *minstens drie* verschillende kortste paden van P naar Q lopen.



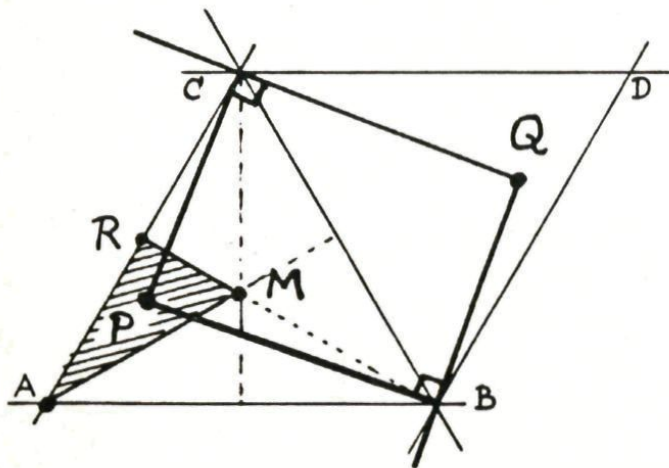
Oplossing:

De meeste inzenders hadden het idee om het viervlak $ABCD$ op de een of andere manier open te knippen, en de 'uitslag' plat te leggen. Kortste verbindingen die over één of meer ribben heenlopen, worden dan rechte lijnen, mits de betreffende ribben niet zijn opgeknijpt.

Na enig proberen kom je er dan misschien achter dat je deze laatste moeilijkheid helemaal kunt vermijden als je werkt met een onbegrensd aaneengesloten driehoekenpatroon waarvan je de hoekpunten op de aangegeven wijze van letters voorziet. Bij elk punt P op het viervlak horen dan oneindig veel punten P' in het driehoekenpatroon.

Laat nu zo'n punt P op het viervlak gegeven zijn. Kies (figuur 1) uit alle bijbehorende punten P' in het vlakke patroon drie punten P'_1, P'_2, P'_3 op zo'n manier dat de straal r van de omschreven cirkel van dat drietal zo klein mogelijk is.

Noem het middelpunt van die cirkel Q' . Dan geldt $Q'P'_1 = Q'P'_2 = Q'P'_3 = r$, en $Q'P' \geq r$ voor elk ander punt P' . Het punt Q' correspondeert met een punt Q op het viervlak, en de rechte lijnen $Q'P'_1, Q'P'_2, Q'P'_3$ corresponderen met de gevraagde drie verschillende kortste verbindingen QP op het viervlak.



Figuur 2

Opmerkingen:

- 1 Je kunt Q als volgt construeren:
Stel $Pligt$ in of op de rand van deeldriehoek ARM in zijvlak ABC . Dan ligt Q in zijvlak BCD op zo'n manier dat in de uitgeklapte ruit $ABDC$ geldt dat de hoeken PBQ en PCQ recht zijn (figuur 2).
- 2 Als P ligt op de lijnstukken AR of RM (maar niet in A of M) dan zijn er zelfs vier kortste verbindingen PQ !

Correcte oplossingen: *Eric Fledderus*, Wolvega, (4 vwo, Nassau College), *Hugo Schnack*, Amsterdam (5 vwo, CSG Buitenveldert), *Jaap Brand*, Zaandam (5 vwo, Montessori Lyceum, Amsterdam), *Jack van Rijswijk*, Venlo (6 vwo, RSG 'Den Hulster'), *Marc de Jong*, Schalkhaar (5 vwo, Geert Groote College, Deventer), *Joris van der Hoeven*, Amsterdam (4 vwo, Amsterdams Lyceum). Er waren 4 incorrecte inzendingen.

Prijzen: *Hugo Schnack* en *Jack van Rijswijk*.

PO 84

Laat a_n het grootste gehele getal zijn dat kleiner is dan $n\sqrt{2}$.

Bewijs dat er in de rij $a_1, a_2, a_3, \dots$ oneindig veel gehele machten van 2 voorkomen.

