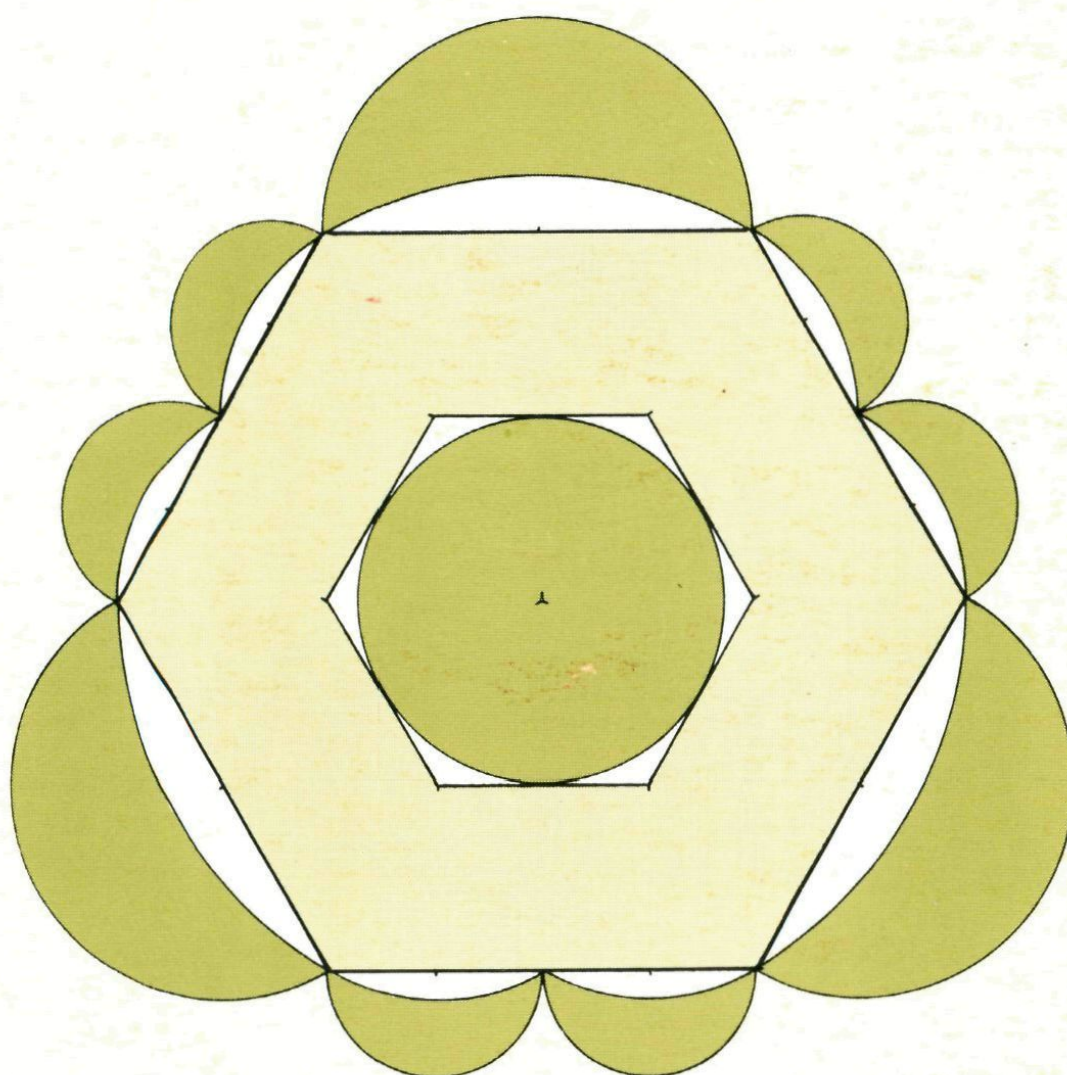




Pythagoras

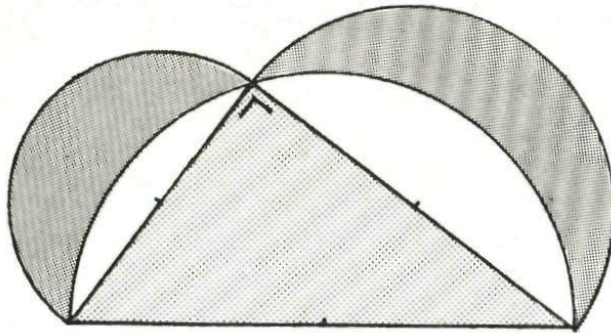


wiskunde tijdschrift voor jongeren

stichting ivio

jaargang 26
nummer 3
maart 1987

De maantjes van Hippokrates



Figuur 1

Het vignet dat we al jarenlang gebruiken bij de opgaven en antwoorden van de *Pythagoras Olympiade* bestaat uit een rechthoekige driehoek en drie halve cirkels, waarvan de middelpunten zijn: de middens van de zijden van die driehoek (figuur 1).

Erwin Charlier uit Nederweert was geïnteresseerd geraakt in deze figuur, en vond een bewijs voor de eigenschap dat de oppervlakte van de twee donkere 'maansikkels' gelijk is aan die van de driehoek. We geven zijn bewijs hier niet, maar we zullen wat vertellen over de achtergronden van deze heel speciale figuur. Andere lezers zullen het bewijs(je) ook wel kunnen vinden, zeker als we er van zeggen dat er niets moeilijkers in voorkomt dan de formule voor de oppervlakte van de cirkel en – natuurlijk – de stelling van Pythagoras.

Hippokrates

De vignet-figuur heeft te maken met het beroemde klassieke probleem van de 'kwadratuur van de cirkel'. Meer dan tweeduizend jaar lang is er gezocht naar een met passer en liniaal te construeren figuur waarin zowel een vierkant ('kwadraat') als een cirkel voorkomt, met exact gelijke oppervlakte. Pas in de vorige eeuw is bewezen (door de Duitser Lindemann in 1882) dat dit vraagstuk géén oplossing heeft!

De Griek Hippokrates van Chios (± 440 voor Chr.) meende op de goede weg te zijn toen hij figuren vond met de volgende eigenschappen:

- er komen een of meer gebieden in voor die uitsluitend door

cirkelbogen worden begrensd (de maantjes, sikkels, kromzwaarden en ook volledige cirkels),

- er komen een of meer gebieden in voor die alleen door rechte lijnstukken worden begrensd (driehoeken, vierkanten, zes-hoeken, enzovoorts),
- de totale oppervlakte van de kromlijnige gebieden is exact gelijk aan die van de rechtlijnige gebieden.

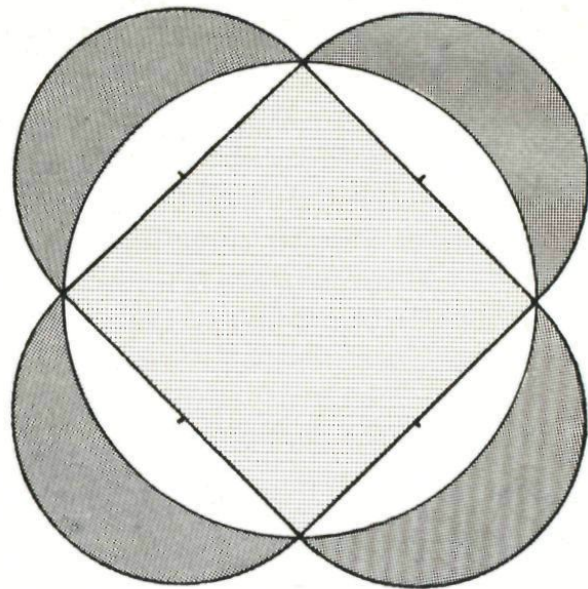
Men wist toen al wél hoe uit rechtlijnige figuren een even groot vierkant geconstrueerd kon worden.

En men hoopte op een dergelijke manier uit de kromlijnige figuren een even grote cirkel te kunnen maken. Deze hoop bleek dus uiteindelijk ijdel te zijn.

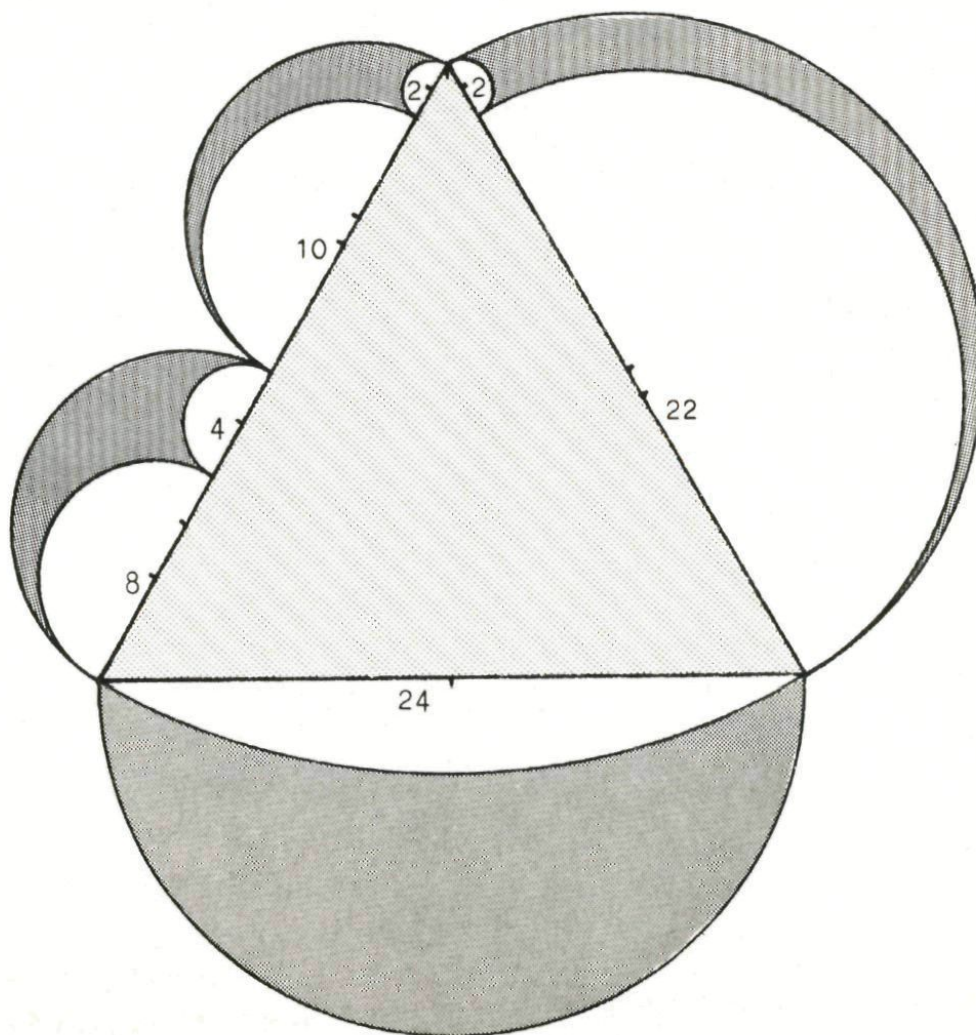
Voorplaat en varianten

In de figuren 1 tot en met 5, en ook in de omslag-figuur, zie je steeds donkere kromlijnige gebieden en lichtere veelhoeksgebieden. Al deze figuren zijn zó geconstrueerd dat de 'donkere' en de 'lichte' oppervlakte even groot zijn. Uit de ingetekende constructie-gegevens is dat niet zo moeilijk af te leiden.

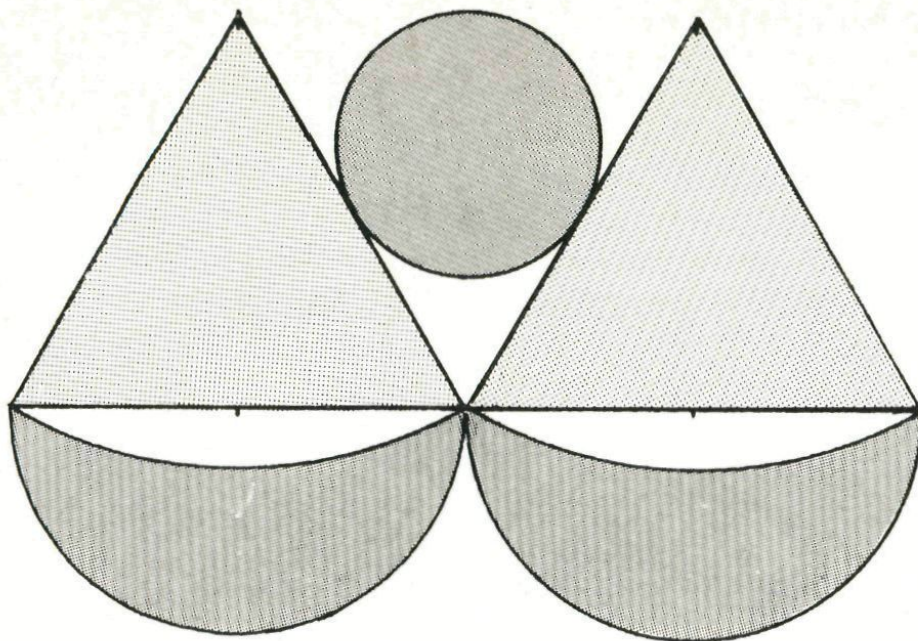
Met enig zoeken en prutsen zijn er nog wel méér van zulke (laten we zeggen) *Hippokrates-figuren* te vinden. Stuur je eventuele vondsten graag naar ons op, misschien levert dat nog wel meer mooie voorplaten op?!



