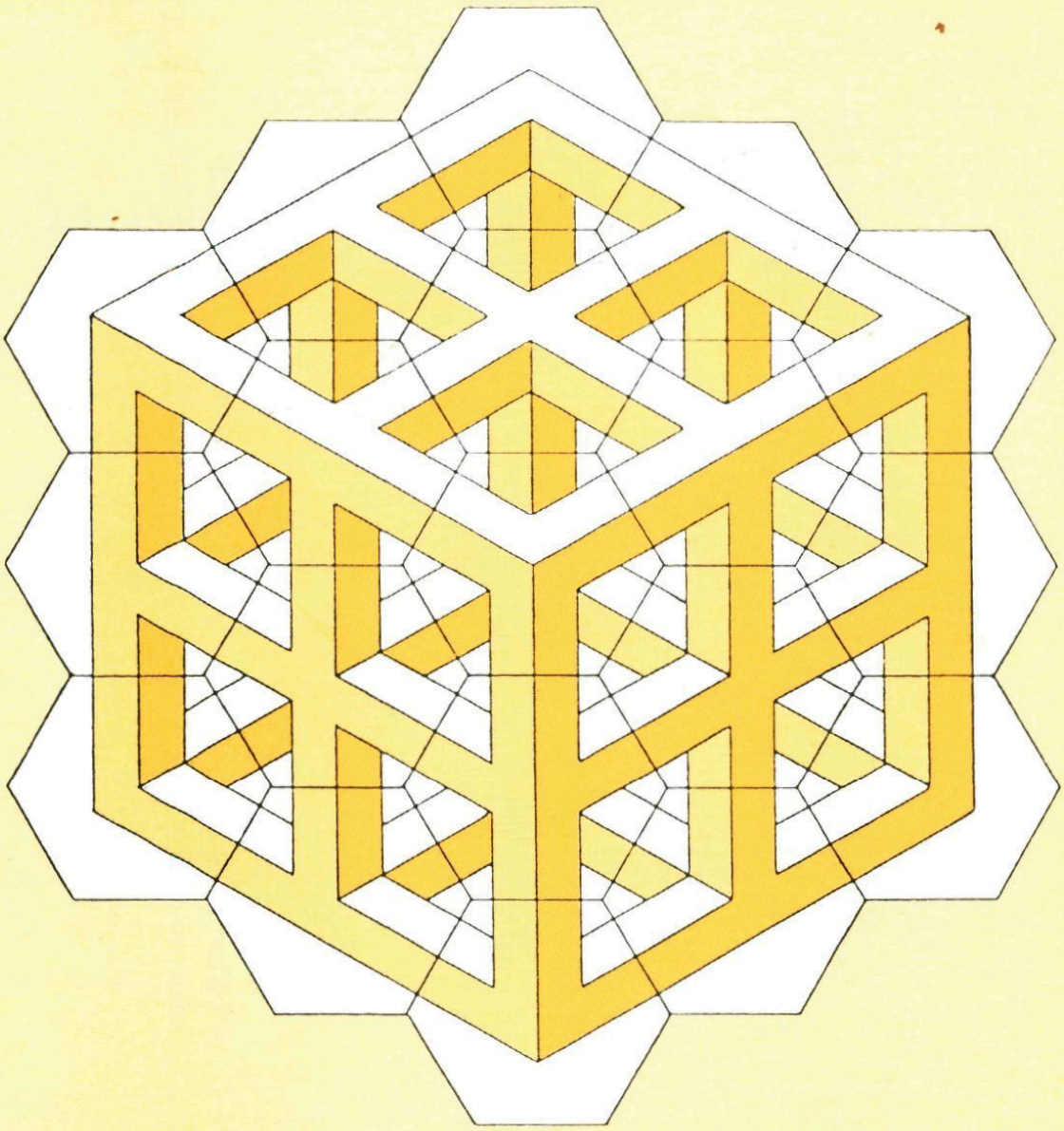


# Pythagoras

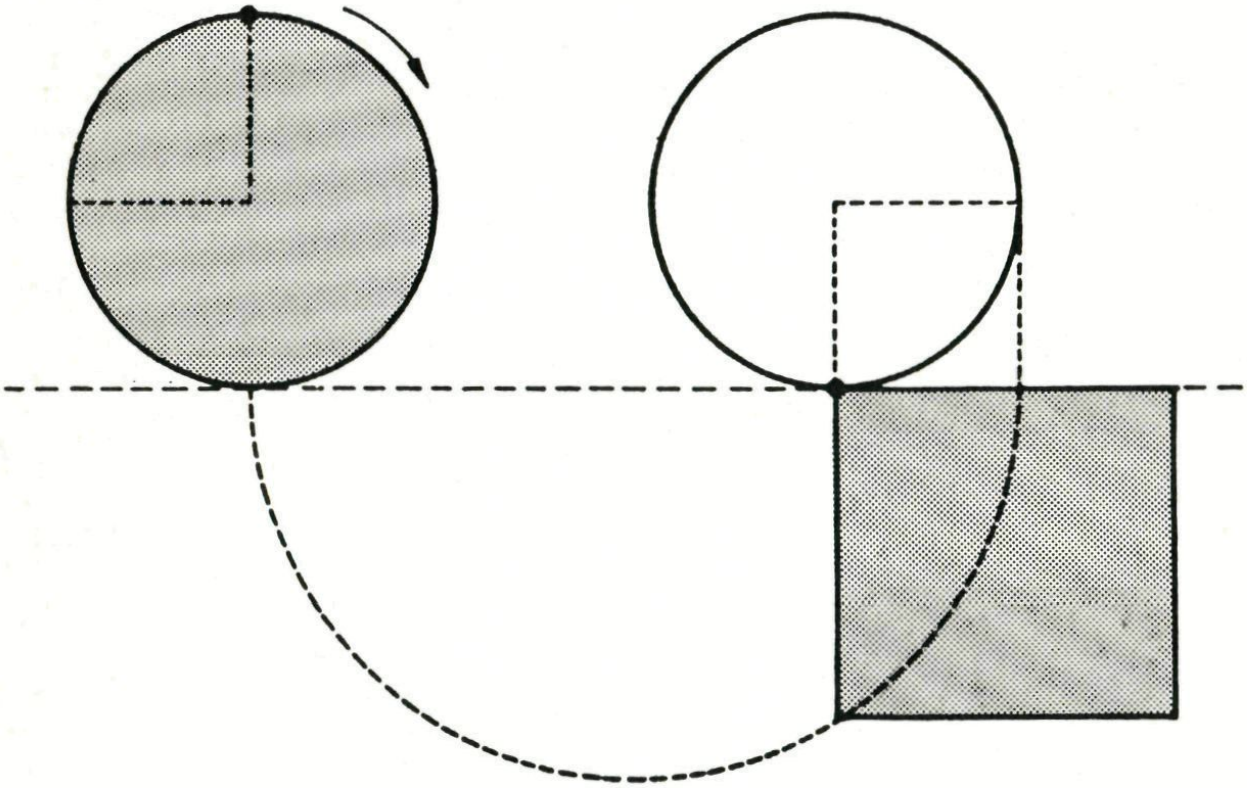
wiskunde tijdschrift voor jongeren

stichting ivio

jaargang 26
nummer 2
januari 1987

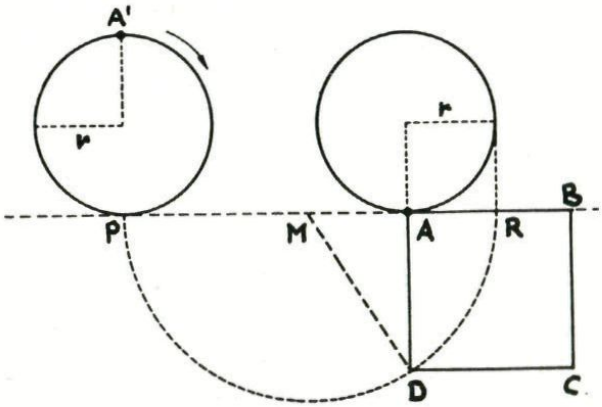
# Zonder woorden

Een aantal jaren geleden werd in het blad 'Mathematics Magazine' een artikel (nou ja, artikel) opgenomen dat alleen maar bestond uit een figuur. We nemen die figuur over, en vragen of je kunt bewijzen dat de twee grijs gekleurde oppervlakten gelijk zijn. Dat wordt namelijk met de figuur tot uitdrukking gebracht!



**Met woorden**

Eerst geven we aan hoe je aan het vierkant komt. Rol de linker cirkel over de stippellijn naar rechts, totdat de stip $A'$ op de stippellijn in $A$ terecht is gekomen (figuur hiernaast). Trek dan de halve cirkel $PDR$ en teken te beginnen met $AD$ vierkant $ABCD$.

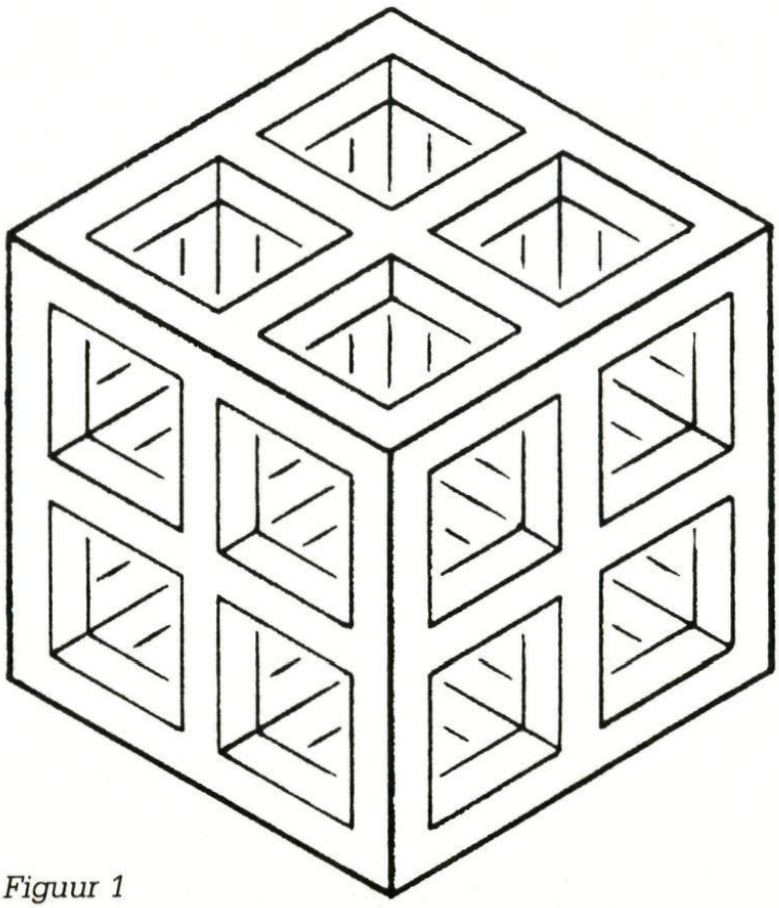



Nu geldt:
Oppervlakte $ABCD = AD^2 =$
$= MD^2 - MA^2$ (stelling van Pythagoras) $= MR^2 - MA^2 =$
$= (MR - MA)(MR + MA)$ (merkwaardig produkt) $= AR \cdot (PM + MA) =$
$= r \cdot$ halve omtrek rollende cirkel $= r \cdot \pi r = \pi r^2 =$
= oppervlakte van de rollende cirkel!

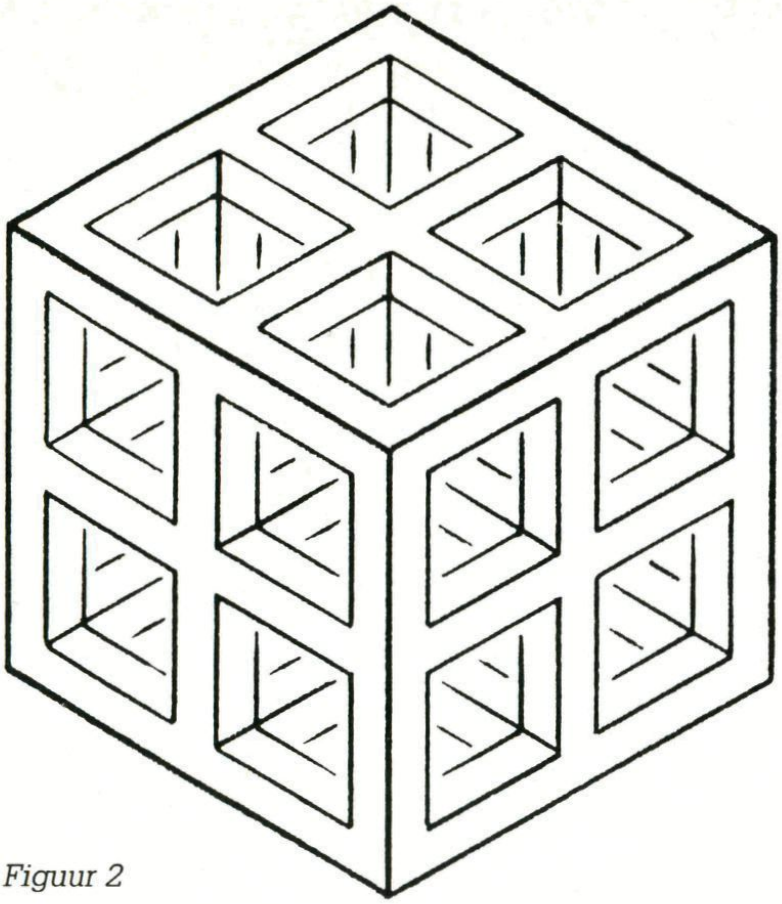
# De honingraatkubus

Dit artikel hoort bij de figuur op het omslag.
Eerst kijken naar de figuur achter het zeshoekige gaas. Welk ruimtelijke bouwwerk precies wordt voorgesteld, is niet met zekerheid te zeggen. Dit omdat de indruk wordt gewekt dat er achter de zichtbare balkjes nog het een en ander verscholen zit. Maar of dat er ook écht zit, valt natuurlijk niet na te gaan.
Waar lijkt het 't meest op?
Het zal waarschijnlijk niet moeilijk zijn er een kubus in te zien, met in het midden een recht naar voren wijzend hoekpunt, zes hoekpunten langs de rand van de figuur, en het achtste hoekpunt juist verscholen achter het eerste. Elk van de ribben is een vierkant balkje, en elke van de zes zijvlaks-ramen is voorzien van een kruisbalk. Van binnen is de kubus helemaal leeg. Of toch niet?

**Dubbelzinnig**
Hol of niet hol?
Niet iedereen zal hier direct hetzelfde antwoord op geven. Want je kunt volhouden dat er midden in de kubus nog een centraal 'assenkruis' lijkt te zitten van balken die overstaande vlakkencentra verbinden.
Maar je kunt ook zeggen dat zo'n assenkruis er niet in zit, en dat je door de openingen in de drie voorste vlakken alleen de balken van de achterzijde ziet.



*Figuur 1*



*Figuur 2*

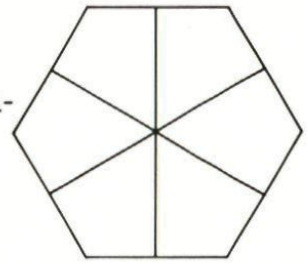
**Beter tekenen**
De dubbelzinnigheid is op te heffen door een teken-trucje te gebruiken.
Bij punten waar in de tekening lijnen samenkomen die in werkelijkheid niet bij elkaar komen, wordt van de lijnen die achterlangs gaan een paar milimeter uitgeveegd. Zulke 'schijn-kruisingen' maken we ongelijkvloers: de achterste lijn duikt al even vóór het kruispunt in een tunnel. Zie de figuren 1 en 2.

Waarom is hier tweemaal dezelfde figuur afgedrukt?
Een onzin-vraag, want die figuren zijn niet precies hetzelfde: op drie plaatsen zit er een klein verschilletje. En wel zó dat 1 de holle, lege kubus voorstelt, en 2 de kubus met het centrale assenkruis.
Met wat zoekwerk moet dit te vinden zijn.

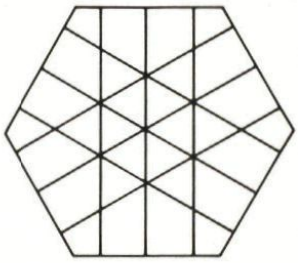
**Honingraat-gaas**
Waarom is de omslagfiguur getekend achter zeshoeken-gaas?
Ook al geen moeilijke vraag: Alle balken van het kubus-bouwsel worden door drie evenwijdige lijnstukken (op gelijke onderlinge afstand) aangeduid; deze lijnstukken staan overal loodrecht op een honingraatzijde, en de middelste van de drie gaat ook steeds door het midden van zo'n zijde (zie apart kader).
Het gevolg is dat, wanneer je de zeshoeken allemaal losknipt, je een 'aardige' puzzel hebt. Zie de zaak dan maar weer eens goed te krijgen!
Het is deze keer niet de bedoeling om allerlei fantastische *onmogelijke* figuren te construeren. (Al gaat dat prima met die stukjes, zeker als je er zelf nog wat varianten bij maakt: bijvoorbeeld de zeshoekjes van figuur 5.)

