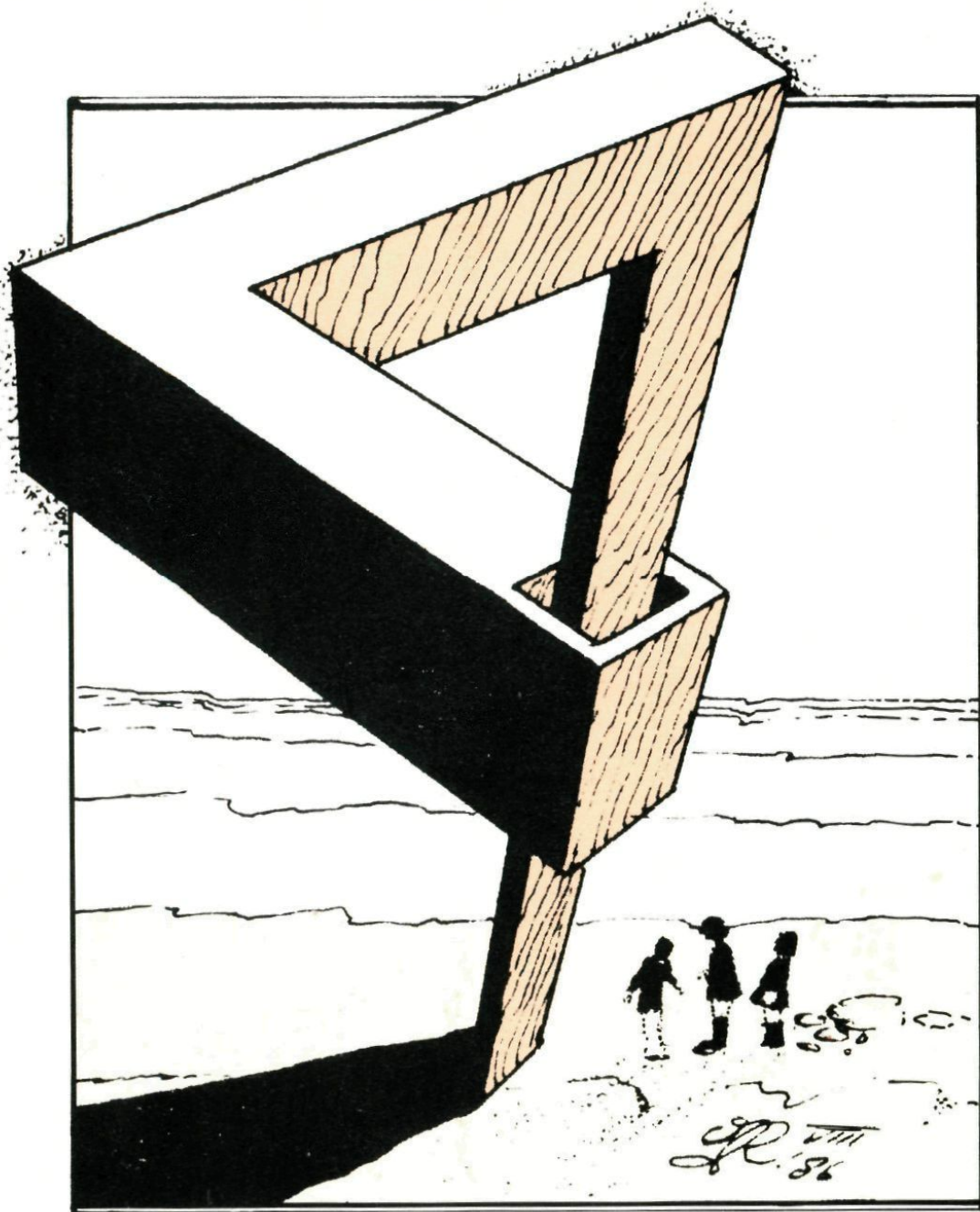
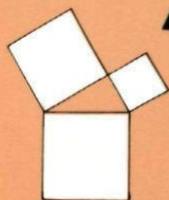




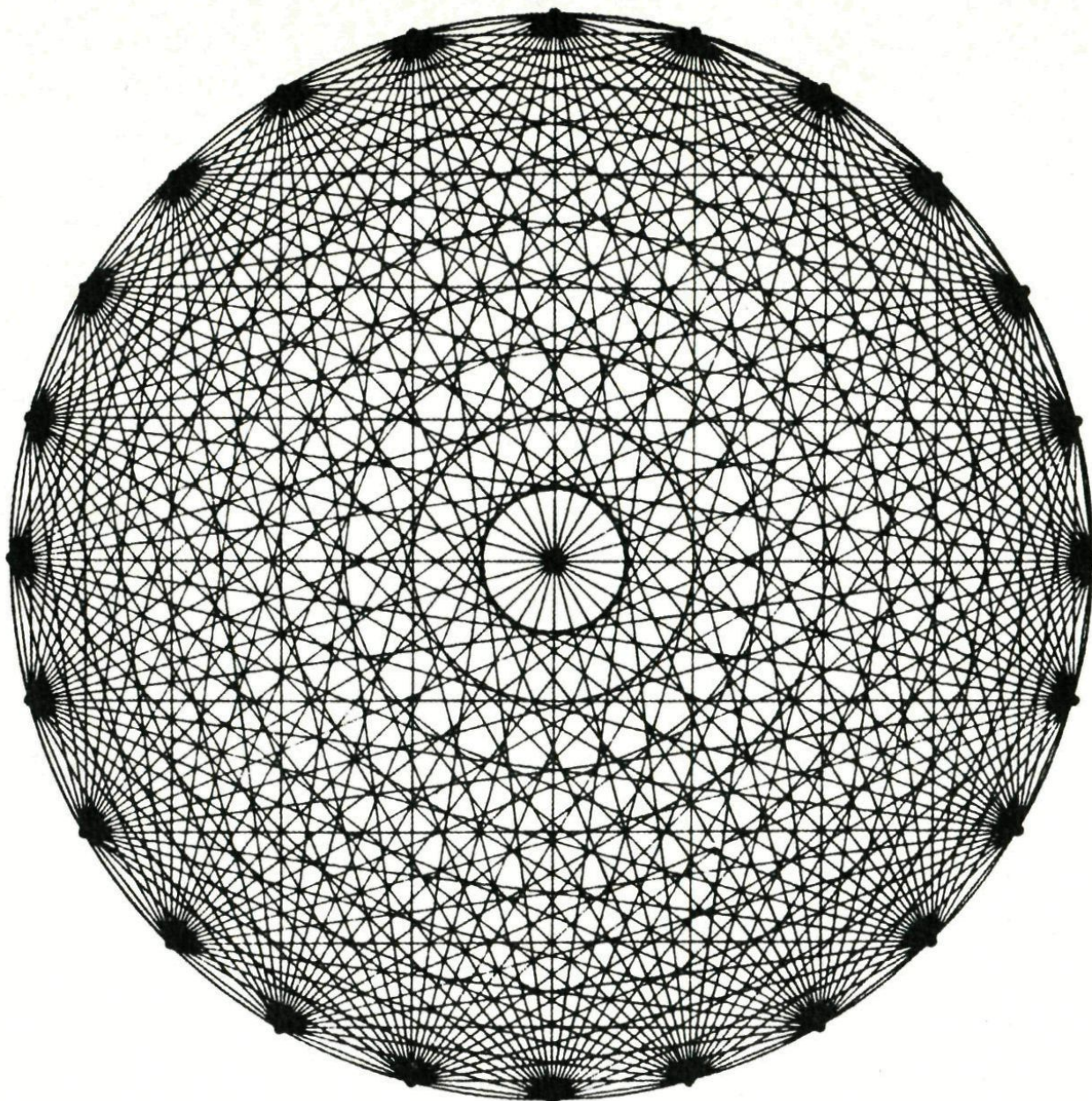
Pythagoras



wiskunde tijdschrift voor jongeren

stichting ivio 'lelystad

jaargang 26
nummer 1
november 1986



Geheimzinnige cirkels

De figuur die hierboven staat, kun je als volgt maken. Verdeel een cirkel in 24 gelijke delen (hoeken van 15°). Trek daarna alle verbindingslijnen. Dat is een hele klus, want het zijn er maar liefst . . . 276. Tel maar na! Of weet je een manier om het snel uit te rekenen?

Als je met één oog wat dichtgeknepen naar de figuur kijkt, zie je allemaal cirkels. Het zijn natuurlijk geen echte cirkels en naar de buitenrand worden ze wel wat vaag, maar ze lijken er sprekend op. Heb je er enig idee van hoeveel dat er zijn?

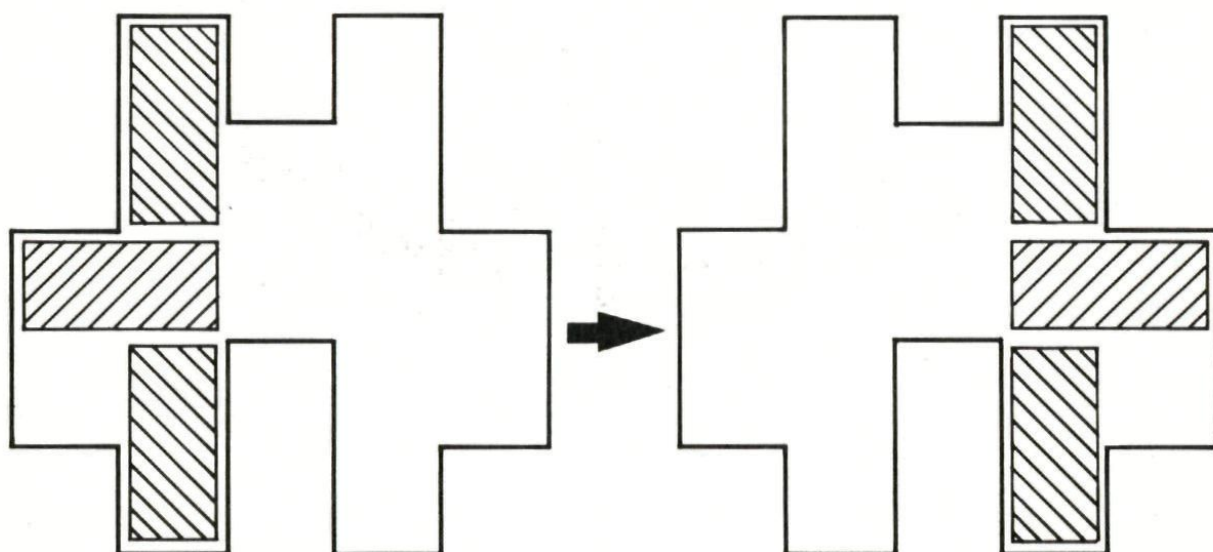
Iets voor jou om dat uit te zoeken? Door welk effect ontstaan die schijncirkels eigenlijk? Hoeveel zouden er verschijnen als je een cirkel in 8 gelijke stukken verdeelt, of in 12?

Begin eens met een cirkel in 3 of 4 gelijke stukken te verdelen. Trek de verbindingslijnen. Zie je dan cirkels? En bij een verdeling in vijven, zessen, enzovoorts? Voer dat maar eens uit. Trek alle verbindingslijnen en tel de 'cirkels'. De aantallen zijn in onderstaande tabel gegeven.

aantal hoekpunten	3	4	5	6	7	8	12
aantal schijn-cirkels	1	1	2	2	3	3	5

Zie je al kans om de uitkomsten te voorspellen? Hoeveel verwacht je er bij een verdeling in 15 of 16 gelijke stukken? En misschien is er wel iemand (met een wiskundeknobbel) die het verzint voor een verdeling in . . . n gelijke stukken?!

Schuifpuzzel



Verschuif de drie rechthoeken, zonder ze te draaien, zodat vanuit de linkerstand de rechterstand wordt verkregen.

(uit: 'Alpha', Oost-Duitsland)

Je kunt even drie papiertjes knippen om er mee te schuiven, al is de opgave zo eenvoudig dat velen het ook wel uit het hoofd zullen kunnen. Zeker als je bedenkt dat je eigenlijk al klaar bent wanneer je een symmetrische 'middenstand' hebt bereikt, halverwege de begin- en eindstand. De tweede helft gaat dan 'net zo'.

Het is mogelijk de eindstand te bereiken uit de beginstand door *zeven* keer een rechthoek te verplaatsen.

Tossen met een kromme stuiver

Als je met z'n tweeën ergens om wilt loten, is een bekende methode: Spreek af wie wint bij de uitkomst 'kop' (k) en wie bij 'munt' (m), en gooi een muntstuk draaiend omhoog.

Deze manier is eerlijk, tenminste. . . zolang je er beiden op vertrouwt dat het gebruikte muntstuk 'eerlijk' neerkomt. De vraag is nu: kun je ook eerlijk tossen met een stuiver waarvan het gelijk zijn van de kans op kop en munt twijfelachtig is? Of zelfs met een stuiver die zo scheef en krom is dat die kansen zéker niet gelijk zijn?

Het kan inderdaad

De makkelijkste oplossing is natuurlijk om een andere munt te nemen, eentje die er nog wel 'als nieuw' uitziet. Maar het is misschien wel aardig om te zien dat het ook kan met die ene kromme stuiver waar je in de vakantie een oude stoomloc overheen hebt laten rijden.



De truc is om de stuiver niet maar één keer op te gooien, maar twee keer ná elkaar. De uitkomsten k-k en m-m gebruik je niet omdat ze (waarschijnlijk) een ongelijke kans hebben. De kans op de uitkomst k-m is echter wél even groot als de kans op m-k; ook als je zeker weet dat de kans op k groter is dan op m of andersom! Het tossen gaat nu als volgt: Je spreekt eerst af wie er wint bij k-m, en wie bij m-k. Dan gooi je twee keer met de kromme stuiver. Dit levert ofwel een eerlijke winnaar (bij k-m of m-k), ofwel een gelijk paar (k-k of m-m). In het laatste geval moet je opnieuw twee keer gooien. Net zo lang tot je een ongelijk paar krijgt.