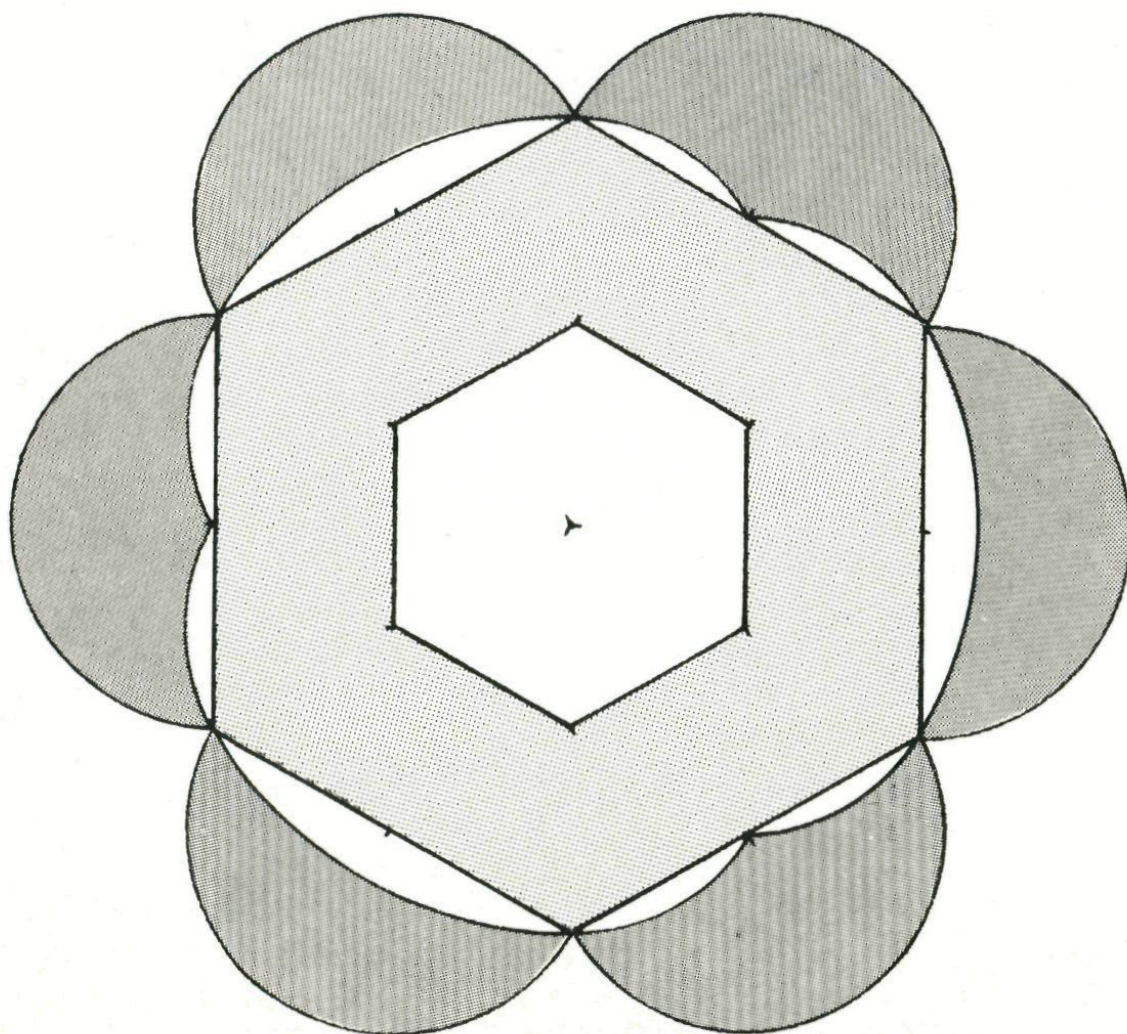
Figuur 2



Figuur 3

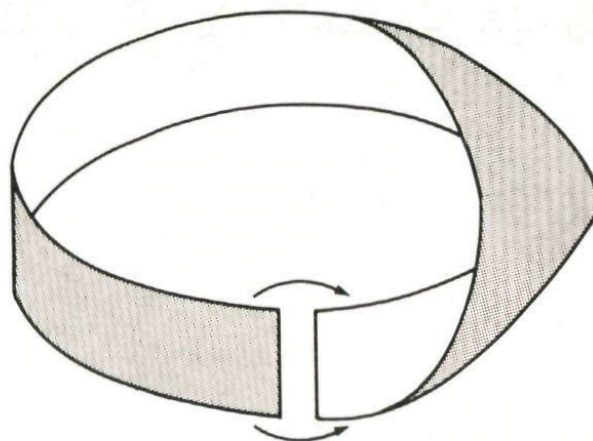


Figuur 4



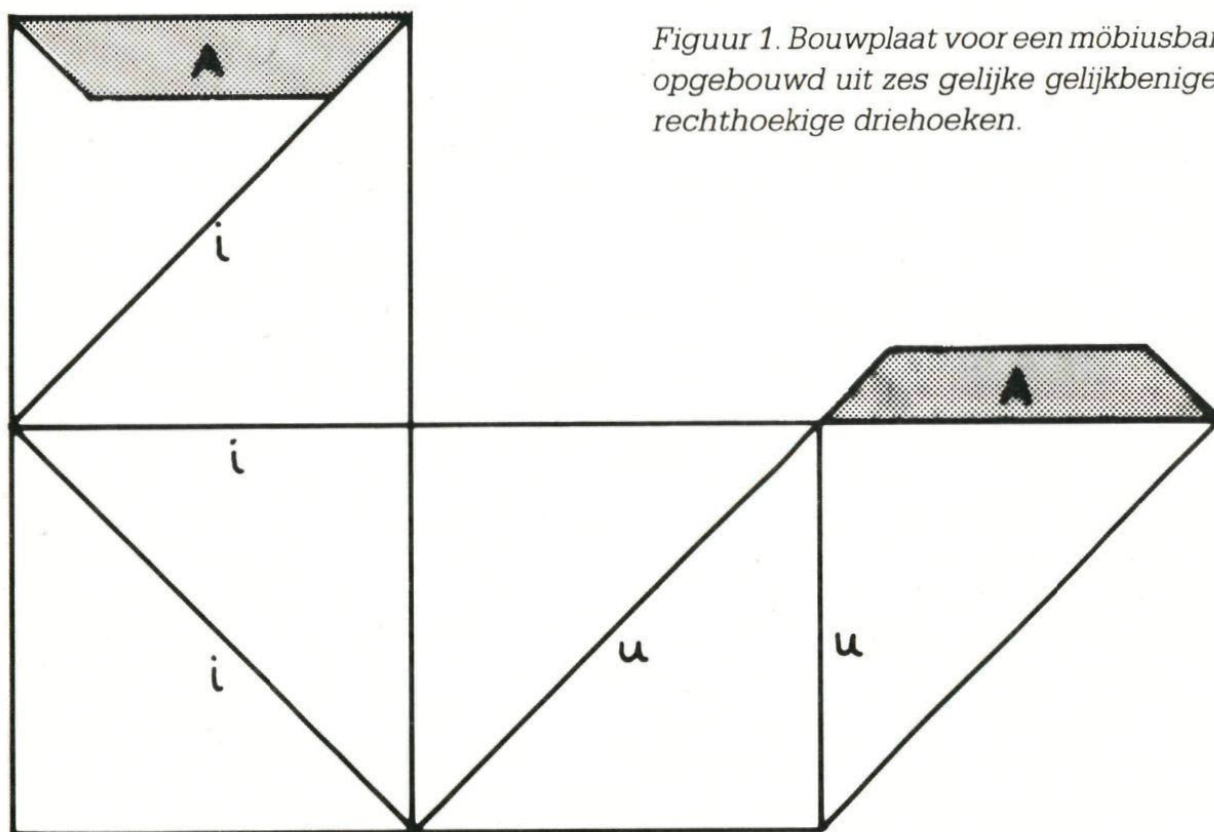
Figuur 5

Möbius met driehoeken



Doorgaans wordt een möbiusband van een strook papier gemaakt. Je legt er een halve slag in en plakt de uiteinden aan elkaar (figuur hierboven).

Uitgaande van een vlak stuk papier of karton geven we hier twee varianten op de gewone, vloeiend gebogen möbiusband. Het zijn halve slag möbiusbanden, opgebouwd uit een aantal gelijke driehoeken.



Figuur 1. Bouwplaat voor een möbiusband opgebouwd uit zes gelijke gelijkbenige rechthoekige driehoeken.

Gelijkbenige rechthoekige driehoeken

Figuur 1 is een bouwplaat voor een (halve slag) möbiusband die bestaat uit zes gelijke gelijkbeni-

ge driehoeken. Er moet worden gevouwen langs de lijnen met een u of een i. Bij een u moet de vouwlijn naar buiten komen; bij een i naar binnen. Door het lipje

met de letter A op de plek met de andere A te plakken maak je de band sluitend.

Gelijkzijdige driehoeken

Figuur 2 is een bouwplaat voor een (halve slag) möbiusband opgebouwd uit zeven congruente gelijkzijdige driehoeken. Je gaat daarbij net zo te werk als bij de bouwplaat van figuur 1.

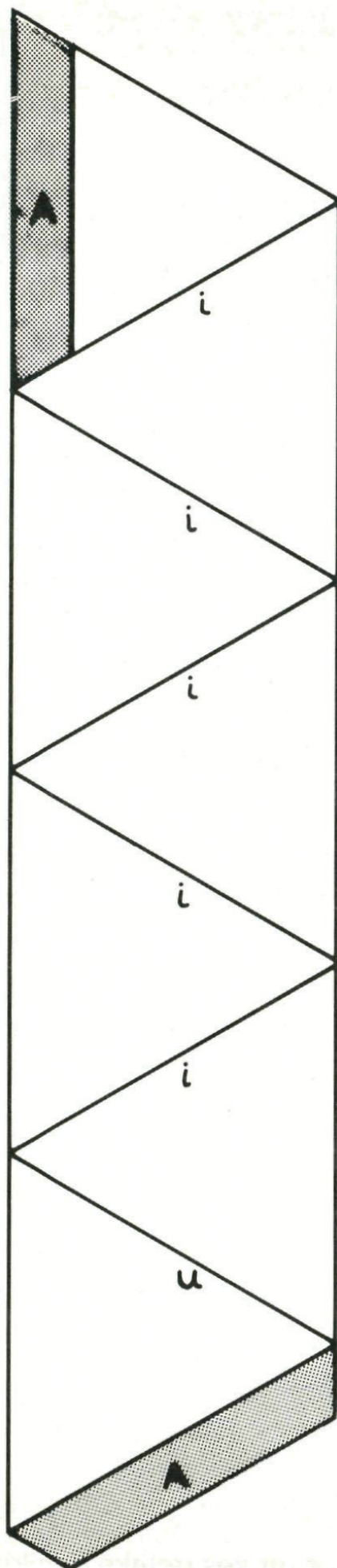
Met minder dan zeven gelijkzijdige driehoeken kun je ook een band van Möbius fabriceren. Met zes en zelfs vijf driehoeken lukt het ook (probeer het maar eens!). Alleen krijg je dan wat in elkaar gedrongen banden, die naar onze smaak minder fraai zijn dan het resultaat van de bouwplaat uit figuur 1.

Dat de bouwplaten uit de figuren 1 en 2 inderdaad möbiusbanden opleveren, is gemakkelijk te controleren door ze te vergelijken met de 'gewone' möbiusband.

Zelf ontwerpen?

Wellicht vormen de bouwplaten die we hier hebben gegeven, een aanzet om zelf andere te ontwerpen. Probeer dan steeds met zo min mogelijk gelijke (niet gebogen) driehoeken tot banden te komen die niet in elkaar gedrongen zijn. Er moet dus om zo te zeggen een gat in zitten waar je doorheen kunt kijken. Van fraaie resultaten worden we graag op de hoogte gehouden.

Figuur 2. Bouwplaat voor een möbiusband → opgebouwd uit zeven gelijke gelijkzijdige driehoeken.



Dampaden

Een damsteen wordt op een van de vier donkere velden op de eerste rij van een voor de rest leeg schaakbord gezet. Van daaruit kan de steen (volgens de normale regels van het dammen) langs verschillende paden naar elk van de vier donkere velden van de laatste, de achtste rij, worden geschoven. Er is een paar van begin- en eindvelden waarvoor het aantal paden maximaal is. Geef aan welk paar velden dat is, en hoeveel verschillende paden daartussen mogelijk zijn.

Dit probleem is te vinden in 'De mathematische kermis, eerlijke en oneerlijke wiskunde' van de Amerikaan *Martin Gardner*. Het boekje is enige tijd geleden als een keuze uit 'Mathematical carnival' bij Uitgeverij Contact te Amsterdam verschenen. Iedereen vindt daarin wel iets van zijn gading. Naast allerlei andere problemen, puzzels en spelen bevat het een schat aan informatie over onderwerpen als Rekenwonders, Trucs van snelrekenaars, Toevalscijfers, De driehoek van Pascal, enzovoorts. Dat alles wordt zó behandeld, dat elke lezer van Pythagoras er mee uit de voeten kan.

Oplossing

Uiteraard worden de in de tekst opgeworpen vragen en problemen aan het einde van elk hoofdstuk behandeld. Zo wordt bovenstaand probleem tot klaarheid gebracht aan de hand van de gegeven figuur. Wanneer de damsteen op het derde donkere veld van de eerste (onderste) rij begint, kunnen de velden die van daaruit bereikbaar zijn, met getallen worden aangegeven. Elk getal geeft het aantal verschillende paden aan waarlangs de steen vanuit de begin-

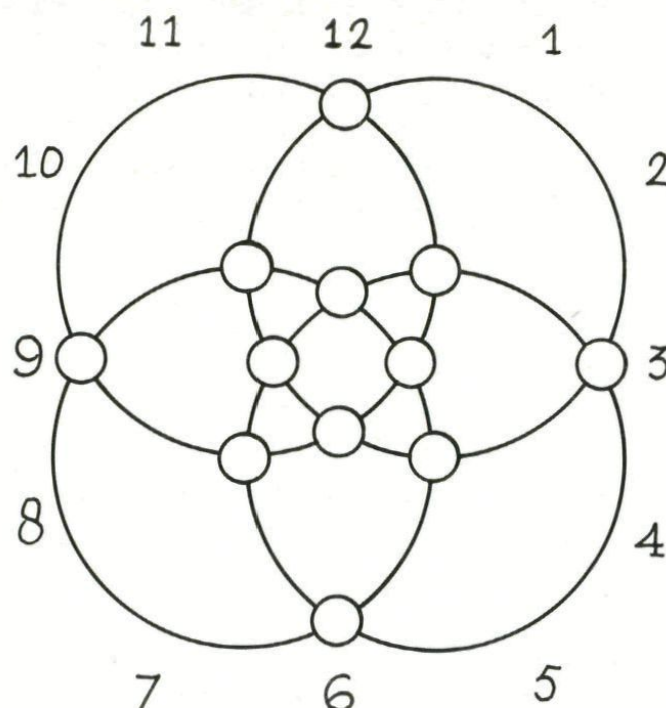
positie dat veld kan bereiken. (Kun je daar een systeem in ontdekken?) De meeste paden lopen dus naar het tweede donkere veld op de laatste (bovenste) rij: 35. Dit is tevens het gevraagde maximale aantal. Als je namelijk begint op elk van de drie andere donkere velden van de eerste rij, dan levert dat telkens minder verschillende paden. Ga zelf maar na!

Hoe groot is het maximale aantal verschillende paden op een normaal (tien bij tien) dambord, en tussen welk paar velden wordt dat bereikt?

	20		35		34		14
5		15		20		14	
	5		10		10		4
1		4		6		4	
	1		3		3		1
		1		2		1	
			1		1		
				0			

Het boekje is in iedere boekhandel in Nederland en België te verkrijgen. Nadere gegevens: 'De mathematische kermis' door Martin Gardner, Uitgeverij Contact, Amsterdam (ISBN 90 254 6591 9; prijs f 24,50).

De vier-cirkel-klok



Hierboven zie je een opgave van een soort dat in puzzelboeken regelmatig voorkomt. De vraag is om in de twaalf open rondjes de getallen 1, 2, . . . , 12 zó te plaatsen dat het totaal op elk van de vier cirkels gelijk wordt. Probeer eerst maar eens of je dat lukt.

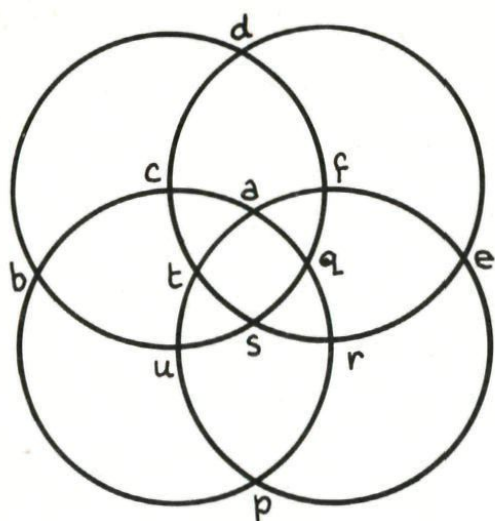
Het is een opgave van een heel ander soort dan wat je in de schoolboeken tegenkomt. De kans is daarom groot dat je geen idee zult hebben hoe je dit aan kunt pakken. Met zo maar wat in het wilde weg proberen breng je het waarschijnlijk niet ver. Wij tenminste niet. Het duurde een hele poos vóór we op het idee kwamen dat de *cirkels* in de opgave-figuur niet echt belangrijk zijn voor het probleem. En dat de figuur dus vervormd mocht worden tot iets dat er wat overzichtelijker uitziet.