**Van basisstukje naar honingraat-stukje**

Elk honingraat-stukje is af te leiden uit éénzelfde basisstukje. Om dat te construeren begin je met een regelmatige zeshoek. Daarin verbind je de middens van elk paar tegenover elkaar liggende zijden door een lijnstukje (figuur A). Aan weerszijden van en evenwijdig aan elk lijnstukje trek je vervolgens nog een lijnstukje op een afstand die gelijk is aan 1/3 van de lengte van de zeshoekszijde (figuur B). En klaar is het basisstukje.



*Figuur A*



*Figuur B*

De puzzelstukjes worden hieruit afgeleid door lijnstukjes of gedeelten daarvan weg te gummen.

De vragen die we hierna nog stellen hebben allemaal betrekking op *normale* bouwsels.

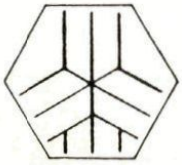
**Zoek een plaatsje**

We doen een beroep op je ruimtelijk inzicht. Na een tweetal voorbeelden mét antwoord, zullen de puzzeltjes wel op te lossen zijn.

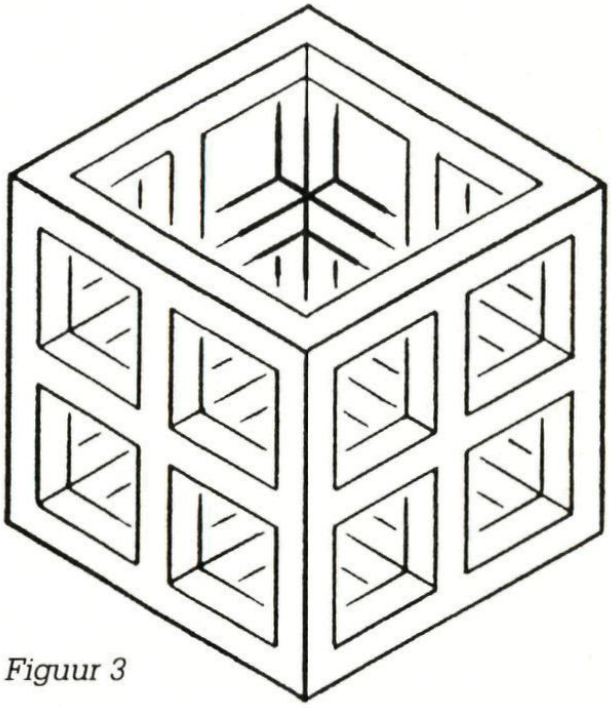
Het is de bedoeling om in de omslagfiguur (met of zonder centraal assenkruis) steeds een aantal balkjes losgezaagd en weggelaten te denken, zó dat het gegeven zeshoekige stukje precies aangeeft hoe het overgebleven deel van het bouwsel er op die plaats uitziet.
Er mogen alleen balkjes wéggelaten worden, niet extra balkjes tóégevoegd. Vaak zijn er meerdere oplossingen mogelijk.

*Eerste voorbeeld*

Vraag: waar kan het volgende puzzelstukje zitten?



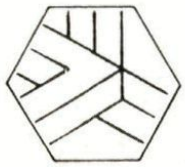
Antwoord: het stukje laat het midden zien van de achterste verticale ribbe, ingeval het raamkruis uit het bovenvlak weg is (en er geen centraal kruis in de kubus zit). Zie figuur 3.



*Figuur 3*

*Tweede voorbeeld*

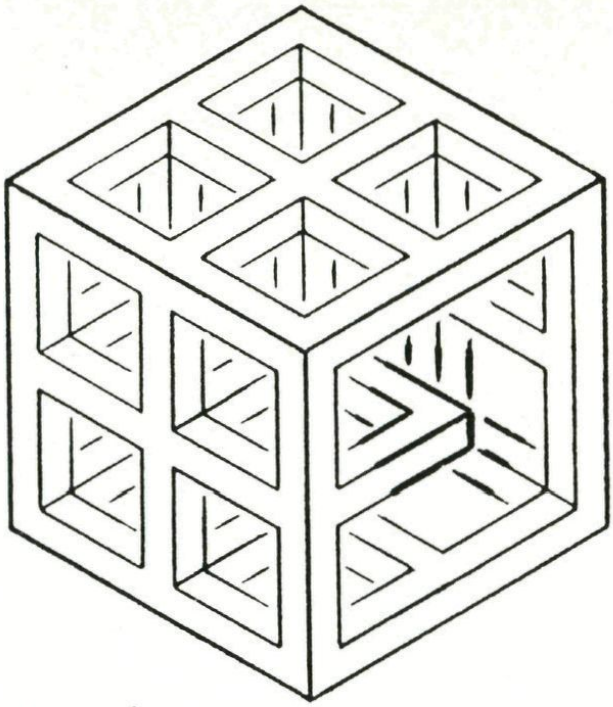
Vraag: waar zit dit stukje:



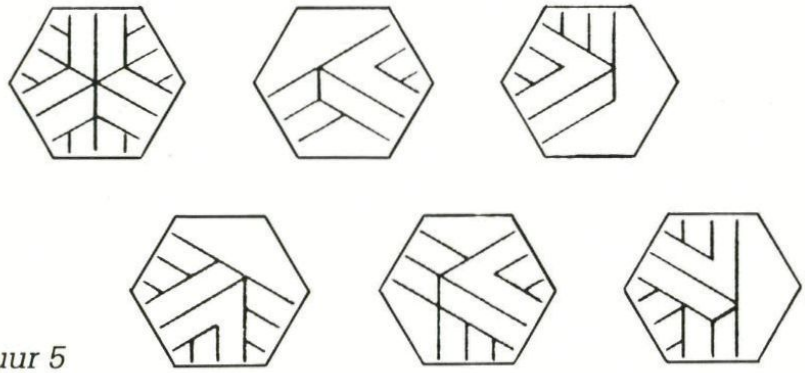
Om het niet al te simpel te maken is in deze opgave-figuurtjes niet de tunnel-teken-truc toegepast als in figuur 1 en 2. Een antwoord zie je in figuur 4.

**Zes opgaven**
Zoek ook voor de zes stukjes uit figuur 5 een plaatsje in het bouwsel van de omslagfiguur, door er (steeds een ander) aantal spijlen uit weg te zagen.
N.B.: Er zit er één tussen die volgens ons 'niet kan'. Ook niet in een gedraaide stand.

De ideeën voor dit artikel kwamen van *G. J. Westerink* uit Veenendaal.



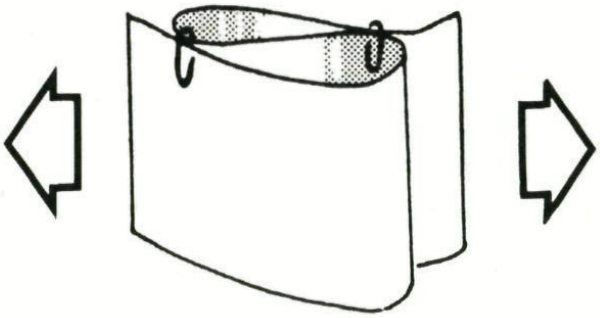
*Figuur 4*



*Figuur 5*

---

# Paperclip-magie



Vouw een velletje papier en bevestig twee paperclips, zoals in de figuur is aangegeven. Trek daarna stevig aan de uiteinden van het papier. Dat wordt dan weer keurig recht, terwijl de paperclips losschieten en omhoog springen. Wanneer je de paperclips opraapt, zul je ontdekken dat ze aan elkaar zitten. . . Om precies te zien wat er gebeurt, moet je het maar eens heel langzaam proberen.

# Bernhard Riemann

## grondlegger van de moderne differentiaalmeetkunde

Op 10 juni 1854 hield de toen zevenentwintigjarige Bernhard Riemann (1826-1866) aan de beroemde universiteit van Göttingen in Duitsland een voordracht over de beginselen van de meetkunde. Naar later zou blijken werd daarmee de basis gelegd voor de differentiaalmeetkunde in meer dimensies (*differentiaal-topologie* en *riemannse meetkunde*). Met name het slot van de lezing bevatte opmerkingen die leidden tot een nieuwe kijk op het verband tussen de meetkunde en de (welbekende) ruimte waarin wij leven.
Het artikel 'Coördinaten: tekenen wordt rekenen' (bladzijde 18) is bedoeld als voorbereiding, om in het volgende nummer over de inhoud van de voordracht te kunnen praten. Hier maken we nader kennis met de wiskundige die de voordracht hield.

**Wiskundig genie**
Georg Friedrich Bernhard Riemann werd op 17 september 1826 geboren in het dorp Breselenz in het toenmalige koninkrijk Hannover. Als vijfjarige toonde hij reeds veel belangstelling voor geschiedenis. Dat werd echter naar de achtergrond gedrongen toen hij zijn rekenkundige gaven ontdekte. Weldra kende hij geen groter genoegen dan het verzinnen van moeilijke opgaven en die aan anderen voor te leggen.
Toen hij tien jaar was, liet zijn vader hem naast een aantal andere vakken privé-lessen volgen in rekenen en meetkunde. Een goede gelegenheid om zijn gaven te tonen. Dikwijls gaf hij voor allerlei vraagstukken oplossingen die zijn leraar nauwelijks kon volgen. Ook op het gymnasium ging het Bernhard voor de wind. De rector van het gymnasium leende hem vaak wiskundeboeken. Dikwijls werden die al na een paar dagen teruggebracht, en liet Riemann blijken dat hij de boeken helemaal had doorgewerkt en begrepen.

**Studie**
Op 25 april 1846 liet Riemann zich als student inschrijven aan de universiteit van Göttingen. Naast zijn studie theologie en oude talen, volgde hij de wiskundecolleges van *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855), de grootste wiskundige van zijn tijd. Na een half jaar kreeg hij van zijn vader die dominee was, toestemming om zich helemaal aan de wiskunde te wijden. Vanaf Pasen 1847 ging hij in Berlijn studeren, omdat daar beter college werd gegeven. Na precies twee jaar keerde hij terug naar Göttingen.
Aan zijn brede wiskundige en natuurkundige belangstelling én zijn grote neiging tot perfectie is het misschien te wijten dat hij pas eind 1851 te Göttingen promoveerde (bij Gauss). Zijn proef-

*Bernhard Riemann*

schrift ging over functies van complexe getallen. Het heeft grote invloed gehad op de latere ontwikkelingen van dat vak (de complexe functietheorie). In eerste instantie bleef het echter tamelijk onopgemerkt.

**Baan aan de universiteit**

Om aan een Duitse universiteit een vaste baan te krijgen, was een promotie echter niet voldoende. Er moest nog een andere proeve van bekwaamheid worden afgelegd. Die bestond uit het schrijven van een verhandeling (Habilitationsschrift) en het houden van een proefcollege (Habilitationsvortrag). Door allerlei vertragingen duurde het bijna drie jaar, voordat Riemann hiermee in de zomer van 1854 gereed was. Eind 1853 leverde Riemann zijn Habilitationsschrift getiteld 'Ueber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe' bij de universiteit in.

**Tegenvaller**

Voor het proefcollege moest hij drie onderwerpen opgeven. Twee daarvan had hij al uitgewerkt. Onder invloed van Gauss werd echter enigszins tegen de verwachting in gekozen voor het derde onderwerp dat over de

grondslagen van de meetkunde handelde. Gauss was namelijk zeer benieuwd wat Riemann hierover had te vertellen. Te meer daar hij zelf vele jaren aan dit onderwerp had besteed.
Intussen was Riemann assistent van *Wilhelm Eduard Weber* (1804-1891) geworden, en werkte aan een onderzoek naar het verband tussen verschillende natuurkundige wetten. Met moeite kon hij zich van dit onderzoek losrukken om zijn voordracht voor te bereiden. Het gevolg was dat hij ziek werd, of zoals hij zelf zei: 'Misschien is dit wel een gevolg van te veel piekeren en binnen zitten vanwege het slechte weer'. Na zijn herstel ging hij ijverig aan de slag. Met Pinksteren was de voorbereiding van zijn proefcollege klaar. Maar nu liet de gezondheidstoestand van Gauss het niet toe dat de voordracht meteen werd gehouden. Doch vrij plotseling besloot Gauss dat de zaak maar eens moest worden afgehandeld. Zo hield Riemann op 10 juni 1854 zijn Habilitationsvortrag onder de titel 'Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen'.

**Gauss onder de indruk**

De voordracht werd gehouden voor de gehele filosofische faculteit, dus min of meer voor algemeen publiek. Diepgaande wiskundige formuleringen waren daarom niet mogelijk. Laat staan formules! Desondanks was Gauss – waarschijnlijk de enige die de inhoud van de voordracht op zijn juiste waarde kon schatten – diep onder de indruk. Riemann had zijn proeve van bekwaamheid goed doorstaan, en kreeg het recht om aan de universiteit van Göttingen te doceren. Later volgden benoemingen tot buitengewoon hoogleraar (1857) en gewoon hoogleraar (1859).

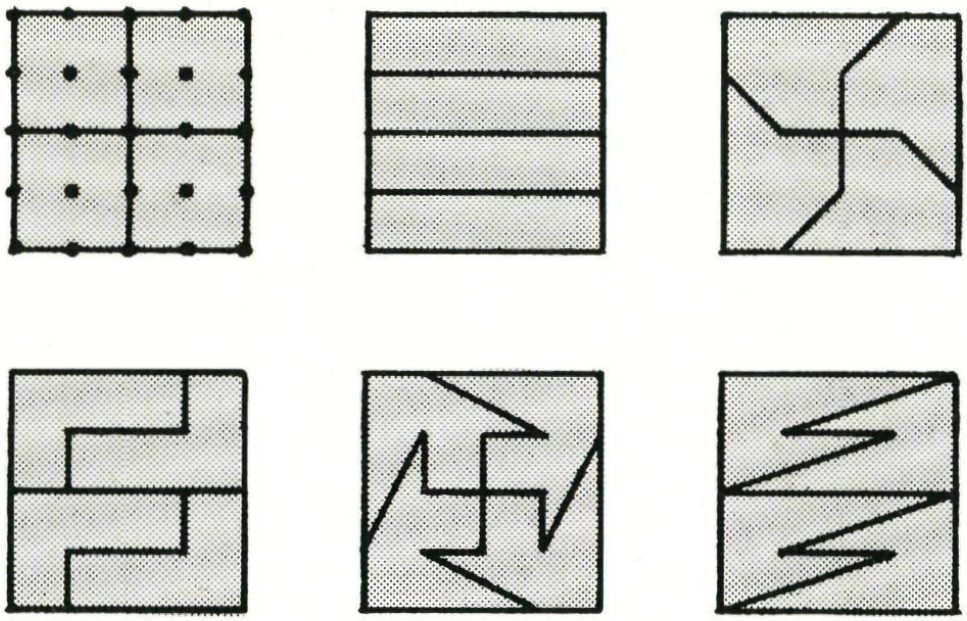
**Prijsvraag**

In 1858 loofde de Parijse academie een prijs uit voor het oplossen van een probleem over warmtegeleiding. Meedoen aan prijsvragen was in die tijd een bittere noodzaak voor wetenschappers. Het was de enige manier om hun geringe inkomsten een beetje op te vijzelen. En Riemann vormde daarop geen uitzondering.
In 1861 vond hij een oplossing voor genoemd probleem, en stuurde die naar de Parijse academie. In die oplossing gebruikte hij de formules van de riemannse meetkunde die hij in zijn proefcollege had weggelaten. Zijn oplossing was echter niet uitvoerig genoeg toegelicht, zodat het antwoord niet werd begrepen. Daarom werd hem de prijs niet toegekend, en zou de academie in 1868 uiteindelijk besluiten de prijsvraag in te trekken.

**Vroegtijdige dood**

Met zijn gezondheid ging het na 1862 bergafwaarts. Op 20 juli 1866 overleed Riemann, nog geen 40 jaar oud, in Italië aan longtuberculose.
Het proefcollege en de oplossing van de prijsvraag zijn Riemann's enige meetkundige activiteiten. Ze maken slechts 3% uit van het totale werk dat hij heeft nagelaten. Samen kunnen ze worden gezien als het begin van de moderne differentiaalmeetkunde. Twee jaar na zijn dood verscheen zijn Habilitationsvortrag in druk.