Tossen met z'n drieën

Hoe kun je door het opgooien van een munt, een eerlijke winnaar uitloten als je met z'n drieën bent? Dat lijkt ook met een zuiver muntstuk al lastig; je neemt er liever een dobbelsteen voor en spreekt af: Jan wint bij 1 of 2, Piet bij 3 of 4, en Klaas bij 5 of 6. Toch kan het ook weer met onze stuiver, krom of niet. Na het voorafgaande kun je zelf wel op een oplossing komen. Bijvoorbeeld als volgt:

Gooi steeds series van drie worpen na elkaar. Bij 'drie gelijk' (k-k-k of m-m-m) gooi je opnieuw een serie van drie. Bij 'twee gelijk, één anders' volgt de winnaar uit de afspraak: als de eerste worp afwijkt van de beide andere wint Jannie, als de tweede afwijkt wint Petra, en als de derde afwijkt wint Klazina.

Er mee eens dat dit eerlijk spel is?

Gelijke staarten voor g , $1/g$ én g^2

In het juli-nummer van dit jaar (Pythagoras 25-6: 'Weinig verschil na de komma') merkten we op dat het getal 1,6180340 op je rekendoosje na het indrukken van de $1/x$ -knop een resultaat geeft met (vrijwel) precies dezelfde cijfers na de komma. We zochten toen uit bij welke getallen dit verschijnsel nog meer optreedt.

Maar we vergaten op te merken dat ook het *kwadraat* (knop x^2) van het bovengenoemde getal nog steeds dezelfde staart na de komma heeft:

$$1,6180340^2 = 2,6180340$$

Het vinden van zulke getallen (g) is alweer erg eenvoudig, het verschil tussen g en g^2 moet geheel zijn:

$$g^2 - g = n.$$

Herleiden geeft:

$$(g - 1/2)^2 = n + 1/4$$

$$g = 1/2 + \sqrt{n + 1/4}.$$

Voor $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ krijg je:

$$g = 1, (1 + \sqrt{5})/2, 2, (1 + \sqrt{13})/2, (1 + \sqrt{17})/2, (1 + \sqrt{21})/2, 3, \dots$$

Als je zin hebt kun je nog nagaan voor welke *negatieve* g de eigenschap geldt. En je kunt misschien ook nog wel aantonen dat er behalve $g = \pm 1$ en $g = \pm (1 + \sqrt{5})/2$ geen enkel ander getal is waarvoor

$$g, 1/g \text{ én } g^2$$

achter de komma identiek zijn.

Steeds 17

Zet de getallen in de open vakjes zó, dat de som van elk drietal naast elkaar staande getallen 17 wordt:

	5										8
--	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---

Wisselgeld

Er zit een eigenaardigheid in de keuze die ooit gemaakt is voor de Nederlandse munten (5, 10, 25, 100 en 250 cent): je kunt voor méér dan vijf gulden aan wisselgeld op zak hebben, en toch *niet* in staat zijn een briefje van vijf te wisselen.

- Wat is het *grootste* bedrag aan wisselgeld waarbij dat niet mogelijk is?
- Aan welke regel moet het munt-systeem voldoen om deze eigenaardigheid te voorkomen?

Traliegrafieken

Hier volgen een paar niet te moeilijke (voor wie weet wat een sinus is) maar misschien ook niet al te gewone opgaven, met wat commentaar. Antwoorden vind je op bladzijde 16.

Teken de grafiek van de volgende relaties (in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$):

$$\sin \frac{1}{2}(x + y) = 0 \quad (1)$$

$$\cos \frac{1}{2}(x - y) = 0 \quad (2)$$

$$\sin x + \sin y = 0 \quad (3)$$

Bedenk dat in een grafiek van een *relatie* (anders dan bij een *functie*) bij één waarde van x meerdere waarden van y kunnen horen.

Als je geen vergissingen maakt, blijkt dat de grafieken van (1) en (2) samen juist overeenkomen met de grafiek van (3).

Dit is ook af te leiden uit de volgende, voor alle x en y geldende formule:

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= \\ &= 2 \cdot \sin \frac{1}{2}(x + y) \cdot \cos \frac{1}{2}(x - y) \end{aligned}$$

Op deze formule is de bekende nul-regel voor produkten van toepassing: het linkerlid is alleen maar nul voor getalparen x, y waarvoor ook een van de factoren rechts nul is.

En omgekeerd.

Het rechterlid (hier de tweede regel van de formule) bestaat uit drie factoren. Maar de eerste daarvan, het constante getal 2, wordt nooit nul hoe gek je de x en y ook kiest.

Wat variatie

Als je die rechtlijnige traliewerken van (1), (2) en (3) maar saai vindt, is er met een beetje meer moeite een wat vrolijker resultaat te bereiken. Teken bijvoorbeeld de grafiek (in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) van

$$2 \sin x + \sin y = 0 \quad (4)$$

We maken nog wat opmerkingen over deze opgave.

De standaard-aanpak van zo'n vraag is:

- kies voor x een willekeurig getal,
- vul dat in in (4) zodat een vergelijking met één onbekende (y) ontstaat,
- los die vergelijking volledig op, en teken als punten in de grafiek de gevonden x, y -combinaties (voorzover binnen de figuur vallend),

- kies een ander getal voor x en begin opnieuw, net zolang tot je zóveel punten hebt dat duidelijk is hoe de volledige grafiek eruit ziet.

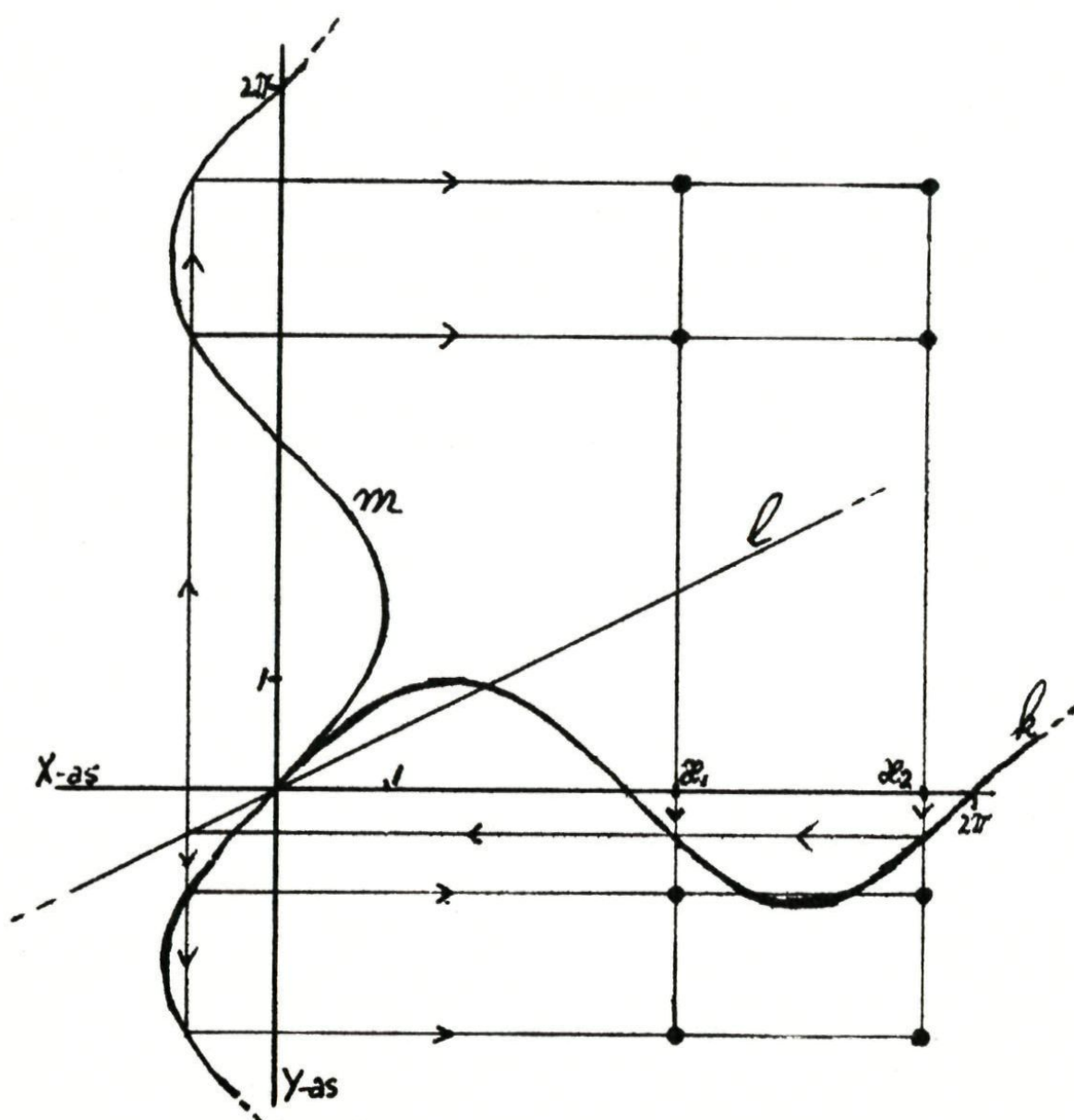
Maar. . .

het oplossen van een hele serie vergelijkingen is een werkje dat snel verveelt. Zeker wanneer je een aantal keer achter elkaar een lege oplossingsverzameling vindt, en dus weinig opschiet met de grafiek.

Je zult er daarom gauw toe komen de opgave eens op een wat andere manier te bekijken. Bijvoorbeeld: is direct te zien voor welke x de vergelijking geen oplossingen heeft? Of: is het verloop van de grafiek globaal te voorspellen?

Een hulpfiguur

Een van de hulpmiddelen die je voor het vinden van het globale verloop kunt gebruiken, zie je in figuur 1. Daar is getekend:



Figuur 1. Hulpfiguur, te gebruiken bij het vinden van de grafiek van $2 \sin x + \sin y = 0$.

- een assenkruis $X-Y$,
- een sinuslijn langs de X -as (k),
- de rechte lijn $y = \frac{1}{2}x$ door de oorsprong (l),
- een sinuslijn langs de Y -as (m),
- en verder een aantal horizontale en verticale hulplijnen.

Hiermee wordt, uitgaande van een verticale lijn door een willekeurig punt x_1 op de X -as, via rechte hoeken op de ontmoetingsplaatsen met achtereenvolgens k , l en m , enkele punten van de grafiek van (4) gevonden (de

dikke stippen). Probeer zelf uit te zoeken waarom via deze constructie de juiste punten gevonden worden.

Verdere vragen

- Hebben de verticaal staande golflijnen in de grafiek van (4) de vorm van een sinuslijn (in één richting verkleind)?
- Hoe ziet de grafiek er uit, als je de coëfficiënt 2 in (4) vervangt door 1, 10 of -1 ?

PYTH $\times$ A = GORAS

Op twee manieren kunnen de letters in de titelformule worden vervangen door de cijfers 1 tot en met 9 (beide A's stellen natuurlijk hetzelfde cijfer voor) zó dat de vermenigvuldiging klopt.

Het is niet zo vreselijk moeilijk om die oplossingen te vinden, probeer het eerst maar zelf.

En aan wie deze raad niet opvolgt vragen we om ons een handigere oplossingsweg aan de hand te doen dan die welke hieronder beschreven staat.

Merk eerst op dat er juist negen verschillende letters zijn voor negen cijfers.

Kies voor A achtereenvolgens 1, 2, 3, ..., 9. Zoek daarbij voor TH twee cijfers zó dat A in linker- en rechterlid overeenkomt. Daarna kies je Y zó dat er geen verdere gelijke cijfers voorkomen.

De onderstaande lijst geeft nu aan in welke gevallen je ná de keuze voor A, TH en Y ook nog enkele (steeds 3) mogelijkheden voor P moet uitzoeken:

$$\begin{aligned} \dots TH \times A &= \dots AS \\ \dots 13 \times 2 &= \dots 26 \rightarrow G=4 \text{ is te groot} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots 14 \times 2 &= \dots 28 \rightarrow G=3 \text{ is te groot} \\ \dots 12 \times 3 &= \dots 36 \rightarrow G=4 \text{ is te groot} \\ \dots 46 \times 3 &= \dots (1)38 \rightarrow Y=2 \text{ of } 7 \\ &\quad P=1, 5, 9 \\ \dots 78 \times 3 &= \dots (2)34 \rightarrow Y=1 \rightarrow P = \dots \\ \dots 12 \times 4 &= \dots (0)48 \rightarrow Y=9 \rightarrow P = \dots \\ \dots 37 \times 4 &= \dots (1)48 \rightarrow Y=1,2,5,6 \rightarrow P = \dots \\ \dots 87 \times 4 &= \dots (3)48 \rightarrow Y=2,3,5 \rightarrow P = \dots \\ \dots 53 \times 7 &= \dots (3)71 \rightarrow Y=8,9 \rightarrow P = \dots \\ \dots 82 \times 7 &= \dots (5)74 \rightarrow Y=3 \rightarrow P = \dots \\ \dots 96 \times 7 &= \dots (6)72 \rightarrow Y=1,5 \rightarrow P = \dots \\ \dots 23 \times 8 &= \dots (1)84 \rightarrow Y=1,5,6 \rightarrow P = \dots \\ \dots 73 \times 8 &= \dots (5)84 \rightarrow Y=2 \rightarrow P = \dots \end{aligned}$$

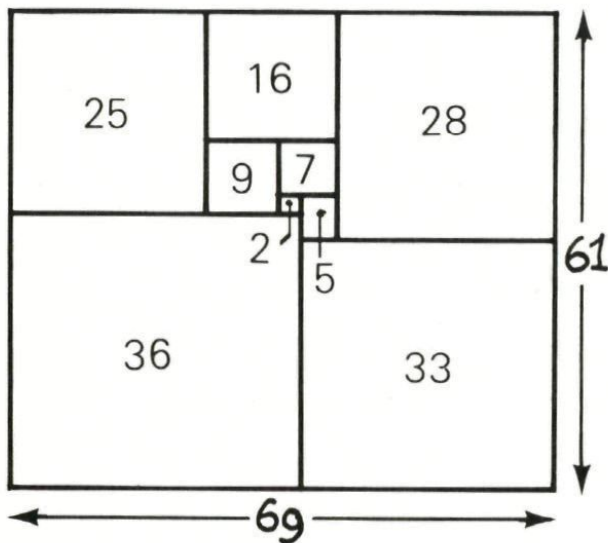
Dit zoekwerk leidt tweemaal tot resultaat:

$$\begin{aligned} 7123 \times 8 &= 56984 \quad \text{en} \\ 9523 \times 8 &= 76184. \end{aligned}$$

Vierkantenrechthoeken

De rechthoek (69 bij 61) hier links onder is opgedeeld in negen vierkanten. De getallen in de vierkanten geven de lengten van hun zijden aan. Je kunt gemakkelijk zelf natellen dat het allemaal precies klopt: 25 (links boven) is gelijk aan $16 + 9$, enzovoort.