Een aantal resultaten van dat vervormen zie je in figuur 2. We hebben letters bij de snijpunten

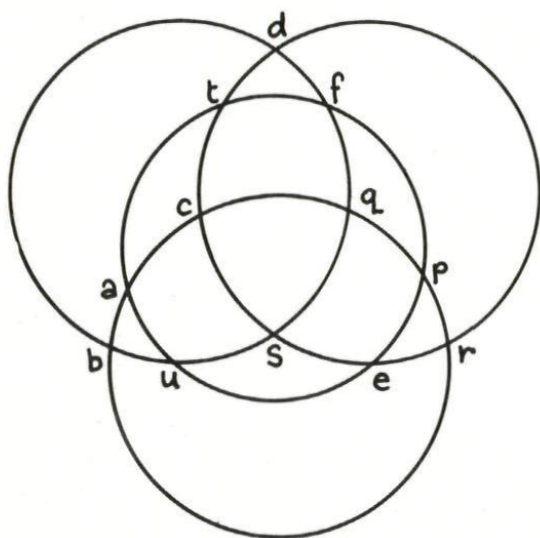
gezet die voorlopig de twaalf getallen vervangen. Die letters staan in alle figuren op overeenkomstige plaatsen; je kunt zo de manier van vervormen volgen aan de hand van de letters. Samenvallende snijpunten krijgen twee letters. De in de plaats komende getallen moeten worden opgeteld, maar voor de overzichtelijkheid van de figuur hebben we alle plustekens weggelaten.

De laatste figuur (2h), de ribben van een viervlak in de ruimte, vonden we het makkelijkst om verder te onderzoeken. Zo'n viervlak is namelijk een bekende figuur, je kunt er makkelijk bij praten over hoekpunten, zijvlakken en ribben.

Figuur 2



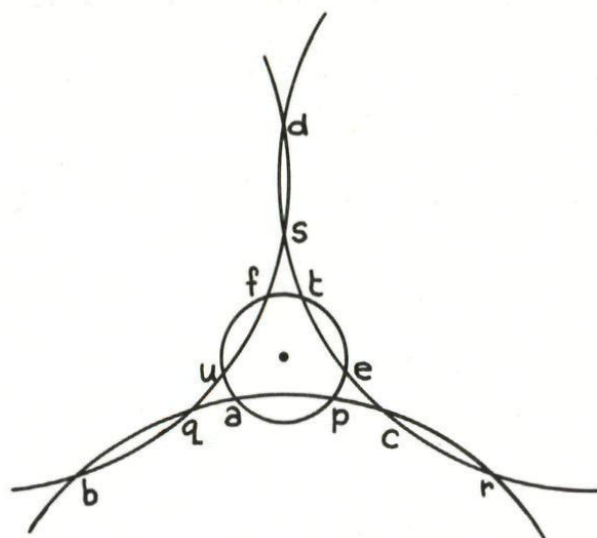
a. Dezelfde vier cirkels als in figuur 1, met de snijpunten benoemd door letters.



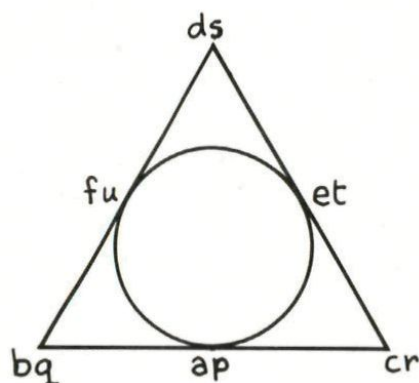
b. Eén van de vier cirkels is naar het midden geschoven, en wat kleiner geworden. Het wisselen van de volgorde van de snijpunten heeft geen invloed op het totaal per cirkel.

Belangrijke ontdekking

Het was in deze hulpfiguur 2h dat we (en laten we het maar beken-
nen: na een lange omweg!) een belangrijke ontdekking deden. De eis van de gelijke totalen op de vier cirkels in figuur 1, is nu vervormd tot de eis dat bij elk



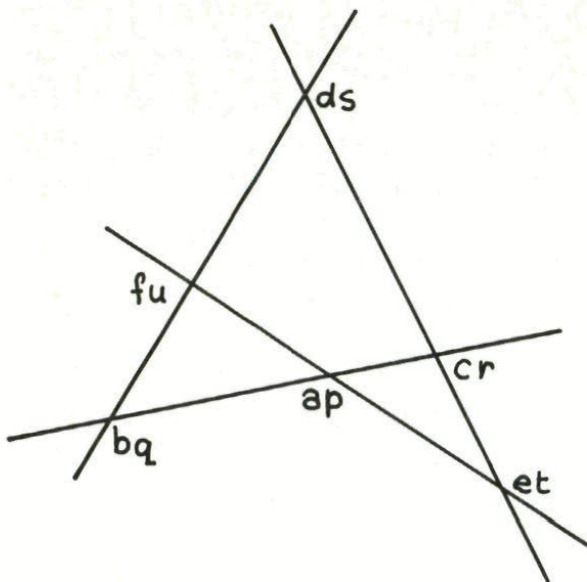
c. De figuur wordt overzichtelijker als de cirkels elkaar maar weinig overlappen. En het is nergens voor nodig om volledige cirkels te tekenen, het gaat er alleen om bepaalde groepen punten met elkaar te verbinden. Ook mogen paren snijpunten samenvallen: de cirkels raken dan juist.



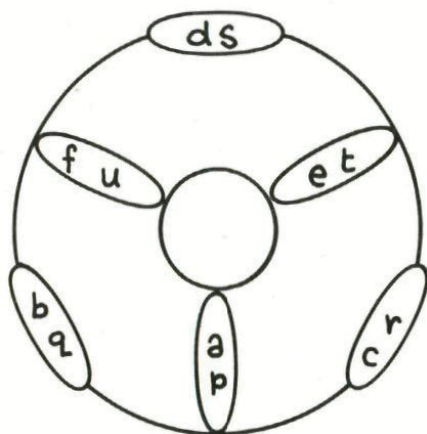
d. Het verbinden van punten kan evengoed met rechte als met gebogen lijnstukken.

hoekpunt de samenkomende ribben gelijke totalen dragen.

Kijk eens naar het gezamenlijke totaal van de hoekpunten A en B van het viervlak. Dit totaal bestaat uit tweemaal de voorste (omhooglopende) ribbe *ap* plus de vier

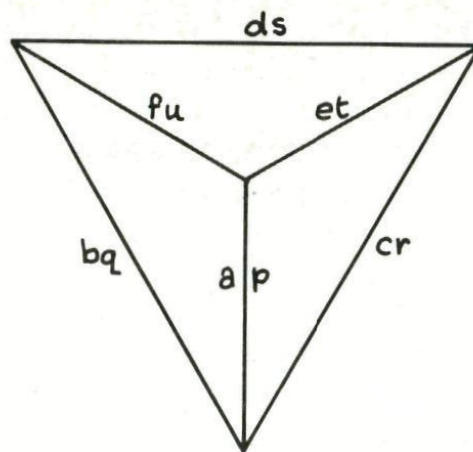


e. Ook de middelste cirkel is hier vervangen door een rechte lijn, onder verwisseling van de volgorde van de gemeenschappelijke punten op de rechter lijn. Helemaal mooi regelmatig is deze figuur echter nog steeds niet, daarom vervangen we d liever door f.



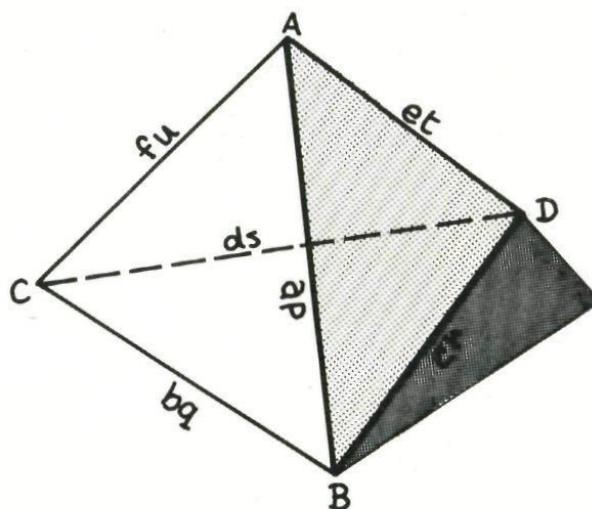
f. De raak- en snijpunten van vorm d vervangen we door langwerpige eilandjes; de verbindingen ertussen laten we steeds korter worden.

schuin naar achter gaande ribben. Vergelijk dit met het gezamenlijk totaal bij de beide achterste hoekpunten C en D: dat totaal is tweemaal de achterste (horizontale) ribbe ds plus dezelfde vier van voor naar achter gaande ribben van daarnet.



g. Deze figuur ontstaat als de bij f genoemde tussen-verbindingen helemaal wegvallen. De eilandjes zijn lijnstukken geworden.

De regelmaat is nóg niet optimaal, het middelste punt is in een uitzonderingspositie. Dit kan alleen ondervangen worden door . . . de ruimte in te gaan!



h. In dit ruimtelijke viervlak hebben álle ribben een gelijkwaardige positie.

Het gezamenlijk totaal van A en B moet gelijk zijn aan dat van C en D (want de totalen bij A, B, C en D zijn alle vier gelijk). En dus blijkt na het tegen elkaar wegval-len van de vier voor-achter-ver-bindingen dat ribbe AB gelijk is aan ribbe CD.

Een dergelijke redenering kun je houden voor de beide andere paren overstaande ribben. Zo vinden we als resultaat:
bij overstaande ribben horen gelijke getal-totalen.
 Hiermee hebben we de sleutel tot de oplossing.

De algemene oplossing

Het viervlak 2h heeft dus slechts drie verschillende soorten ribben. In elk van z'n hoekpunten eindigt één ribbe van iedere soort. En dus zal het getal-totaal per hoekpunt constant zijn, mits de overstaande ribben gelijk te maken zijn. Geschreven op de 'gewone' manier, als vergelijkingen, ziet die laatste eis eruit als:

$$a + p = d + s$$

$$b + q = e + t$$

$$c + r = f + u$$

Aan dit stelsel moet voldaan worden door de getallen 1, 2, . . . , 12. Dit blijkt erg gemakkelijk te zijn, met een heel klein beetje handigheid vind je al snel tientallen oplossingen. Bijvoorbeeld:

$$1+4=2+3, \quad 5+8=6+7, \quad 9+12=10+11$$

$$1+9=3+7, \quad 2+11=5+8, \quad 4+12=6+10$$

$$2+8=4+6, \quad 1+12=3+10, \quad 5+11=7+9$$

$$1+9=4+6, \quad 2+12=3+10, \quad 5+10=7+8$$

$$1+12=6+7, \quad 2+11=5+8, \quad 3+10=4+9$$

Als we alleen kijken naar het

(ongeordende) getallen-drietal $(a+p)$, $(b+q)$, $(c+r)$ dan vinden we daar al 33 verschillende mogelijkheden voor. De meeste daarvan zijn nog weer in meer varianten te splitsen (zie het tweede en derde voorbeeld hierboven).

Simpele oplossingen

Een heel snelle (eigenlijk wat flauwe) manier om figuur 1 volgens het voorschrift in te vullen werkt als volgt.

Gebruik uitsluitend getallenparen met als som 13 (dus: 1-12, 2-11, . . . , 6-7), en gebruik zo'n getallenpaar steeds voor een snijpuntenpaar van twee cirkels. Per cirkel is het totaal dan automatisch steeds gelijk aan $3 \times 13 = 39$.

Deze 'truc' is heel makkelijk te onthouden. Je kunt er misschien je vriendjes mee verbazen, en . . . de truc werkt óók als je niet met vier (allemaal onderling snijden-de) cirkels begint.

Maar met bijvoorbeeld *drie* cirkels, en de getallen 1, 2, . . . , 6 op de snijpunten.

Of met *vijf* cirkels, en getallen 1, 2, . . . , 20.

Verder onderzoek leert dat in het geval van drie cirkels alleen de flauwe oplossing bestaat. Of dit bij vijf cirkels anders is, weten we (nog) niet.

De hemden van de vrijgezel

Een vrijgezel trekt elke dag een schoon hemd aan. Iedere maandag komt de wasserij hem zijn schone hemden thuisbezorgen, en neemt direct de vuile mee.

Hoeveel hemden heeft hij minstens?

Driemaal breuken delen

VAN BRØKEN GESPRØKEN

Een malligheid van breuken is,
dat driekwart van tweederde
een halve hele is.

(Piet Hein, uit het Deens)

Eenmaal

Het meest bekende voorschrift
voor het delen door een breuk
luidt:

*'vermenigvuldigen met het omge-
keerde'.*

Voorbeelden:

$$\frac{2}{7} : \frac{3}{4} = \frac{2}{7} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{21}$$

$$5 : \frac{2}{3} = 5 \times \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\frac{1}{2} : 6 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

We vragen ons hier nu niet af hoe
het komt dat deze methode altijd
werkt. We willen alleen laten zien
dat er ook nog andere manieren
bestaan.

Andermaal

Een tweede voorschrift (lijkend
op de gewone regel voor ver-
menigvuldigen) is:

*'deel teller door teller, en noemer
door noemer'.*

$$\frac{9}{28} : \frac{3}{7} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{16}{35} : \frac{8}{5} = \frac{2}{7}$$

Je hebt hier alleen maar wat aan,
als beide delingen precies op-
gaan. Met een kleine vóórbewer-
king kan daar echter altijd voor
gezorgd worden.

$$\frac{5}{8} : \frac{3}{7} = \frac{105}{168} : \frac{3}{7} = \frac{35}{24}$$

$$\frac{8}{15} : \frac{16}{25} = \frac{80}{150} : \frac{16}{25} = \frac{5}{6}.$$

Voor de derde maal

De vorige regel was afgekeken
van het *vermenigvuldigen*. Je
kunt echter óók de regel voor het
optellen van breuken wat aanpas-
sen:

*'maak de breuken gelijknamig, en
deel teller door teller'.*

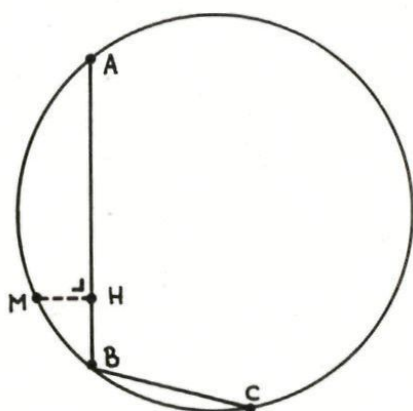
$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{8}{12} : \frac{9}{12} = 8 : 9 = \frac{8}{9}$$

$$\frac{9}{28} : \frac{3}{7} = \frac{9}{28} : \frac{12}{28} = 9 : 12 = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Mogelijk ben je wat verrast door
de twee minder gewone metho-
den. De uitkomsten ervan blijken
toch echt altijd goed. Als je er over
nadenkt, snap je misschien ook
wel hoe dat komt.

Een sommetje van Archimedes

Ons Russische zusterijdschrift KWANT – populair-wetenschappelijk maandblad voor wiskunde en natuurkunde – bracht van de zomer z'n 200-ste nummer uit. Het blad bestaat sinds 1970, en vanaf de oprichting kent het een vraagstukkenrubriek; net zo iets als onze Pythagoras Olympiade. In nummer 200 zou ook het 1000-ste vraagstuk komen, en de redactie had de lezers gevraagd voorstellen in te zenden voor deze 1000-ste jubileumopgave. Veel mooie sommetjes werden er ingestuurd, en die zullen in de toekomst ook geplaatst worden, maar er was niet een duidelijke uitschieter bij. Daarom besloot de redactie een zeer oud, maar tamelijk onbekend vraagstuk als 1000-ste opgave te plaatsen. Het is van niemand minder dan Archimedes, en het kan als schoolvoorbeeld dienen van een mooie, eenvoudige en intrigerende meetkundesom. Wie vindt er een mooie meetkundige oplossing voor? In het volgende nummer plaatsen we een oplossing.



Opgave (zie figuur):

Op een cirkel liggen vier punten A , M , B en C in deze volgorde, en gegeven is dat $AM = MC$.