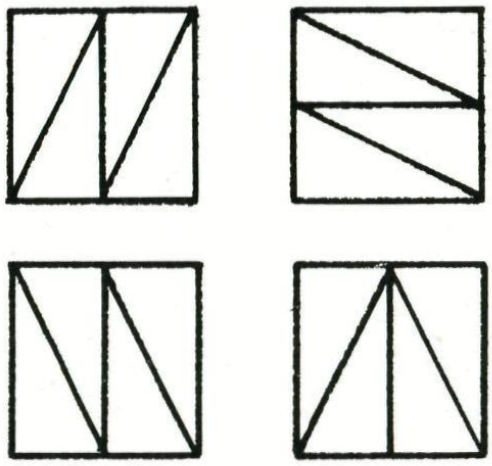
# In vier gelijke delen



Je ziet hier zes manieren waarop een vier-bij-vier vierkant in vier gelijke (congruente) veelhoeken verdeeld kan worden. De vraag is of het ook nog anders kan.

**Voorwaarden**
Eerst nog even precies de voorwaarden die we opleggen:
- de veelhoeken worden begrensd door uitsluitend *rechte* lijnstukken;
- alle hoekpunten van zo'n veelhoek vallen samen met *roosterpunten* van het vierkant (de 25 stippen in het eerste voorbeeld);
- twee verdelingen zijn pas verschillend, als de vorm van het stukje in de ene verdeling echt afwijkt van de vorm van het stukje in de andere. De vier figuurtjes in figuur 1 stellen dus dezelfde verdeling voor.

**Hoeveel**
Als je wat ruitjespapier bij de hand hebt, zul je gemakkelijk nog heel wat meer mogelijkheden kunnen vinden. De lol is natuurlijk om te proberen ze allemáál te vinden! Volgens ons moeten het er wel enkele tientallen zijn.



*Figuur 1. De vorm van de stukjes is in elk van deze verdelingen hetzelfde. Daarom wordt er geen onderscheid tussen deze verdelingen gemaakt.*

Je zult eerst wel beginnen met 'in het wilde weg' wat te proberen. Daarna is het de kunst om wat orde en systeem in het zoekwerk te brengen. Om ten slotte uit te komen op een systeem dat er zó waterdicht uitziet dat je er van overtuigd bent dat alle oplossingen gevonden zijn. (Zijn er ook oplossingen mogelijk waarin het middelste roosterpunt niet meedoet?)
In het volgende nummer zullen we onze oplossingen geven, volgens een – naar onze mening – waterdicht systeem. Nou ja waterdicht, we hebben wel vaker ervaren dat je je daar soms lelijk in kunt vergissen.

**Nog moeilijker**
Wie zich een keer héél erg verveelt kan ook eens een poging wagen om alle oplossingen te zoeken voor een vierkant met 49 roosterpunten in plaats van 25.

---

# Prijsvraag

## 1987
## in zo min mogelijk (gelijke) cijfers

Ook dit jaar vragen we je mee te doen met een wedstrijd rond het jaartal van het nieuwe jaar. Waarschijnlijk is het volgende voorbeeld al voldoende om je duidelijk te maken wat de bedoeling is.

$$1987 = 5 \times (555 - 5\times5 - 5) - (5^5 + 55 + 5 + 5) : 5$$

De vraag is: kan het met minder vijven?
En daarna: hoe schrijf je 1987 zo zuinig mogelijk met alleen vieren. Idem voor de rest van de cijfers.
Toegestaan zijn alleen de bewerkingen die in het voorbeeld voorkomen. Een complete inzending bestaat uit *negen* zo kort mogelijke vormen (met alleen nullen is het ons nog niet gelukt!) die elk als uitkomst 1987 hebben. Vermeld ook zelf vast even het totale aantal cijfers dat je in je negen vormen hebt gebruikt. We verwachten dat totalen in de buurt van 100 gebruikte cijfers mogelijk moeten zijn.

Stuur je resultaten naar het redactiesecretariaat:
*Klaas Lakeman, Cornelis Krusemanstraat 60$^{II}$, 1075 NS Amsterdam.*
Inzendingen die vóór 12 februari zijn ontvangen komen in aanmerking voor twee boekebonnen. Bij gelijke laagste totalen wordt er geloot. De resultaten komen natuurlijk in een van de volgende nummers!

# Speciaalstaartkwadraten

$$(111\ 111\ 111)^2 = 12\ 345\ 678\ 987\ 654\ 321$$

De juistheid van het bovenstaande zul je hopenlijk ook zonder rekendoosje kunnen inzien. De ouderwetse berekening via uitschrijven 'onder elkaar' is zelfs nog wel uit het hoofd te doen. We hebben speciaal aandacht voor de mooie negencijferige 'staart' van het uitgecijferde kwadraat, en stellen de vraag:

*Zijn er nog andere getallen van negen (of minder) cijfers waarvan het kwadraat eindigt op . . . 987 654 321?*

Je kunt hier op verschillende manieren naar gaan zoeken. Gewoon alles uitproberen op je school- of huiscomputer, of op je rekendoosje. Maar dan moet je toch al spoedig wat handigs bedenken omdat de getallen te groot worden.

Als je het wat slimmer aanpakt, en eerst gaat zoeken naar getallen met een kwadraat dat eindigt op . . . 1, dan op . . . 21, dan op . . . 321, enzovoorts, is er wel een systeem te vinden om (met enige steun van je rekendoosje) de zaak ook voor de *negen-cijfer-staart* te klaren.

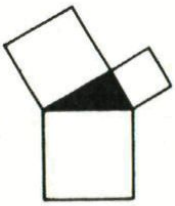
Tot onze eigen verrassing ontdekten we in totaal *acht* getallen van negen cijfers die aan de vraag voldoen. (Zonder negatieve oplossingen mee te tellen.) Wie controleert ons?

**Voor dóórzoekers**

Als je met deze kwestie bezig bent rijst vanzelf de vraag hoe het zit bij *andere* kwadraatstaarten. Is misschien met getallen van negen cijfers (of minder) élke willekeurige staart te maken met een kwadraat? En zijn er altijd meerdere oplossingen?
Het antwoord is nee. Voorbeelden van wortelloze staarten zijn gemakkelijk te vinden: een kwadraat kan bijvoorbeeld nooit op een 2 eindigen (op welke cijfers nog meer niet?).
Moeilijker zijn kwesties als:

- Welke negen-cijfer-staart heeft de meeste wortels?
- Hoeveel negen-cijfer-staarten hebben precies één wortel, of juist twee wortels?

De redactie zou graag reacties ontvangen van lezers die in deze kwesties aardige resultaten ontdekken.



Het probleem werd eerder opgeworpen in ons Australische zusterblad *Function*.

# Palindroom-kwadraten

Het vorige stukje begon met het kwadraat van negen enen:

$$(111\ 111\ 111)^2 = 12\ 345\ 678\ 987\ 654\ 321$$

Let nu eens niet alleen op de mooie negencijferige 'staart' van het uitgewerkte kwadraat, maar ook op het *totale* uitgewerkte kwadraat. Dan valt op dat het kwadraat niet verandert als de volgorde van de cijfers wordt omgekeerd. Zo'n getal dat bij omkering van de volgorde van de cijfers niet verandert, heet een *palindroom*.
Naar aanleiding van een vraag aan het einde van het artikel 'Palindromen' (Pythagoras 24-1) stuurde *Philippe Strobandt* uit Grimbergen (België) ons het volgende lijstje met kwadraten die palindroom zijn:

| | | |
|---|---|---|
| $11^2 = 121$ | $202^2 = 40804$ | $1111^2 = 1234321$ |
| $22^2 = 484$ | $212^2 = 44944$ | $2002^2 = 4008004$ |
| $26^2 = 676$ | $264^2 = 69696$ | $2285^2 = 5221225$ |
| $101^2 = 10201$ | $307^2 = 94249$ | $2636^2 = 6948496$ |
| $111^2 = 12321$ | $836^2 = 698896$ | |
| $121^2 = 14641$ | $1001^2 = 1002001$ | |

Verder ging zijn lijstje niet. Voor zover wij weten is het tot hier aan toe compleet (al hebben we geen bewijs). Hoe gaat het verder?

Sommige gevallen zijn gemakkelijk te vinden, kijk maar:

$$10101^2 = 102030201$$
$$11011^2 = 121242121$$
$$20002^2 = 400080004$$

Waarom zijn deze snel gevonden? Dat zie je als je de vermenigvuldiging uitschrijft. Nergens in de berekening wordt een tiental bereikt dat naar de volgende cijferpositie overspringt. (Is hier een beter Nederlands woord voor dan 'overflow'?) Bij wat verder zoeken vind je al gauw de volgende stelling:

Als een grondtal
- uitsluitend uit nullen en enen bestaat, én
- maximaal negen enen bevat, én
- zelf een palindroom is,

dan is het kwadraat ook een palindroom.

Als er ook tweeën in het grondtal voorkomen, zijn er al veel minder mogelijkheden tot variatie. Met wat uitproberen zullen de meeste lezers wel kunnen vinden hoe dat precies zit.
Met drieën en hogere cijfers gaat het al niet meer.

**Moeilijke gevallen**

Heel wat moeilijker wordt het als het grondtal zelf *geen* palindroom is. De asymmetrie in het grondtal

moet dan worden gecompenseerd door 'overflow'.
Het systematisch uitzoeken hiervan lijkt ons een hels moeilijk karwei . . . tenzij je de computer eraan zet. Je kunt dan alle getallen stuk voor stuk aflopen, en kijken of hun kwadraat een palindroom is. Een probleem(-pje?) is misschien dat je computer daarbij met erg grote getallen exact moet kunnen rekenen en niet gaat afronden. Dat kan hij meestal niet met z'n standaardinstructies. Je zult hem dus zelf moeten 'leren' hoe dat moet.

Als iemand dit voor elkaar krijgt, en dan ook echt palindroom-kwadraten vindt die niet van het eenvoudige type zijn, horen we dat graag. We weten nu nog niet eens of zulke gevallen wel bestaan!

**Spiegelkwadraten**
Dit is nog een variant op het voorgaande.
Twee getallen noemen we *spiegelkwadraten* als
- beide een zuiver kwadraat zijn, én
- de tientallige cijfervoorstellingen elkaars spiegelbeeld zijn, én
- de cijfervoorstelling geen 'linkernullen' bevat, én
- de getallen ongelijk zijn.

*Voorbeeld 1*

| | | |
|---|---|---|
| 14884 | en | 48841 |
| = | | = |
| $122^2$ | | $221^2$ |

*Voorbeeld 2*

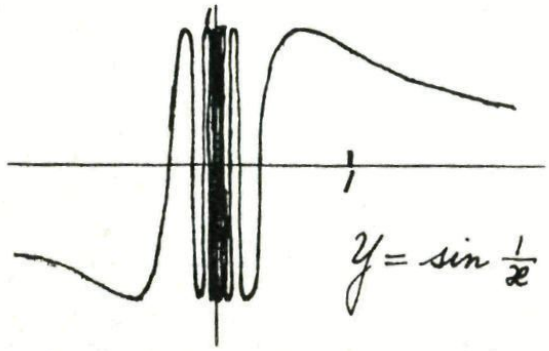
| | | |
|---|---|---|
| 1089 | en | 9801 |
| = | | = |
| $33^2$ | | $99^2$ |

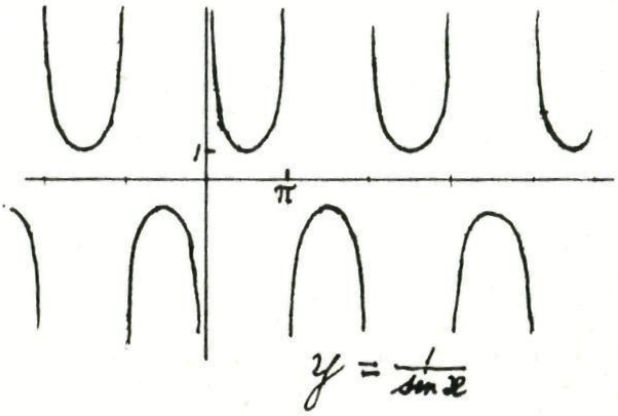
Onder de getallen kleiner dan een miljoen vonden we in totaal *acht* van zulke spiegel-kwadraat-paren.
Behalve bij het paar in voorbeeld 2 zijn de cijfers van beide grondtallen ook steeds elkaars spiegelbeeld (alleen cijfers 0, 1, 2 en 3 komen voor, de kwadrateringen bevatten geen overflow).
Welke computer vindt nog andere spiegelkwadraatparen van het soort als in voorbeeld 2 (mét overflow in de kwadratering)???

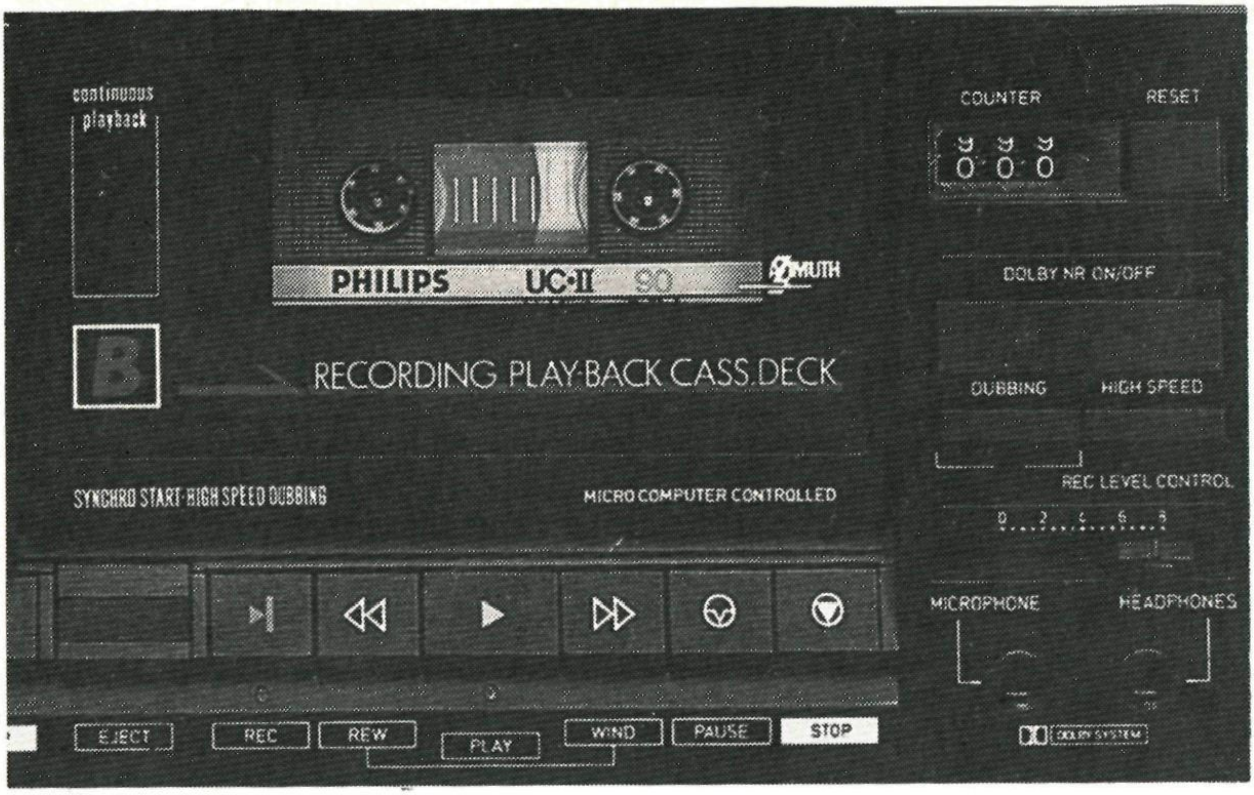
---

# Een speurtocht naar gekke grafieken

(Zie vorig nummer bladzijde 22.)