Het vinden van zulke verdelingen is hels moeilijk als ook geëist wordt dat *geen twee vierkanten even groot* zijn. Hieronder geven we een paar resultaten van het onderzoek op dit gebied, en we proberen je uit te dagen er zelf ook nog wat aan te puzzelen.

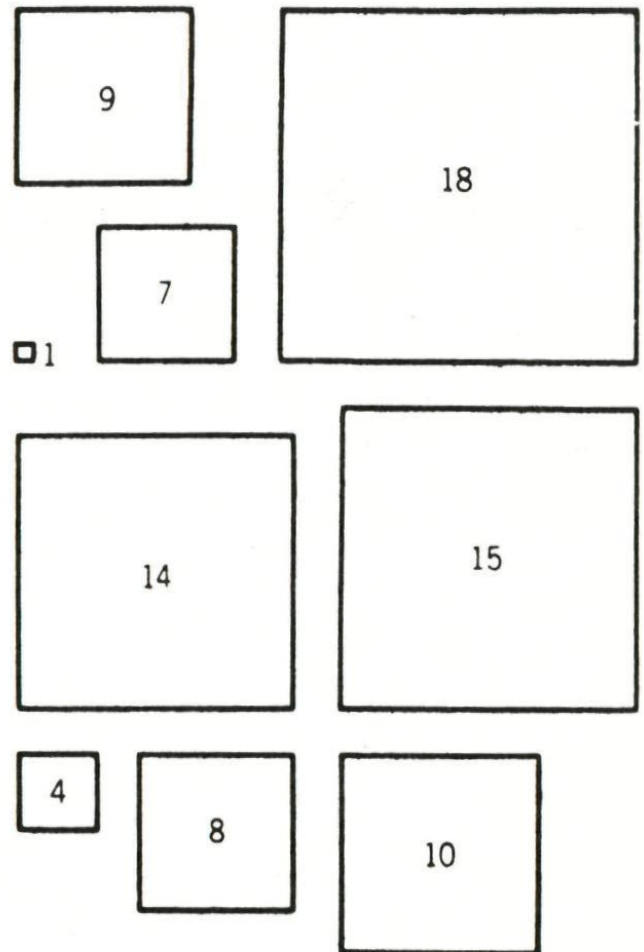


Het kleinste aantal

Bewezen is dat met *minder* dan negen verschillende vierkanten geen rechthoek is te maken. Met negen kan het op twee verschillende manieren (natuurlijk afgezien van eenvoudige vergrotingen van een oplossing). De ene manier is boven gegeven. Van de andere geven we alleen de goede stukjes (rechts), je mag zelf proberen ze in elkaar te schuiven tot een rechthoek.

Op het eerste gezicht lijkt dit een moeilijke puzzel, zeker als je er niet voor voelt de stukken eerst uit een paar vellen ruitjespapier te knippen.

Maar... wie lui is moet proberen slim te zijn! Met wat handig



redeneren is de oplossing ook wel te vinden zonder met uitgeknipte stukjes te schuiven:

- Wat weet je van het formaat van de totale rechthoek? De oppervlakte is $18^2 + 15^2 + \dots + 4^2 + 1$. De lengte en breedte zijn gehele getallen. Het in factoren ontbinden van

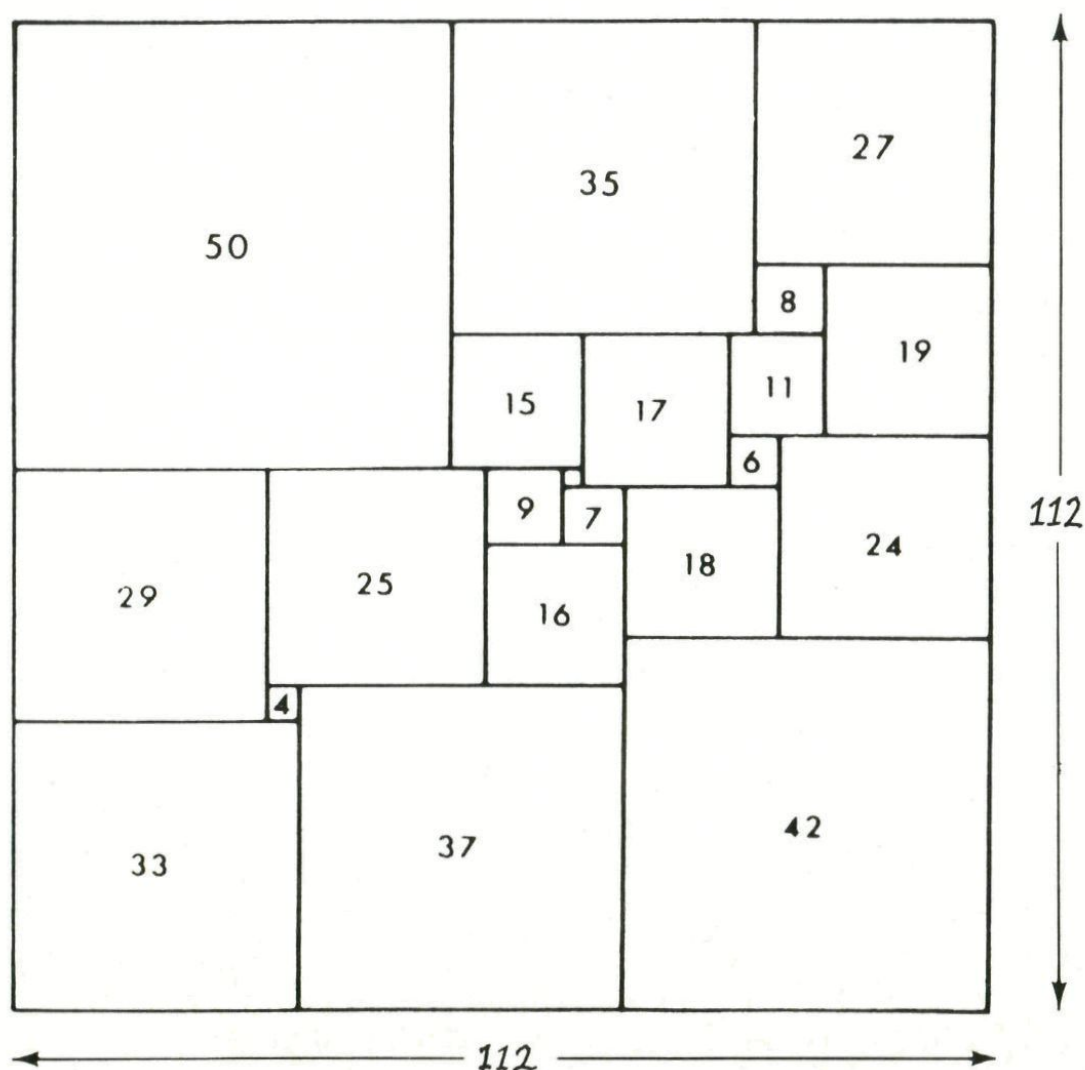
de oppervlakte-uitkomst geeft dan maar een heel beperkt aantal mogelijkheden.

- Uit het gegeven dat met minder dan negen stukjes geen rechthoek te maken is, volgt dat aan elke zijde van het resultaat *minstens twee* vierkanten moeten grenzen. En bij het vullen van de hele rechthoek mag nooit ergens een kleiner rechthoekig gedeelte overblijven (want dat zou dan met minder dan negen stukjes zijn te vullen).
- Als je het kleinste vierkantje in een hoek of tegen de rand legt, loop je altijd vast.

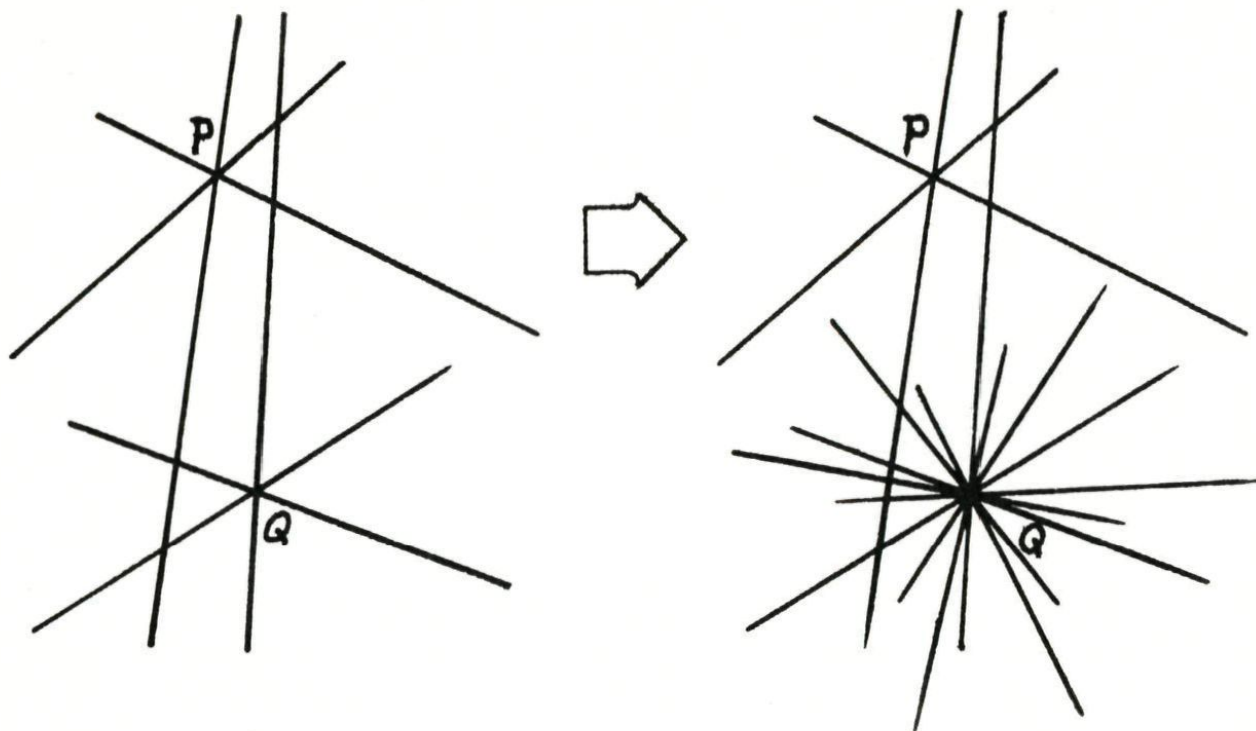
Met deze aanwijzingen moet je de oplossing kunnen vinden.

Vierkanten-vierkanten

Niet alleen rechthoeken zijn op te delen in een aantal verschillende vierkanten, maar ook met vierkanten is dat mogelijk. Men spreekt dan meestal van *volmaakte vierkanten*. Het voorbeeld hieronder werd via bruto computer-geweld in 1978 ontdekt door de Nederlander A. J. W. Duijvestijn. Het bestaat uit eenentwintig verschillende kleinere vierkanten. Duijvestijn toonde aan dat eenentwintig het kleinste aantal verschillende vierkanten is, waarin een vierkant kan worden opgedeeld.



Van trio's naar nonetten



Het artikel 'Nieuwe lijnentrio's in de driehoek' (Pythagoras 25-2) gaf aanleiding tot heel wat onderzoek. Eén resultaat daarvan geven we hier. Het blijkt dat het beeldpunt Q bij het gekozen punt P ook nog via twee andere constructies gevonden kan worden, ook weer als gemeenschappelijk snijpunt van drie lijnen. Het verrassende van de constructie ervaar je pas goed als je zelf tekent aan de hand van de volgende beschrijving. (Je hoeft het stukje van vorig jaar niet te kennen.)

Uitgaande van een (flink grote) driehoek ABC en een punt P (bij voorkeur, maar niet noodzakelijk, binnen de driehoek) teken je:

- A_1, B_1, C_1 als snijpunten van AP, BP, CP met BC, CA, AB ;
- A_2, B_2, C_2 als middens van B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 ;
- A_3, B_3, C_3 als middens van BC, CA, AB ;
- A_4, B_4, C_4 als snijpunten van AA_3, BB_3, CC_3 met B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 ;
- A_5, B_5, C_5 als snijpunten van AA_3, BB_3, CC_3 met B_3C_3, C_3A_3, A_3B_3 ;
- A_6, B_6, C_6 als snijpunten van AA_1, BB_1, CC_1 met B_3C_3, C_3A_3, A_3B_3 .

Nu blijkt dat de lijnen AA_2, BB_2, CC_2 (die van het vorige artikel), én de lijnen A_1A_4, B_1B_4, C_1C_4 én de lijnen A_3A_6, B_3B_6, C_3C_6

alle negen door hetzelfde punt Q gaan!!! !!! !!!

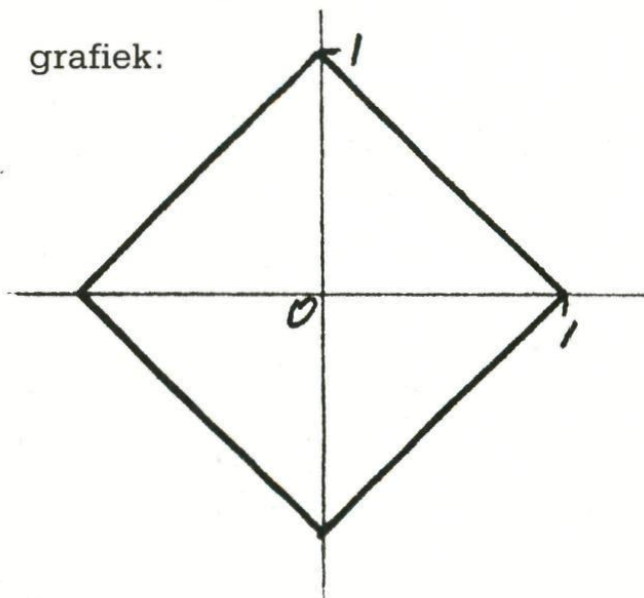
Vierkantvergelijkingen

Nee, dit stukje gaat niét over vierkantsvergelijkingen! Maar over het opmerkenswaardige feit dat in de gangbare schoolboeken wél vergelijkingen van cirkels behandeld worden, maar nooit vergelijkingen van een vierkant.

