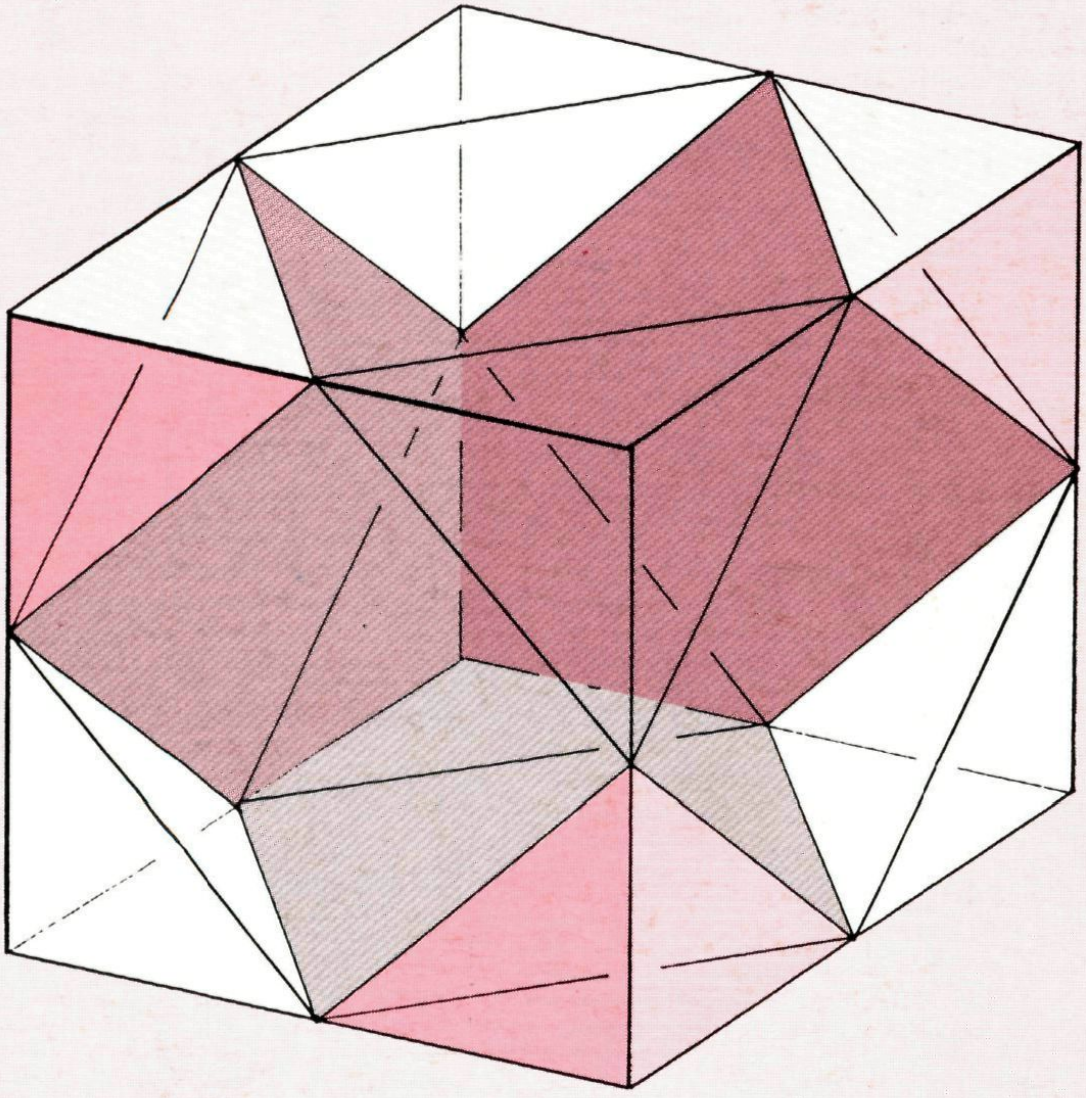