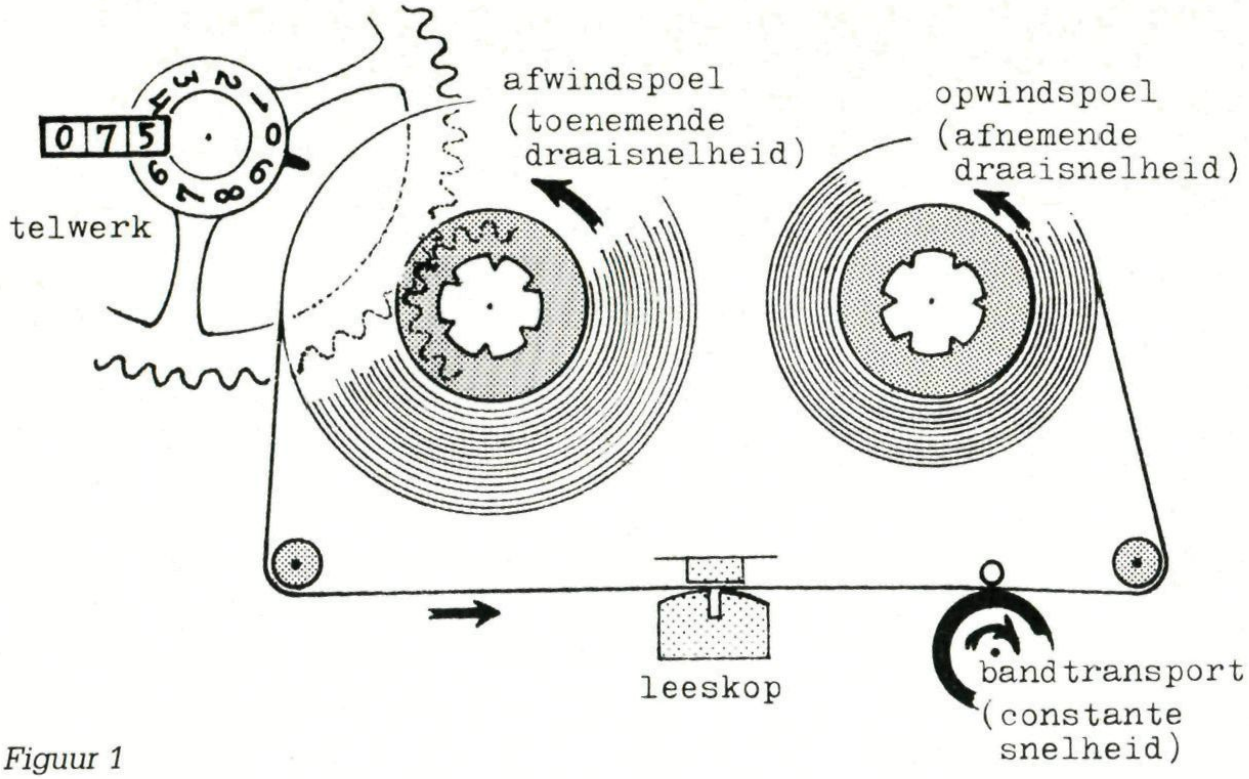

# Pas op je teller

Op de wat betere cassette-recorders en op videorecorders zit een telwerkje dat aangeeft hoe ver de band al is afgespoeld. Als je weet bij welke tellerstanden de verschillende onderdelen op de band beginnen, kun je bij het snel doorspoelen gemakkelijk het punt vinden waar je wezen wilt.
Dit gaat prima, de teller is hier juist voor bedoeld. Toch kun je met zo'n teller voor onverwachte, en soms minder plezierige verrassingen komen te staan. Bijvoorbeeld als je cassette-bandje bijna vol is, en je vraagt je af of er nog één nummer bij kan.

Stel dat je een keer hebt opgemeten, aan het begin van een bandje, dat één nummer past tussen de tellerstanden 000 en 033. Je weet dat de band vol is bij de stand 700, hij is bespeeld tot stand 650, en dus, denk je, kan het nieuwste nummer van je favorieten er nog makkelijk achter.
Dit blijkt echter toch mis te gaan. . .?!

**Niet constant**

Om te begrijpen hoe dat komt, moet je een klein beetje weten van de techniek (figuur 1).
Het bandtransport-wieltje zorgt ervoor dat de band met een *constante* snelheid van 48 mm/s langs de afleeskop getrokken wordt; de draaisnelheid van de opwind- en afwindspoelen moet zich daar bij aanpassen. Dat is




*Figuur 1*

nog niet zó gemakkelijk want de opwind-spoel moet in het begin (nog bijna leeg zijnde) sneller draaien dan tegen het eind, om per seconde toch dezelfde bandlengte netjes opgerold te krijgen. Bij de afwindspoel is dat natuurlijk net andersom.
Hoe dat technisch allemaal precies voor elkaar komt, doet er nu niet toe. In verband met het telwerk is het echter belangrijk om te weten dat dit *niet* (met een tandradje) aan de constant draaiende as van het transport-wieltje gekoppeld zit, maar aan óf de afwind-as, óf de opwind-as.
De reden hiervan is heel simpel: Het telwerk moet ook blijven draaien tijdens het snel doorspoelen; het transportwieltje staat in dat geval echter stil, los van de band.

**Ons apparaat**

Bij het apparaat dat wij onderzochten, zat het telwerk gekoppeld aan de as van de *afwind*-spoel: die spoel draait eerst langzaam, maar gaat bij het leger worden steeds sneller draaien. En dus gaat ook het telwerk steeds sneller lopen.
Er zijn ook veel apparaten waarbij het telwerk aan de opwind-spoel gekoppeld zit. Het telwerk zal dan aan het eind van een band juist lángzamer lopen dan aan het begin. Als je zelf zo'n ding hebt, moet je dat maar eens nagaan.

**Niet zo weinig**

Het gaat hier bepaald niet om een klein effect, dat meestal wel te verwaarlozen zou zijn. Als je de kans hebt moet je maar eens een hele band afspelen, en telkens na precies één minuut de tellerstand noteren.
Wij deden dit met een cassettebandje met een speelduur van drie kwartier. Ons resultaat: in de eerste speelminuut nam de teller toe met 11 eenheden, en in de

laatste minuut met 26 eenheden. Dus ongeveer *tweeënhalf* keer zo snel!

**Wat voor functie?**

De tellerstand varieert dus niet gelijkmatig met de tijd, maar hoe dan wél? We gaan dit nog nader bekijken.

Om de formule niet onnodig ingewikkeld te maken, kijken we niet naar de tellerstand zelf, maar naar het aantal omwentelingen (afgekort met $n$) dat de as van de afwindspoel maakt vanaf het starten van een volle band.

En we kijken ook niet naar de tijd die de band al speelt, maar naar de daarmee evenredige lengte ($l$) van het afgespeelde deel.

De straal van de volle spoel geven we aan met $r$, en de dikte van de band met $d$. Die dikte is wel erg klein, maar zeker niet verwaarloosbaar: de spoel zou anders steeds even vol blijven!

Het verband tussen $l$ en $n$ lezen we af uit figuur 2.

De oppervlakte $l \cdot d$ van de (smalle) zijkant van het afgespeelde deel van de band, is gelijk aan de oppervlakte van het leeggekomen deel van de afwindspoel: de ring tussen de volle schijf $\pi r^2$ en het overgebleven deel $\pi(r-nd)^2$.

In formule, na deling door $d$:

$$l = \frac{\pi}{d}\,[r^2 - (r - nd)^2] \qquad (1)$$

Deze vorm beschrijft niet een lineaire maar een *kwadratische* functie van $n$.

Formule (1) is om te werken tot een vorm waarbij $n$ is uitgedrukt als functie van $l$:

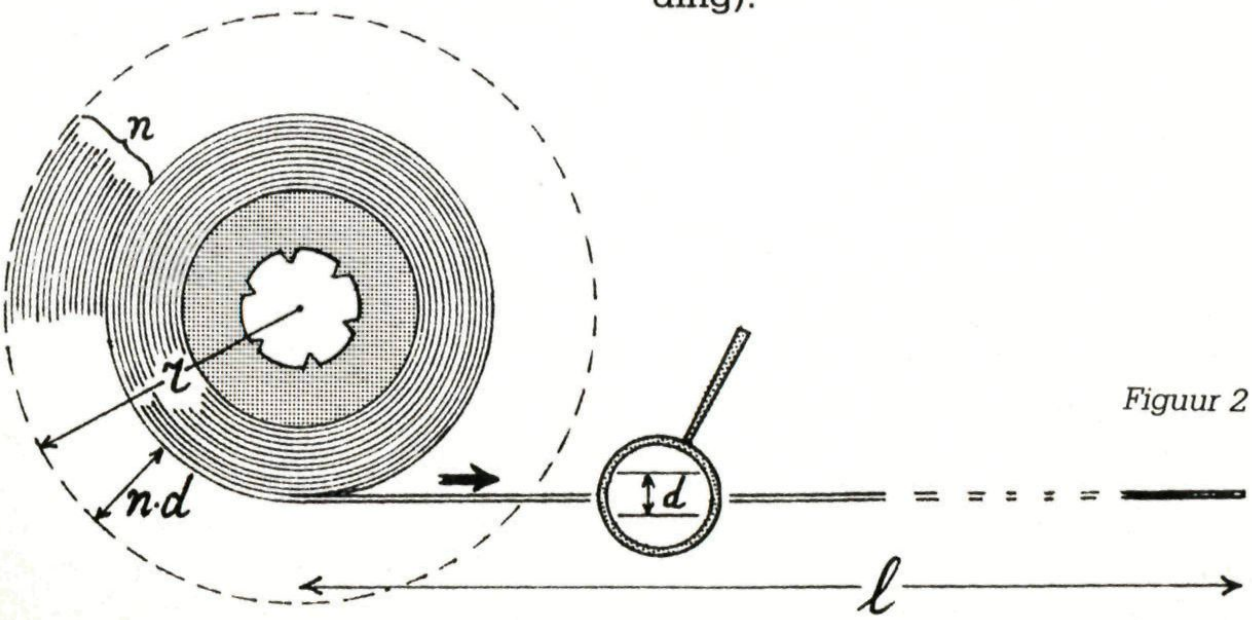
$$n = \frac{r}{d} - \sqrt{\left(\frac{r}{d}\right)^2 - \frac{l}{\pi d}}.$$

Dit is nu niet een kwadratische functie meer, maar een *wortelfunctie.*

Ten slotte werken we (1) nog om tot de vorm:

$$l = 2\pi r \cdot n - \pi d \cdot n^2 =$$
$$= n \times \tfrac{1}{2}\,[2\pi r + 2\pi(r - nd)],$$

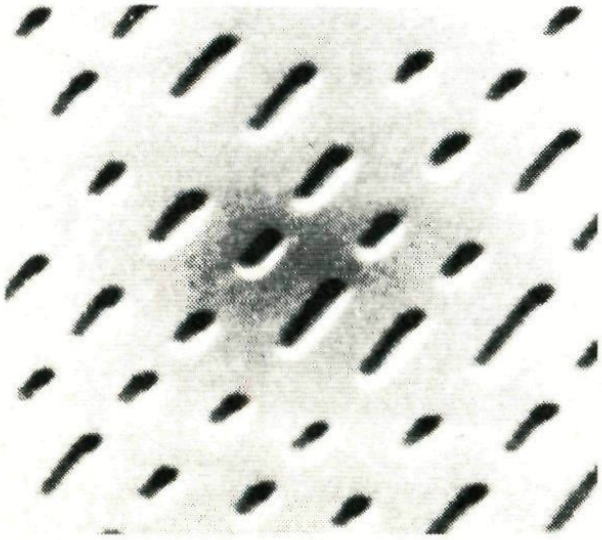
waaraan te zien is dat $l$ ook gelijk is aan: (het aantal afgespeelde windingen) × (de *gemiddelde* lengte van een afgespeelde winding).




*Figuur 2*

**Anders bij platen**
Hoe zit het bij grammofoonplaten? De groef op de plaat gaat daar via een fijne spiraal vanaf de rand naar het midden toe. Maar de groef wordt nu niet 'van de plaat gelicht' om met constante snelheid langs de naald te kunnen lopen.
De draaitafel draait met constante snelheid van 33 (of 45) toeren per minuut, en dus worden er aan het begin van de plaat per seconde méér groef-centimeters afgespeeld dan aan het eind. Gelukkig was dat bij het opnemen (het snijden) van de plaat ook zo, dus het geluid blijft onvervormd.
Wel is het zo dat voor één bepaalde toonhoogte, zeg de a van 440 Hz, de bibbers in de groef vlak bij het label véél dichter op elkaar zitten dan dicht bij de buitenrand. Misschien zal om die reden de kwaliteit van de hoogste tonen aan het eind van een plaat wel eens minder goed zijn.

**Nog anders bij cd-spelers**
Bij de moderne compact-discspelers is dit probleem zeer fraai opgelost.
Het spiraalvormige spoor van putjes en niet-putjes wordt met een laser-straal afgetast, spiraliserend van binnen naar buiten. De snelheid van de draaitafel neemt daarbij gelijkmatig af van 8 omw/s in het begin, tot 3,5 omw/s aan het eind, en het putjes-spoor wordt uitgelezen met een constante snelheid van 1,25 m/s.
De manier waarop die variërende draaisnelheid geregeld wordt is hypermodern: met een soort computer-besturing. De informatie uit het putjes-spoor wordt niet onmiddellijk omgezet in muziek maar gaat eerst even in een geheugen. Aan de 'andere kant' van dat geheugen wordt het voorraadje informatie er met een uiterst constante snelheid weer uitgehaald. Die uitleessnelheid wordt constant gehouden door een kwarts-klokje.
Als het buffer-geheugen nu dreigt leeg te raken, krijgt de motor van de draaitafel een signaal om wat op te schieten. En andersom, als de buffer bijna vol is, wordt de motor wat afgeremd.
Het telwerk zit nu elektronisch aan de uitgang van het buffergeheugen gekoppeld.



*Het oppervlak van een compact disc met stukken van het spiraalvormige spoor van putjes en niet-putjes, 12.500 maal vergroot. Het putjesspoor wordt beschermd door een gladde laag 'doorzichtige' kunststof, zodat het door een laserstraal kan worden afgetast.*

# Coördinaten

## tekenen wordt rekenen

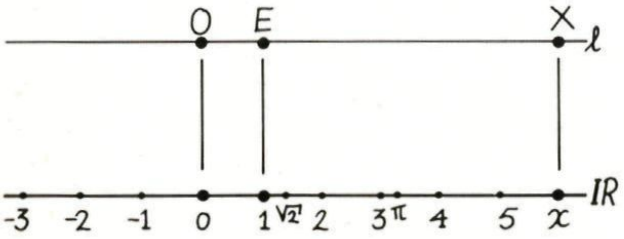
Coördinaten werden ingevoerd door de beroemde Franse filosoof en natuurwetenschapper René Descartes (1596-1650). Onafhankelijk van Descartes werden ze ook ingevoerd door de Franse getallentheoreticus Pierre Fermat (1601-1665). Hij ontwikkelde dit idee echter niet zo uitgebreid als Descartes.
Met coördinaten wordt meetkunde teruggebracht tot rekenen. Dat zal je waarschijnlijk niet als nieuw in de oren klinken. Op school heb je immers leren werken met een *rechthoekig assenstelsel*, in feite een speciaal soort coördinaten. We zullen de kenmerken daarvan hier nog eens beschrijven, en daarna de bijzonderheden van enkele andere coördinaten bekijken. We gaan zo uitgebreid in op coördinaten, omdat ze onmisbaar zijn om over $n$-dimensionale ruimten te kunnen praten.

### Eerst eenvoudig

Het allereenvoudigst zijn coördinaten voor de rechte lijn. Zet op een rechte lijn $l$ twee verschillende punten $O$ en $E$ (figuur 1A). $O$ noemen we de *oorsprong*, en $E$ het *eenheidspunt*. Met een willekeurig punt $X$ op $l$ kunnen we nu een getal $x$ laten corresponderen via

$$x = \pm \frac{|OX|}{|OE|}$$

($|AB|$ is de afstand tussen twee punten $A$ en $B$ op $l$.) Als $X$ en $E$ aan dezelfde kant van $O$ liggen, gebruiken we het + teken; als ze aan verschillende kanten van $O$ liggen het − teken. We noemen $x$ de $x$-coördinaat van het punt $X$.

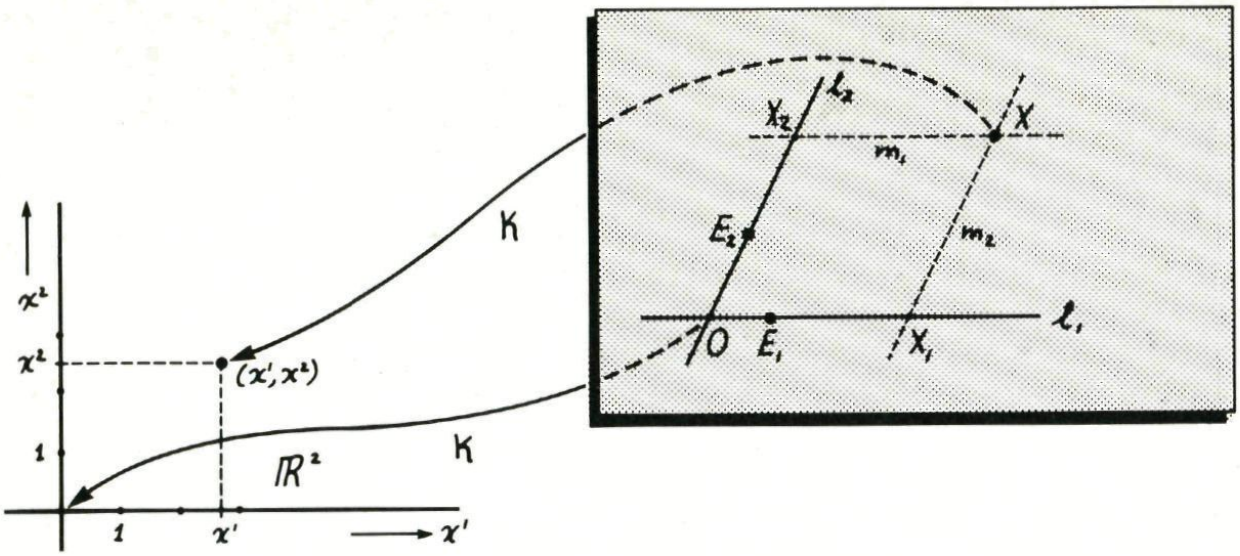



*Figuur 1. Afbeelding van de lijn l op de verzameling van de getallen IR.*

In figuur 1B is voor een aantal punten op $l$ de $x$-coördinaat gegeven. Met ieder punt op de rechte $l$ komt precies één getal overeen. Ook het omgekeerde gaat op: als je een getal $x$ geeft, dan hoort daar precies één enkel punt op $l$ bij. In plaats van over de rechte $l$ te praten, kun je het net zo goed hebben over de verzameling IR van alle getallen.