H is het voetpunt van de loodlijn uit M op AB .

Bewijs: $AH = HB + BC$.

Nieuw π -record

Onlangs is er weer een nieuw π -record gevestigd. Deze keer niet in Amerika, maar in Japan. En nog wel met een Japanse NEC SX-2 supercomputer, die staat in Fuchu aan de rand van Tokio. Deze getallenkraker berekende π in 133 miljoen decimalen. Hij deed daar 'slechts' 37 uur over.

Op zich heeft het vestigen van een dergelijk record natuurlijk geen enkel praktisch nut. Ook wetenschappelijk gezien is het nut ervan ver te zoeken. Je kunt er echter wel mee laten zien wat een supercomputer kan. Zo blijkt uit dit π -record dat Japan op het gebied van supercomputers een woordje mee kan spreken. Tot voor kort was dit het terrein van de twee Amerikaanse computerfirma's, Cray Research en Control Data Corporation (CDC). Die hebben nu dus gezelschap gekregen van de Japanse fabrikant NEC. Naar verluidt zullen de Japanse bedrijven Fujitsu en Hitachi zich daar spoedig bijvoegen. Want ook deze firma's hebben inmiddels elk een supercomputer ontwikkeld.

Meer over π is te vinden in Pythagoras 25-4. Daarin hebben we een aantal artikelen gewijd aan dit beroemdste getal uit de wiskunde.

Ruimte

gekromd en n -dimensionaal



Voor het aanleggen van een voetbalveld en voor het bouwen van een huis heb je meetkunde nodig. De meetkunde die nodig is voor het aanleggen van een voetbalveld is net even eenvoudiger dan die voor het bouwen van een huis. Een voetbalveld ligt immers in een 'plat' vlak. Twee alledaagse begrippen voor de meetkunde in het platte vlak zijn *lengte* en *breedte*. Bij het bouwen van een huis doe je meetkunde in de ruimte. Daar heb je het ook over lengte en breedte. Maar er is nu nog een derde begrip: *hoogte*. Dit verschil tussen het platte vlak en de ruimte kom je ook tegen in de uitspraak: Het platte vlak heeft *twee* dimensies, en de ruimte heeft *drie* dimensies.

Behalve het platte vlak heb je ook gekromde (opper)vlakken. Als je bijvoorbeeld in een voetbalveld een enorme kuil graaft, is het niet langer een plat vlak. Gekromde (gebogen) oppervlakken zijn niet minder belangrijk dan platte vlakken (figuur hierboven).

Het artikel 'Coördinaten' (Pythagoras 26-2) eindigde met de vraag: Kan een drie-dimensionale ruimte net als een twee-dimensionaal oppervlak gekromd zijn? Om daarop een zinnig antwoord te kunnen geven, moeten we eerst wat meer zeggen over wat er wordt bedoeld met *ruimte* en met *dimensie van een ruimte*.

Een eind op weg

Iedereen voelt wel zo'n beetje aan wat er onder ruimte en dimensie moet worden verstaan. Toch valt het niet mee om daar goede en exacte definities van te geven. Laten we daarom eerst maar eens beginnen met een definitie van een twee-dimensionale ruimte. Voorbeelden van twee-dimensionale ruimten zijn het platte vlak en het oppervlak van een bol. Aan de hand van wat daarover in het artikel 'Coördinaten' is gezegd, kunnen we in eerste aanzet definiëren:

Een twee-dimensionale ruimte is een verzameling M waarop een coördinatenstelsel is gedefinieerd.

Met een coördinatenstelsel bedoelen we dat aan *elk* punt (element) p van M coördinaten (x^1, x^2) zijn toegevoegd.

Bij elk punt p van M hoort dus een getallenpaar (x^1, x^2) . Je kunt dat ook uitdrukken door te zeggen dat er een *afbeelding* κ moet zijn van M naar $\mathbb{R}^2$ die aan elk punt p zijn coördinaten $(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ toevoegt.

Coördinaten aan elkaar breien

Soms bestaat er geen coördinatenstelsel dat voor de hele ruimte kan worden gebruikt. In onze definitie zullen we daar rekening

mee moeten houden. Zo'n situatie doet zich o.a. voor bij het stelsel van lengte- en breedtegraden op de aardbol (figuur 1). In dat stelsel is bij de Noordpool en de Zuidpool één van de coördinaten onbepaald. Door andere coördinaten te nemen (dat wil zeggen een andere afbeelding van de punten van het aardoppervlak op de getallenparen), kan dit probleem niet worden verholpen. Men heeft namelijk kunnen bewijzen dat het steeds bij ten minste één punt mis gaat.

Dat een ruimte niet met één stel coördinaten is te overdekken, is helemaal niet erg. In dat geval kun je namelijk meer dan één stel coördinaten gebruiken. Zo is in figuur 2A het stelsel van lengte- en breedtegraden aangevuld met twee andere coördinatenstelsels. We hebben dan dus drie coördinatenstelsels voor het aardoppervlak: één voor U (het aardoppervlak min Noord- en Zuidpool), één voor C_N (de Noordpool plus een gebied daar om heen), en één voor C_Z (de Zuidpool plus een gebied daar om heen). Er zijn dan ook drie afbeeldingen naar de $\mathbb{R}^2$, te weten

$$\kappa: X \rightarrow (u^1, u^2) \text{ voor } X \in U$$

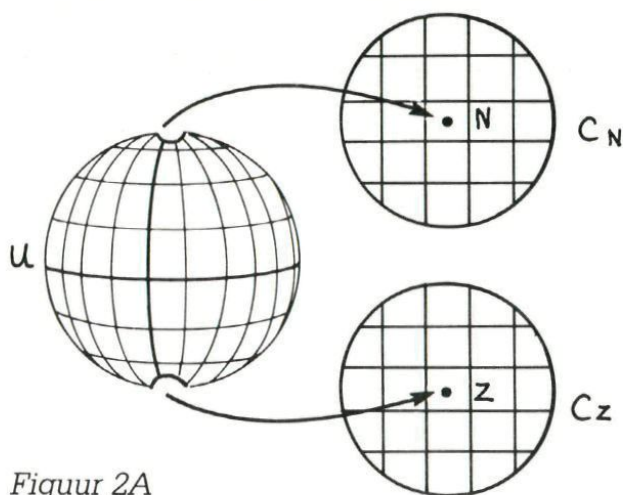
$$\kappa_N: X \rightarrow (n^1, n^2) \text{ voor } X \in C_N$$

$$\kappa_Z: X \rightarrow (z^1, z^2) \text{ voor } X \in C_Z$$

Daar waar deze gebieden elkaar overlappen heeft ieder punt coördinaten ten opzichte van twee stelsels. Dat is het geval in U_N , de overlapping van U en C_N , en in U_Z , de overlapping van U en C_Z (figuur 2B). Voor U_N geldt $U_N = C_N \cap U$ (wat neerkomt op C_N min de Noordpool N), en voor U_Z geldt evenzo $U_Z = C_Z \cap U$ (wat neerkomt op C_Z min de Zuidpool Z).



Figuur 1

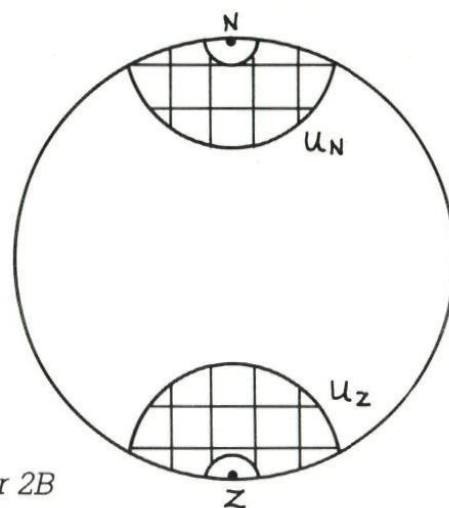


Figuur 2A

Kaarten en atlas

Vaak wordt een coördinatenstelsel op (een gedeelte van) een ruimte een *kaart* genoemd. Een verzameling van kaarten die samen de hele ruimte overdekken, noemt men dan een *atlas*. Vergelijking met een gewone landkaart ligt voor de hand: een atlas is een verzameling kaarten van delen van het aardoppervlak die samen het hele aardoppervlak bedekken (figuur 3).

In figuur 2A hadden we drie coördinatenstelsels voor het aardoppervlak. We hadden ook kunnen zeggen: We hebben een atlas voor het aardoppervlak bestaande uit drie kaarten die we



Figuur 2B

aangeven met (U, κ) , (C_N, κ_N) en (C_Z, κ_Z) .

Net als bij een gewone atlas zijn er punten die deel uitmaken van verschillende kaarten. In ons geval zijn dat de punten van de overlappings U_N en U_Z .

Nette formules

Ieder punt X uit U_N heeft naast coördinaten (u^1, u^2) , ook coördinaten (n^1, n^2) . Dus voor X uit U_N geldt

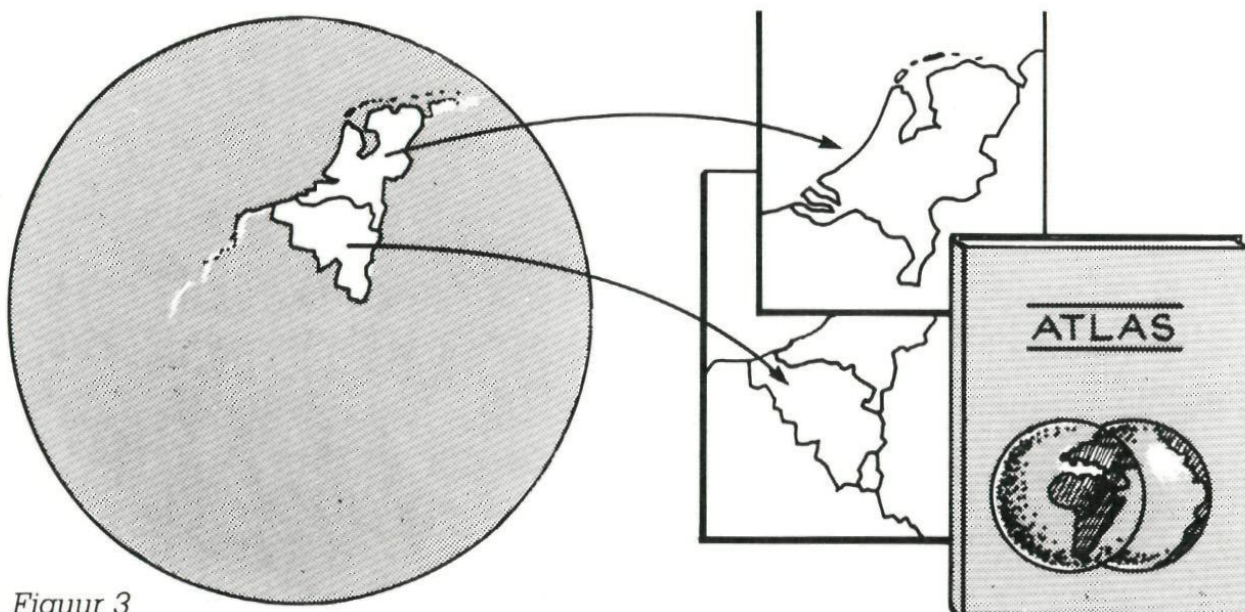
$$\kappa: X \rightarrow (u^1, u^2)$$

$$\kappa_N: X \rightarrow (n^1, n^2)$$

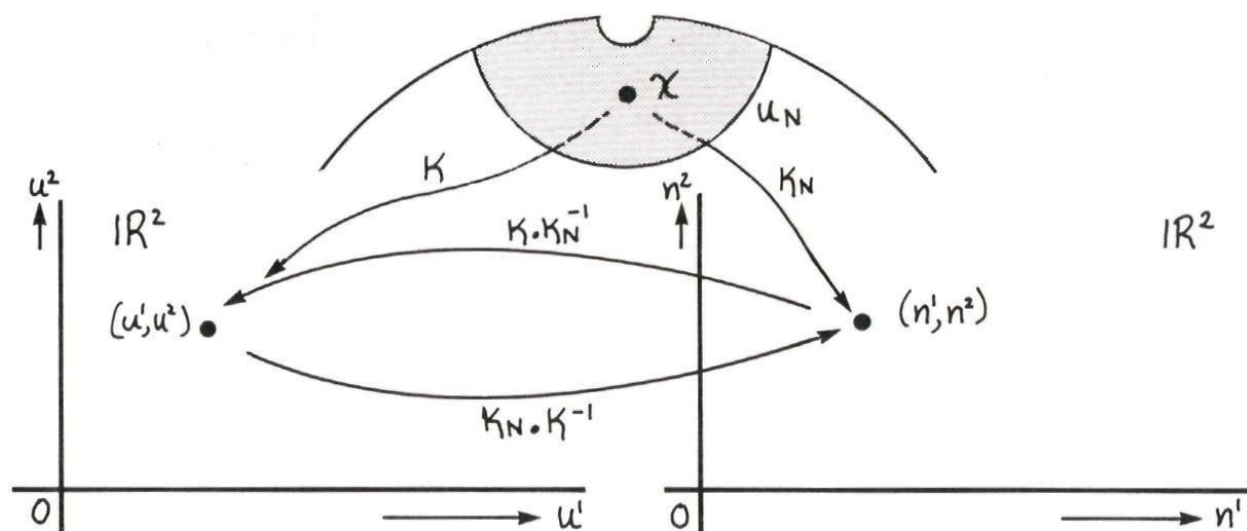
en omgekeerd

$$\kappa^{-1}: (u^1, u^2) \rightarrow X$$

$$\kappa_N^{-1}: (n^1, n^2) \rightarrow X$$



Figuur 3



Figuur 4. Elk punt X uit U_N bezit naast coördinaten (u^1, u^2) , ook coördinaten (n^1, n^2) . De coördinaten-transformaties kunnen worden weergegeven door $K_N \cdot K^{-1}$ en $K \cdot K_N^{-1}$. $K_N \cdot K^{-1}$ betekent op (u^1, u^2) eerst K^{-1} toepassen en op het resultaat daarvan K_N . Hetzelfde geldt voor $K \cdot K_N^{-1}$ op (n^1, n^2) : eerst K_N^{-1} daarna K .

Zoals al opgemerkt in het artikel 'Coördinaten' kun je van het getallenpaar (u^1, u^2) overgaan naar het paar (n^1, n^2) , en omgekeerd (figuur 4). Het zijn immers beide coördinaten van eenzelfde punt X uit U_N . Het is natuurlijk belangrijk hoe de overgang van

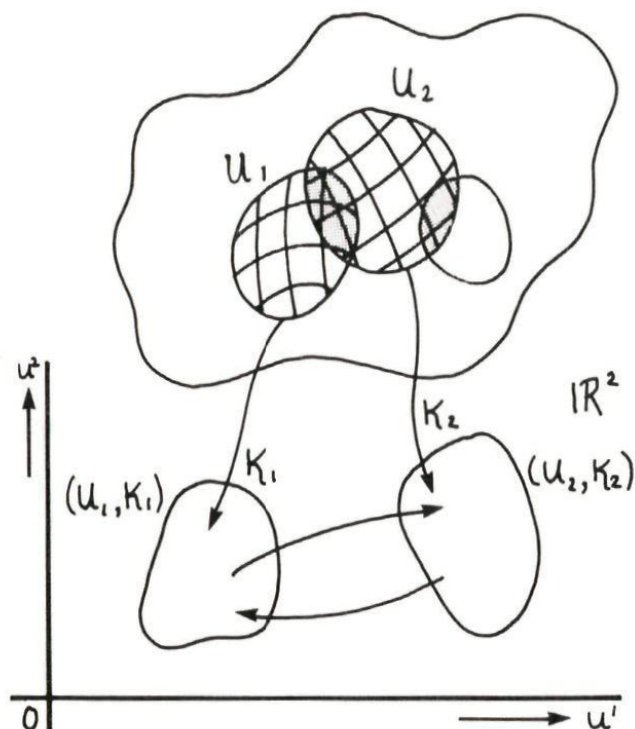
het ene op het andere coördinatenstelsel beschreven wordt. Om grote complicaties te vermijden eist men in de praktijk dat zulke coördinaten-transformaties door 'nette' formules kunnen worden beschreven. Het zou te ver voeren om op de details daarvan hier in te gaan.