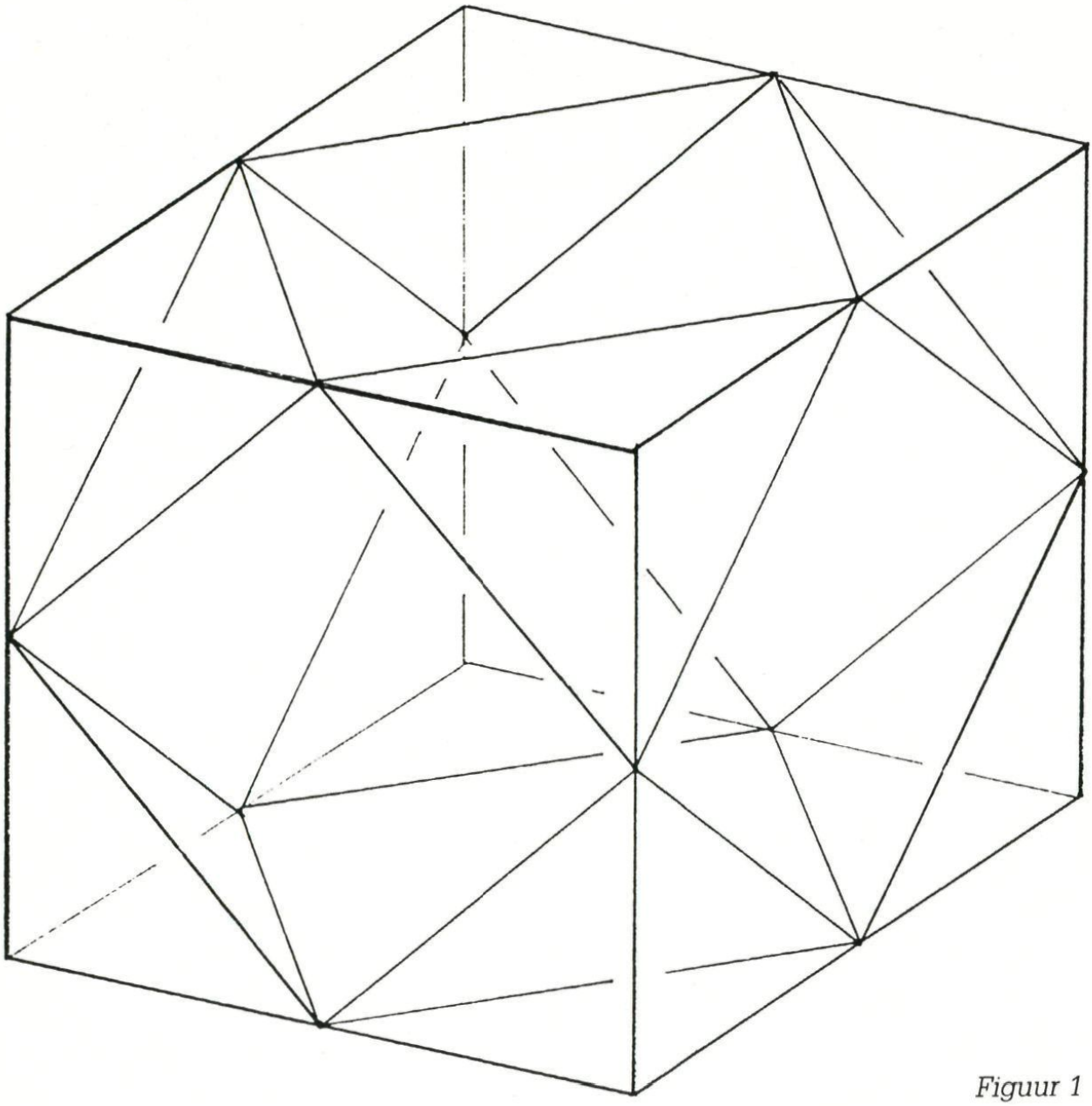