Bekend zal wel zijn dat $x^2 + y^2 = 9$ de vergelijking van een cirkel genoemd wordt omdat de verzameling punten $\{P \mid x_P^2 + y_P^2 = 9\}$ juist een cirkel is (met de oorsprong van het coördinatenstelsel als middelpunt en met straal 3). Maar een vierkant is toch een minstens even gebruikelijke figuur in de wereld om ons heen, en ook in de wiskundeles. Een vergelijking ervan zou dus in een goed wiskundeboek/-blad niet mogen ontbreken.

We geven één voorbeeld van zo'n vierkantvergelijking, gebruik makend van de bekende absolute waardefunctie $x \rightarrow |x|$. (Een eventueel minteken bij het origineel wordt door deze functie verwijderd; precies hetzelfde resultaat als wordt bereikt door het voorschrift $x \rightarrow \sqrt{x^2}$.)

grafiek:



vergelijking: $|x| + |y| = 1$

Ga maar na dat dit klopt. Het vierkant heeft zijden $\sqrt{2}$. Vierkanten met een ander formaat (zijde d) worden beschreven door:

$$|x| + |y| = \frac{1}{2} d \sqrt{2}$$

Nog andere vierkanten

a. Niet zo moeilijk is het om zelf een vergelijking te bedenken voor het geval dat het centrum van het vierkant niet in de oorsprong moet liggen, maar in punt (a, b) . Denk maar aan hoe dat gaat bij de cirkel.

De volgende vragen zijn een stuk lastiger. Mogelijke antwoorden vind je op bladzijde 16.

b. Bedenk een vergelijking voor een rechtopstaand vierkant (zijden evenwijdig aan X- en Y-as).

c. Bedenk een vergelijking voor een schiefstaand vierkant, met diagonalen evenwijdig aan de lijnen $y = \frac{1}{2}x$ en $y = -2x$.

d. Het kan ook erg ingewikkeld. De vergelijking $\cos x + \cos y = 0$ levert oneindig veel vierkanten op in de vorm van kippegaas (zie ook het artikel: 'Traliegrafieken' bladzijde 5). Die kunnen allemaal op één na worden weggewerkt met behulp van een omgeschreven cirkel en twee worteltekens (want onder de wortel mag niet iets negatiefs staan):

$$\sqrt{\pi^2 - x^2 - y^2} \cdot \sqrt{\cos x + \cos y} = 0.$$

Verhuisperikelen

Het is al weer een tijdje geleden dat er op de achterkant van Pythagoras 24-2 een puzzel stond over het schuiven van meubels in een verhuishwagen. We hebben die puzzel, met de prachtige tekening van *Evert Geradts* erbij, nog eens opgenomen, want we kregen er een brief over van *Anita* en *Suzan* uit klas 2 van het Praedinius Gymnasium in Groningen. Ze hadden er met hun leraar wiskunde hun hersens over gebroken. Volgens hen was de puzzel onoplosbaar!

De verhuishwagen

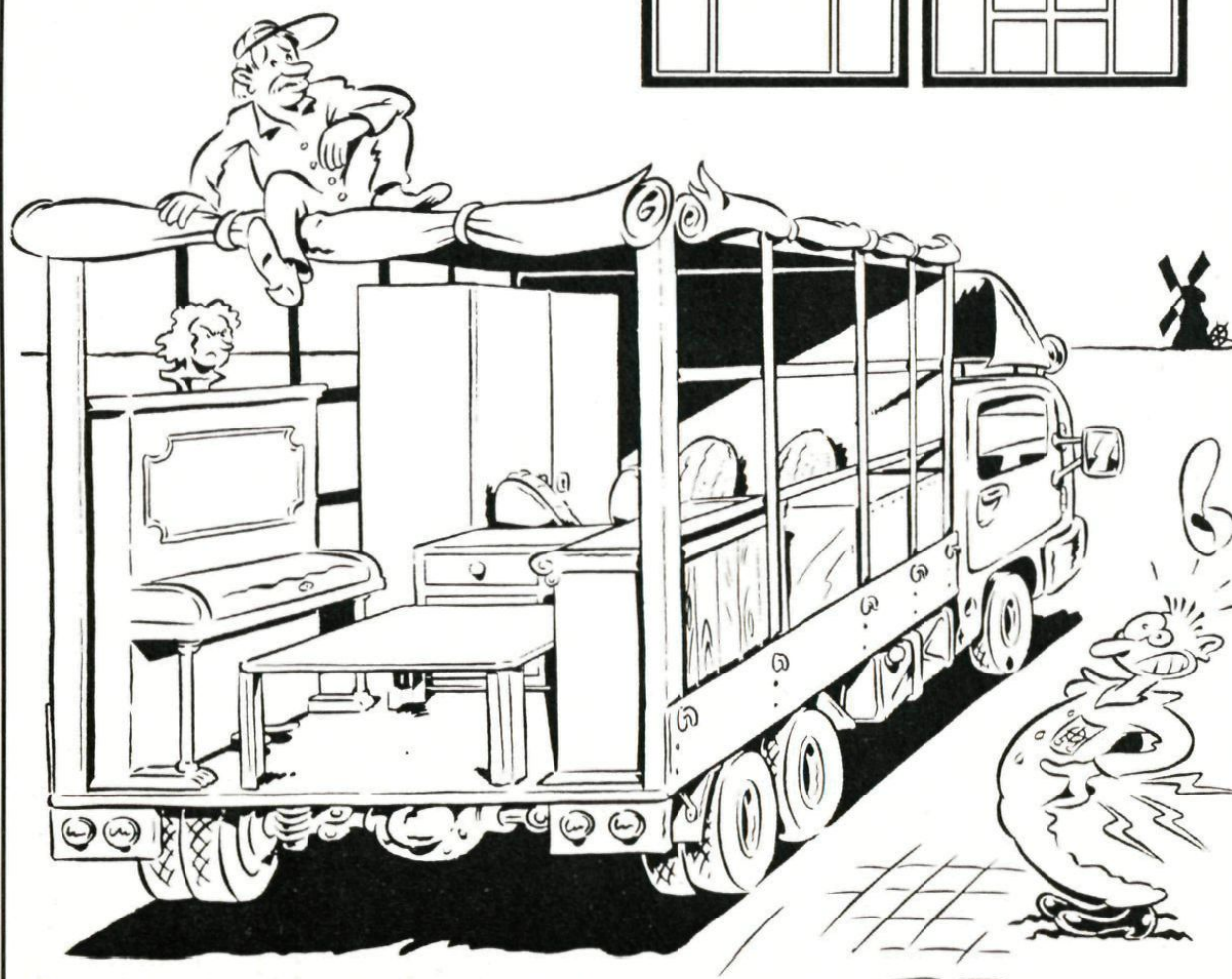
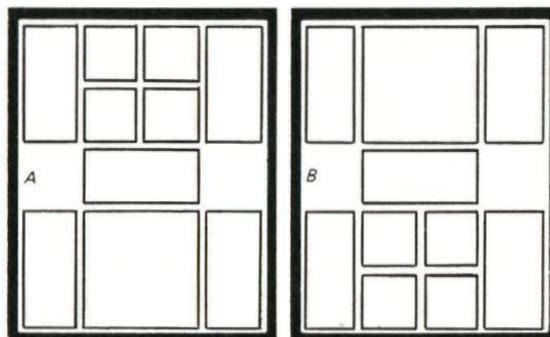
In de verhuishwagen staan de meubels opgesteld volgens figuur A (vier fauteuils, vier kasten en een piano die tweemaal zo veel oppervlakte in beslag nemen, en een tafel die een viermaal zo groot oppervlak in beslag neemt).

Ach, dat is waar ook, de fauteuils moeten er als eerste uit! De verhuizers zeggen: 'Wij tillen niks meer, we hebben 't in onze rug.'

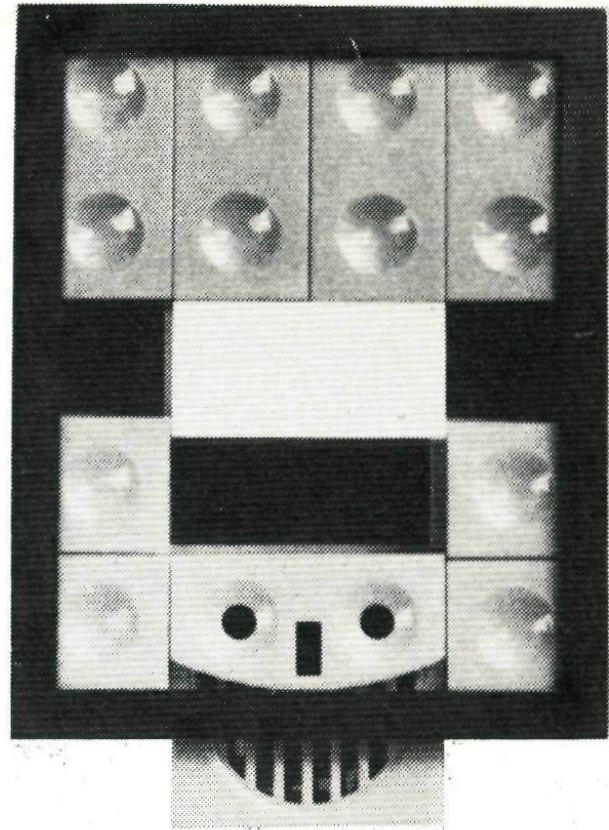
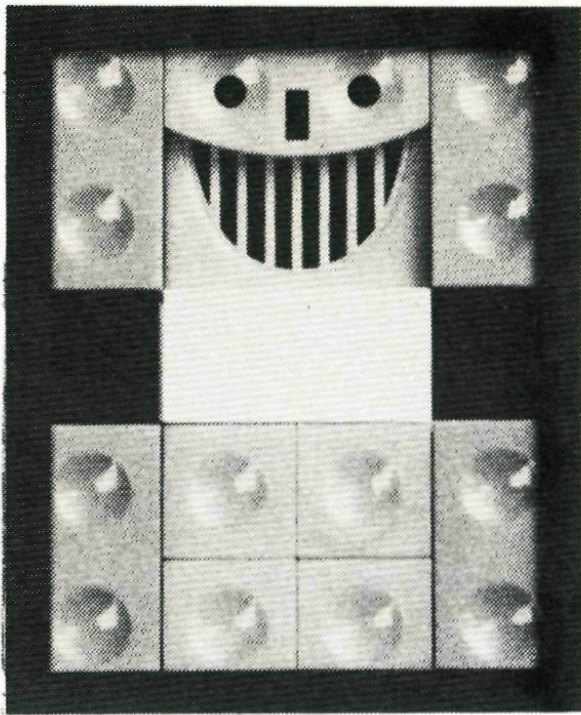
Dus schuiven maar! Ze rijden pas weg als de meubels opgesteld staan volgens figuur B.

Hoe doen ze dat?

Om erachter te komen, heb je al genoeg aan een velletje papier met een veld van 5 bij 4 maal de zijde van de kleine vierkantjes (te weten de fauteuils) en tien losse stukjes papier met de juiste afmetingen. En... geen huiswerk in de komende dagen!



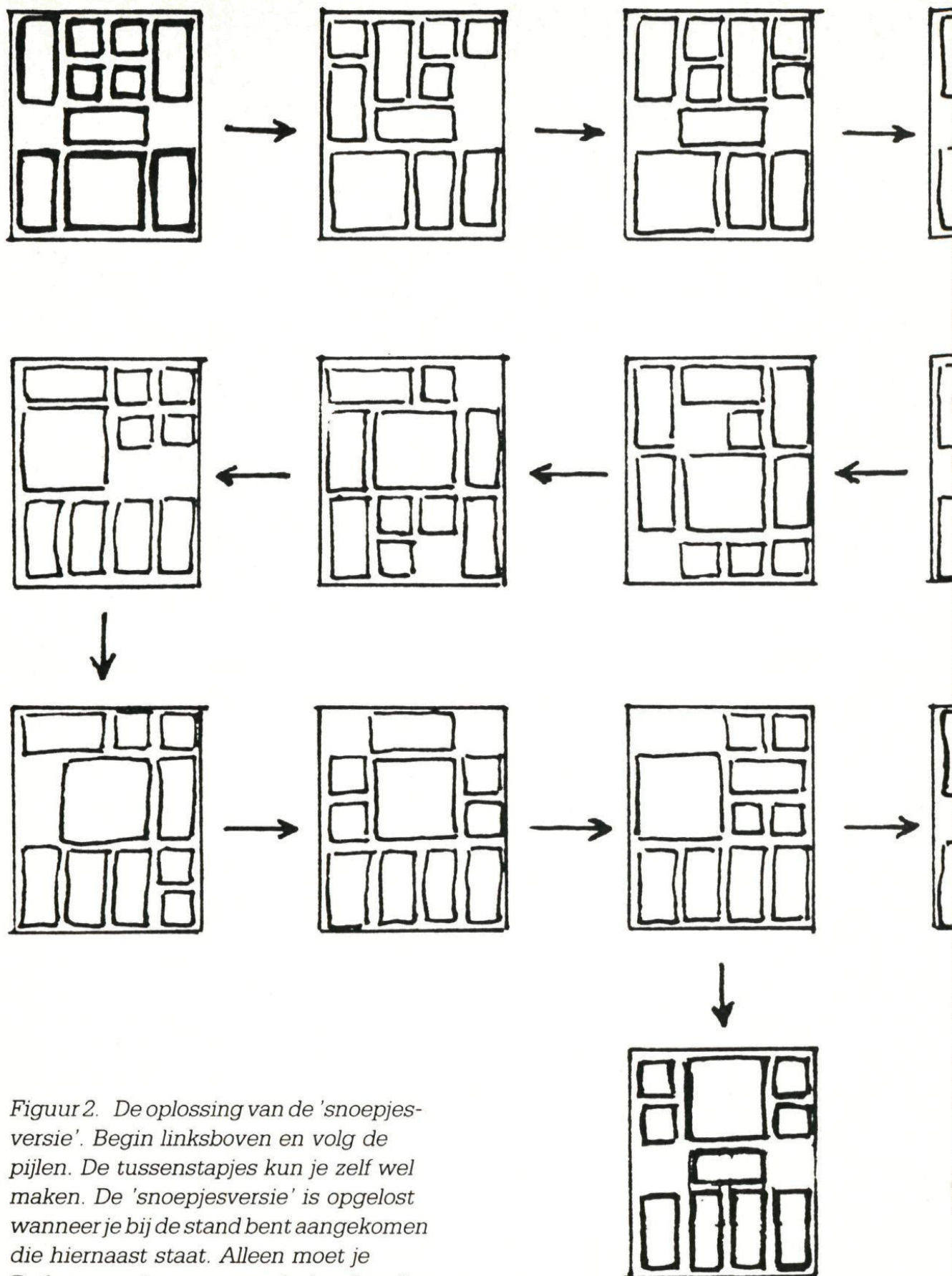
De 'verhuispuzzel' uit Pythagoras 24-2.