### Cartesische coördinaten

Zoals gezegd, lieten Descartes en Fermat zien dat ook punten in een plat vlak door getallen zijn aan te geven. Daarvoor heb je twee getallen nodig. Die worden op de volgende manier bepaald.
Trek in een plat vlak twee rechte lijnen $l_1$ en $l_2$, en noem hun snijpunt $O$ (figuur 2A). Kies op $l_1$ een punt $E_1$ (ongelijk $O$), en op $l_2$ een punt $E_2$ (eveneens ongelijk $O$). Op elk van de lijnen zijn de punten weer voor te stellen door hun coördinaten. Laat $X$ nu een willekeurig punt in het platte vlak zijn. Trek door $X$ een lijn $m_1$ evenwijdig




*Figuur 2. Afbeelding van het platte vlak (A) op $\mathbb{R}^2$ (B). Elk punt uit het platte vlak wordt gekoppeld aan precies één getallenpaar ($x^1$, $x^2$).*

aan $l_1$, en een lijn $m_2$ evenwijdig aan $l_2$. Het snijpunt van $l_1$ en $m_2$ noemen we $X_1$, en dat van $l_2$ en $m_1$ noemen we $X_2$. De coördinaat van $X_1$ op $l_1$ noemen we $x^1$, en die van $X_2$ op $l_2$ noemen we $x^2$.
Zo worden aan het punt $X$ de getallen $x^1$ en $x^2$ toegevoegd (figuur 2B). We zeggen dat $(x^1, x^2)$ de *cartesische coördinaten* van het punt $X$ zijn. Als je omgekeerd de coördinaten $(x^1, x^2)$ geeft, dan leg je daarmee precies één punt vast. Wat formeler gezegd: we hebben een afbeelding

$$\kappa: X \rightarrow (x^1, x^2)$$

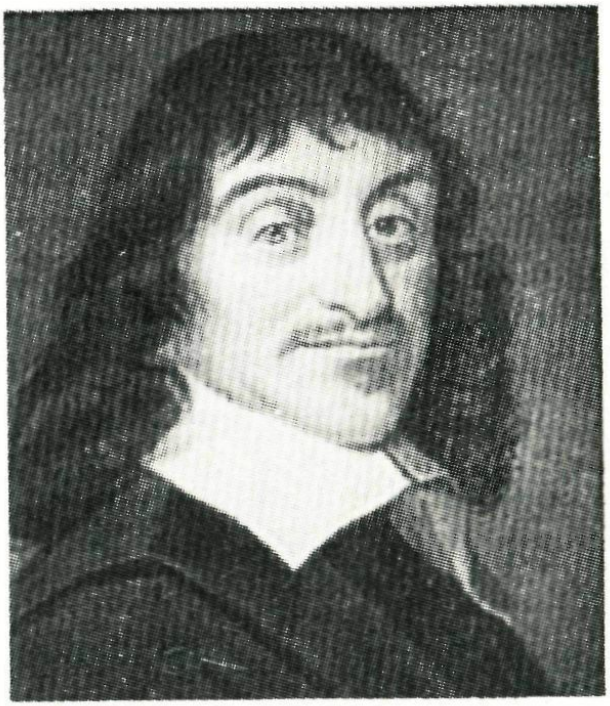
en een inverse afbeelding

$$\kappa^{-1}: (x^1, x^2) \rightarrow X$$

In plaats van over het platte vlak, kun je net zo goed praten over de verzameling van alle paren getallen $(x^1, x^2)$. Deze verzameling geven we aan met $\mathbb{R}^2$.

Het assenstelsel waar je op school mee hebt leren werken, komt neer op het gebruik van *rechthoekige cartesische coördinaten*, een bijzonder geval van cartesische coördinaten. Daarbij staan $l_1$ en $l_2$ loodrecht op elkaar, en geldt bovendien

$$|OE_1| = |OE_2| = 1.$$



*René Descartes (1596-1650). De term cartesisch is afgeleid van de Latijnse vorm van zijn naam: Renatus Cartesius.*

Op school gebruik je overigens een andere notatie. Daar schrijf je $x$ in plaats van $x^1$, en $y$ in plaats van $x^2$. Dus

$$(x^1, x^2) = (x, y)$$

Met opzet zullen we echter die laatste notatie niet gebruiken.

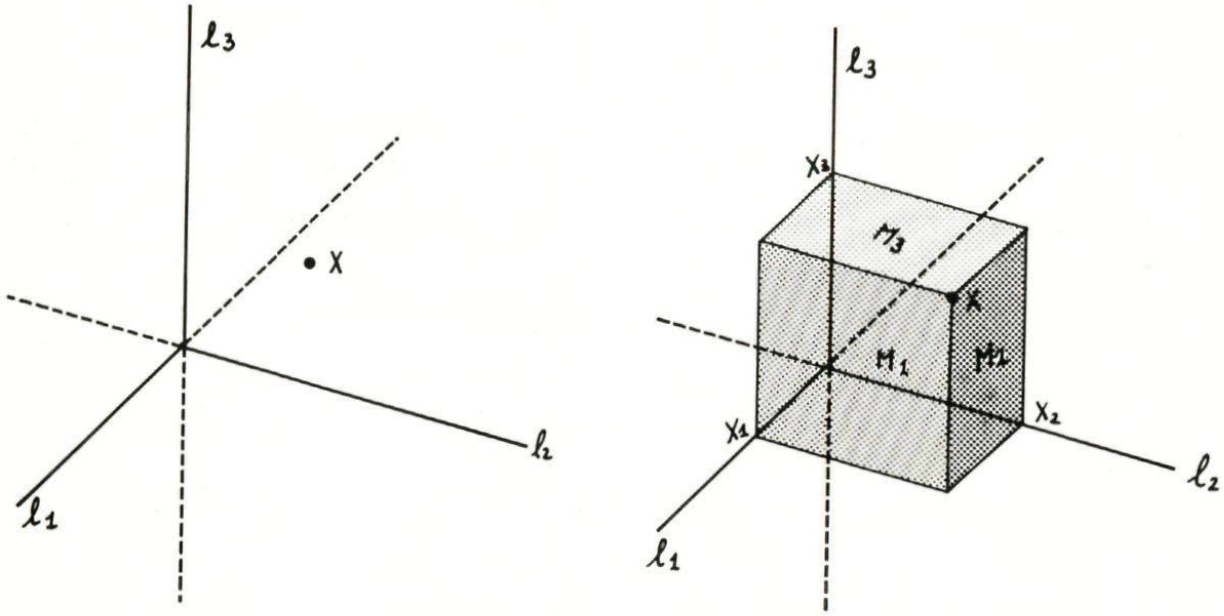
*In de ruimte* Ook in de ruimte kun je punten met cartesische coördinaten beschrijven. Nu heb je drie getallen nodig: $x^1$, $x^2$ en $x^3$. Om ze te bepalen gaan we op soortgelijke manier te werk als bij de rechte lijn en het platte vlak (figuur 3).
We krijgen dan dus afbeeldingen

$$\kappa: X \rightarrow (x^1, x^2, x^3) \quad \text{en}$$
$$\kappa^{-1}: (x^1, x^2, x^3) \rightarrow X$$

Ook hier kun je weer in plaats van over de ruimte, net zo goed praten over de verzameling van alle drietallen $(x^1, x^2, x^3)$. Deze verzameling wordt aangegeven met $\mathbb{R}^3$.

**Alle *n*-tallen**

We noemen de ruimte drie-dimensionaal, omdat er drie coördinaten nodig zijn om een punt in de ruimte vast te leggen. Net zo zijn het platte vlak en de rechte lijn twee-dimensionaal respectievelijk één-dimensionaal. We kunnen ons best voorstellen wat een één-, twee- of drie-dimensionale ruimte is. Voor meer dan drie schiet ons voorstellingsvermogen echter tekort. Doordat met coördinaten meetkunde is terug te brengen tot rekenen, kunnen we toch verder. Niets belet ons namelijk de verzameling $\mathbb{R}^4$ van alle viertallen $(x^1, x^2, x^3, x^4)$ te




*Figuur 3. Cartesische coördinaten voor de ruimte. Neem door een punt O drie lijnen $l_1$, $l_2$ en $l_3$ die niet in één plat vlak liggen. Ze mogen onderling loodrecht op elkaar staan, maar nodig is dat niet (A). Het vlak door $l_1$ en $l_2$ noemen we $L_3$, dat door $l_2$ en $l_3$ noemen we $L_1$ en dat door $l_3$ en $l_1$ noemen we $L_2$. Om aan een punt X coördinaten toe te voegen, construeren we drie vlakken door X. Een vlak $M_1$ evenwijdig aan $L_1$, een vlak $M_2$ evenwijdig aan $L_2$ en een vlak $M_3$ evenwijdig aan $L_3$ (B). Het snijpunt van $M_1$ met $l_1$ noemen we $X_1$. Net zo zijn $X_2$ en $X_3$ de snijpunten van $l_2$ en $M_2$ respectievelijk $l_3$ en $M_3$. De coördinaten van $X_1$, $X_2$ en $X_3$ op $l_1$, $l_2$ en $l_3$ noemen we $x^1$, $x^2$ en $x^3$.*

## Tekenen wordt rekenen

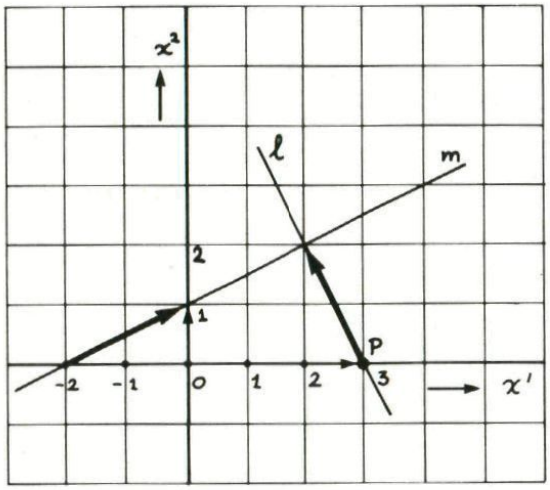
Laat vanuit een gegeven punt $P$ een loodlijn $l$ op een gegeven lijn $m$ neer. Een eenvoudiog probleem waarvoor we twee oplossingen laten zien: met behulp van coördinaten dus rekenen (figuur A), en door middel van 'constructie met passer en liniaal', dus tekenen (figuur B).

*Rekenen* We gaan uit van rechthoekige cartesische coördinaten.

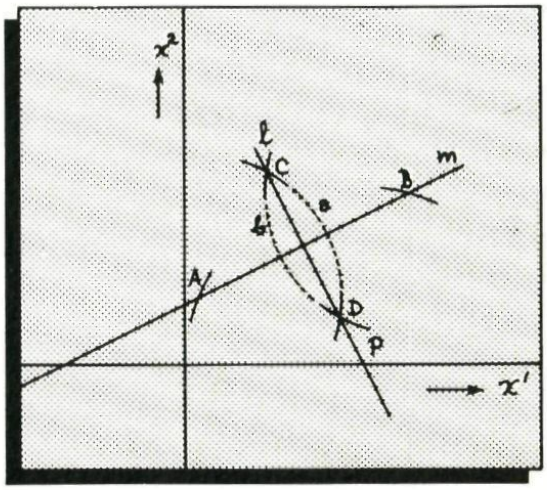
Neem voor $P$ $\binom{3}{0}$ en voor $m$: $\binom{x^1}{x^2} = \binom{0}{0} + \mu \binom{2}{1}$

Als steunvektor voor $m$ kunnen we dan $\binom{3}{0}$ nemen, en de richtingsvektor van $l$ moet dan loodrecht staan op $\binom{2}{1}$, en dat levert $\binom{-1}{2}$.

De gevraagde loodlijn wordt dan $l$: $\binom{x^1}{x^2} = \binom{3}{0} + \lambda \binom{-1}{2}$




*Figuur A*



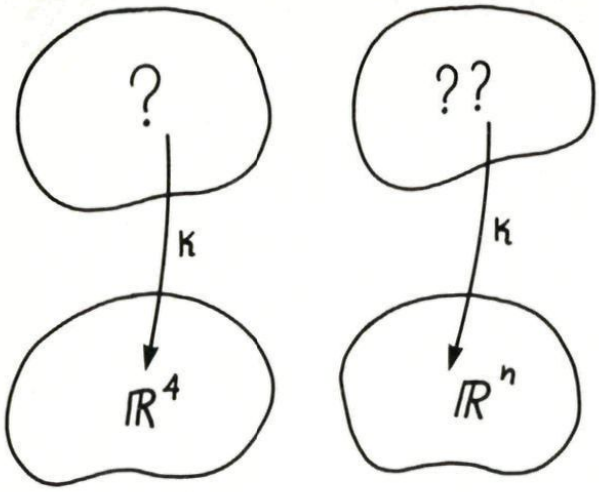

*Figuur B*

*Tekenen* Zet de punt van de passer in $P$ en trek een stuk van de cirkel die de lijn $m$ op twee plaatsen $A$ en $B$ snijdt. Zet vervolgens de punt van de passer in $A$ en trek de boog $a$. Door de punt van de passer in $B$ te zetten wordt op dezelfde manier boog $b$ verkregen. De gevraagde loodlijn is de lijn door de snijpunten $C$ en $D$ van de bogen $a$ en $b$.

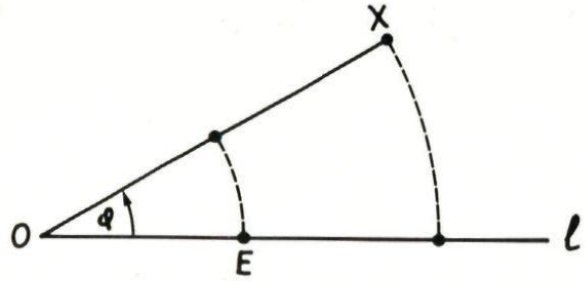
bekijken. Deze coördinaten geven ons de mogelijkheid om over de vier-dimensionale ruimte te spreken, zonder dat we die ons voor hoeven te stellen (figuur 4A). Algemener kunnen we door middel van de verzameling $\mathbb{R}^n$ van alle $n$-tallen $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ spreken over de $n$-dimensionale ruimte (figuur 4B). In een volgend artikel gaan we hierop door.