Pythagoras

wiskunde tijdschrift voor jongeren

stichting ivio

jaargang 26
nummer 4
mei 1987



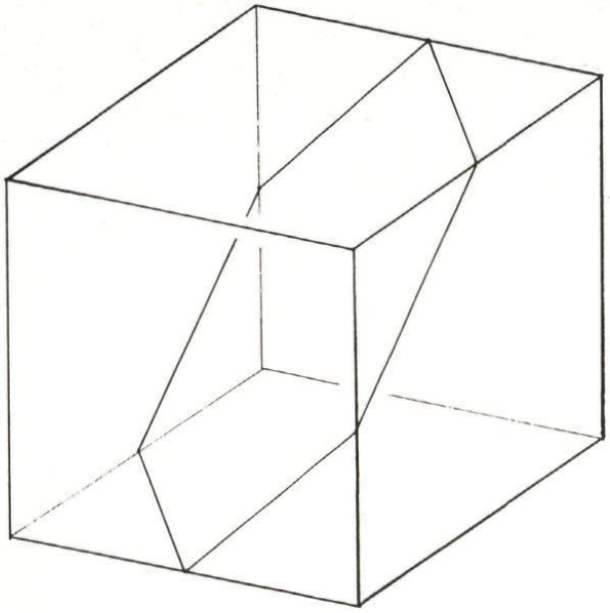
Figuur 1

Knutselen met een kubus

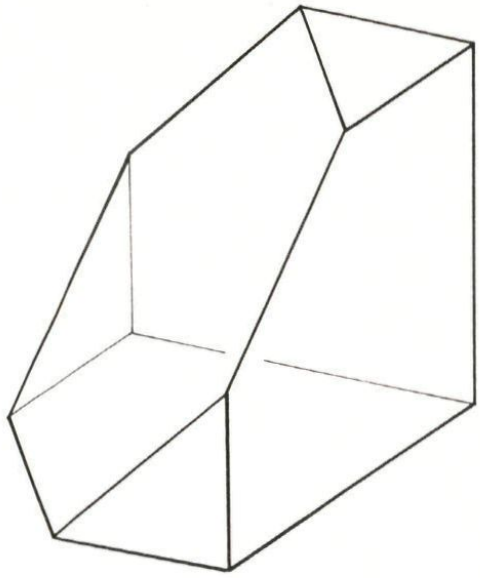
Een kubus heeft zes zijvlakken. Allemaal vierkanten. Binnen zo'n vierkant kun je een kleiner vierkant tekenen: verbind de middens van de zijden met elkaar. Als je dat bij alle zes de zijvlakken hebt gedaan, zijn er zes maal vier, dus 24 lijnstukjes getekend (figuur 1). Over die 24 lijnstukjes gaat dit verhaal.

Zeshoeken

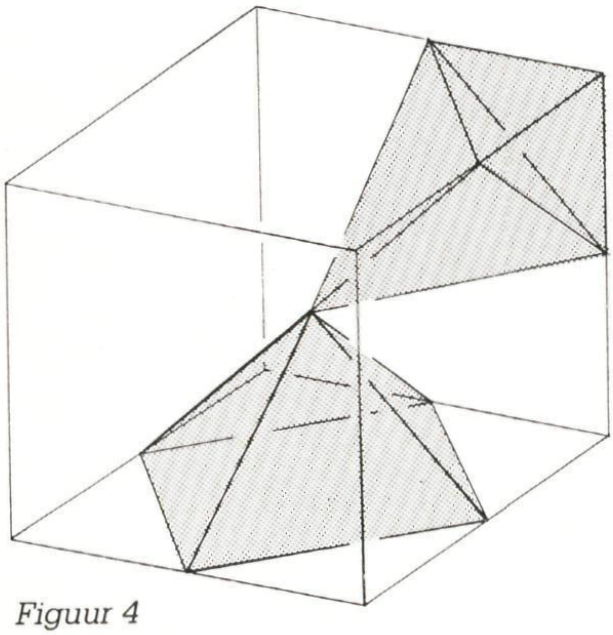
Eerst kiezen we er zes uit. Op een heel bepaalde manier: kijk naar figuur 2. De zes lijntjes vormen samen een platte *regelmatige zeshoek*. Een massieve kubus kan ook precies daarlangs worden doorgezaagd, dat zie je in figuur 3. In totaal zijn er in figuur 1 *vier* van die platte regelmatige zes-