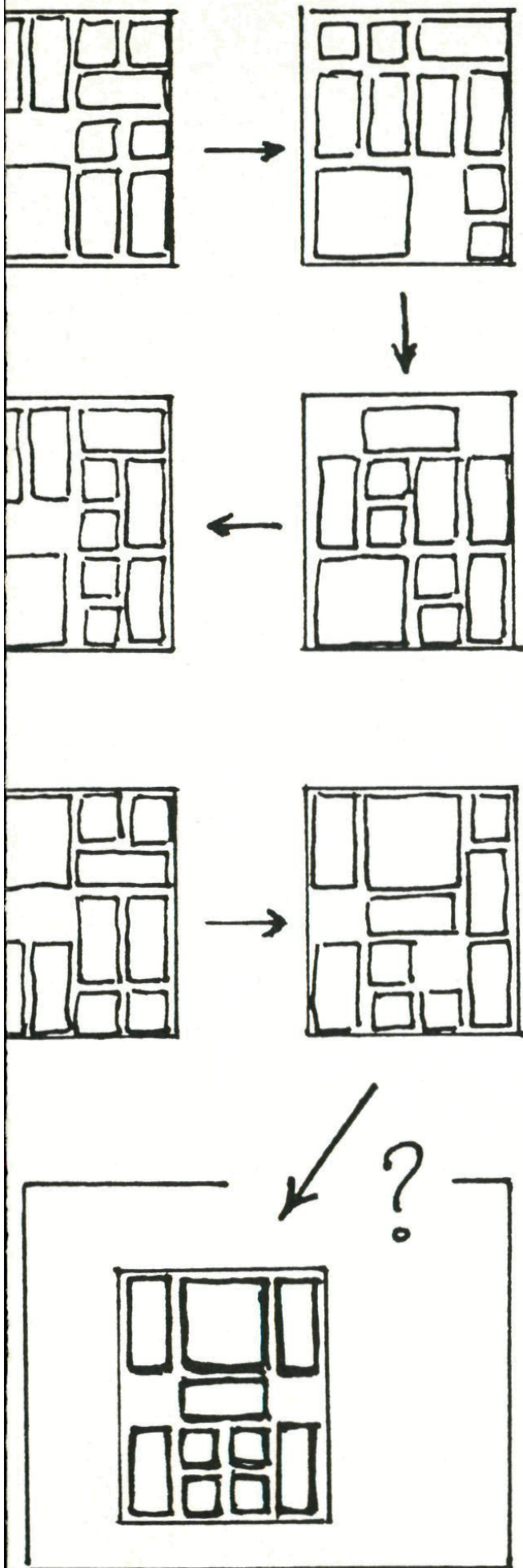
Figuur 1. De 'snoepjesversie' van de verhuispuzzel: *schuif vanuit de beginstand (links) naar een stand waarbij het gezicht middenonder zit (rechts) en half naar buiten kan worden geschoven.*

Zou dat inderdaad zo zijn? Misschien hebben meer lezers zich dat afgevraagd. Die puzzel duikt trouwens ook in allerlei andere gedaanten geregeld op. We kregen laatst een versie met blokjes in een plastic doosje (figuur 1). Het grote vierkante blokje ziet er uit als een gezicht; achter de grijnzende tanden zie je snoepjes zitten. Als je er in slaagt om dat blokje helemaal naar het midden van de onderkant te schuiven, kan het daar door een opening half naar buiten worden getrokken, zodat de snoepjes vrijkomen. Het gaat er dan natuurlijk niet om hoe de andere

blokjes zitten; als je het gezicht maar naar beneden krijgt. Bij de verhuispuzzel komt de vierkante tafel in de plaats van het gezicht. Die tafel moet van de achterkant naar de voorkant geschoven worden. Tot zover komen de twee puzzels overeen, want ook de andere meubelstukken zijn net zo gevormd als de plastic blokjes uit het snoeppuzzeltje. Maar in onze Pythagoras vroegen we nog meer, namelijk om ook *alle andere* meubels precies andersom te plaatsen. De hele beginstand moet gespiegeld worden. Misschien is dat wel veel lastiger!



Figuur 2. De oplossing van de 'snoepjesversie'. Begin linksboven en volg de pijlen. De tussenstapjes kun je zelf wel maken. De 'snoepjesversie' is opgelost wanneer je bij de stand bent aangekomen die hiernaast staat. Alleen moet je Pythagoras dan even op z'n kop houden. Voor de 'verhuispuzzel' kun je vanuit de voorlaatste stand nog twee extra stappen doen, maar de laatste stap naar de stand met kader en vraagteken is niet te maken.



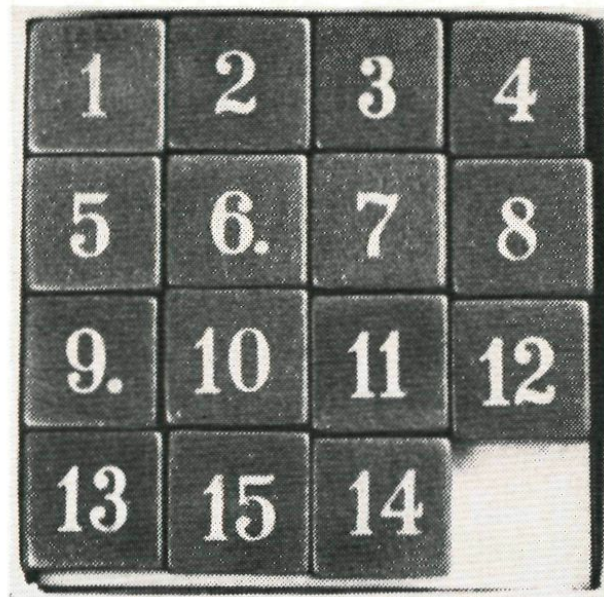
Al oud

Dit soort schuifpuzzels is al heel oud. In het mooie boek 'Puzzels zelf maken en oplossen' van *Jack Botermans* en *Jerry Slocum* (uitgegeven door de Hema) staan allerlei andere varianten uit de jaren twintig. Soms werden ze als reclame gebruikt door verhuisbedrijven. De firma Argonne uit Los Angeles in Californië deed er een slagzin bij: Kunt U onze verhuispuzzel oplossen? Wij de uwe wel! In het boek 'Winning Ways', een standaardwerk op puzzelgebied, geschreven door de Engelsman *John H. Conway*, de Amerikaan *Elwyn Berlekamp* en de Canadees *Richard Guy*, staat een analyse van de verhuispuzzel die verschillende bladzijden in beslag neemt. Aan hun boek hebben we onze oplossing ontleend. Volg je netjes de aangegeven weg (de kleine tussenstapjes zijn gemakkelijk zelf te vinden), dan gaat het grote vierkant van de ene zijde naar de tegenoverliggende zijde. Daarmee is dan in elk geval de 'snoepjespuzzel' opgelost (je moet alleen Pythagoras ondersteboven houden). Maar de verhuispuzzel is dan nog niet klaar.

Onmogelijk

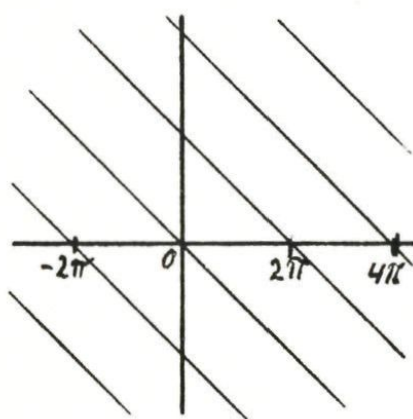
Is het eigenlijk wel mogelijk om *alles* precies gespiegeld te krijgen? In 'Winning Ways' staat dat de Engelsman *David Fremlin* van de Universiteit van Essex met de computer heeft nagegaan dat de precieze spiegelstand *onmogelijk te bereiken is!* Er staat ook bij dat het mooi zou zijn als iemand daarvan een kort bewijs (zonder computerhulp) zou kunnen geven. Wie waagt er z'n krachten aan? Het zal niet makkelijk zijn!

Onmogelijke puzzels zijn overigens niet zo zeldzaam. Omstreeks 1870 maakte de Amerikaanse puzzelkoning *Sam Lloyd* de wereld gek met het bekende schuifpuzzeltje met 15 blokjes in een vier-bij-vier raam. Hij liet in z'n puzzelrubriek een plaatje zien van die puzzel waarin de blokjes 14 en 15 zijn verwisseld, en loofde 1000 dollar uit voor degene die een schuifrecept kon geven om de blokjes weer in de juiste volgorde te krijgen (figuur 3). Dat kon hij veilig doen, want je kunt *bewijzen* (en bij deze schuifpuzzel is dat niet eens zo moeilijk, zie bijvoorbeeld Pythagoras 21-4) dat zo'n recept niet bestaat!

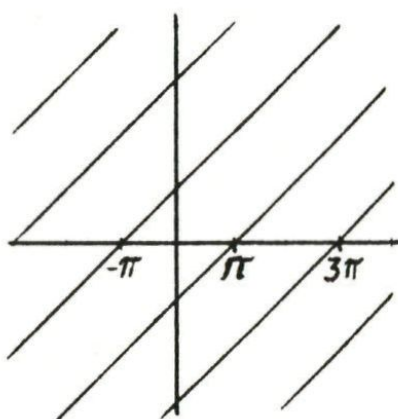


Figuur 3. Sam Lloyds onmogelijke schuifpuzzel: verwissel de blokjes 14 en 15.

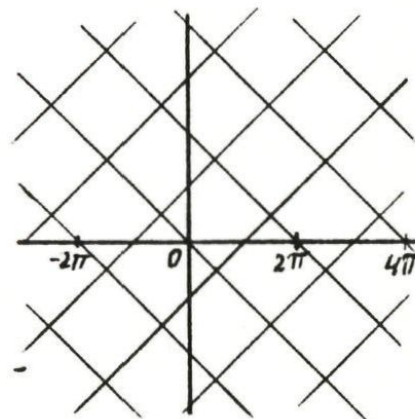
Oplossing bij: Traliegrafieken



$$\sin \frac{1}{2}(x+y) = 0$$



$$\cos \frac{1}{2}(x-y) = 0$$



$$\sin x + \sin y = 0$$

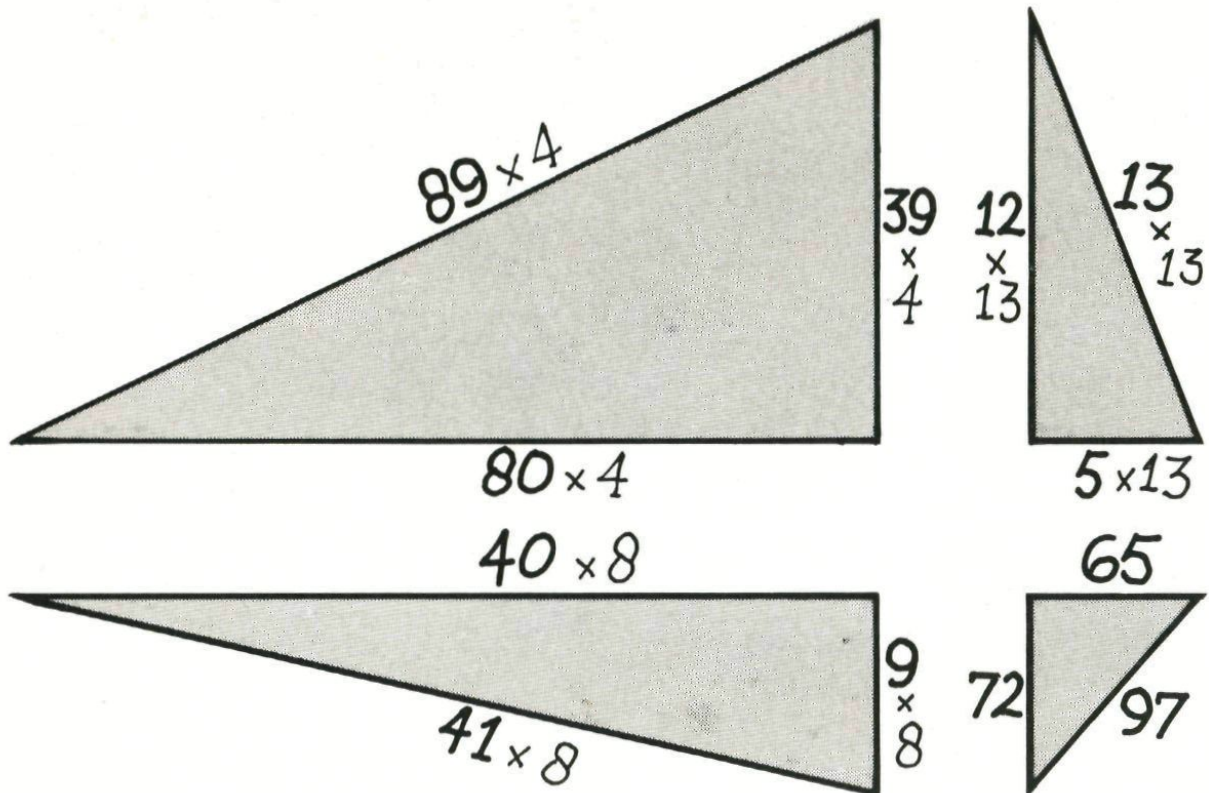
Oplossing bij: Vierkantvergelijkingen

a $|x-a| + |y-b| = 1$

b $|x+y| + |x-y| = 2$ of ook: $\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} = 0$

c $|x-2y| + |2x+y| = 1$

Pythavertjes-vier



Figuur 1

In iedere rechthoekige driehoek geldt de stelling van Pythagoras: $h^2 = a^2 + b^2$. Maar het is een uitzondering als bij gehele getallen a en b voor de rechthoekszijden, ook de hypotenusa $h = \sqrt{a^2 + b^2}$ geheeltallig is. Bekende voorbeelden zijn $5 = \sqrt{3^2 + 4^2}$, $13 = \sqrt{5^2 + 12^2}$, enzovoorts.