## Poolcoördinaten

Cartesische coördinaten zijn niet de enige manier om een punt in een plat vlak aan te geven met




*Figuur 4. Met coördinaten is het mogelijk om over een vier- of hogerdimensionale ruimte te praten zonder die ruimte voor te hoeven stellen.*




*Figuur 5. In poolcoördinaten wordt een punt X aangegeven met (r, φ). r is het maatgetal van de afstand van X tot de oorsprong O (r = |OX| / |OE|, φ dat van de hoek (gemeten in radialen) die de halve rechte OX maakt met een vastgestelde 'pool-as' l, in een vastgestelde draairichting.*

getallen. Het kan bijvoorbeeld ook met poolcoördinaten. Een punt $X$ wordt dan aangegeven met $(r, \varphi)$ (figuur 5). Daarbij geldt $r = |OX| / |OE|$, en is $\varphi$ de hoek die de lijn $OX$ maakt met een vastgestelde lijn $l$, de pool-as. De hoek $\varphi$ wordt uitgedrukt in radialen (hoewel het in principe ook in graden zou kunnen). De coördinaat $r$ heet de voerstraal, en de coördinaat $\varphi$ heet de poolhoek. Net als bij cartesische coördinaten, kun je het in plaats van over het platte vlak, net zo goed hebben over de verzameling van alle tweetallen $(r, \varphi)$. Om het hele platte valk te krijgen, moeten r en $\varphi$ voldoen aan

$$0 \leqslant r < \infty \text{ en } 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

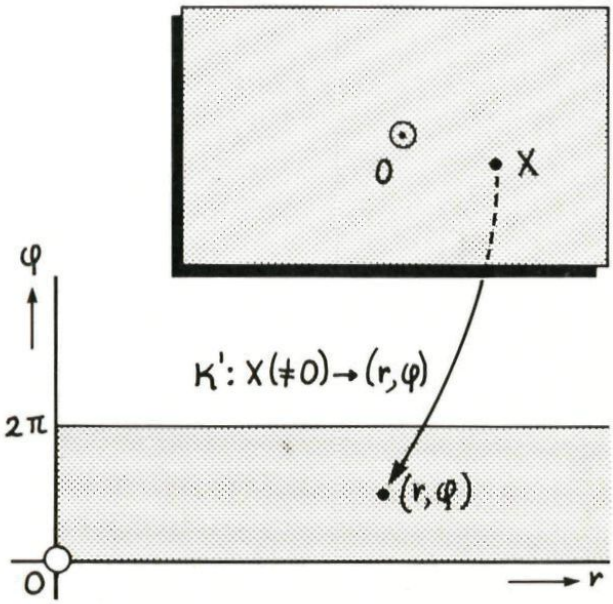
Dus het hele platte vlak wordt afgebeeld op een strook in $\mathbb{R}^2$ (figuur 6).
Een probleem vormt de oorsprong. Die kan worden aangegeven met $(0, \varphi)$ waarbij $\varphi$ elke mogelijke waarde kan aannemen. Dus voor de oorsprong is $\varphi$ onbepaald. Daarom wordt de oorsprong buitengesloten wanneer we met poolcoördinaten werken (figuur 6). Dan geldt dus

$$0 < r < \infty$$

Als we de oorsprong niet zouden uitsluiten, dan zou

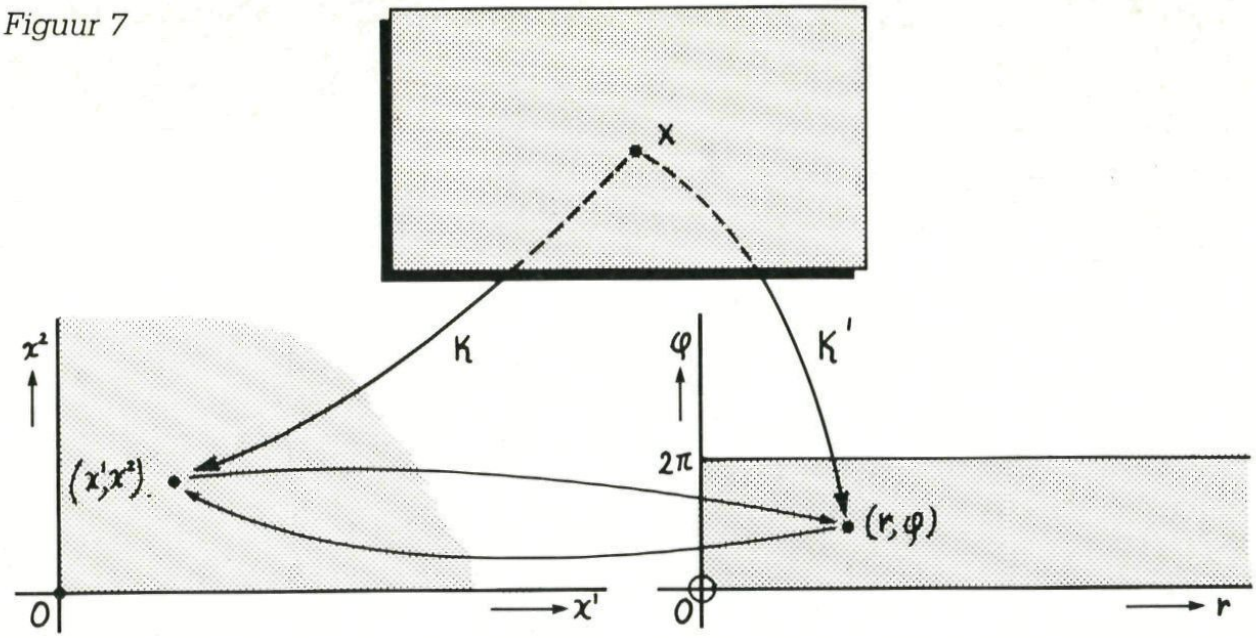
$$K': X \rightarrow (r, \varphi)$$

*geen* afbeelding zijn.




*Figuur 6*

Figuur 7




**Van het een naar het ander**
Een punt $X$ in een platte vlak is nu op twee manieren met een getallenpaar te verbinden (figuur 7). Met een afbeelding K kennen we aan $X$ rechthoekige cartesische coördinaten $(x^1, x^2)$ toe, en met een afbeelding K' poolcoördinaten $(r, \varphi)$. Aangezien beide getallenparen één aan één met het punt $X$ uit het platte vlak zijn verbonden, kun je via dat punt $X$ van het ene getallenpaar overgaan naar het andere, en omgekeerd. Om dat via het punt $X$ te doen is echter een omweg, het kan net zo goed rechtstreeks. Zo is in figuur 8 aangegeven hoe je van het getallenpaar $(r, \varphi)$ overgaat naar het paar $(x^1, x^2)$. Daartoe moeten $x^1$ en $x^2$ worden uitgedrukt in $r$ en $\varphi$. Er geldt

$$x^1 = r \cos \varphi$$
$$x^2 = r \sin \varphi$$

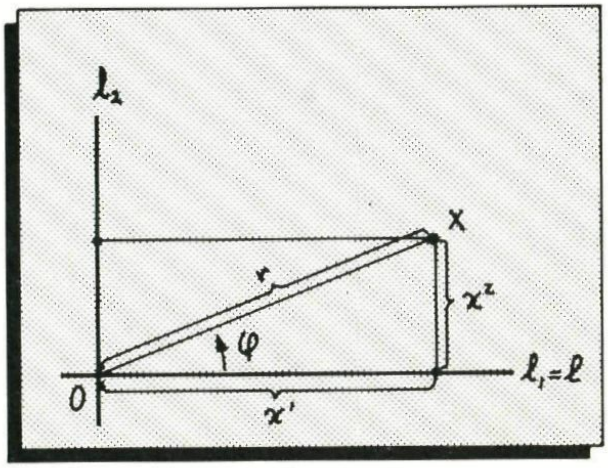
In het algemeen wordt zo'n overgang of *coördinaten-transformatie* van het paar $(r, \varphi)$ naar het paar $(x^1, x^2)$ genoteerd als

$$x^1 = x^1(r, \varphi)$$
$$x^2 = x^2(r, \varphi)$$

en het omgekeerde als

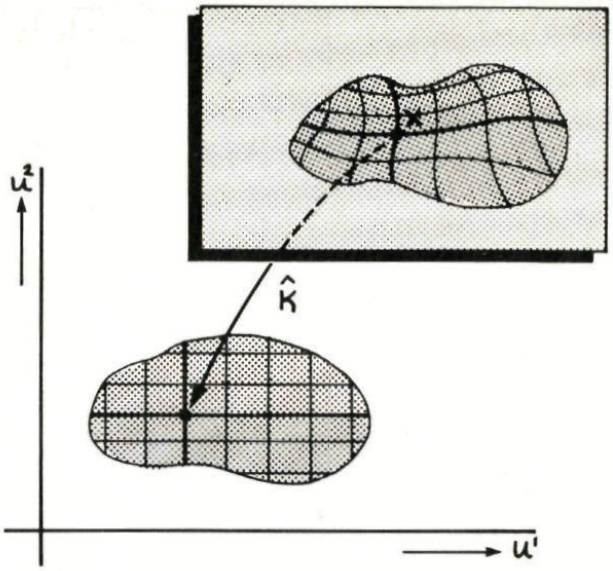
$$r = r(x^1, x^2)$$
$$\varphi = \varphi(x^1, x^2)$$

**Kromlijnige coördinaten**
Naast cartesische coördinaten en poolcoördinaten zijn er nog heel wat andere mogelijkheden om een punt $X$ uit het platte vlak met een getallenpaar aan te geven. In principe kan er van elk denkbaar netwerk van lijnen worden uitge-




Figuur 8

gaan, als er maar door *ieder punt* van het platte vlak precies twee lijnen gaan.
Meestal beperkt men zich met zo'n netwerk tot een omgeving $U$ van een punt $X$ (figuur 9). Zonder uitvoerig in te gaan op de manier waarop die getallen worden bepaald, vermelden we enkel dat er dan een afbeelding $\hat{k}$ moet zijn die alle punten uit de omgeving $U$ één aan één afbeeldt op een getallenpaar $(u^1, u^2)$. Bij elk punt uit de omgeving $U$ hoort dus precies één getallenpaar, en omgekeerd.



*Figuur 9*

**Coördinaten op een bolopper-vlak**

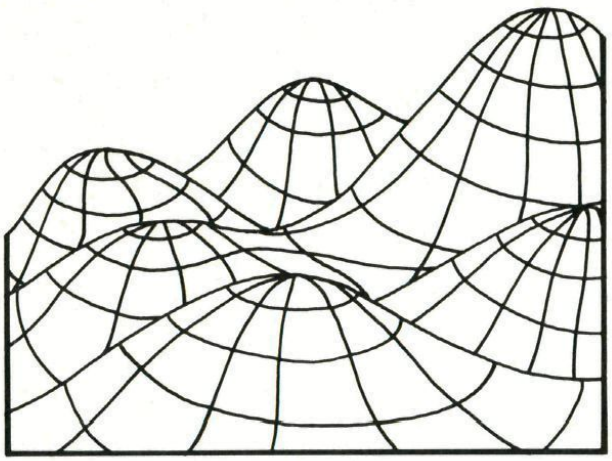
Behalve het platte vlak heb je ook gekromde oppervlakken. Denk bijvoorbeeld maar eens aan het oppervlak van de aarde. Afgezien van onregelmatigheden komt dat redelijk overeen met een bolopper-vlak. Om een plaats (punt) op de aardbol aan te geven gebruikt men het bekende stelsel van lengte- en breedtegraden (figuur 10). Zo wordt Amsterdam aangegeven met (51° 23' N, 4° 54 O), Antwerpen met (51° 13'N, 4° 25' O), enzovoorts. Dus ieder punt van het aardoppervlak wordt afgebeeld op twee getallen.
Bij poolcoördinaten voor het platte vlak zagen we dat de oorsprong een probleem vormde.

*Figuur 10*

Hier krijgen we moeilijkheden bij de Noordpool (90° N, ?) en de Zuidpool (90° Z, ?). Op de plaats van het vraagteken kan namelijk elke mogelijke waarde van 0° tot 180° O dan wel van 0° tot 180° W komen. Bij de Noordpool én de Zuidpool is dus één van de coördinaten onbepaald.

**Coördinaten van Gauss**

Het stelsel van lengte- en breedtegraden op de aardbol is een speciaal voorbeeld van de coördinaten van Gauss. Na 1820 werd Gauss betrokken bij landmetingen in het Koninkrijk Hannover. Dit heeft een nogal heuvelachtig landschap. Hij stelde toen voor om een te meten stuk land te overdekken met een willekeurig netwerk van lijnen. Je zou kunnen zeggen met een elastisch visnet (figuur 11). Net als bij kromlijnige coördinaten op een plat vlak, moeten er ook hier weer door ieder punt precies twee lijnen gaan. Zo konden er aan elk punt in een landschap, of dat nu vlak is of heuvelachtig, twee coördinaten $u^1$ en $u^2$ worden toegekend.



*Figuur 11*

**Ook gekromde ruimte**
We zagen al dat coördninaten een handig hulpmiddel zijn om over $n$-dimensionale ruimten te praten. Nu zien we dat ze bovendien goed van pas komen om over gekromde (twee-dimensionale) oppervlakken te praten. Want met de coördinaten van Gauss ($u^1$, $u^2$) is het mogelijk om meetkunde te bedrijven op een gekromd oppervlak.
Nu rijst dus de vraag: kan een drie-dimensionale of hogere ruimte ook gekromd zijn? Het antwoord is ja. Met coördinaten ($u^1, u^2, \ldots, u^n$) kun je inderdaad een $n$-dimensionale gekromde ruimte beschrijven. Hoe dat gaat wordt in een volgend artikel behandeld, nadat we een goede definitie hebben gegeven van *ruimte* en van *dimensie van een ruimte*.

---

# Bijzondere getallen

0 is het kleinste natuurlijke getal
1 is het kleinste positieve gehele getal
2 is het enige even priemgetal
3 is kleinste oneven priemgetal
4 is kleinste getal dat kan worden ontbonden
5 is . . .

Zou je zo van alle natuurlijke getallen iets bijzonders of interessants kunnen zeggen? Wij denken van wel. En kunnen het zelfs nog bewijzen ook!
Noem $V$ de verzameling van alle getallen waarvan niets bijzonders valt te zeggen, en veronderstel dat $V$ *niet leeg* is. Dan bevat $V$ een kleinste getal, zeg $v$. Maar . . . daarmee signaleren we een heel bijzondere eigenschap van dat getal $v$: het is het kleinste van alle 'saaie' getallen, en daarom juist heel bijzonder! Dus $v$ hoort helemaal niet in $V$ thuis.
Deze tegenspraak is alleen te vermijden door onze veronderstelling los te laten dat $V$ niet leeg zou zijn. $V$ is dus wel leeg, waarmee bewezen is dat er geen enkel saai getal kan zijn.
Je kunt bijvoorbeeld altijd zegen: $n+1$ is het kleinste getal groter dan $n$.

Of er inderdaad van elk natuurlijk getal écht iets bijzonders of interessants gezegd kan worden, kun je nagaan in het (engelstalige) boekje 'A dictionary of curious and interesting numbers' van *David Wells* dat onlangs in de Penguin-serie is verschenen.

# Pythagoras Olympiade

**Nieuwe opgaven**

Oplossingen vóór 1 maart insturen naar: *Pythagoras Olympiade, Marinus de Jongstraat 12, 4904 PL OOSTERHOUT (NB).* Vermeld op elk (éénzijdig beschreven) vel je naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas. Verder moet elke oplossing op een nieuw vel beginnen, want we corrigeren ze afzonderlijk. We bekijken alleen goed leesbare oplossingen die volledig zijn uitgewerkt, met verklarende tekst in goed lopende zinnen. Verdere informatie over de wedstrijd vind je in nummer 1 van deze jaargang op bladzijde 24.

**PO 94**

Een pak kaarten, genummerd van 1 tot en met 52, wordt als volgt geschud. Eerst wordt de stapel in tweeën gedeeld, en daarna wordt er 'om en om' een nieuwe stapel van gemaakt. Dat kan op twee manieren:

(a) zo, dat de nieuwe volgorde is 1, 27, 2, 28, 3, 29, 4, 30, . . .

(b) zo, dat de nieuwe volgorde is 27, 1, 28, 2, 29, 3, 30, 4, . . .

Onderzoek of de oorspronkelijke volgorde weer terugkeert als je methode (a) vaak genoeg herhaalt, en zo ja, bepaal dan na hoeveel keer dit voor het eerst gebeurt. Beantwoord dezelfde vragen ook voor het herhaald schudden volgens methode (b).

**PO 95**

Hoeveel positieve gehele getallen zijn er met de eigenschap dat er (in de gewone decimale schrijfwijze) geen twee gelijke cijfers in voorkomen?

## Oplossingen en prijswinnaars van de opgaven PO 88-90

**PO 88**

Gegeven zijn zeven verschillende gehele getallen groter dan nul en kleiner dan duizend. Toon aan dat je er altijd drie uit kunt kiezen met de eigenschap dat elk van die drie kleiner is dan het produkt van de andere twee.

**Oplossing:**

Merk eerst op: als $a$, $b$ en $c$ gehele getallen zijn groter dan nu met $a < b < c$, en als $c < a \cdot b$, dan geldt ook dat $b < c < a \cdot b < a \cdot c$ en $a < b < b \cdot c$. Het is dus voldoende om aan te tonen dat er uit de zeven gegeven getallen drie gekozen kunnen worden waarvan de grootste kleiner is dan het produkt van de andere twee.

Stel nu dat $g_1$ tot en met $g_7$ de gegeven getallen zijn, gerangschikt naar opklimmende grootte. Zeker geldt dan dat $g_1 \geqq 1$, $g_2 \geqq 2$ en $g_3 \geqq 3$. Als $g_4 < 6$, dan heeft het drietal $(g_2, g_3, g_4)$ de gewenste eigenschap, want dan geldt dat $g_4 < 6 \leqq g_2 \cdot g_3$. Stel dus dat $g_4 \geqq 6$.

Als $g_5 < 18$, dan voldoet het drietal $(g_3, g_4\, g_5)$ want dan geldt $g_5 < 18 \leqq g_3 \cdot g_4$. Stel dus $g_5 \geqq 18$. Evenzo: Als $g_6 < 6 \cdot 18 = 108$, dan voldoet $(g_4, g_5, g_6)$. Stel dus $g_6 \geqq 108$. Maar dan voldoet het drietal $(g_5, g_6, g_7)$ want $g_7 < 1000 < 1944 = 18 \cdot 108 \leqq g_5 \cdot g_6$.

Correcte oplossingen:
*Jaap Brand*, 5 vwo, Montessori Lyceum, Amsterdam, *Hugo Schnack*, 5 vwo, CSG Buitenveldert, Amsterdam, *Arnold Metselaar*, 2 vwo, Apeldoorn, *Bert Wolthuis*, 5 vwo, Hoogezand en *Erik Fledderus*, 4 vwo, Nassau College, Wolvega.
Er was één onvolledige oplossing.
Prijzen: *Arnold Metselaar* en *Bert Wolthuis*.