Verbeterde beschrijving

Nu kunnen we aangeven wat een twee-dimensionale ruimte is (figuur 5).

Een twee-dimensionale ruimte is een verzameling M met kaarten $(U_1, K_1), (U_2, K_2), \dots$ zó dat M helemaal wordt overdekt door coördinaten-omgevingen $U_1, U_2, \dots$. De kaarten geven afbeeldingen in $\mathbb{R}^2$. Voor punten uit elkaar overlappende omgevingen U_i moeten de coördinaten-transformaties kunnen worden weergegeven door 'nette' functies.

Met deze nog steeds enigszins vage beschrijving wordt de



Figuur 5

precieze vorm van zo'n twee-dimensionale ruimte niet vastgelegd. We hoeven alleen maar een atlas van kaarten te maken, die de betreffende ruimte geheel overdekt. Dat de vorm van M niet wordt vastgelegd, wordt duidelijk als je bedenkt dat je aan een atlas niet kunt zien of hij betrekking heeft op het oppervlak van een bol of dat van bijvoorbeeld een aardappel. Hetzelfde geldt voor een vlak voetbalveld of een voetbalveld met een kuil. Om dat verschil aan te kunnen geven moet er een afstandsbegrip (metriek) op de ruimte worden ingevoerd.

Toepassing: de möbiusband

De band van Möbius is te maken van een strook papier. Je legt er een halve slag in en plakt vervolgens de uiteinden aan elkaar (figuur 6).

Het kan ook anders. Neem twee stroken papier waarop coördina-

tenstelsels U en V zijn aangebracht (figuur 7). Eerst plakken we de twee stroken met de gearceerde stukken aan elkaar. Daartoe laten we het punt (u^1, u^2) met $98 < u^1 < 100$ en $0 < u^2 < 5$ van strook U samenvallen met het punt (v^1, v^2) met $0 < v^1 < 2$ en $0 < v^2 < 5$ van strook V als

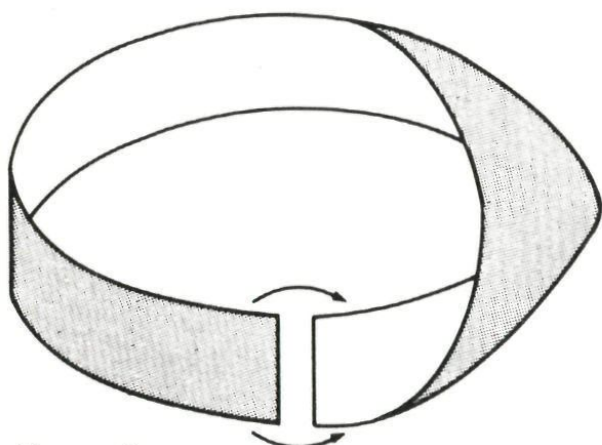
$$u^1 - v^1 = 98 \quad \text{én} \quad u^2 = v^2.$$

We hebben dan één lange strook verkregen.

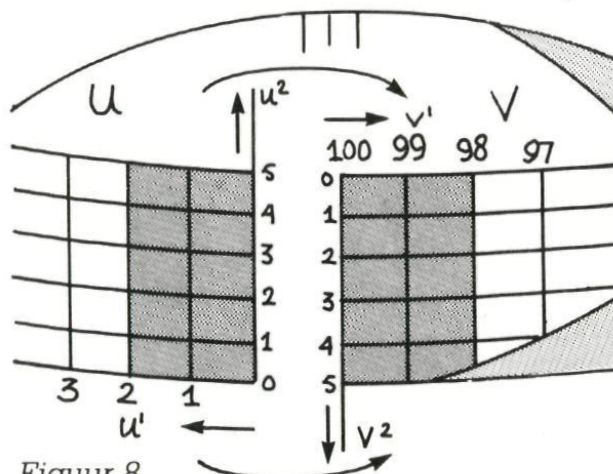
Nu plakken we de beide andere uiteinden aan elkaar, en wel zó dat er een slag in komt (figuur 8). Dat doen we door het punt (u^1, u^2) met $0 < u^1 < 2$ en $0 < u^2 < 5$ van strook U samen te laten vallen met het punt (v^1, v^2) met $98 < v^1 < 100$ en $0 < v^2 < 5$ van strook V als

$$v^1 - u^1 = 98 \quad \text{én} \quad u^2 + v^2 = 5.$$

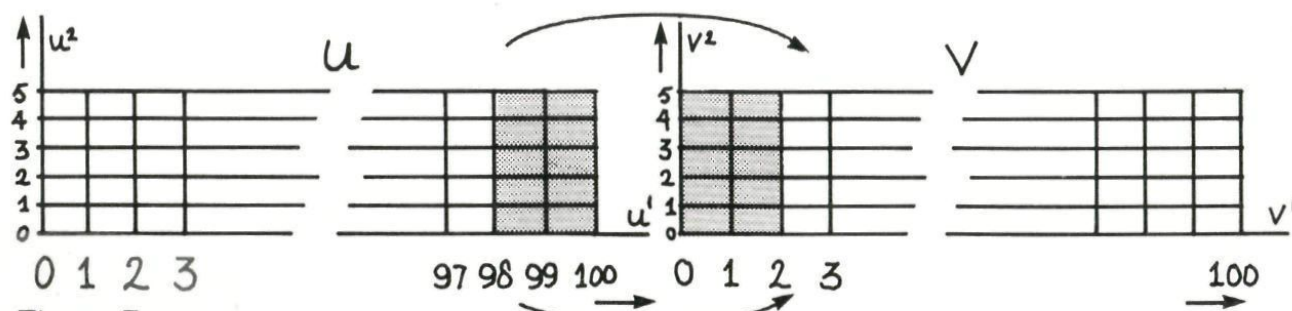
Het resultaat is een band van Möbius voorzien van twee coördinatenstelsels die elkaar overlap-



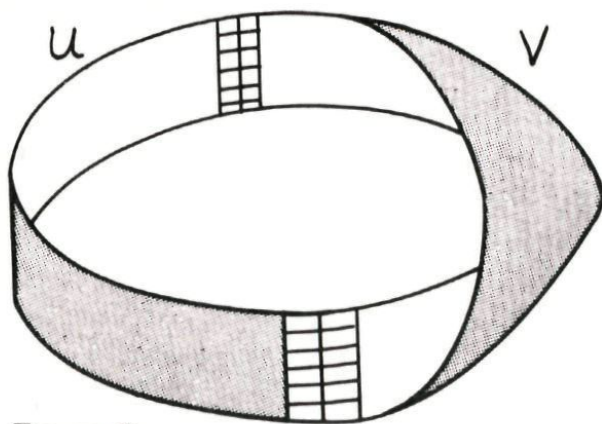
Figuur 6



Figuur 8



Figuur 7



Figuur 9

pen op de plaatsen waar de stroken aan elkaar werden geplakt (figuur 9). Ook dit is weer een voorbeeld van een twee-dimensionale ruimte.

Uit de voorwaarden die we bij het aan elkaar plakken stelden, zijn snel de coördinatentransformaties af te leiden voor de twee gebieden waar de coördinatenstelsels elkaar overlappen. Zo geldt voor het eerste gebied

$$u^1 = v^1 + 98$$

$$u^2 = v^2$$

of omgekeerd

$$v^1 = u^1 - 98$$

$$v^2 = u^2$$

Probeer die voor het tweede gebied zelf eens af te leiden.

***n*-dimensionale ruimte**

Een *n*-dimensionale ruimte is nu heel eenvoudig te omschrijven. In de laatste omschrijving voor een

twee-dimensionale ruimte moeten de twee-dimensionale coördinatenstelsels worden vervangen door *n*-dimensionale. Dat levert dan:

Een *n*-dimensionale ruimte is een verzameling *M* met kaarten $(U_1, \kappa_1), (U_2, \kappa_2), \dots$ zó dat *M* helemaal wordt overdekt door coördinaten-omgevingen $U_1, U_2, \dots$. De kaarten geven afbeeldingen in $\mathbb{R}^n$. Voor punten uit elkaar overlappende omgevingen U_i moeten de coördinaten-transformaties kunnen worden weergegeven door 'nette' functies.

Ook hier wordt de precieze vorm van de *n*-dimensionale ruimte niet vastgelegd. We hoeven alleen maar een atlas van kaarten te maken die de betreffende ruimte geheel overdekt.

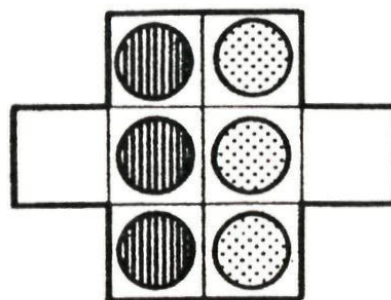
De *n*-dimensionale ruimten zijn niet alleen van grote belang voor de wiskunde, maar ook voor de theoretische natuurkunde. Ze spelen vooral een belangrijke rol in de mechanica.

Ook op een *n*-dimensionale ruimte kan een *afstandsbegrip* (metriek) worden ingevoerd. Dat leidt tot de *riemannse ruimten*. Deze laatste spelen een belangrijke rol in de algemene relativiteitstheorie van Albert Einstein (1879-1955).

Zwart-wit-wissel

Verwissel de zwarte en witte schijven, alleen door schuiven naar een vrij vakje.

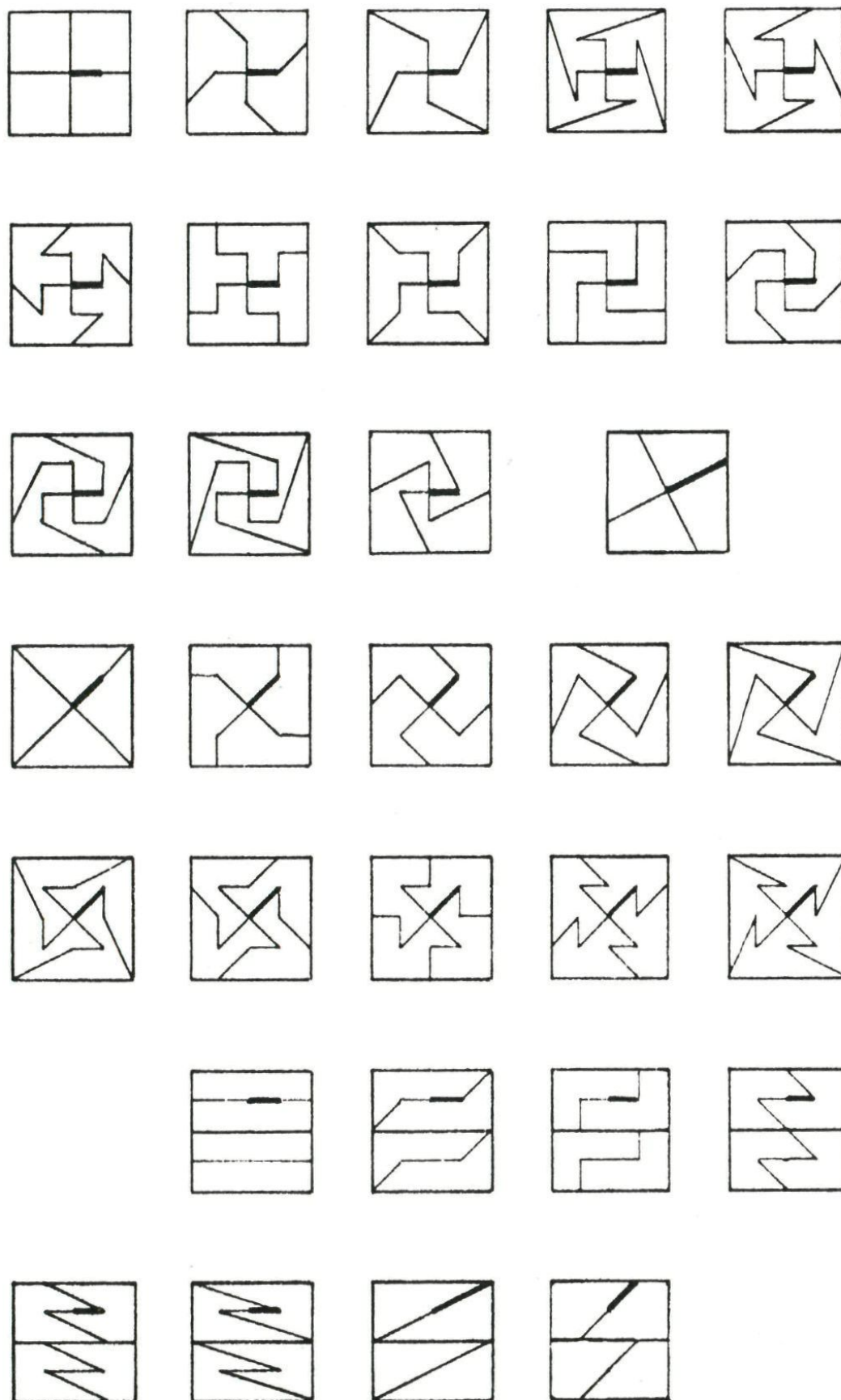
Wij kunnen het in achttien zetten, wie kan het in minder?



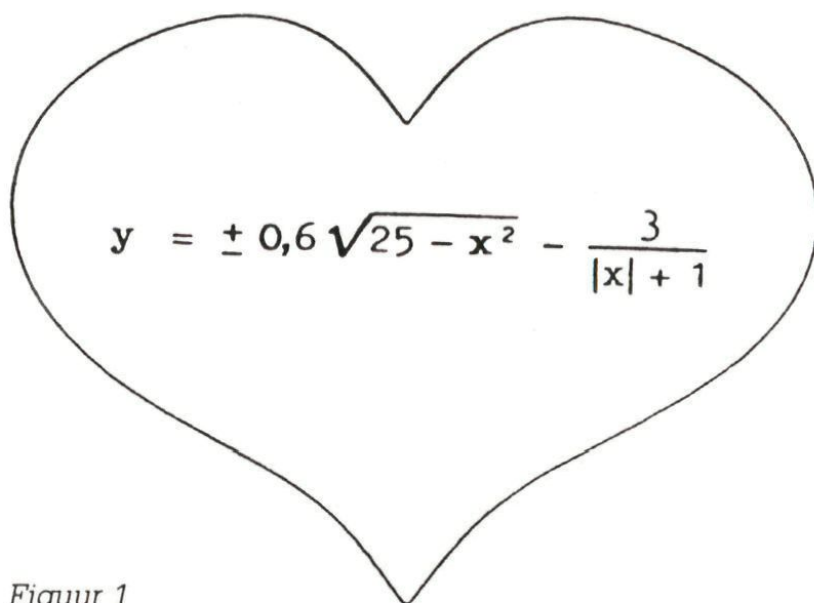
(uit: Mathematical Pie)

Tweeëndertig oplossingen

Hier ons antwoord op de vraag uit het artikel 'In vier gelijke stukken' (vorige nummer bladzijde 9).



Hart-krommen



Figuur 1

De eerste reactie op onze vraag naar 'gekke' grafieken kwam van *N. S. Hekster* uit Amsterdam. Hij meldt een geval waarbij de taal van de wiskunde een rol speelde in . . . de liefde!!