Een van onze lezers, *Frank Roos* uit Leek, kwam op het idee om te gaan zoeken naar viertallen van zulke heeltallige ('pythagorische') driehoeken die *twee aan twee met hun rechthoekszijden aan elkaar passen*. Hij stuurde ons een (door z'n computer na een hele nacht zoeken gevonden) oplossing van vier driehoeken, met rechthoekszijden opvolgend: **1472 – 1860 – 1953 – 4104 (– 1472)**.

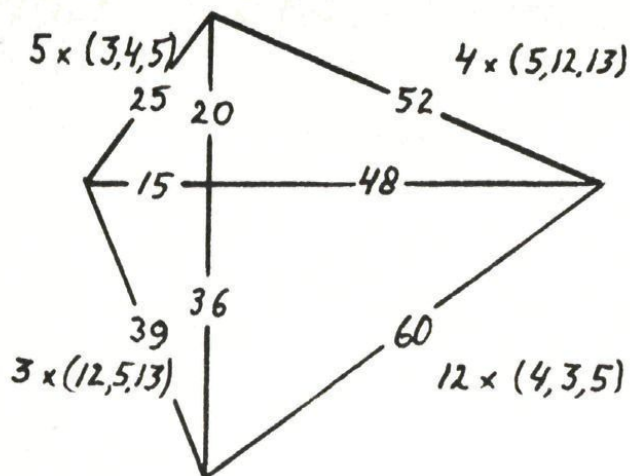
Hieruit vind je met je rekendoosje voor de vier schuine zijden: 2372, 2697, 4545, 4360.

Hoe vind je zo'n viertal?

De aangegeven oplossing prikkelt de nieuwsgierigheid: zijn er nog meer te vinden, zijn er kleinere? En dus: hoe vind je systematisch alle oplossingen, van klein naar groot?

We geven hier een paar resultaten

van ons onderzoekje. Helemaal systematisch is dat niet geweest, want het nazoeken van alle mogelijkheden is gigantisch veel werk – zeker zonder computer. Het heeft wel wat weg van het zoeken naar klavertjes-vier in de wei.



Figuur 2

Flauwe oplossingen

Oplossingen van het soort zoals in figuur 2 zijn met weinig moeite te vinden. Als je uitgaat van twee willekeurige pythagorische driehoeken, en je voegt daar hun beide spiegelbeelden aan toe, dan is dat viertal altijd passend te krijgen door geschikte vergrotingen te kiezen.

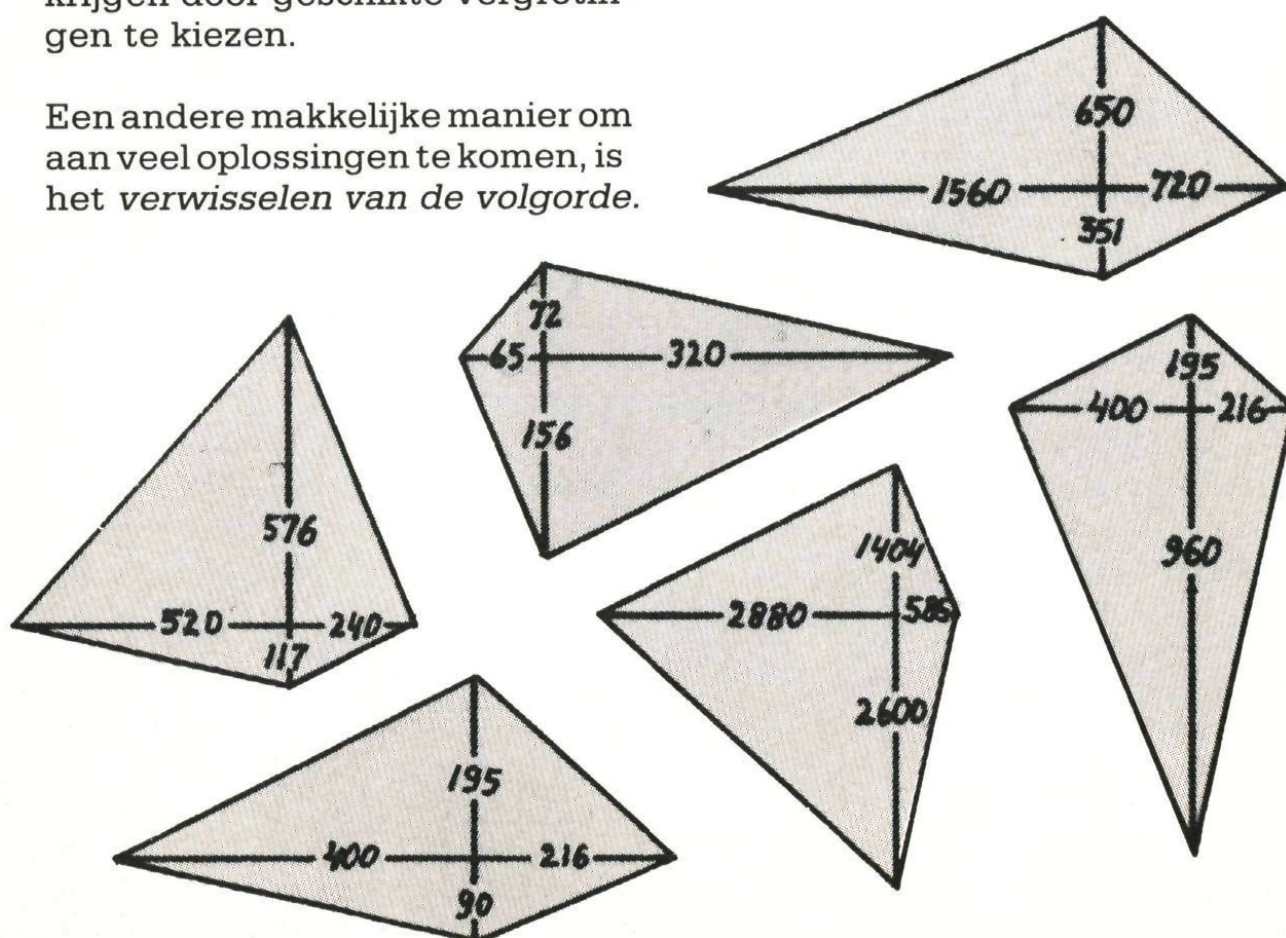
Een andere makkelijke manier om aan veel oplossingen te komen, is het verwisselen van de volgorde.

De vier 'primitieve' driehoeken uit figuur 1 (80-39-89, 12-5-13, 65-72-97 en 9-40-41) kunnen in zes verschillende volgorden met de rechte hoeken tegen elkaar geschoven worden. Met geschikte vergrotingsfactoren zijn de aangrenzende rechthoekszijden dan steeds gelijk te krijgen (figuur 3). Als je een of meer driehoeken op hun kop legt, lukt dat echter in het algemeen niet meer.

Echte oplossingen

Hoe vind je nu niet-flauwe oplossingen van het pythavertjes-vier probleem?

Onze methode is vrij snel uitgelegd, maar het werk dat er aan



Figuur 3. Zes volgorde-varianten van de oplossing van figuur 1

vast zit is erg groot (dus: wie kent er een betere methode??!). Het principe is dat we bij een gegeven rechthoekszijde, al dié partner-rechthoekszijden zoeken die samen een pythagorische driehoek vormen. Anders gezegd: bij een gegeven getal a zoeken we al dié gehele getallen b waarvoor $\sqrt{(a^2 + b^2)} = h$ geheel is. Als voorbeeld nemen we voor a het getal 320.

De stelling van Pythagoras $a^2 + b^2 = h^2$ herleiden we tot

$$a^2 = (h-b)(h+b) \quad (1)$$

waar a^2 geschreven is als produkt van twee gehele factoren $(h-b)$ en $(h+b)$. Aftrekken van de eerste factor van de tweede, en dan halveren, geeft:

$$[(h+b) - (h-b)]/2 = b \quad (2)$$

waarmee de verlangde b gevonden is.

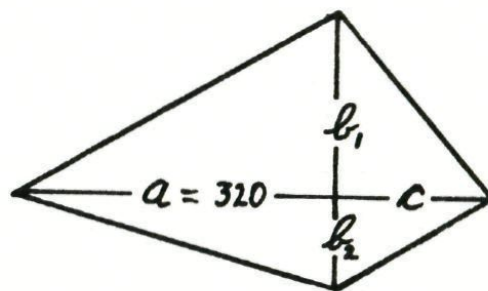
Hoe werkt dit in ons voorbeeld? Het ontbinden van $a^2 = 320^2 = 102400$ in twee gehele factoren (formule 1) geeft twintig splitsingen: zie de linkerkolom in onderstaande lijst. Je vindt die bijvoorbeeld door 102400 helemaal in kleinste factoren te ontbinden ($= 5^2 \cdot 2^{12}$) en dan die factoren op alle manieren in twee groepen te verdelen.

$a^2 = 320^2 =$	$b =$ halve verschil =
1×102400	51199 $\frac{1}{2}$
2×51200	25599
4×25600	12798
5×20480	10237 $\frac{1}{2}$
8×12800	6396
10×10240	5115
16×6400	3192
20×5120	2550
25×4096	2035 $\frac{1}{2}$

$32 \times$	3200	1584
$40 \times$	2500	1230
$50 \times$	2048	999
$64 \times$	1600	768
$80 \times$	1280	600
$100 \times$	1024	462
$128 \times$	800	336
$160 \times$	640	240
$200 \times$	512	156
$256 \times$	400	72
$320 \times$	320	0

De rechterkolom geeft de volgens formule (2) bepaalde getallen b . Eventueel voorkomende halftallige waarden komen niet in aanmerking, evenmin als $b = 0$. Dus we vinden zo bij $a = 320$ zestien gehele positieve partner-rechthoekszijden b .

Nu verder naar een compleet pythavertje-vier. In onderstaand figuurtje staan b_1 en b_2 voor twee getallen uit de lijst van zestien. De vraag die overblijft luidt: is er voor c een (geheel) getal te vinden dat zowel partner is van b_1 als van b_2 ?



Om dat uit te zoeken weten we niets beters dan om voor elk van de b -waarden afzonderlijk de lijst van partner-getallen op te stellen. Precies zoals we eerst voor a deden, maar nu zestien keer. En dan maar hopen dat je een getal vindt voor c dat in (minstens) twee van die lijsten voorkomt!

Het getal 320 zal in elk van de zestien b -lijsten voorkomen. Maar dan is c gelijk aan a , en heb je een flauwe oplossing. Als c gelijk is aan $b_1 \cdot b_2 / a$ blijkt de oplossing ook flauw: de driehoeken zijn dan diagonaal twee aan twee gelijkvormig. Alleen als je ook nóg andere getallen vindt die in meer dan één b -lijst voorkomen, heb je een écht pythavertje-vier gevonden. Zo niet, dan moet je een ander getal kiezen voor a en opnieuw beginnen. Misschien toch meer iets voor computer-bezitters dan voor met-de-hand-rekenaars?!

Na deze algemene uitleg nog even terug naar ons concrete voorbeeld. Om het werk wat beperkt te houden, willen we niet langer proberen om álle oplossingen met $a = 320$ te vinden. Maar alleen die oplossingen waarbij de *langste* rechthoekszijde lengte 320 heeft. (Door voor a achtereenvolgens alle natuurlijke getallen te nemen, vind je dan uiteindelijk toch ook alle mogelijke oplossingen.)

In plaats van zestien b -lijsten te maken, hoeven we nu alleen te zoeken naar partners (< 320) van $b = 72$, $b = 156$ en $b = 240$. Dat schiet lekker op. Het resultaat is:

$b^2 = 72^2 =$	$c =$
1×5184	2591 $1\frac{1}{2}$
...	...
12×432	210
16×324	154
18×288	135
24×216	96
32×162	65 ◀
36×144	54 ●
48×108	30
54×96	21

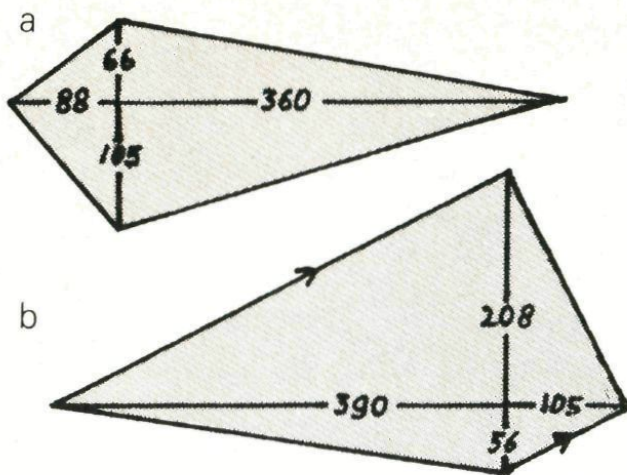
$b^2 = 156^2 =$	$c =$
1×24336	12167 $1\frac{1}{2}$
...	...
52×468	208
72×338	133
78×312	117 ★
104×234	65 ◀

$b^2 = 240^2 =$	$c =$
1×57600	28799 $1\frac{1}{2}$
...	...
90×640	275
96×600	252
100×576	238
120×480	180
128×450	161
144×400	128
150×384	117 ★
160×360	100
180×320	70
192×300	54 ●
200×288	44

In de uitkomstenlijsten voor c komen *dubbel* voor: 54, 65 en 117. Voor $c = 54$ blijkt het pythavertje-vier uit twee paar gelijkvormige driehoeken te bestaan. Idem voor $c = 117$.

Alleen bij $c = 65$ bestaat het pythavertje uit vier echt verschillende rechthoekige driehoeken. De oplossing is die van figuur 1. We durven je niet aan te moedigen om 'met de hand' naar verdere oplossingen te zoeken. Als er echter iemand is die het voorgaande verhaal in een programma weet om te zetten, horen we graag de resultaten.

We besluiten met nog twee speciale pythavertjes in figuur 4. De oplossing van figuur 1 was de kleinste die we kennen (maar we hebben lang niet alles doorgerekend!). Figuur 4a geeft de op-een-



Figuur 4

na-kleinste 'echte' oplossing, met linksboven de vergrote 3-4-5-driehoek.