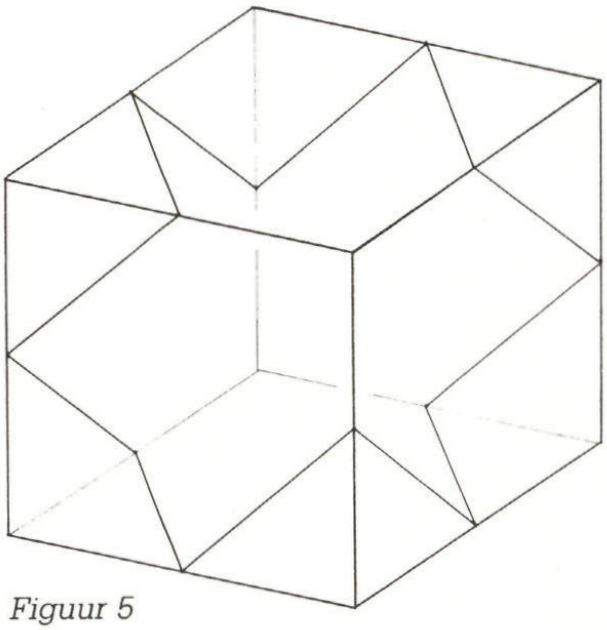
Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4

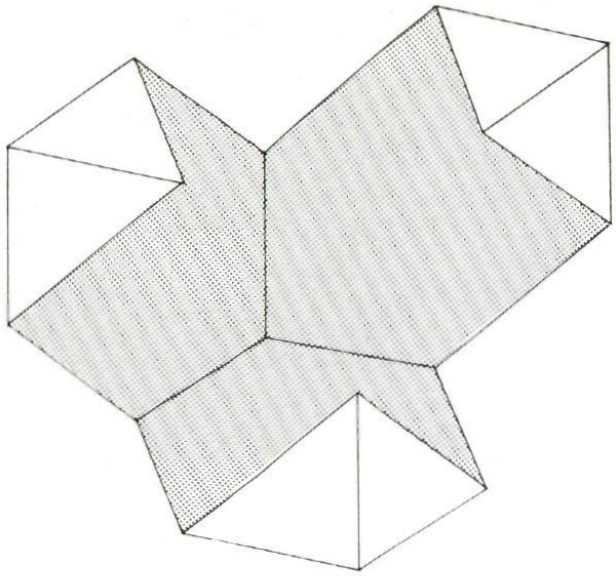


Figuur 5

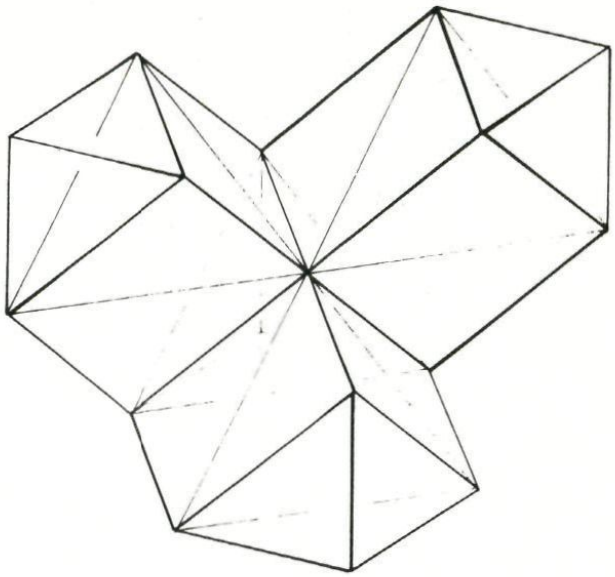
hoeken te ontdekken. Zie je ze zitten? We kunnen een massieve kubus dus ook op *vier* manieren zo doorzagen. Wat gebeurt er als je dat doet? De kubus valt dan uit elkaar in een groot aantal stukken. Hoeveel? En wat voor vorm hebben die stukken?
Het blijken *veertien* stukken te worden. Zes piramides met een vierkant grondvlak (zoals de beroemde piramide van Cheops), en acht stukken van een tweede soort. In figuur 4 zie je er van beide soorten één, netjes getekend zoals ze in de kubus zaten. Kun je nu uitrekenen hoe lang alle ribben zijn van de piramide? En van het 'zesvlak'? Neem voor het gemak maar aan dat de kubus ribben van lengte 1 heeft.