Oplossing van *Sybrand Dijkstra* (6, Koninklijk Atheneum, Kortrijk, België) en *Joris van der Hoeven* (4 vwo, Amsterdams Lyceum) (enigszins bewerkt):

Onder $\text{int}(x)$ verstaan we het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan x . Bekijk de rij $b_k = \sqrt{2} \cdot 2^{k-1} = 1/\sqrt{2} \cdot 2^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)

Voor elke k is $b_{k+1} = 2b_k$. Ook het 'ge-deelte achter de komma' van b_k , dat wil zeggen het getal $r_k = b_k - \text{int}(b_k)$, wordt telkens verdubbeld, waarbij echter 'overflow over de komma heen'

wordt verwaarloosd. In formule:

$r_{k+1} = 2r_k$ als $0 \leq r_k < 1/2$ en $r_{k+1} = 2r_k - 1$ als $1/2 \leq r_k < 1$. Omdat b_k irrationaal is voor elke k , is r_k groter dan nul voor elke k . Dit heeft tot gevolg dat r_k voor oneindig veel waarden van k in het deelinterval $< 1 - 1/2\sqrt{2}, 1 >$ van $< 0, 1 >$ valt ($1 - 1/2\sqrt{2} \approx 0,3$).

Echter, $1 - 1/2\sqrt{2} < r_k < 1 \Leftrightarrow$

$0 < 1 - r_k < 1/2\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$0 < \sqrt{2} - \sqrt{2} r_k < 1 \Leftrightarrow$

$0 < \sqrt{2}(1 + \text{int}(b_k)) - \sqrt{2}b_k < 1$.

Merk nu op dat $\sqrt{2}b_k = 2^k$ een geheel getal is, zodat voor $n = 1 + \text{int}(b_k)$ geldt dat $a_n = \text{int}(n\sqrt{2}) = 2^k$ inderdaad een macht van 2 is.

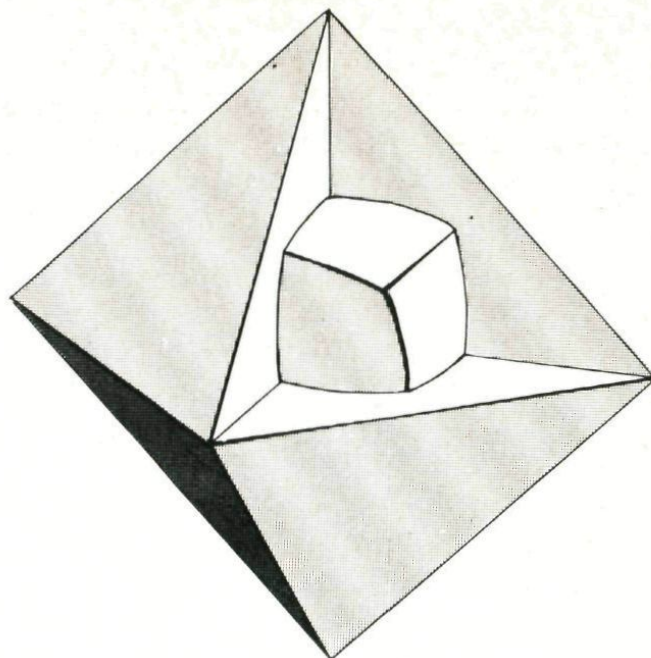
Verdere correcte oplossingen werden ingestuurd door *Jeroen Nijhof* (Borne) en *Erik Fledderus* (Wolvega). Er waren 3 incorrecte inzendingen. Prijzen: *Erik Fledderus* en *Joris van der Hoeven*.

PO 85

Elk van de zes hoekpunten van een regelmatig achthoek met ribbenlengte 1 is het middelpunt van een bol met straal 1. Het lichaam S is de doorsniding van die zes bollen. (S bestaat dus uit alle punten die tegelijk in alle zes bollen zitten.)

Bepaal de *diameter* van S , d.w.z. bepaal de maximale afstand tussen twee punten van S .

Oplossing van *Sybrand Dijkstra* (6, Koninklijk Atheneum, Kortrijk, België) en *Erik Fledderus* (4 vwo, Nassau College, Wolvega) (enigszins bewerkt): Breng een rechthoekig assenkruis aan met als oorsprong het centrum van het achthoek, en met de zes hoekpunten van het achthoek op de assen. Die hoekpunten hebben dan de coördinaten $(\pm 1/2\sqrt{2}, 0, 0)$, $(0, \pm 1/2\sqrt{2}, 0)$ en $(0, 0, \pm 1/2\sqrt{2})$. Bekijk eerst het deel van S dat ligt in het 'eerste octant' $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.