Een wat verlegen uitgevallen wiskundige durfde, uit angst voor afwijzing, z'n gevoelens niet al te openlijk op papier te zetten. In plaats daarvan schreef hij zijn geliefde alleen de bovenstaande formule. Hij rekende er daarbij op dat als ze echt in hem geïnteresseerd zou zijn, ze zich wel in de mogelijke betekenis ervan zou verdiepen, en ook op het idee zou komen er de grafiek van te tekenen.

Als je een stuk ruitjespapier en een rekendoosje in de buurt hebt zal het je niet moeilijk vallen zelf ook die grafiek te tekenen. (Eigenlijk zijn het de grafieken van twee functies: één met het plus-teken en één met het min-teken.)

Nader onderzoek

Als je de breukvorm even uit de formule wegdenkt, hou je over:

$$y = \pm 0,6 \sqrt{25 - x^2}$$

wat gelijkwaardig is met

$$(3x)^2 + (5y)^2 = 15^2.$$

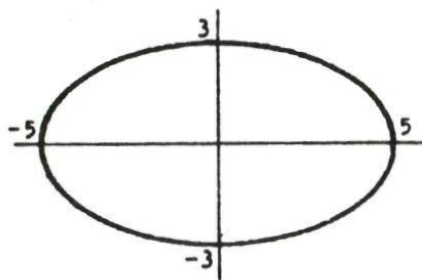
De grafiek hiervan is een *ellips*: (figuur 2).

Om hieruit de hartvorm te krijgen moeten de lijnen in het midden

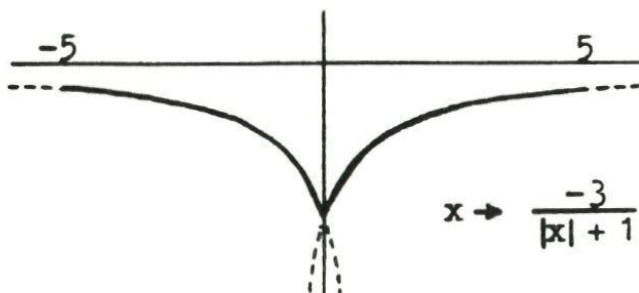
wat zakken. Dit wordt bewerkstelligd door de breuk aan het eind van de formule.

Een stuk van de grafiek van de ook op school bekende *orthogonale hyperbool* $x \rightarrow x^{-1}$ ziet er na een geschikte verschuiving, vergroting en spiegeling in de lijn $x = -1$ uit als getekend in figuur 3.

Het 'optellen' van beide grafieken geeft juist de hartvorm.



Figuur 2



Figuur 3

Variaties

We proberen de hartformule nog iets eenvoudiger te maken door de ellips te vervangen door een parabool (met een horizontale as):

$$y = \pm \sqrt{2 - x},$$

wat gelijkwaardig is met

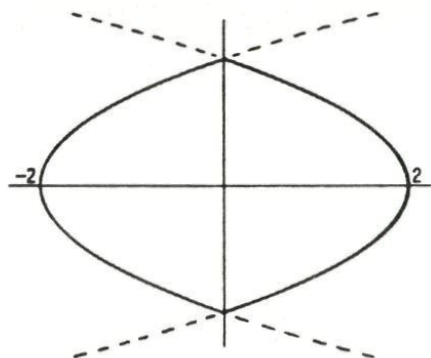
$$x = 2 - y^2.$$

Spiegeling in de y-as wordt verkregen door de absolute-waarde-functie te gebruiken:

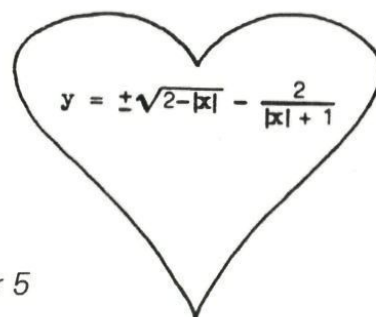
$$y = \pm \sqrt{2 - |x|},$$

waarvan figuur 4 de grafiek laat zien. Opgeteld bij net zo'n soort hyperbool-punt als in figuur 3 ontstaat het hart van figuur 5.

Door het veranderen van de getallen (de 'parameters') in de formules kun je de vorm van het hart net krijgen zoals je het hebben wilt. Pas echter op voor onbedoelde vergissingen: als je in de formule van figuur 5 (of van figuur 1) de laatste plus in een min



Figuur 4



Figuur 5

verandert, krijg je:

$$y = \pm \sqrt{2 - |x|} - \frac{2}{|x| - 1},$$

en het hart breekt in drie stukken uiteen! Teken het maar.

Voor hartspecialisten

Voor wat meer gevorderde liefhebbers is er aan de hartfiguren nog van alles te onderzoeken, bijvoorbeeld:

- hoe groot is het hart?
- waar liggen de toppen?
- waar zijn de buigpunten?
- zijn er hartformules zonder wortels en absoluutstrepen?

De grootte (de oppervlakte) is makkelijker te vinden dan het misschien lijkt.

Bij het omvormen van de ellips van figuur 2 in de hartfiguur, verandert namelijk z'n oppervlakte *niet*. En de grootte van de ellips is makkelijk te vinden: vat hem maar op als een cirkel met straal 5 die verticaal 'in elkaar gedrukt'

is (vermenigvuldigd met $3/5$). Dus

$$\text{opp}(\text{fig. 1}) = \pi \cdot 5^2 \cdot \frac{3}{5} = 75 \pi.$$

Voor het hart van figuur 5 vind je (via integreren van de tweede-graads parabool-functie):

$$\text{opp}(\text{fig. 5}) = \text{opp}(\text{fig. 4}) = \frac{16}{3} \sqrt{2}$$

De overige vragen behandelen we alleen voor de hartformule van figuur 5.

Voor de 'vleugeltippen' links en rechts vind je als coördinaten

$$(2, -\frac{2}{3}) \text{ en } (-2, -\frac{2}{3}).$$

(Want bij grotere x bestaat de wortel niet.)

De hoogste punten aan de bovenkant van het hart kun je vinden door met je rekendoosje de functieformule (met het *plusteken*) uit te cijferen voor x -waarden in de buurt van 1 en -1 . Zekerheid over de plaats van de maxima is pas te krijgen als je de functie differentieert. Z'n afgeleide is:

$$x \rightarrow \frac{|x|}{x} [-1/2(2 - |x|)^{-1/2} + 2(|x| + 1)^{-2}].$$

Deze 'hellings'-functie blijkt 0 te zijn voor $x = +1$ en -1 . Dit invullen in de formule van de hartfunctie zelf, laat zien dat de toppen juist raken aan de x -as van het coördinatenstelsel.

Buigpunten (voor super-specialisten)

Ergens in de neergaande zijden van het hart worden punten gepasseerd waar de 'bolling' overgaat in 'holling'. Om ook dáárvan de plaats te vinden moet

de onderste tak van de functie tweemaal gedifferentieerd:

hartfunctie (onderste tak):

$$x \rightarrow -(2 - |x|)^{1/2} - 2(|x| + 1)^{-1}$$

1e afgeleide:

$$x \rightarrow \frac{|x|}{x} [1/2(2 - |x|)^{-1/2} + 2(|x| + 1)^{-2}]$$

2e afgeleide:

$$x \rightarrow \frac{|x|}{x} [1/4(2 - |x|)^{-3/2} - 4(|x| + 1)^{-3}],$$

met als positieve oplossing:

$$|x| = -1 - \sqrt[3]{32} + 2\sqrt[3]{108 + \sqrt[3]{16}} \approx 1,2222509.$$

Na invullen hiervan in de hartformule zelf, blijken de coördinaten van de buigpunten:

$$(\pm 1,22, -1,78).$$

Fraaiere formules

Bij het zoeken naar formules met een hartvormige grafiek, is het natuurlijk de sport om een *zo eenvoudig mogelijke* formule te vinden.

In de hartformules die we tot nu toe gebruikten komt een wortelteken voor, en absolute-waardestrepen. Kunnen die er nog uit? Het antwoord is: ja, maar. . .

De twee functie-relaties van figuur 5 kunnen worden omgeschreven tot:

$$y + \frac{2}{|x| + 1} - \sqrt{2 - |x|} = 0 \quad \text{en}$$

$$y + \frac{2}{|x| + 1} + \sqrt{2 - |x|} = 0.$$

Je kunt nu zeggen: een punt (x, y) ligt op de hartrand als de coördinaten aan één van deze twee

vergelijkingen voldoen.
Deze uitspraak is gelijkwaardig met: (x, y) voldoet aan de produkt-vergelijking:

$$\left[y + \frac{2}{|x|+1} - \sqrt{2-|x|} \right] \times \\ \times \left[y + \frac{2}{|x|+1} + \sqrt{2-|x|} \right] = 0$$

$\iff$

$$\left(y + \frac{2}{|x|+1} \right)^2 - (2-|x|) = 0$$

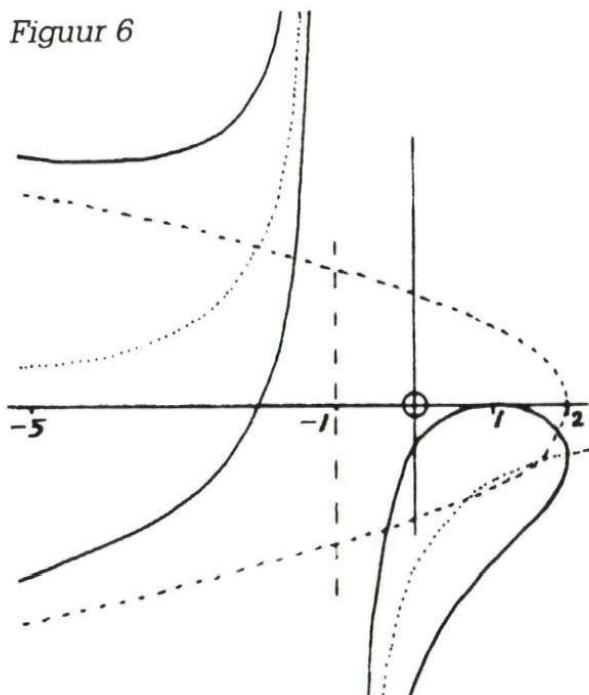
$\iff$

$$(x^2y^2+y^2+4y+2) + |x|(x^2+2y^2+4y-3) = 0.$$

De wortel is verdwenen, en ook de breuk is weggewerkt. Nu de absoluut-strepen nog.

Als we in de dubbele functie-formule van figuur 5, $|x|$ (mèt strepen) vervangen door x (zónder strepen), blijkt de grafiek er te gaan uitzien als in figuur 6.

Figuur 6



$$(x^2y^2+y^2+4y+2) + x.(x^2+2y^2+4y-3) = 0$$

Je krijgt alleen de rechterhelft van het gewenste hart, met daarbij een aantal extra 'takken'. De relatie-vergelijking ervan is:

$$(x^2y^2+y^2+4y+2) + x(x^2+2y^2+4y-3) = 0.$$

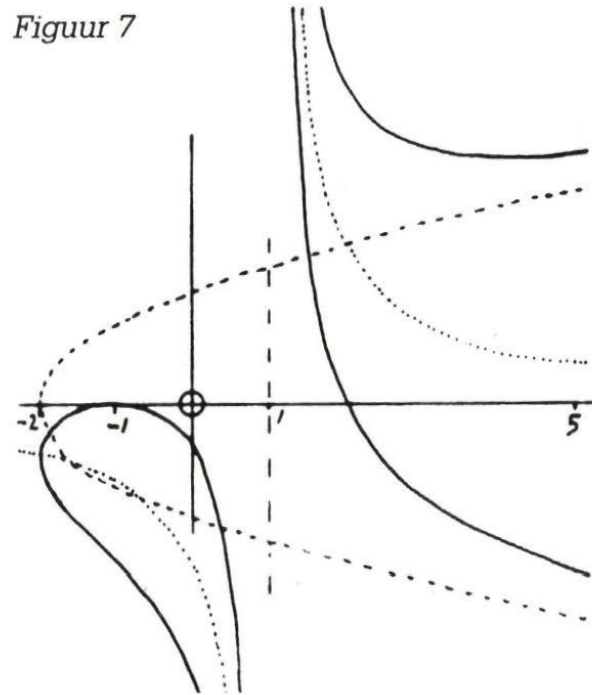
De andere helft van het hart (plus nog meer extra takken) krijg je door $|x|$ te vervangen door $-x$. De grafiek zie je in figuur 7. De vergelijking ervan is:

$$(x^2y^2+y^2+4y+2) - x(x^2+2y^2+4y-3) = 0.$$

De combinatie van beide grafieken wordt beschreven door het produkt van beide laatste vergelijkingen. Het resultaat (wegens: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$) zie je in figuur 8. Uitwerken van de kwadraten, en sorteren naar machten van x geeft de tweede formule. En sorteren naar machten van y levert de derde formule.

Dit zijn nu vergelijkingen zónder absoluut-strepen. De grafiek bevat het volledige hart, plus een

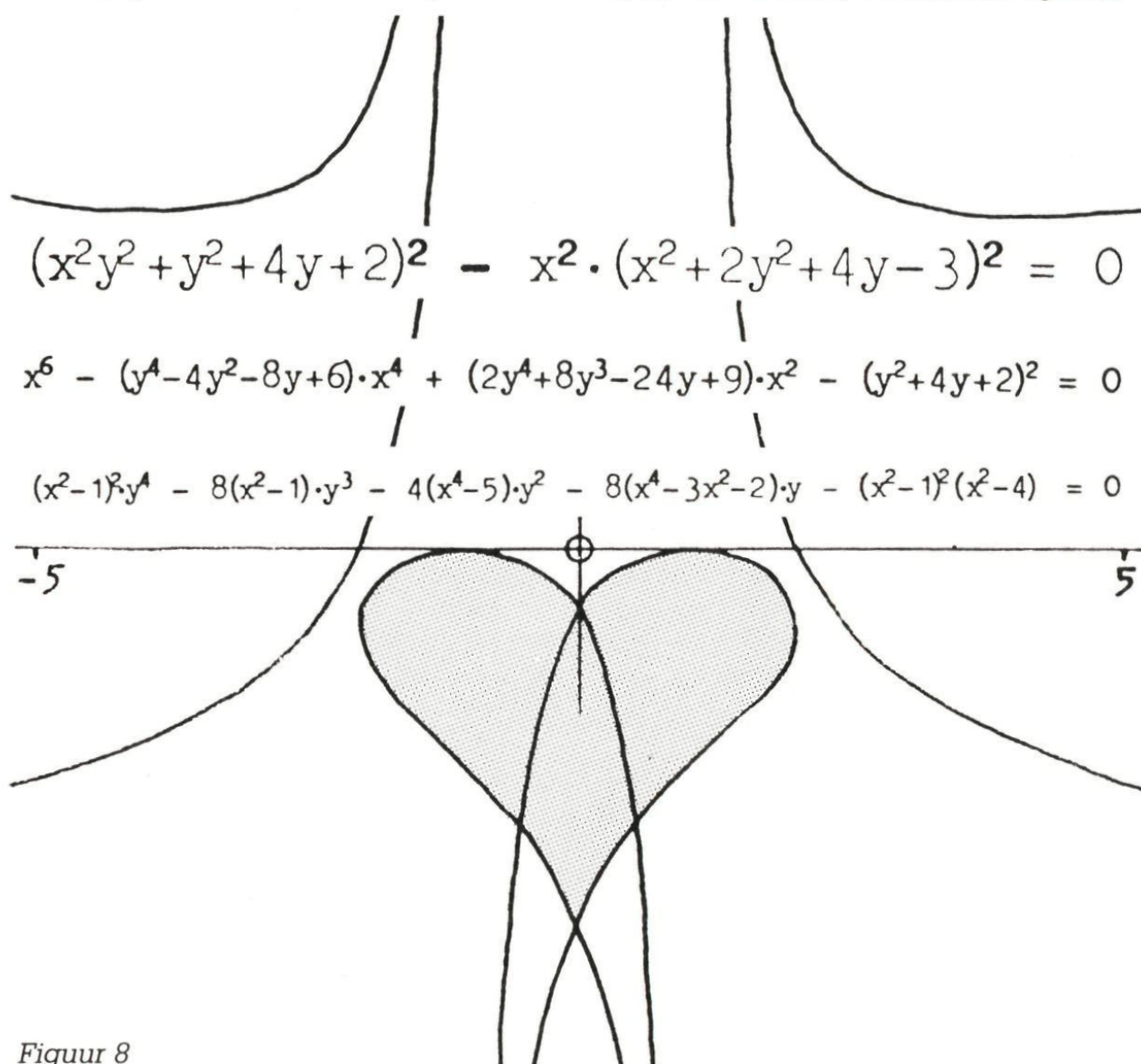
Figuur 7



$$(x^2y^2+y^2+4y+2) - x.(x^2+2y^2+4y-3) = 0$$

aantal takken die naar het oneindige doorlopen (naderend tot de in figuur 6 en 7 gestippeld aangegeven parabolen en hyperbolen). Enerzijds zijn de formules nu fraaier omdat ze bestaan uit een zuivere 'algebraïsche veelterm', anderzijds heeft het hart zijtakken

gekregen die je liever had willen vermijden. Hoewel. . . het 'voordeel' van de grafiek van de veelterm-relatie is, dat de twee scherpe, puntige knikken in het hart van figuur 5 nu verdwenen zijn: de grafiek bestaat uitsluitend uit mooie, vloeiende lijnen.