Twaalfhoeken

Na de zeshoeken nemen we nu *twaalfhoeken* onder de loep. Eerst die van figuur 5. Die heeft op elk kubuszijvlak twee zijden. Hij is natuurlijk niet plat meer.



Figuur 6

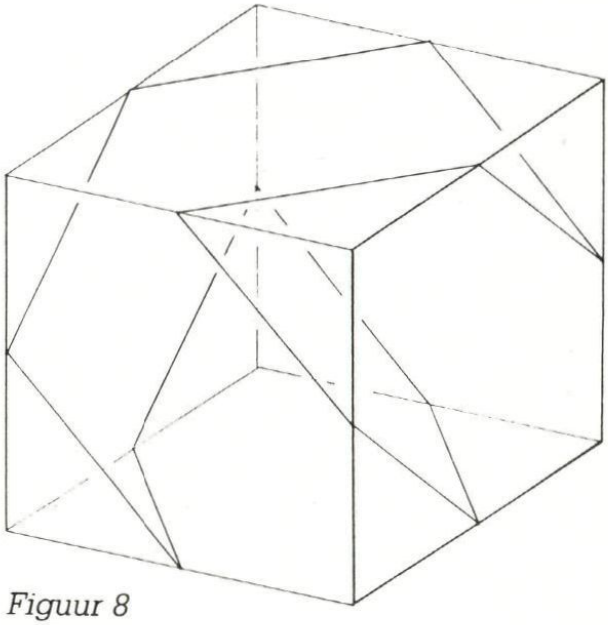


Figuur 7

Toch zit er regelmaat in, want alle zijden zijn nog steeds even lang. En de hoeken? Die blijken afwisselend 60° en 120° te zijn. Kun je dat zelf controleren?

Net als de platte zeshoek verdeelt de twaalfhoek het kubusoppervlak in twee gelijke delen. Knip je een (holle) kubus langs zo'n twaalfhoek open, en leg je de ene helft opzij, dan houd je over wat in figuur 6 getekend is: een soort bloem met drie naar binnen gekrulde bloembladeren. We kunnen er ook de massieve, in stukken gezaagde kubus bij nemen, en de holle twaalfhoek opvullen met bijpassende piramides en zesvlakken (uit figuur 4). Je krijgt dan figuur 7, een soort kraaiepoot, opgebouwd uit drie piramides en vier zesvlakken.

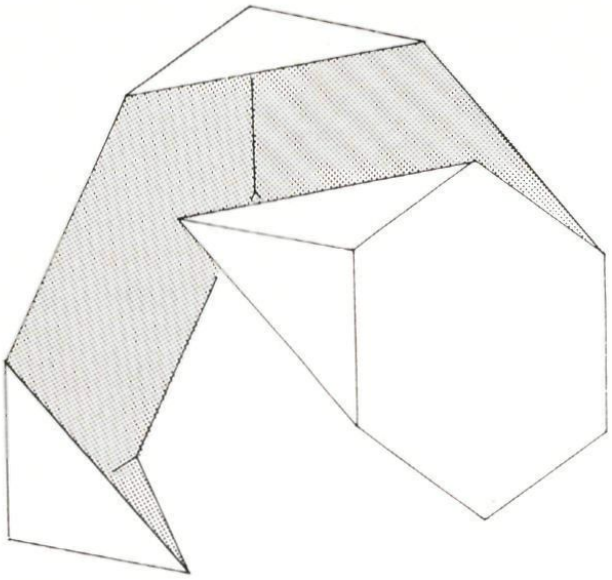
Lijm de stukken aan elkaar, en doe hetzelfde met de andere helft, dan heb je twee massieve kraaiepoten die weer tot een kubus in elkaar geschoven kunnen worden.