Binnen dit octant is S de doorsnede van de drie bollen met straal 1 en middelpunten $(-1/2\sqrt{2}, 0, 0)$, $(0, -1/2\sqrt{2}, 0)$ en $(0, 0, -1/2\sqrt{2})$. Er is maar één punt dat op de rand van elk van die bollen ligt, namelijk het punt $(1/6\sqrt{2}, 1/6\sqrt{2}, 1/6\sqrt{2})$. Dit punt ligt op afstand $1/6\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 1/6\sqrt{6}$ van de oorsprong. De bol met als middelpunt de oorsprong en als straal $1/6\sqrt{6}$ bevat verder *alle* punten van S die in het eerste octant liggen, en op grond van de symmetrie ook alle andere punten van S in de andere octanten. Ook het punt $(-1/6\sqrt{2}, -1/6\sqrt{2}, -1/6\sqrt{2})$ ligt op die bol en in S . De diameter van S is dus gelijk aan de diameter van de bol, dus gelijk aan $1/3\sqrt{6}$.

Je kunt nog opmerken dat S een beetje lijkt op een opgeblazen kubus. De zes zijvlakken zijn niet plat, maar stukken boloppervlak.

Verdere correcte oplossingen: *Marek Veselka*, Leiden (6 vwo, Bonaventura College) en *Jeroen Nijhof*. Er waren 4 incorrecte inzendingen. Prijzen: *Marek Veselka* en *Sybrand Dijkstra*.



Redactioneel

Dit is dan het zesde en laatste nummer van de 25e jaargang. Na de vakantie begint de 26e jaargang. Ook die zal weer uit zes nummers bestaan, terwijl de abonnementsprijs ongewijzigd blijft.

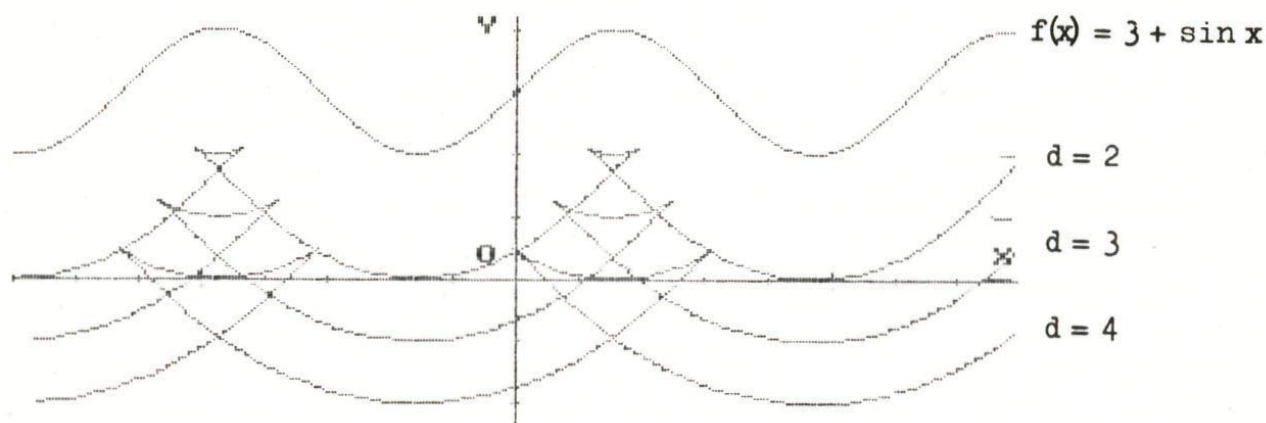
Anders dan andere jaren loopt het abonnement gewoon door. Je hoeft je dus niet meer opnieuw op te geven. Wel willen we je vragen om vrienden of kennissen met belangstelling voor wiskunde op het bestaan van Pythagoras te wijzen en hen aan te sporen een abonnement te nemen. Zo help je mee om het voortbestaan van Pythagoras in de toekomst veilig te stellen.