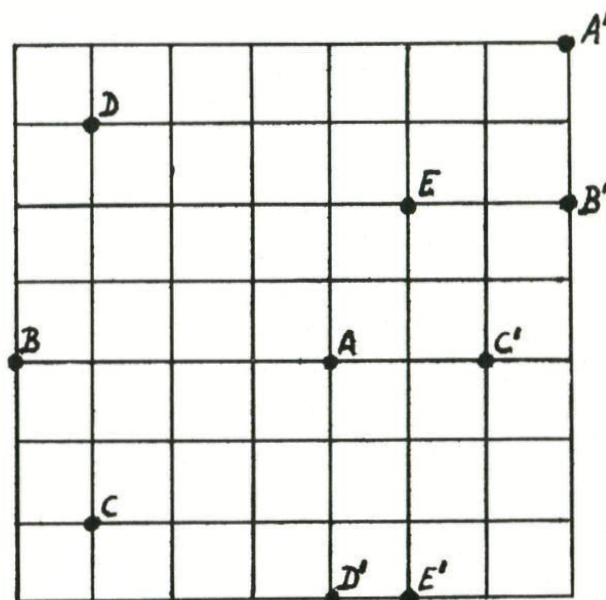
Figuur 4b is bijzonder omdat er twee *rechtstreeks* gelijkvormige driehoeken in voorkomen (8-15-17, $\times 7$ en $\times 26$).

N.B. Over pythavertjes-*drie* (drie aanpassende pythagorische driehoeken) is het een en ander te vinden in het artikel 'Mooie blokken' in Pythagoras 23-1.

Denkertje

Verbind A met A'
B met B'
C met C'
D met D'
E met E',

door alleen van de voorgetekende roosterlijnen gebruik te maken, en zonder dat twee verbindingen elkaar ergens kruisen of raken.



Aftrekprobleempje

Het allereerste nummer van 'Pythagoras' verscheen in september **1961**. Het blad is zonder onderbreking verschenen, en dus begint nu in september **1986** de jaargang nummer . . .?

Een dergelijk probleem zal over een aantal jaren wel weer actueel worden: begint de volgende eeuw (de 21e) op 1 januari 2000 of op 1 januari 2001? Nou ja, probléem . . .? Het zal er wel weer op neer komen dat de eeuwfeesten dubbelop gevierd worden!

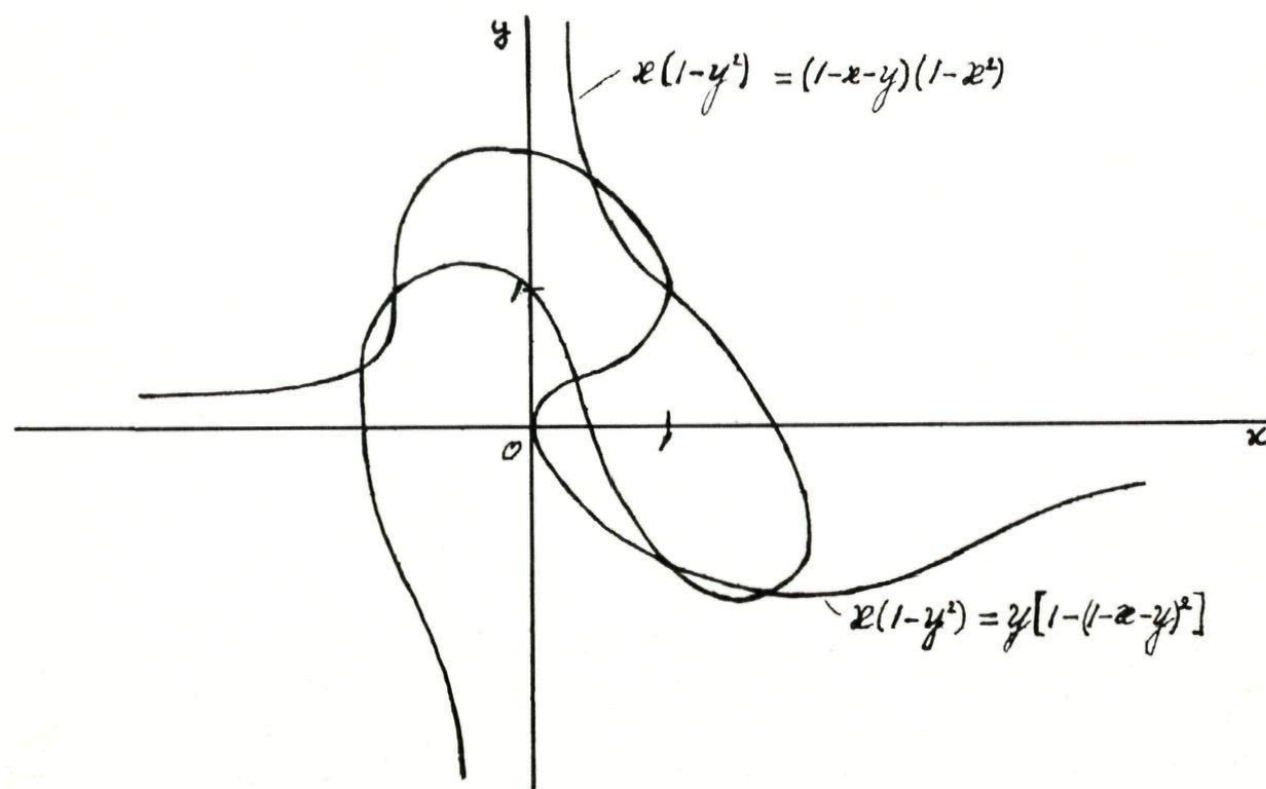
Een speurtocht naar gekke grafieken

In de stukjes 'Traliegrafieken' en 'Vierkantvergelijkingen' elders in dit nummer, komen een aantal minder gewone grafieken aan de orde. Samen met de erbij horende vergelijkingen. Er valt echter op dit gebied nog heel wat meer fraais of raars te bedenken.

We nodigen iedereen uit om allerlei on-alledaagse grafieken aan ons door te geven. We hopen er dan een aantal boeiende pagina's mee te kunnen vullen.

Bij elke grafiek moet tevens de vergelijking in x en y worden opgegeven. Grafiek en vergelijking mogen een (éénwaardige) functie voorstellen, maar het mag ook een algemenere relatie zijn met meerdere y -waarden bij één x . De soort van bewerkingen die in de vergelijkingen voorkomen, beperken we niet anders dan dat het voor de meerderheid van de lezers begrijpelijk moet blijven. Zo nodig kan een kleine toelichting erbij gegeven worden.

Speciaal nieuwsgierig zijn we naar relatief eenvoudige vergelijkingen waarbij de grafiek toch iets moois of verrassends heeft. We hopen resultaten te kunnen laten zien die aantonen dat er in grafiekenland nog wel iets méér te koop is dan de overbekende rechte lijnen, parabolen en sinusgolven. Inzendingen aan: *H. N. Pot, Tournoyveld 67, 3443 ER Woerden.* Een bepaalde sluitingsdatum is er niet: we houden altijd belangstelling voor leuke vondsten.

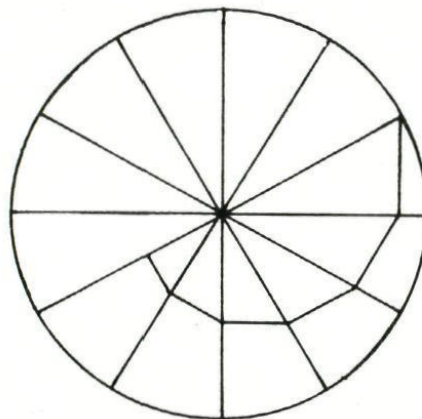


Vlaamse Wiskunde Olympiade

Op woensdag 16 april 1986 vond in Brussel de finale plaats van de Eerste Vlaamse Wiskunde Olympiade. Hieraan namen 65 leerlingen deel uit de vijfde en zesde leerjaren van het Secundair onderwijs. Deze deelnemers waren geselecteerd via twee voorronden die op 15 januari en 26 februari werden gehouden. De eerste ronde werd aan de scholen afgenomen, de tweede centraal in elke provincie een stad. Elke voorronde bestond uit dertig multiple choice vragen. De finale (derde ronde) bestond uit de vier open vragen, die hieronder zijn afgedrukt. De beste drie deelnemers aan de finale werden uitverkoren om Vlaanderen te vertegenwoordigen bij de Internationale Wiskunde Olympiade.

Opgaven Vlaamse Wiskunde Olympiade, Finale 1986

- 1 Men verdeelt een cirkel met straal R in 12 gelijke delen en men verbindt de deelpunten met het middelpunt. Uit één van de deelpunten laat men de loodlijn neer op de volgende straal; vanuit het voetpunt van die loodlijn laat men opnieuw de loodlijn neer op de daaropvolgende straal en men blijft dit proces oneindig verder doorzetten. Bereken de limiet van de som van de lengten van deze loodlijnen in functie van R .



- 2 Bewijs dat voor elk natuurlijk getal n geldt
 $(1.2.3. \dots .n) = n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$
- 3 Gegeven is een rij getallen (a_k) gedefinieerd door $a_0 = 0$, $a_{k+1} = 3a_k + 1$ met k in $\mathbb{N}$.
Toon aan dat a_{155} deelbaar is door 11.
- 4 Om een knikker met straal 1 cm in een kubus te stoppen, is het duidelijk dat deze kubus een ribbe van minstens 2 cm moet hebben. Hoe groot moet minimaal de ribbe van een kubus zijn om er 2 knikkers met straal 1 cm in te krijgen? (Met bewijs van minimaliteit.)

Pythagoras Olympiade



Ook deze jaargang gaan we weer door met de *Pythagoras Olympiade*. Dat is een wedstrijd voor slimmerikken die al enige jaren in Pythagoras draait. In elk nummer komen twee opgaven. Je zult er nauwelijks wiskundige voorkennis voor nodig hebben, maar wel een flinke dosis gezond verstand! Tot ruim een maand na de verschijningsdatum kun je oplossingen insturen.

Prijzen

Iedere opgave is een wedstrijd op zichzelf. Je hoeft niet aan alles mee te doen, je kunt van elke som afzonderlijk een oplossing inzenden. Bij elke opgave verloten we onder de goede inzenders twee prijzen van f 10,—/BEF 150. Verder vormen de 12 opgaven van deze jaargang samen een *ladderwedstrijd*. Iedere goede oplossing geeft 1 punt. Voor de besten van de ladderwedstrijd zijn drie prijzen van f 25,—/BEF 400 beschikbaar. Bovendien ontvangen de beste tien van de ladderwedstrijd een uitnodiging voor de Tweede Ronde van de *Nederlandse Wiskunde Olympiade*, zelfs al hebben ze niet aan de Eerste Ronde meegedaan of daarbij niet genoeg punten behaald (ze moeten natuurlijk op het moment van de Tweede Ronde nog wel op school zitten; de huidige eindexamenklassers vallen dus uit de boot, want de Tweede Ronde vindt in het najaar van 1987 plaats).

Oplossingen

De uitwerkingen komen weer in Pythagoras. Bij elke opgave zal de oplossing van één van de deelnemers worden gepubliceerd. Maar

gezien de benodigde correctietijd zal dat als regel pas in de volgende jaargang kunnen gebeuren. Maar. . . je kunt de uitslag en de uitgekozen oplossingen eerder krijgen, als je een aan jezelf geadresseerde en gefrankeerde enveloppe meestuurt.

Inzendingen

Leerlingen van het voortgezet/secundair onderwijs kunnen hun oplossingen sturen aan: *Pythagoras Olympiade, Marinus de Jongstraat 12, 4904 PL Oosterhout (NB)*. Vermeld op elk (éénzijdig beschreven) vel: naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas. Verder moet elke oplossing op een nieuw vel beginnen, want we kijken ze afzonderlijk na. We bekijken alleen goed leesbare oplossingen die volledig uitgewerkt zijn, met verklarende tekst in goed lopende zinnen.

Uitslag ladderwedstrijd

Aan de Pythagoras Olympiade in de vorige jaargang hebben 26 lezers meegedaan. De ladderwedstrijd is gewonnen door *Erik Fledderus* (Wolvega) met 9 punten. *Jaap Brand* (Zaandam) en

Hugo Schnack (Amsterdam) eindigden samen met $5\frac{1}{2}$ punt op de tweede plaats. Alle drie ontvingen ze een boekebon van f 25,—.



Nieuwe opgaven

Oplossingen inzenden vóór 15 december 1986.

PO 92

In een straat wonen meer dan 100 mensen.

Bewijs dat er 11 mensen in die straat wonen zo dat de som van hun leeftijden deelbaar is door 11.

PO 93

Hoeveel rijtjes van nullen en enen ter lengte 20 zijn er waarin de combinatie 01 precies vijf maal voorkomt? (We vragen een volledig beredeneerd antwoord!).

Oplossingen en prijswinnaars van de opgaven PO 86-87

PO 86

Een computerspelletje toont een scherm met 25 hokjes. In de beginstand staan in alle hokjes willekeurige gehele getallen. Bij elke beurt moet je 11 hokjes uitkiezen, en in elk daarvan het getal met 1 verhogen. Je hebt gewonnen als je het voor elkaar krijgt dat in *elk* hokje *hetzelfde* getal staat. Bewijs dat het bij elke beginstand mogelijk is na een aantal beurten een gewonnen positie te bereiken.

Oplossing van *Frank Göbel*, 5 vwo, Enschede:

Als het ons met een bepaalde procedure lukt om het getal uit één hokje ten opzichte van de anderen met 1 te verminderen, dan kunnen we door die procedure steeds toe te passen op getallen die hoger zijn dan het laagste, alle getallen gelijk krijgen. Zo'n procedure gaat als volgt: Neem een ring, verdeeld in 25 hokjes, met daarin de 25 willekeurige getallen in een willekeurige volgorde. Verder nemen we een strip bestaande uit $11/25$ ring. Zoek nu een getal hoger

dan het laagste op. Schuif dan, met de klok mee, één hokje op, en leg daar het begin van de strip, waarbij je er voor zorgt dat het einde van de strip 11 hokjes verder komt (met de klok mee). De getallen onder de strip verhogen we met 1. Nu verplaatsen we de strip in zijn geheel 11 hokjes met de klok mee. De getallen onder de strip worden weer met 1 opgehoogd, enzovoorts. Na negen keer stoppen we. Er zijn dan $9 \times 11 = 99$ punten uitgedeeld. Het getal in het hokje met het te hoge getal is met 3 toegenomen, maar de andere getallen zijn allemaal met 4 toegenomen, want $9 \times 11 = 4 \times 24 + 1 \times 3$.