Figuur 8

Mina, O Mina, . . .

$$\frac{(-a_0 - a)(x - s)(b - u)}{a_1}$$

Hier zie je nog een andere manier om je gevoelens in een formule te verstoppen. In rebus-vorm.

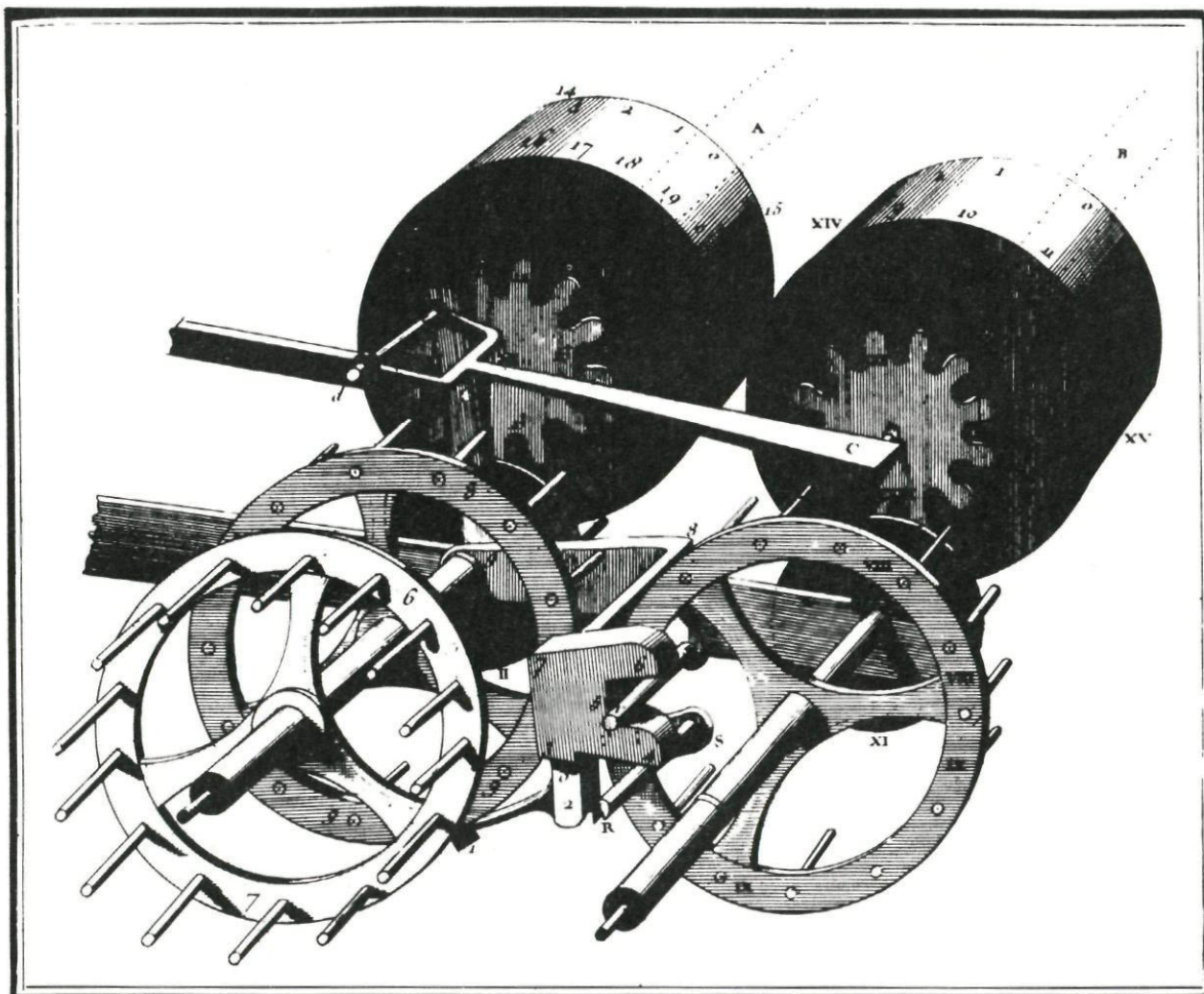
Tentoonstelling Rekenen met raderen

Op 11 februari 1986 bestonden de Stichting Mathematisch Centrum en haar instituut het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) veertig jaar. Naar aanleiding van dit veertigjarig bestaan is in *Teylers Museum* te Haarlem de tentoonstelling 'Rekenen met raderen' ingericht.

De tentoonstelling geeft een beeld van 350 jaar mechanisch rekenen. In dit overzicht van de prehistorie van de computer worden aan de hand van een aantal panelen de beginselen uitgelegd van het mechanisch rekenen. Er zijn een aantal zeldzame, historisch belangrijke rekenmachines te zien, en bovendien zijn er een paar modellen gemaakt waarmee je naar hartelust kunt experimenteren.

De tentoonstelling 'Rekenen met raderen' in Teylers Museum, Spaarne 16, Haarlem loopt tot en met 3 mei 1987. Openingstijden: dinsdag tot en met zaterdag 10-17 uur, op zon- en feestdagen 13-17 uur.

Informatie over het ontstaan van de eerste rekenmachine is te vinden in het artikel 'De eerste rekenmachine', Pythagoras 24-2.



Binnenwerk van de telmachine van Blaise Pascal (1623-1662), zoals afgebeeld in de Encyclopédie van Diderot en D'Alembert (1767).

Pythagoras Olympiade



Nieuwe opgaven

Oplossingen vóór 30 april insturen naar: *Pythagoras Olympiade, Marinus de Jongstraat 12, 4904 PL OOSTERHOUT (NB)*. Vermeld op elk (éénzijdig beschreven) vel je naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas. Verder moet elke oplossing op een nieuw vel beginnen, want we corrigeren ze afzonderlijk. We bekijken alleen goed leesbare oplossingen die volledig zijn uitgewerkt, met verklarende tekst in goed lopende zinnen. Verdere informatie over de wedstrijd vind je in nummer 1 van deze jaargang op bladzijde 24.

PO 96

In een gegeven driehoek ABC ligt een punt P zo, dat de hoeken PAC en PBC gelijk zijn.

Men laat loodlijnen PQ en PR neer op de zijden AC en BC . Het midden van AB noemen we M .

Bewijs dat driehoek PMQ gelijkbenig is.

PO 97

Bewijs dat er geen gehele getallen n en m bestaan zo dat geldt $n^2 - 3nm + m^2 = 3$.

Oplossing en prijswinnaars van de opgave PO 91

PO 91

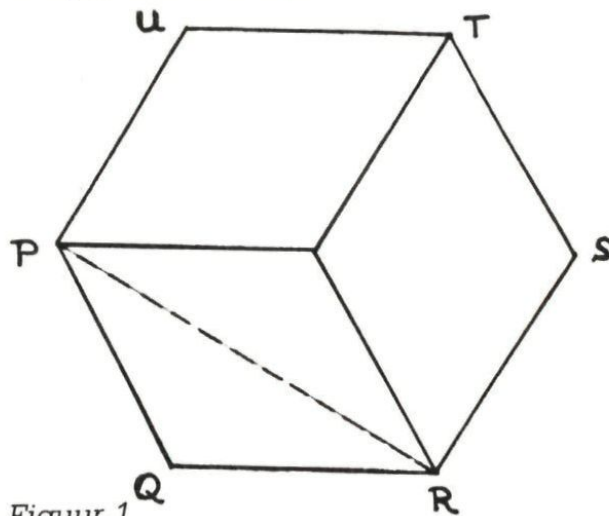
Gegeven zijn een massieve kubus met ribben ter lengte 2, en een massief regelmatig viervlak met ribben ter lengte 3.

Is het mogelijk ze zó in een bundel evenwijdige lichtstralen te houden (denk bijvoorbeeld aan zonnestralen) dat het viervlak geheel in de schaduw van de kubus verdwijnt?

(Geef een volledig gemotiveerd antwoord!)

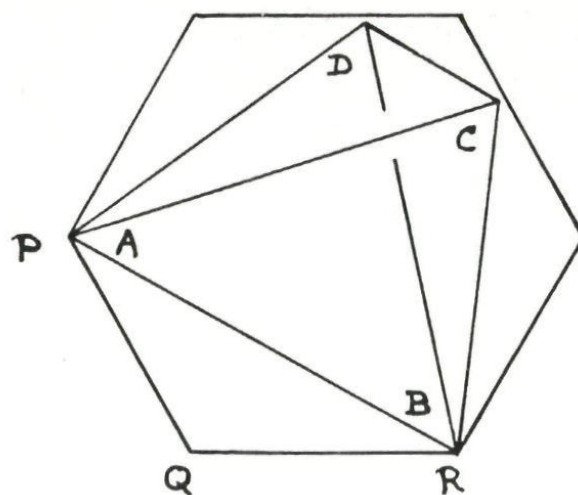
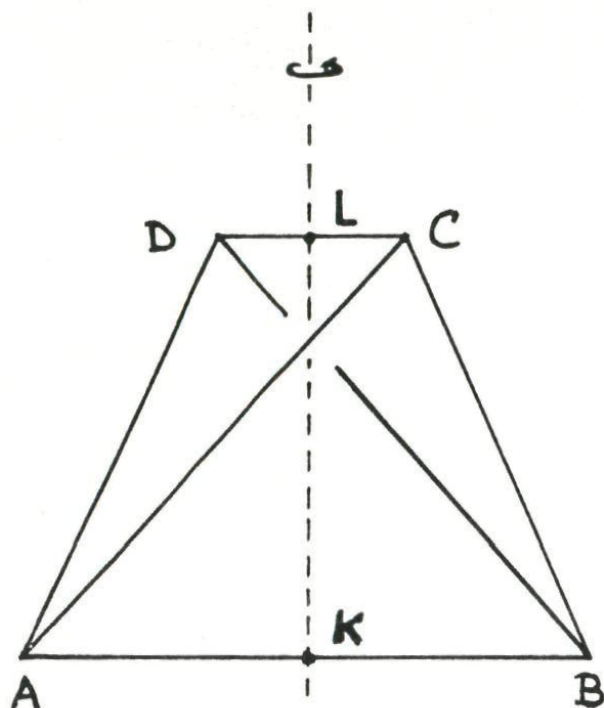
Oplossing van Erik Fledderus, 4 vwo, Nassau College, Wolvega (enigszins bekort):

Het is mogelijk! Je kunt allereerst de kubus zó houden, dat er als schaduwfiguur (in een vlak loodrecht op de zonnestralen) een regelmatige zeshoek ontstaat (figuur 1). De zijden hebben lengte $\frac{2}{3}\sqrt{6}$, en de diagonalen



Figuur 1

zoals PR hebben lengte $2\sqrt{2}$. Helaas is $2\sqrt{2} < 3$, zodat het viervlak niet zonder meer op de zeshoek gelegd kan worden. We moeten het enigszins kantelen. Laat $ABCD$ het viervlak zijn, en stel dat K het midden is van AB , en L dat van CD (figuur 2). Als je nu KL evenwijdig aan het projectievlak houdt, en het viervlak om de as KL



Figuur 3

← Figuur 2

wentelt, dan zal de projectiefiguur steeds een gelijkbenig trapezium zijn. In de projectie behoudt KL dan z'n ware lengte (namelijk $\frac{3}{2}\sqrt{2}$), terwijl verder geldt dat $AB^2 + CD^2 = 3^2$ (want AB en CD zijn projecties van onderling loodrechte zijden van lengte 3). We houden het viervlak nu zó dat $AB = 2\sqrt{2}$ wordt. Dan is dus $CD^2 = 3^2 - AB^2 = 1$, dus $CD = 1$. Met

een eenvoudige berekening zie je dan dat het viervlak geheel in de schaduw van de kubus verdwijnt als je zorgt dat de projectie van AB precies op de diagonaal PR van de zeshoek valt (figuur 3). De berekeningen (die Erik er netjes bij heeft gedaan) laten we aan onze lezers over.

Er waren verder geen correcte inzendingen bij deze opgave.

Boekje over Wiskunde Olympiaden

In november 1986 is er bij de Universitaire Pers Leuven (België) onder de titel 'Wiskunde Olympiaden' een boekje verschenen. Het is bestemd voor allen die interesse hebben voor wiskundewedstrijden. Alles wat je wilt weten over Wiskunde Olympiaden staat erin.

Het boekje bevat de volgende hoofdstukken:

- 1 De Internationale Wiskunde Olympiade.
- 2 Hoe verschillende landen zich voorbereiden.
- 3 De Wiskunde Olympiade in België.
- 4 Het nut van Wiskunde Olympiaden.
- 5 Voorbeelden

Het boekje wordt onder het ISBN-nummer 90 6186 225 6 in de handel gebracht door de firma PEETERS, Bondgenotenlaan 153, B-3000 Leuven (België). Het kost 500 BEF.

Nederlandse Wiskunde Olympiade



De Nederlandse Wiskunde Olympiade is een wedstrijd voor leerlingen van havo en vwo. Uit de winnaars wordt een team van zes scholieren samengesteld dat Nederland vertegenwoordigt bij de Internationale Wiskunde Olympiade. Die Olympiade wordt al sinds 1959 jaarlijks georganiseerd en Nederland deed in 1969 voor het eerst mee. Onze landgenoten hebben daarbij al veel bronzen, zilveren en gouden medailles in de wacht gesleept. We hopen dat ze ook succes zullen hebben in Cuba, waar de Olympiade dit jaar wordt gehouden en in 1988 in Australië. Aan de Internationale Wiskunde Olympiade nemen teams uit zo'n veertig tot vijftig landen deel.

Wie kan meedoen?

De Nederlandse Wiskunde Olympiade is bestemd voor alle leerlingen van havo en vwo met belangstelling voor wiskunde. Omdat de Olympiadecyclus zich over anderhalf schooljaar uitstrekt, kunnen eindexamenklassers niet meer meedoen. De meeste deelnemers komen dus uit 4 of 5 vwo of uit 4 havo. Zit je in een lagere klas, dan zul je de opgaven meestal nog te moeilijk vinden, maar ben je enthousiast en heb je een wiskunde-knobbel, dan mag je het ook al eerder proberen. Deelname van lagereklassers is dus toegestaan.

Hoe kun je meedoen?