Per koets door de bocht

Op het stukje uit het vorige nummer met bovenstaande titel (over 'evenwijdige' krommen) kwam een reactie van *N. Kraeima* uit Zwolle.

Hij ging uit van een willekeurige functie-grafiek f en leidde formules af voor de coördinaten van de punten die een afstand d van die grafiek verwijderd zijn. (Eerst raaklijk aan f , dan loodlijn in het raakpunt, en daarlangs afstand d van het raakpunt af.)

Ten slotte programmeerde hij de zaak voor z'n computer voor de functie $f(x) = \sin x$ en kreeg op de printer dit resultaat:



Tekenwerk: Armand Haye, Amsterdam.

Foto's en andere illustraties: Dass regelmässigen Sechshundertzell und seine selbstdeckenden Bewegungen, van Oss, Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Amsterdam (omslag); Oosterbaan, Goes (blz. 1); Regular polytopes, H.S.M. Coxeter, Dover Publications Inc., New York (blz. 4, 7, 15); Regular complex polytopes, H.S.M. Coxeter, Cambridge University Press (blz. 7, 12, 28, 29); Cerena Ceccherini, Amsterdam (blz. 16); © M. C. Escher Heirs c/o Cordon Art, Baarn (blz. 21); Brochure 'Wiskunde in Utrecht', Arjan van Dijk (blz. 30); Prof. Dr. H. A. Lauwerier, Amsterdam (blz. 31); Jan van de Craats, Oosterhout (NB) (blz. 33, 34, 35).

© 1986 Redactie Pythagoras - ALLE RECHTEN VOORBEHOUDEN, NADruk OF WEERGAVE, GEHEEL OF GEDEELTELIJK, IN WELKE VORM DAN OOK, ZONDER SCHRIFTELIJKE TOESTEMMING VAN DE REDACTIE VERBODEN.

Pythagoras wiskunde tijdschrift voor jongeren

Een uitgave onder auspiciën van de Stichting Christiaan Huygens en de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Redactie: Jan van de Craats, Klaas Lakeman, Hessel Pot, Hans de Rijk.

Redactiesecretariaat: Klaas Lakeman, Cornelis Krusemanstraat 60^{II},
1075 NS Amsterdam (NL).

Inhoudsopgave no 6, 25^e jaargang

Achilles en de schildpad / **1**

Hessel Pot

Waar zitten de azen? / **3**

Hessel Pot

De regelmatige 16-cel / **4**

Klaas Lakeman

Wiskunde in Utrecht / **7**

Eindeloze optellingen / **8, 25**

Hessel Pot

De regelmatige 24-cel / **12**

Klaas Lakeman

De jacht op prima
priemgetallen II / **16**

Mark Fander

Denkertjes / **19**

Reis over eenzijdige
oppervlakken / **20**

Martin Rense

Weinig verschil na de komma / **24**

Frank Roos/Hessel Pot

Tentoonstelling Onmogelijke
Figuren / **26**

Nieuwe reuzenontbinding / **27**

Rijen zonder groepsherhaling / **27**

Hessel Pot

De laatste loodjes / **28**

Klaas Lakeman

Priemreeksen / **31**

Mark Fander

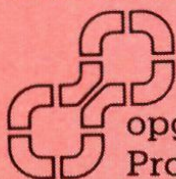
Pythagoras Olympiade / **32**

Jan van de Craats

Redactioneel / **36**

Per koets door de bocht / **36**

Pythagoras is een uitgave van
stichting ivio^llelystad



voor onderwijs en
volksontwikkeling
opgericht in 1936 door
Prof. dr. Ph.A. Kohnstamm

Abonnementsprijzen per jaar

Nederland / Europa* f 19,50

België Bfrs 390

Overigelanden f 29,50

Losse nummers f 5,—

Gecomb. abon. met

Archimedes f 35,—

* Europa m.u.v. de Oostblokl.

stichting ivio^llelystad, postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL).
tel. 03200-26514.

Postgiro Nederland: 287934. Postcheck België: 000-0130850-94

Bankrelatie: NMB. Lelystad rek. crt. nr. 66.27.11.653