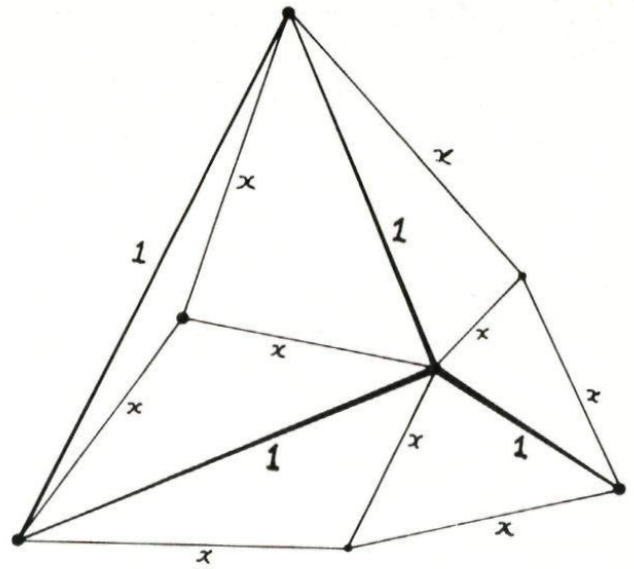
Verdere correcte oplossingen:

Rien Schot, Rotterdam, *Erik Fledderus*, 4 vwo, Nassau College, Wolvega, *Hugo Schnack*, 5 vwo, CSG Buitenveldert, Amsterdam, *Jaap Brand*, 5 vwo, Montessori Lyceum, Amsterdam. Er was 1 niet geheel correcte oplossing. Prijzen: *Jaap Brand* en *Frank Göbel*.

PO 87

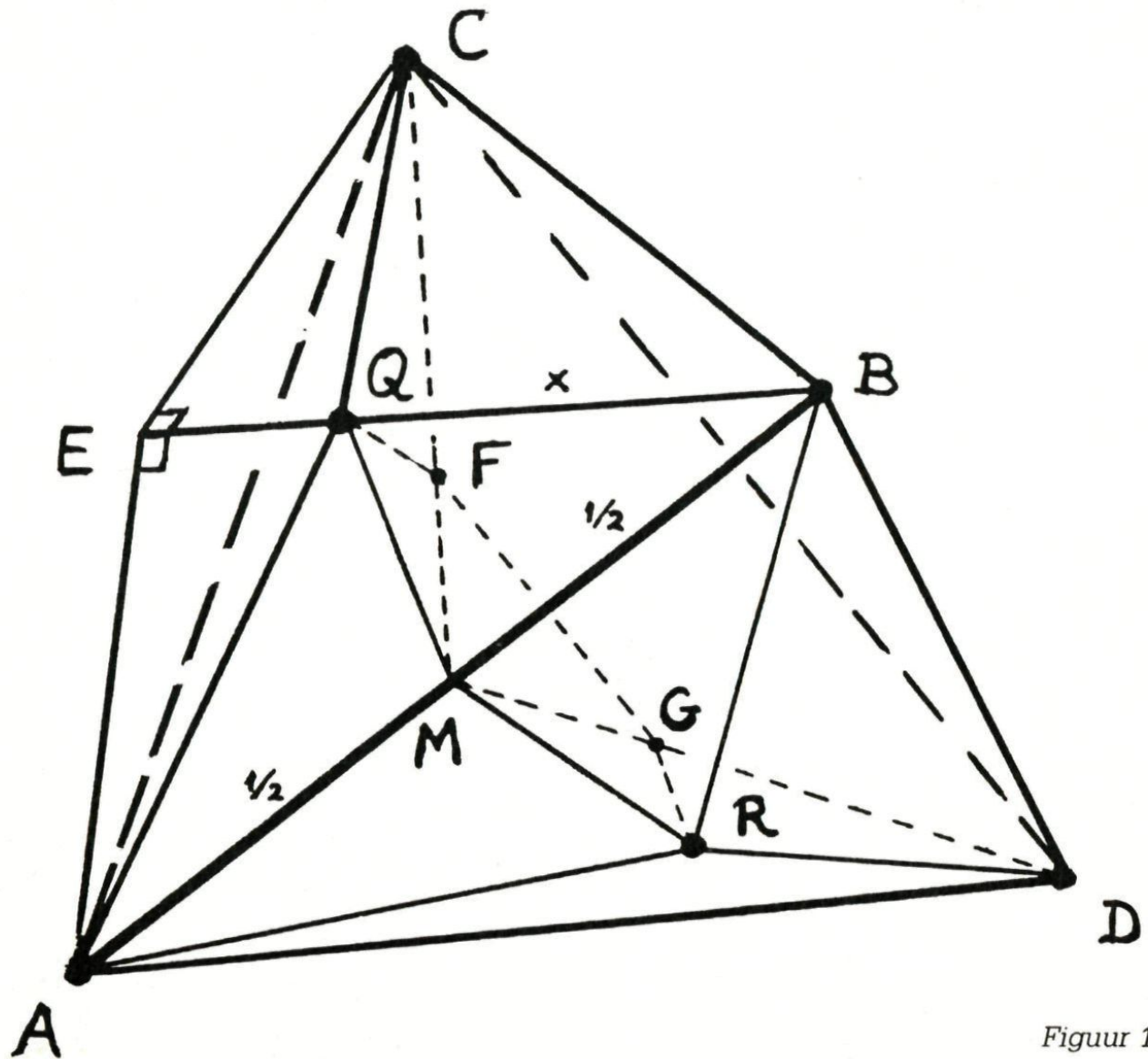
Op de zijvlakken van een regelmatig viervlak met ribbenlengte 1 zet men regelmatige driezijdige piramides met opstaande ribben van een zekere lengte x . Zo ontstaat een twaalfvlak met als zijvlakken twaalf congruente gelijkbenige driehoeken (zie figuur hiernaast).

Bereken x als verder gegeven is dat alle *tweevlakshoeken* van dat twaalfvlak gelijk zijn (een tweevlakshoek is de hoek tussen twee zijvlakken die een ribbe gemeen hebben).



Oplossing van *Hugo Schnack*, 5 vwo, CSG Buitenveldert, Amsterdam (enigszins bekort):
Laat $ABCD$ het gegeven viervlak met

ribbenlengte 1 zijn, en stel dat $QABC$ en $RABD$ de piramides zijn die op de zijvlakken ABC en ABD zijn gezet. Er zijn twee soorten tweevlakshoeken:



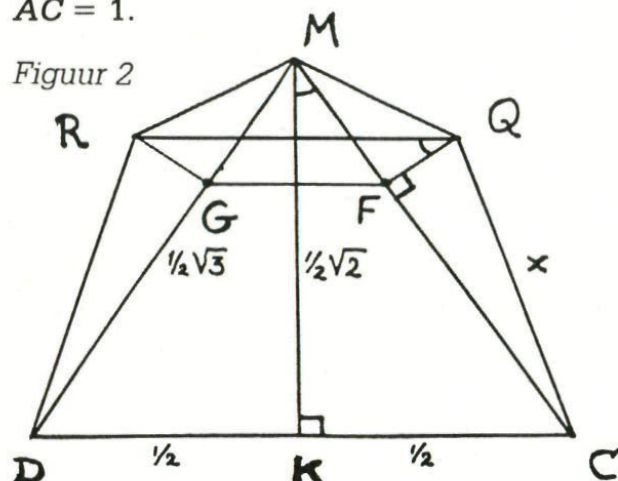
Figuur 1

- 1 die tussen aangrenzende zijvlakken van dezelfde piramide, zoals bijvoorbeeld QAB en QBC ,
- 2 die tussen twee aangrenzende vlakken van *verschillende* piramides, zoals bijvoorbeeld QAB en RAB .

We zullen die hoeken uitdrukken in x , de lengte van de ribben van de opgezette piramides.

1 (figuur 1) $\angle(QAB, QBC) = \angle AEC$, waarbij E zó op (het verlengde van) ribbe QB is gekozen dat de hoeken AEB en CEB recht zijn. Dan is $\cos(EBA) = \frac{1}{2} : x = \frac{1}{2x}$ en $AE = \sin(EBA) = (1 - (2x)^{-2})^{1/2}$. Daarmee ligt driehoek AEC , en dus ook hoek AEC volledig vast, want $AE = EC$ en $AC = 1$.

Figuur 2



2 Laat M het midden zijn van AB . Dan is $\angle(QAB, RAB) = \angle QMR$. Figuur 2 toont de doorsnijing met het vlak MCD . In deze figuur is $CM = DM = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $MK = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $QC = RD = x$. Verder verdelen de punten F en G de lijnen MC en MD in de verhouding $1 : 2$, want F en G zijn de zwaartepunten van de zijvlakken ABC en ADB . Met Pythagoras en wat gelijkvormigheden kun je dan de lengte van alle andere lijnstukken uit de figuur in x uitdrukken, met als resultaat:

$$MQ = MR = (x^2 - \frac{1}{4})^2 \quad \text{en}$$

$$QR = \frac{1}{3} + 2(\frac{2}{3}(x^2 - \frac{1}{3}))^{1/2}.$$

De gelijkheid van de hoeken AEC en QMR leidt dan tot $AE : AC = QM : QR$, en dit geeft na enige omwerkingen de vergelijking $15x^2 + 6x - 9 = 0$, met als enige positieve oplossing: $x = \frac{3}{5}$.

Een verdere correcte oplossing werd ingestuurd door *Erik Fledderus*, 4 vwo, Nassau College, Wolvega. *Jaap Brand*, 5 vwo, Montessori Lyceum, Amsterdam, had ook een goede methode, maar hij strandde in het zicht van de haven door een kleine rekenfout! De prijzen gingen dus naar *Hugo Schnack* en *Erik Fledderus*.



Redactioneel

Met enige vertraging, weliswaar buiten onze schuld, is dit dan het eerste nummer van de zesentwintigste jaargang. We beloven er alles aan te doen om deze vertraging zo snel mogelijk weg te werken. In dit nummer drie artikelen die een directe uitbreiding zijn van de wiskunde die je op school krijgt: 'Traliegrafieken', 'Vierkantvergelijkingen' en 'Een speurtocht naar gekke grafieken'. Al deze artikelen hebben te maken met het tekenen van 'niet alledaagse' grafieken. En daar zitten soms heel fraaie exemplaren bij.

Vlaamse Wiskunde Olympiade

Vanaf deze jaargang besteden we naast de Pythagoras Olympiade en de Nederlandse Wiskunde Olympiade, ook aandacht aan de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven van de derde ronde (Finale) van de Eerste Vlaamse Wiskunde Olympiade hebben we in dit nummer (bladzijde 23) opgenomen. In een volgend nummer hopen we de oplossingen te publiceren.

Voor de nieuwe lezers

Tenzij in een artikel anders vermeld, kun je je voor reacties op artikelen en problemen die in Pythagoras aan de orde komen, wenden tot het redactiesecretariaat (het adres staat op de achterzijde van de omslag). Uiteraard zijn ook nieuwe artikelen welkom!

Soms verwijzen we naar artikelen uit voorafgaande nummers, bijvoorbeeld: Pythagoras 24-2. Hierbij geeft het eerste getal de jaargang aan en het tweede het nummer uit die jaargang. Overigens zorgen we er wel voor dat je die verwijzingen niet per sé hoeft te raadplegen om de artikelen waar ze in voor komen te kunnen lezen.

Tekenwerk: Armand Haye, Amsterdam.

Foto's en andere illustraties: Hans de Rijk, Utrecht (omslag); Hessel Pot, Woerden (blz. 3, 6, 10, 11, 16, 17, 18, 19, 21, 22); Evert Geradts (blz. 12); Jan van de Craats, Oosterhout (NB) (blz. 13, 14, 16, 26, 27).

© 1986 Redactie Pythagoras - ALLE RECHTEN VOORBEHOUDEN, NADruk OF WEERGAVE, GEHEEL OF GEDEELTELIJK, IN WELKE VORM DAN OOK, ZONDER SCHRIFTELIJKE TOESTEMMING VAN DE REDACTIE VERBODEN.

Pythagoras wiskunde tijdschrift voor jongeren

Een uitgave onder auspiciën van de Stichting Christiaan Huygens en de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Redactie: Jan van de Craats, Klaas Lakeman, Hessel Pot, Hans de Rijk.

Redactiesecretariaat: Klaas Lakeman, Cornelis Krusemanstraat 60^{II}, 1075 NS Amsterdam (NL).

Inhoud jaargang 26, nummer 1

Geheimzinnige cirkels / **1**

Henk Mulder

Schuifpuzzel / **2**

Tossen met een kromme
stuiver / **3**

Hessel Pot

Gelijke staarten / **4**

Frank Roos/Hessel Pot

Steeds 17 / **4**

Wisselgeld / **4**

Traliegrafieken / **5, 16**

Hessel Pot

PYTH $\times$ A = GORAS / **7**

Hessel Pot

Vierkantenrechthoeken / **8**

Klaas Lakeman

Van trio's naar nonetten / **10**

Hessel Pot

Vierkantvergelijkingen / **11, 16**

Hessel Pot

Verhuisperikelen / **12**

Jan van de Craats

Pythavertjes-vier / **17**

Hessel Pot

Denkertje / **21**

Aftrekprobleempje / **21**

Een speurtocht naar gekke
grafieken / **22**

Hessel Pot

Vlaamse Wiskunde

Olympiade / **23**

Klaas Lakeman/Hessel Pot

Pythagoras Olympiade / **24**

Jan van de Craats

Redactioneel / **28**

Pythagoras verschijnt zesmaal per schooljaar; opgave van abonneementen bij de uitgever (zie onder).

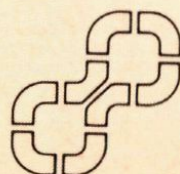
Abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 september schriftelijk bij de uitgever is opgezegd.

Bij tussentijdse abonnering ontvangt men ook de reeds verschenen

nummers. Betaling per acceptgirokaart.

Tarieven*	NLG/BEF
Abonn. Pythagoras	20,—/365
Incl. Archimedes	36,—/660
Losse nummers	5,—/ 90

* Luchtpost-toeslag 15%



stichting ivio | lelystad

Postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL). Tel. 03200-26514

educatieve uitgeverij - instituut voor buitenschools onderwijs - wereldschool - AO-reeks - leerprojecten

Postgiro Nederland: 287934 Postcheck België: 000-0130850-94