Eerste Ronde Als je wilt meedoen, dan moet je dat tegen je wiskundeleraar zeggen. De eerste ronde vindt plaats op school op vrijdagmiddag 20 maart 1987. Je krijgt drie uur de tijd om de

antwoorden te vinden bij een stuk of twaalf opgaven. Sommige daarvan zijn gemakkelijk, andere lastig tot zeer lastig.

Allemaal laten ze iets zien van ongebruikelijke, leuke, niet-erg-schoolse wiskunde. Alle deelnemers uit het hele land krijgen dezelfde opgaven. Je leraar corrigeert het werk aan de hand van een correctieformulier en stuurt de uitslag op. De laatste jaren doen er telkens een kleine tweeduizend scholieren mee, maar we hebben het idee dat er nog veel meer zijn die plezier aan de Olympiade zouden kunnen beleven. Probeer het eens!

Scholenprijs De punten van de beste vijf leerlingen per school worden opgeteld en de school die zo de hoogste score bereikt, krijgt een wisselprijs die door Shell beschikbaar is gesteld. In 1986

was dat de CSG 'Blaise Pascal' uit Spijkenisse.

Tweede Ronde De beste honderd deelnemers van het hele land krijgen een uitnodiging voor de *Tweede Ronde*, die gehouden wordt in de Technische Universiteit Eindhoven op vrijdag 11 september 1987. Die ronde is natuurlijk een stuk moeilijker. Hij duurt eveneens drie uur, maar er zijn dan maar vier opgaven. Enige weken later zal de prijsuitreiking plaatsvinden. Er zijn prijzen voor de beste tien deelnemers.

Australië

Voor de meesten zal de Olympiade dan afgelopen zijn, maar niet voor allemaal. Want zes scholieren mogen meedoen aan de Internationale Wiskunde Olympiade, een bijna twee weken durend evenement dat telkens in een ander land in de maand juli wordt georganiseerd. Dit jaar in Cuba, maar de deelnemers daarvoor zijn al in 1986 met de Olympiadecyclus en hun voorbereidingen begonnen. De nieuwe cyclus leidt naar 1988 en dan gaan we naar Australië. Dat belooft een geweldig spektakel te worden, want de Olympiade wordt daar opgenomen in de viering van het 200-jarig bestaan van de staat Australië. Je zult je krachten daar kunnen meten met deelnemers uit de

Verenigde Staten, de Sovjet-Unie, China en nog tientallen andere landen uit de gehele wereld.

Lesbrieven

De vraagstukken bij de Internationale Wiskunde Olympiade zijn zo moeilijk, dat zelfs beroepswiskundigen er grote problemen mee hebben. Toch lukt het ons team elk jaar weer om prijzen in de wacht te slepen. En in de Internationale Ranglijst komen we ook steeds op een behoorlijke plaats terecht. Vaak in de middenmoot, maar soms ook verrassend hoog, zoals in 1983, toen we zevende werden in een veld van 32 landen. Dat kan alleen maar dank zij een goede voorbereiding. We doen het met lesbrieven die we aan alle prijswinnaars van de Tweede Ronde toesturen. Als je er plezier in hebt, dan kun je daar een paar maanden aan werken en mede aan de hand van de reacties op de lesbrieven wordt in april 1988 de Nederlandse ploeg voor Australië gekozen.

Jij kunt één van de gelukkigen zijn!

Nadere inlichtingen bij de
NEDERLANDSE ONDERWIJSCOMMISSIE
VOOR WISKUNDE

Secretariaat: *H. N. Schuring*
p/a CITO, postbus 1034,
6801 MG Arnhem
(tel. 085-52 13 46).

Oplossingen Tweede Ronde 1986

1 Men definieert een functie f door: $f(x) = \frac{12x + 9}{19x + 86} \quad (x \neq -\frac{86}{19})$.

Laat zien dat er één reëel getal x_0 bestaat, zo dat de uitdrukking
 $f(x_0 + h) \cdot f(x_0 - h)$
niet afhankelijk is van de keuze van h en bereken dat getal x_0 .

Oplossing

$$f(x_0 + h) \cdot f(x_0 - h) = \frac{(12(x_0 + h) + 9)(12(x_0 - h) + 9)}{(19(x_0 + h) + 86)(19(x_0 - h) + 86)} =$$

$$\frac{(12x_0 + 9)^2 - (12h)^2}{(19x_0 + 86)^2 - (19h)^2}$$

Deze uitdrukking is onafhankelijk van h als $12x_0 + 9 = -\frac{12}{19} \cdot (19x_0 + 86)$,

dat wil zeggen als $x_0 = -\frac{9 \cdot 19 + 12 \cdot 86}{2 \cdot 12 \cdot 19} = -\frac{401}{152}$.

- 2** Bewijs dat voor alle positieve gehele getallen n geldt dat

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

Oplossing

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)2k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) =$$

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} \right) - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{j} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

- 3** Bewijs dat $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10$
als $a, b, c, d > 0$ en $a \cdot b \cdot c \cdot d = 1$.

Oplossing

We gebruiken: $(x - y)^2 \geq 0$ dus $x^2 + y^2 \geq 2xy$ voor alle x, y . In het bijzonder

$(x > 0, y = 1): x^2 + 1 \geq 2x$, dus $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + (ab + cd) + (ac + bd) + (ad + bc) =$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \left(ab + \frac{1}{ab}\right) + \left(ac + \frac{1}{ac}\right) + \left(ad + \frac{1}{ad}\right) \geq$$

$$\geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 6 \geq 2ab + 2cd + 6 = 2\left(ab + \frac{1}{ab}\right) + 6 \geq 10.$$

(Je kunt eenvoudig bewijzen dat de uitdrukking slechts *gelijk* aan 10 kan zijn als $a = b = c = d = 1$.)

- 4** Gegeven zijn twee evenwijdige lijnen a en b en een punt A op a .

Men kiest een cirkel γ door A die de lijn b raakt.

Het raakpunt noemt men B en het tweede snijpunt van γ en a noemt men T .

De raaklijn in T aan γ heet t .

- (i) Bewijs dat er, onafhankelijk van de keuze van γ , een vast punt P bestaat, zo dat BT door P gaat.
- (ii) Bewijs dat er, onafhankelijk van de keuze van γ , een vaste cirkel δ bestaat, zo dat t raaklijn is van δ .

Oplossing

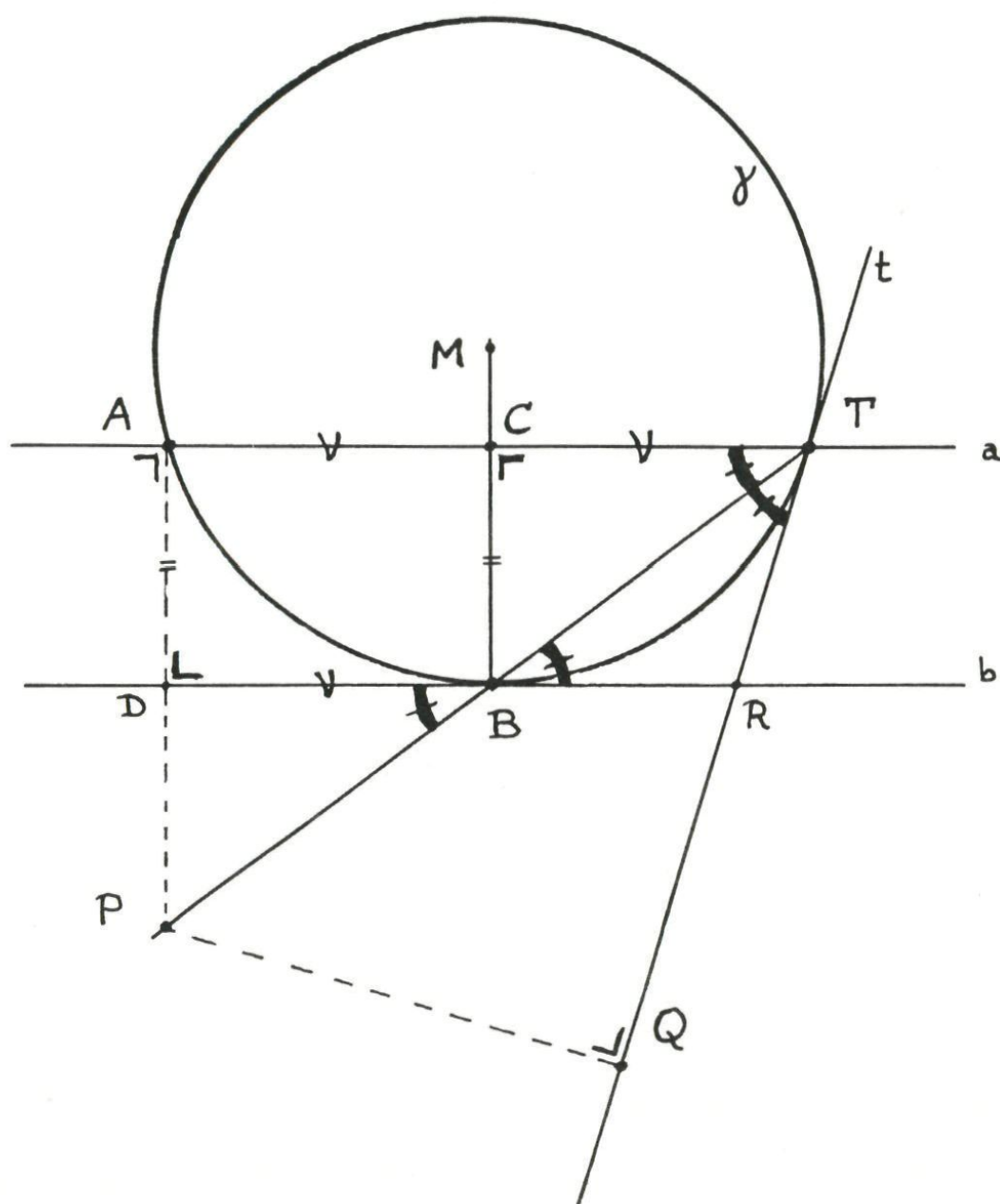
- (i) Laat M het middelpunt van γ zijn en C het snijpunt van MB en a . De loodrechte projectie van A op b noemen we D en het snijpunt van de lijnen AD en BT noemen we P .

We tonen aan dat de ligging van P op AD niet afhangt van γ door te laten zien dat $DP = AD$.

Bewijs: $DB = AC = CT$, $\angle D = \angle C = 90^\circ$, $\angle DBP = \angle CTB$ (want $a \parallel b$), dus de driehoeken PDB en BCT zijn congruent. Bijgevolg is $DP = CB = AD$.

- (ii) Laat Q de loodrechte projectie zijn van P op t en R het snijpunt van b en t . We tonen aan dat $PQ = PA$. Daaruit volgt dan dat de cirkel δ met middelpunt P en straal AP (onafhankelijk van de keuze van γ) altijd raakt aan t .

Bewijs van $PQ = PA$: b en t zijn beide raaklijnen aan γ , dus $\angle RTB = \angle RBT$. Verder is $\angle RBT = \angle BTC$ (want $a \parallel b$). Dus de lijn t is het spiegelbeeld van de lijn a bij spiegeling in PT . Hieruit volgt $PQ = PA$.



Redactioneel

Door problemen bij de drukker is het vorige nummer veel te laat verschenen. De opgegeven sluitingsdata van de **'Prijsvraag: 1987 in zo min mogelijk (gelijke) cijfers'** en de **Pythagoras Olympiade** waren dan ook niet meer haalbaar. Velen begrepen dat en zonden ons hun oplossingen desondanks toe. Toch willen we iedereen een eerlijke kans geven. We verschuiven de sluitingsdata dan ook tot twee weken na het verschijnen van dit nummer.

Met het artikel 'Hart-krommen' (bladzijde 20) komen we, zoals beloofd, terug op 'de speurtocht naar gekke grafieken' uit het eerste nummer van deze jaargang. Verder vind je in het artikel 'Ruimte: gekromd en n -dimensionaal' (bladzijde 13) een voortzetting van het artikel 'Cöördinaten: tekenen wordt rekenen' uit het vorige nummer.

De hemden van de vrijgezel: oplossing

$7 + 7 + 1 = 15$ hemden.

Mina, O Mina, . . . : oplossing

Mina, o Mina, ik bemin u bovenal.

Tekenwerk: Armand Haye, Amsterdam.

Foto's en andere illustraties: Hessel Pot, Woerden (omslag, blz. 1, 2, 3, 7, 8, 9, 19, 20, 21, 23, 24); Popke Bakker, Bergen aan Zee (blz. 4); Klaas Lakeman, Amsterdam (blz. 5); Jan van de Craats, Oosterhout (NB) (blz. 12, 26, 27, 31); Teylers Museum, Haarlem (blz. 25).

© 1987 Redactie Pythagoras - ALLE RECHTEN VOORBEHOUDEN, NADruk OF WEERGAVE, GEHEEL OF GEDEELTELIJK, IN WELKE VORM DAN OOK, ZONDER SCHRIFTELIJKE TOESTEMMING VAN DE REDACTIE VERBODEN.

Pythagoras wiskunde tijdschrift voor jongeren

Een uitgave onder auspiciën van de Stichting Christiaan Huygens en de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Redactie: Jan van de Craats, Klaas Lakeman, Hessel Pot, Hans de Rijk.

Redactiesecretariaat: Klaas Lakeman, Cornelis Krusemanstraat 60^{II},
1075 NS Amsterdam (NL).

Inhoud jaargang 26, nummer 3

- | | |
|--|--|
| De maantjes van Hippokrates / 1
<i>Hessel Pot</i> | Zwart-wit-wissel / 18
<i>Hessel Pot</i> |
| Möbius met driehoeken / 4
<i>Klaas Lakeman/Popke Bakker</i> | Tweeëndertig oplossingen / 19
<i>Hessel Pot</i> |
| Dampaden / 6
<i>Klaas Lakeman</i> | Hart-krommen / 20
<i>Hessel Pot</i> |
| De vier-cirkel-klok / 7
<i>Hessel Pot/Klaas Lakeman</i> | Mina, O Mina, ... / 24, 32
<i>Hessel Pot</i> |
| De hemden van de
vrijgezel / 10, 32
<i>Hessel Pot</i> | Tentoonstelling Rekenen met
raderen / 25
<i>Klaas Lakeman</i> |
| Driemaal breuken delen / 11
<i>Martinus van Hoorn/Hessel Pot</i> | Pythagoras Olympiade / 26
<i>Jan van de Craats</i> |
| Een sommetje van
Archimedes / 12
<i>Jan van de Craats</i> | Boekje over Wiskunde
Olympiaden / 27
<i>Klaas Lakeman</i> |
| Nieuw π -record / 12
<i>Klaas Lakeman</i> | Nederlandse Wiskunde
Olympiade / 28
<i>Jan van de Craats</i> |
| Ruimte / 13
<i>Klaas Lakeman/Gerard Bäuerle</i> | Redactioneel / 32 |

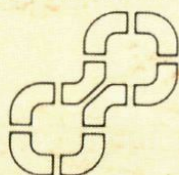
Pythagoras verschijnt zesmaal per schooljaar; opgave van abonneementen bij de uitgever (zie onder).

Abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 september schriftelijk bij de uitgever is opgezegd.

Bij tussentijdse abonnering ontvangt men ook de reeds verschenen

nummers. Betaling per acceptgirokaart.

Tarieven*	NLG/BEF
Abonnement Pythagoras	20,—/365
Inclusief Archimedes	36,—/660
Losse nummers	5,—/ 90
* Luchtpost-toeslag 15%	



stichting ivio

Postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL).

Tel. 03200-26514

educatieve uitgeverij - instituut voor buitenschools

onderwijs - wereldschool - AO-reeks - leerprojecten

Postgiro Nederland: 287934 Postcheck België: 000-0130850-94