**PO 89**
Toon aan dat voor elk reëel getal $x$ geldt:
$x^6 - 6x^5 + 30x^4 - 120x^3 + 360x^2 - 720x + 720 > 0$.

**Oplossing** van *Robert Lukassen*, 5 vwo, Veldhoven (iets bekort):
Het linkerlid van de ongelijkheid noemen we $f(x)$. Schrijf $f(x)$ in de vorm $F(x) = (x-1)^6 + a(x-b)^4 + c(x-d)^2 + e$. Je kunt dit doen door in deze uitdrukking de haakjes weg te werken, en dan de coëfficiënten gelijk te stellen aan die van de gegeven vorm. Het resultaat is: $a = 15$, $b = 5/3$, $c = 95$, $d = 1963/855$, en (schrik niet!) $e = 720 - ((25 \cdot 125)/27) - 95 \cdot (1963/855)^2$.
Die laatste uitdrukking is ongeveer gelijk aan 103,5 dus $e$ is *positief*. Omdat er verder alleen *even* machten staan met *positieve* coëfficiënten $a$ en $c$, is $f(x)$ voor alle waarden van $x$ positief.

**Andere oplossingen:** de meeste andere inzenders gebruikten *differentiëren* als hulpmiddel. Sommigen merkten eerst op dat $f(x)$ zeker positief is als $x \leq 0$ (want dan zijn alle termen met $x$ groter dan nul). En als je $f(x)$ schrijft als $f(x) = x^5(x-6) + 30x^3(x-4) + 360x(x-2) + 720$ dan zie je dat voor $x \geq 6$ de functie $f(x)$ ook zeker positief is. We hoeven dus alleen maar te bewijzen dat $f(x) > 0$ geldt op het interval $<0,6>$. Natuurlijk kun je nu de computer te hulp roepen, en met kleine stapjes het interval doorlopen, en telkens $f(x)$ uitrekenen. Je vindt dan telkens positieve waarden. Maar weet je dan wel echt zeker of je stapgrootte klein genoeg is geweest? Als je als volgt redeneert, heb je helemaal geen computer nodig. Merk op (en dat is de clou van dit sommetje) dat voor alle $x$ geldt dat $f(x) + f'(x) = x^6$. Stel nu dat $f(x) \leq 0$ voor zekere $x$ uit het interval $<0,6>$. Dan geldt ook voor het *minumum* van $f$ op dit interval dat het kleiner dan of gelijk aan nul is. Maar de afgeleide is daar nul, dus er ontstaat een tegenspraak, want $x^6 > 0$ op het interval. De conclusie is dat $f(x) > 0$ voor alle $x$.

Er zijn drie onvolledige oplossingen voor deze opgave binnengekomen. Correcte oplossingen werden verder ingestuurd door *Erik Fledderus* en *Jaap Brand*. Prijzen: *Robert Lukassen* en *Jaap Brand*.

**PO 90**
Gegeven zijn drie reële getallen $a$, $b$, $c$ groter dan 1. Bewijs:
$4(abc + 1) > (a + 1)(b + 1)(c + 1)$.

**Oplossing** van *Hugo Schnack*, 5 vwo, CSG Buitenveldert, Amsterdam:
Uitschrijven en alles naar links brengen geeft als linkerlid $3abc + 3 - ab - bc - ac - a - b - c = (ab-1)(c-1) + (bc-1)(a-1) + (ac-1)(b-1)$ en aangezien elk van deze drie termen positief is, is het gehele linkerlid positief, waarmee de ongelijkheid is bewezen.

Verdere correcte oplossingen: *Erik Fledderus*, *Michael Cijsouw*, 5 vwo, Beek en *Chris Vanmarsenille*, 4 WE A, Antwerpen. Prijzen: *Michael Cijsouw* en *Chris Vanmarsenille*.

# Nederlandse Wiskunde Olympiade

Aan de Finale (Tweede Ronde) van de 25e Nederlandse Wiskunde Olympiade op 12 september 1986 in Eindhoven hebben 90 scholieren meegedaan. Zij hadden drie uur de tijd voor de vier opgaven. De maximale score per opgave was 10 punten. Bij gelijke score gaf het resultaat van de Eerste Ronde (zo mogelijk) de doorslag. Op die manier zijn de volgende elf deelnemers als prijswinnaars uit de bus gekomen:

| | | tweede ronde | eerste ronde |
|---|---|---|---|
| 1 | Roel Janssen, Dedemsvaart | 37 punten | 30 punten |
| 2 | Joris van der Hoeven, Amsterdam | 36 punten | 34 punten |
| 3 | Henk Angerman, Winschoten | 30 punten | 33 punten |
| 4 | Mark v. Hoey, Someren-Heide | 29 punten | 28 punten |
| 5 | Reyer Gerlagh, Driebergen | 27 punten | 34 punten |
| 6 | Gerard Egelmeers, Veldhoven | 27 punten | 31 punten |
| 7 | Hoang Nguyen, Zwolle | 26 punten | 30 punten |
| 8 | Marc de Jong, Schalkhaar | 25 punten | 36 punten |
| 8 | Hugo Laurman, Spijkenisse | 25 punten | 36 punten |
| 10 | Chris Dekker, Vaassen | 24 punten | 31 punten |
| 10 | Bas v.d. Heuvel, Dordrecht | 24 punten | 31 punten |

## Opgaven Nederlandse Wiskunde Olympiade, Tweede Ronde 1986

1 Men definieert een functie $f$ door: $f(x) = \dfrac{12x + 9}{19x + 86}$ $\left(x \neq -\dfrac{86}{19}\right)$.

Laat zien dat er één reëel getal $x_0$ bestaat, zo dat de uitdrukking
$f(x_0 + h) \cdot f(x_0 - h)$
niet afhankelijk is van de keuze van $h$ en bereken dat getal $x_0$.

2 Bewijs dat voor alle positieve gehele getallen $n$ geldt dat

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

3 Bewijs dat $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geqslant 10$
als $a, b, c, d > 0$ en $a\cdot b\cdot c\cdot d = 1$.

**4** Gegeven zijn twee evenwijdige lijnen $a$ en $b$ en een punt $A$ op $a$.
Men kiest een cirkel $\gamma$ door $A$ die de lijn $b$ raakt.
Het raakpunt noemt men $B$ en het tweede snijpunt van $\gamma$ en $a$ noemt men $T$.
De raaklijn in $T$ aan $\gamma$ heet $t$.

(i) Bewijs dat er, onafhankelijk van de keuze van $\gamma$, een vast punt $P$ bestaat, zo dat $BT$ door $P$ gaat.

(ii) Bewijs dat er, onafhankelijk van de keuze van $\gamma$, een vaste cirkel $\delta$ bestaat, zo dat t raaklijn is van $\delta$.

In het volgende nummer komen de oplossingen.

---

## Voorspoedig 1987

Rond de vorige jaarwisseling vroegen we om elk van de getallen 1 tot en met 100 aan te duiden met een rekenkundige vorm waarin de vier cijfers 1, 9, 8 en 6 elk éénmaal, en in die volgorde, voorkomen. In het hieronder gegeven gedeelte van de oplossingen-lijst (uit Pythagoras 25-5) kom je alle functies tegen die gebruikt mochten worden.

| | |
|---|---|
| $24 = 1 + 9 + 8 + 6$ | $64 = (1+9-8)^6$ |
| $25 = 1 + (\sqrt{9} \times 8 : 6)!$ | $65 = -1 + 9 \times 8 - 6$ |
| $26 = (1+\sqrt{9}) \times 8 - 6$ | $66 = 1 \times 9 \times 8 - 6$ |
| $27 = \sqrt{(1^9 + 8 + 6!)}$ | $67 = 1 + 9 \times 8 - 6$ |
| $28 = (-1+\sqrt{9}) \times (8+6)$ | $68 =$ |
| $29 = -19 + 8 \times 6$ | $69 =$ |
| $30 = 1 \times \sqrt{9} \times 8 + 6$ | $70 = (-1+9) \times 8 + 6$ |
| $31 = 1 + \sqrt{9} \times 8 + 6$ | $71 = \sqrt{(1+(9-8+6)!)}$ |
| $32 = (1+\sqrt{9})! \times 8 : 6$ | $72 = (1+\sqrt{9}+8) \times 6$ |
| $33 = 19 + 8 + 6$ | $73 =$ |
| $34 = (-1+(\sqrt{9})!) \times 8 - 6$ | $74 = (1+9) \times 8 - 6$ |
| $35 = -1 + ((\sqrt{9})!)^{8-6}$ | $75 = 19 + 8! : 6!$ |

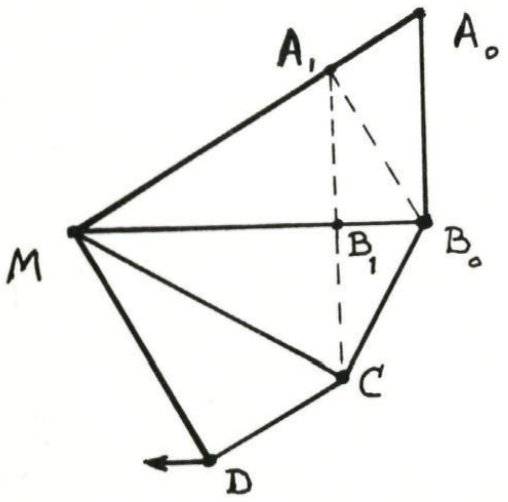
Van *Wilfried Maertens* uit Izegem (België) ontvingen we naast de oplossingen voor 1986 toen ook een lijst met oplossingen voor 1987. Daarin zaten echter gaten bij 38, 67 en 69. Is er iemand die deze gaten op kan vullen?

# Vlaamse Wiskunde Olympiade

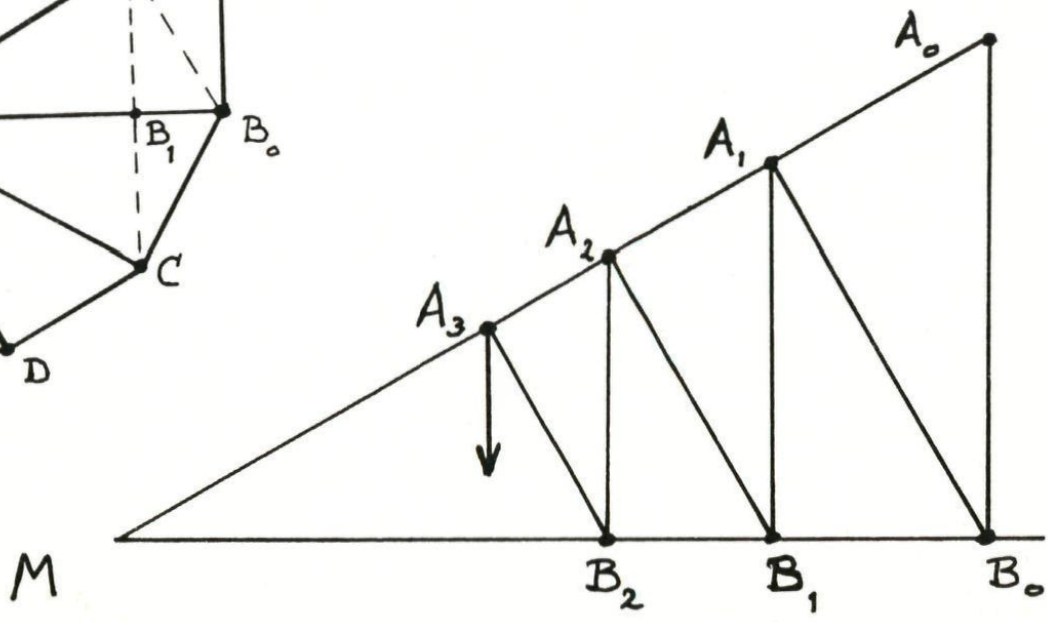
## Oplossingen Finale 1986

**1** Men verdeelt een cirkel met straal $R$ in gelijke delen en men verbindt de deelpunten met het middelpunt. Uit één van de deelpunten laat men de loodlijn neer op de volgende straal; vanuit het voetpunt van die loodlijn laat men opnieuw de loodlijn neer op de daaropvolgende straal en men blijft dit proces oneindig verder doorzetten.
Bereken de limiet van de som van de lengten van deze loodlijnen in functie van $R$.

**Oplossing**
Elke volgende loodlijn ontstaat uit z'n voorganger door te draaien over 30° (met de klok mee) en te vermenigvuldigen met een factor cos 30° = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.
De limiet van de som kan dan berekend worden met de somformule voor zogenaamde meetkundige reeksen, maar de volgende 'meetkundige' oplossing is leuker:
In figuur 1 geldt: $B_0A_1 = B_0C$ (spiegelen in $MB_0$) en $A_1B1 = CD$ (draaien over 60°). In figuur 2 zijn op deze manier alle loodlijnstukken binnen één 'taartpunt' gebracht, en omdat alle voorkomende hoeken gelijk zijn aan 90°, 60° of 30° zie je dat $A_0B_0 = 2\ A_0A_1$ en $B_0A_1 = 2\ B_0B_1$, enzovoorts, dus de totale lengte is $A_0B_0 + B_0A_1 + A_1B_1 + B_1A_2 + \ldots =$
$= A_0B_0 + A_1B_1 + A_2B_2 + \ldots\ B_0A_1 + B_1A_2 + B_2A_3 + \ldots =$
$= 2\ (A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots) + 2\ (B_0B_1 + B_1B_2 + B_2B_3 + \ldots) =$
$= 2\ A_0M + 2\ B_0M =$
$= 2R + R\sqrt{3}$.




*Figuur 1*




*Figuur 2*

**2** Bewijs dat voor elk natuurlijk getal $n$ geldt

$(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n =)\ n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

**Oplossing**

De functie $f : x \to (n + 1 - x) \cdot x$ heeft als grafiek een bergparabool met een top bij $x = \frac{1}{2}(n + 1)$ ter grootte $f(\frac{1}{2}(n+1)) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$.

Nu geldt: $(n!)^2 = (n \cdot 1)((n-1) \cdot 2)((n-2) \cdot 3) \ldots\ldots =$

$$= f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n) \leqslant \left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right)^n = \left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^n\right)^2$$

waaruit het gestelde volgt.

**3** Gegeven is een rij getallen $(a_k)$ gedefinieerd door $a_0 = 0$, $a_{k+1} = 3a_k + 1$ met $k$ in IN.
Toon aan dat $a_{155}$ deelbaar is door 11.

**Oplossing**

Als je veelvouden van 11 weglaat ('klokrekenen met een klok van 11 cijfers'), dan wordt de rij

$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 2,\ a_4 = 7,$
$a_5 = 0,\ a_6 = 1, \ldots\ldots,$ enzovoorts.

Omdat 155 een veelvoud is van 5, geldt dus dat $a_{155}$ een veelvoud is van 11.

**4** Om een knikker met straal 1 cm in een kubus te stoppen, is het duidelijk dat deze kubus een ribbe van minstens 2 cm moet hebben. Hoe groot moet minimaal de ribbe van een kubus zijn om er 2 knikkers met straal 1 cm in te krijgen? (Met bewijs van minimaliteit.)

**Oplossing**

In de minimale situatie zitten de beide knikkers klem tegen elkaar, en elk zit klem tegen drie van de zes kubuswanden. Het ene drietal wanden en het andere drietal beslaan samen precies alle wanden van de kubus. Als gevolg hiervan liggen de middelpunten van de knikkers samen op een lichaamsdiagonaal van de kubus. Die diagonaal wordt dan in drie stukken verdeeld:
hoekpunt—middelpunt knikker,
middelpunt—middelpunt, en
middelpunt—andere hoekpunt.
Deze stukken hebben lengte resp. $\sqrt{3}$ cm, 2 cm, en $\sqrt{3}$ cm. Als de kubus ribbenlengte heeft van $R$ cm, dan geldt dus

$R\sqrt{3} = 2 + 2\sqrt{3}$, dus $R = 2\left(\frac{1}{3}\sqrt{3} + 1\right)$ cm.

# Internationale Wiskunde Olympiade

In 1986 vond in Polen in juli de 27e Internationale Wiskunde Olympiade plaats. Tot grote teleurstelling van de geselecteerde deelnemers is als gevolg van de kernramp in Tsjernobyl geen Nederlandse ploeg naar Warschau geweest.

Vlak na de ramp in mei leek deelname niet in gevaar te komen omdat de fall-out tegen de tijd dat de Olympiade gehouden zou worden vrijwel verdwenen zou zijn. Maar in juni kwamen er steeds meer berichten van reizen die niet doorgingen, omdat de situatie voor wat betreft voedsel niet betrouwbaar was. Zo annuleerde de ANWB een georganiseerde reis naar Polen. Na overleg met het ministerie voor Volksgezondheid en met de Ambassade in Warschau is toen het moeilijke besluit genomen om niet te gaan. Zoals je begrijpt betekende dit besluit een teleurstelling voor alle betrokkenen, niet alleen omdat de reis niet doorging, maar ook omdat de voorbereiding met lesbrieven onder leiding van drs. J. Donkers van de T.U. Eindhoven opeens voor niets leek te zijn.
Op de bijeenkomst die gepland was als laatste voorbereiding voor Warschau werd weinig gesproken over de Olympiade zelf. Wel over het niet gaan naar Polen, en natuurlijk over wiskundige problemen en probleempjes.
Enkele leerlingen die waren geselecteerd, hadden ook een uitnodiging voor de Nederlandse ploeg bij de Internationale Natuurkunde Olympiade of de Internationale Scheikunde Olympiade (die gedeeltelijk met de Wiskunde Olympiade samenvielen). Door het niet deelnemen van Nederland aan de Wiskunde Olympiade konden ze naar die andere Olympiades.
Verder hebben een aantal van de geselecteerden alsnog voor Nederland kunnen deelnemen aan het International Camp for Young Mathematicians, in augustus in Engeland.
Overigens, bij de Internationale Scheikunde Olympiade wonnen *Alain Verberkmoes* en *Alec Maassen van den Brink* de 1e en de 2e prijs, terwijl *Alec* ook nog

een zilveren medaille veroverde bij de Internationale Natuurkunde Olympiade!

**België wel**

België heeft wèl aan de Internationale Wiskunde Olympiade meegedaan, en zoals je uit de hierbij geplaatste landenlijst kunt zien, was de Belgische score alleszins respectabel. Het Belgische team veroverde drie prijzen: een zilveren medaille voor *Frédéric van der Plancke*, en brons voor *Krist Blomme* en *Michel Bultreys*. De individuele scores waren

| | |
|---|---|
| Krist Blomme | 17 |
| Kai Goethals | 6 |
| Wim Slootmans | 4 |
| Emmanuel Bartholome | 5 |
| Michel Bultreys | 21 |
| Frédéric van der Plancke | 26 |

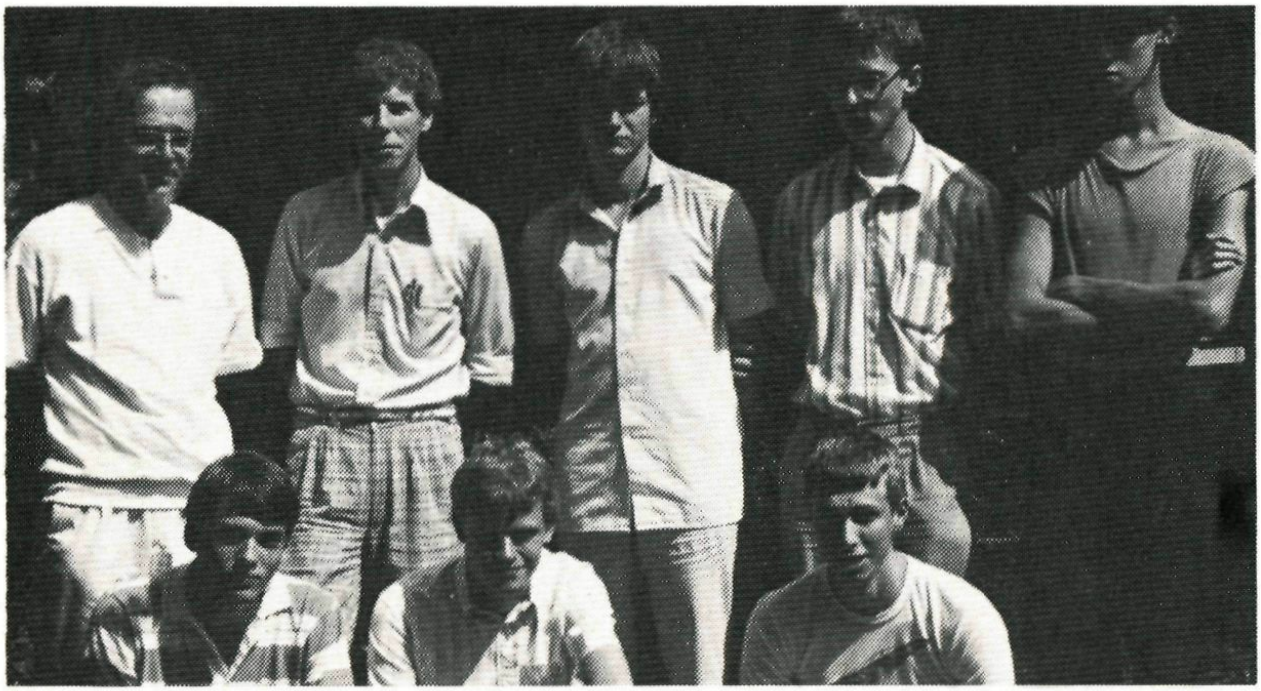
De eerste drie deelnemers zijn Nederlandstalig, de andere Franstalig. De heer Bens, begeleider en jurylid, zond ons de resultaten en de tekst van de opgaven. We drukken ze hieronder af. Voor elk drietal hadden de deelnemers 4½ uur de tijd. De maximale score per opgave was 7 punten. Je zult zien dat de Vlaamse formuleringen soms wat afwijken van wat in Nederland gebruikelijk is. En als je de score van sommige deelnemers wat mager vindt, moet je zelf maar eens proberen de opgaven op te lossen. Vooral opgave 3 en opgave 6 zijn zeer moeilijk! Kom je er niet uit, dan kun je om de oplossingen schrijven naar *drs. J. Donkers, Faculteit Wiskunde en Informatica, T.U. Eindhoven, Postbus 513, 5600 MB EINDHOVEN.*

De Belgische ploeg. Staand van links naar rechts: dr. J. Wilmet (Waalse begeleider), Kai Goethals, Krist Blomme, Joanna Kwaterko (Poolse hostess-gids), Frédéric van der Plancke, Michel Bultreys en R. Bens (Vlaamse begeleider), Zittend links Wim Slootmans en rechts Emmanuel Bartholome.

**Het officieuze landenklassement van de Internationale Wiskunde Olympiade 1986**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Sovjet-Unie | 203 | 20 | Joegoslavië | 84 |
| 1 | Verenigde Staten | 203 | 21 | Algerije | 80 |
| 3 | West-Duitsland | 196 | 22 | BELGIË | 79 |
| 4 | Volksrep. China | 177 | 23 | Spanje (4) | 78 |
| 5 | Oost-Duitsland | 172 | 24 | Brazilië | 69 |
| 6 | Roemenië | 171 | 25 | Noorwegen | 68 |
| 7 | Bulgarije | 161 | 26 | Griekenland | 63 |
| 8 | Hongarije | 151 | 27 | Finland | 60 |
| 9 | Tsjechoslowakije | 149 | 28 | Colombia | 58 |
| 10 | Viëtnam | 146 | 29 | Zweden | 57 |
| 11 | Groot-Brittanië | 141 | 30 | Turkije | 55 |
| 12 | Frankrijk | 131 | 31 | Mongolië | 54 |
| 13 | Oostenrijk | 127 | 32 | Cyprus | 53 |
| 14 | Israël | 119 | 33 | Cuba | 51 |
| 15 | Australië | 117 | 34 | Italië (3) | 49 |
| 16 | Canada | 112 | 35 | Koeweit (5) | 48 |
| 17 | Polen | 93 | 36 | IJsland (4) | 37 |
| 18 | Marokko | 90 | 37 | Luxemburg (2) | 22 |
| 19 | Tunesië | 85 | | | |

Tenzij tussen haakjes achter de naam van het land anders vermeld, bestond elk team uit 6 leerlingen.



De Nederlandse ploeg zoals die naar Polen zou zijn gegaan. Gehurkt van links naar rechts: Lex Warners, Michel van Eijck en Jeroen Nijhoff. Staand van links naar rechts: drs. J. M. Noteboom (begeleider), drs. J. Donkers (begeleider), Alec Maassen van den Brink, Alain Verberkmoes en Dimitri Neumann.

## Opgaven

1 $d$ is een strikt positief geheel getal dat niet tot de verzameling $\{2, 5, 13\}$ behoort.
Bewijs dat in de verzameling $\{2, 5, 13, d\}$ een koppel getallen $(a, b)$ kan gevonden worden zo dat $a \cdot b - 1$ niet het kwadraat van een geheel getal is.

2 In het vlak worden een driehoek $A_1A_2A_3$ en een punt $P_0$ gegeven. Men stelt verder dat $A_s = A_{s-3}$ voor elke $s \geqslant 4$.
De rij punten $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wordt bepaald door $P_0$ en de volgende werkwijze: voor elke $k$ is $P_{k+1}$ het beeld van $P_k$ in de draaiing met centrum $A_{k+1}$ en draaiingshoek $(2\pi)/3$.
Weet je nu dat $P_{1986} = P_0$, toon dan aan dat $A_1A_2A_3$ een gelijkzijdige driehoek is.

3 Aan elk hoekpunt van een regelmatige vijfhoek wordt een geheel getal toegevoegd zo dat de som van deze vijf getallen strikt positief is.
Indien aan drie opeenvolgende hoekpunten respectievelijk de getallen $x$, $y$ en $z$ toegevoegd zijn waarbij $y < 0$, dan is de volgende bewerking toegelaten:
het drietal $(x, y, z)$ wordt vervangen door $(x+y, -y, y+z)$.
Die bewerking wordt hernomen zolang ten minste één van de vijf getallen strikt negatief is.
Bepaal of dit procédé noodzakelijkerwijs stopt na een eindig aantal van deze bewerkingen.

4 $A$ en $B$ zijn twee opeenvolgende hoekpunten van een regelmatige veelhoek met $n$ zijden $(n \geqslant 5)$ en middelpunt $O$.
Een driehoek $XYZ$, die congruent is met de driehoek $OAB$, wordt om te beginnen zo geplaatst dat de hoekpunten $X$, $Y$ en $Z$ respectievelijk samenvallen met $O$, $A$ en $B$. De driehoek $XYZ$ verplaatst zich vervolgens in het vlak van de veelhoek zo dat de punten $Y$ en $Z$ op de zijden van de veelhoek blijven liggen en $X$ binnen de veelhoek blijft.
Welke figuur wordt door het punt $X$ beschreven wanneer $Y$ geheel de omtrek van de veelhoek doorloopt?

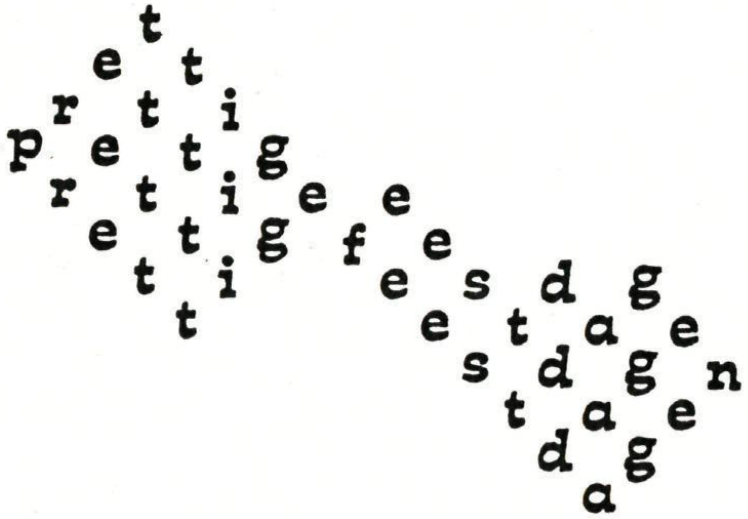
5 We noemen $R_+$ de verzameling van alle reële getallen die positief of nul zijn.
Bepaal alle afbeeldingen van $R_+$ in zichzelf die aan de volgende drie voorwaarden voldoen:
(i) voor alle $x$ en $y$ uit $R_+$ : $f(x \cdot f(y)) \cdot f(y) = f(x+y)$
(ii) $f(2) = 0$
(iii) voor elke $x \in [0, 2[$ : $f(x) \neq 0$.

6 In het geijkte vlak beschouwt men een eindige verzameling $V$ van punten waarvan de coördinaatgetallen gehele getallen zijn. Is het mogelijk alle punten van $V$ met één van beide kleuren, rood of wit, te kleuren zodat aan de volgende voorwaarde voldaan is:
voor elke rechte $D$, evenwijdig met één van de coördinaatassen, is de absolute waarde van het verschil tussen het aantal rode punten en het aantal witte punten die op $D$ liggen, kleiner dan of gelijk aan 1.

# Redactioneel

Net als in de vorige jaargang (zie Pythagoras 25-3 en 25-5 en dit nummer bladzijde 29) hebben we ook dit keer een prijsvraag rond het jaartal van het nieuwe jaar (bladzijde 10). We hopen dat deze prijsvraag net zo aanslaat als de vorige.
Aan 'de speurtocht naar gekke grafieken' (vorig nummer bladzijde 22) besteden we in het volgende nummer uitvoerig aandacht. In dit nummer hebben we nog maar een paar voorbeelden opgenomen (bladzijde 13). Leuke vondsten zijn nog altijd welkom!
Ondanks de vele inspanningen van de redactie verschijnt ook dit nummer weer iets later dan in de bedoeling lag. Graag hadden we je dit nummer nog voor het einde van het vorige jaar willen toesturen. De prettige feestdagen, zoals we je die hieronder toewensen, waren dan wat toepasselijker geweest. Ondanks dat het nu een beetje als mosterd na de maaltijd komt, hopen we dat je het puzzel-effect in deze wens kunt waarderen. Daarom nemen we hem toch maar op. Dus:

**Pythagoras wenst je alsnog . . .**




. . . op vijfendertig maal zesenveertig manieren!
Hoe tel je zoiets? Begin bij de p, werk naar rechts, en zet bij elke letter het *aantal manieren* (het aantal verschillende wegen) waarop je die letter vanuit p kunt bereiken.
Welk aantal vind je als je bij de n begint en van achter naar voren werkt?

---

Tekenwerk: Armand Haye, Amsterdam.
Foto's en andere illustraties: G. J. Westerink, Veenendaal (omslag); Hessel Pot, Woerden (blz. 2, 3, 4, 5, 9, 13, 15, 16); Philips, Eindhoven (blz. 14, 17); Jan van de Craats, Oosterhout (NB) (blz. 30).

**© 1987 Redactie Pythagoras - ALLE RECHTEN VOORBEHOUDEN, NADRUK OF WEERGAVE, GEHEEL OF GEDEELTELIJK, IN WELKE VORM DAN OOK, ZONDER SCHRIFTELIJKE TOESTEMMING VAN DE REDACTIE VERBODEN.**

DRUK OOSTERBAAN - GOES

**Pythagoras** wiskunde tijdschrift voor jongeren

Een uitgave onder auspiciën van de Stichting Christiaan Huygens en de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Redactie: Jan van de Craats, Klaas Lakeman, Hessel Pot, Hans de Rijk.

Redactiesecretariaat: Klaas Lakeman, Cornelis Krusemanstraat 60$^{II}$, 1075 NS Amsterdam (NL).

## Inhoud jaargang 26, nummer 2

Zonder woorden / **1**
*Klaas Lakeman*
De honingraatkubus / **2**
*Hessel Pot/Klaas Lakeman*
Paperclip-magie / **5**
*Klaas Lakeman*
Bernhard Riemann / **6**
*Klaas Lakeman/Gerard Bäuerle*
In vier gelijke delen / **9**
*Hessel Pot/Klaas Lakeman*
Prijsvraag 1987 / **10**
*Hessel Pot*
Speciaalstaartkwadraten / **11**
*Hessel Pot*
Palindroom-kwadraten / **12**
*Klaas Lakeman*
Gekke grafieken / **13**
*Hessel Pot*
Pas op je teller / **14**
*Sjoerd Rienstra/Hessel Pot*
Coördinaten / **18**
*Gerard Bäuerle/Klaas Lakeman*
Bijzondere getallen / **25**
*Klaas Lakeman*
Pythagoras Olympiade / **26**
*Jan van de Craats*
Nederlandse Wiskunde Olympiade / **28**
*Jan van de Craats*
Voorspoedig 1987 / **29**
*Klaas Lakeman*
Vlaamse Wiskunde Olympiade / **30**
*Jan van de Craats*
Internationale Wiskunde Olympiade / **32**
*Jan van de Craats*
Redactioneel / **36**

**Pythagoras** verschijnt zesmaal per schooljaar; opgave van abonnementen bij de uitgever (zie onder).
Abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 september schriftelijk bij de uitgever is opgezegd.
Bij tussentijdse abonnering ontvangt men ook de reeds verschenen nummers. Betaling per acceptgirokaart.

| Tarieven* | NLG/BEF |
|---|---|
| Abonn. Pythagoras | 20,—/365 |
| Incl. Archimedes | 36,—/660 |
| Losse nummers | 5,—/ 90 |

* Luchtpost-toeslag 15%

stichting ivio
Postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL). Tel. 03200-26514
educatieve uitgeverij - instituut voor buitenschools onderwijs - wereldschool - AO-reeks - leerprojecten
Postgiro Nederland: 287934 Postcheck België: 000-0130850-94