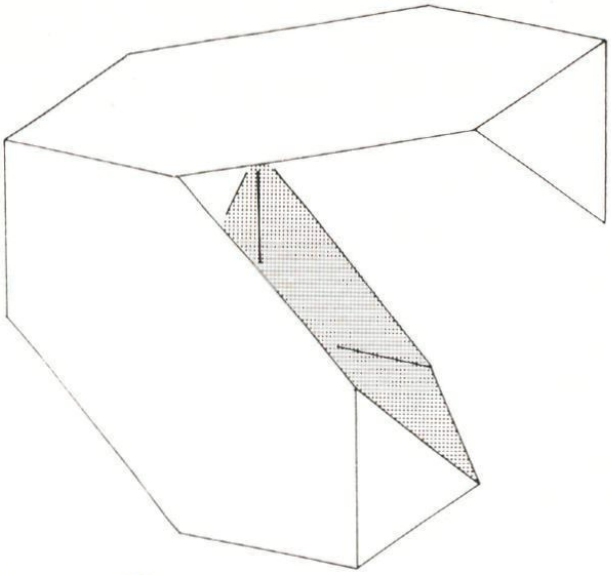
Figuur 8

De slangetwaalfhoek

In figuur 8 hebben we nog een andere manier getekend om een gelijkzijdige twaalfhoek over het kubusoppervlak te verdelen. Maar nu zit er een vreemde draai in de figuur. Toch is het weer een gesloten twaalfhoek, en ook deze 'slangetwaalfhoek' verdeelt het kubusoppervlak in twee delen van gelijke oppervlakte. Knip je een holle kubus daarlangs open, en leg je de stukken naast elkaar, dan zie je figuur 9A en 9B.



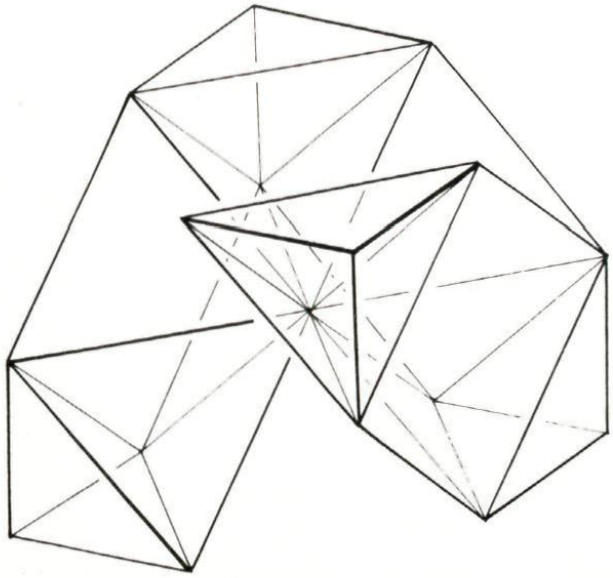
Figuur 9A



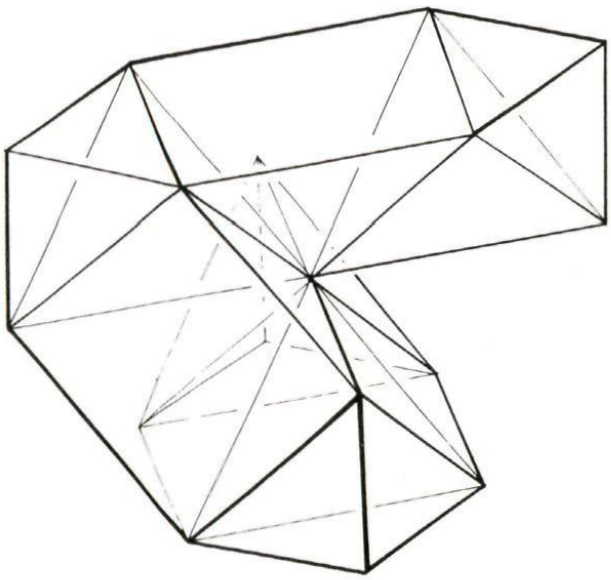
Figuur 9B

Wat denk je, zijn die twee stukken verschillend van vorm, of zijn ze precies gelijk? Of elkaars spiegelbeeld? Zoek dat zelf maar eens uit. Ook deze stukken kun je weer opvullen met piramides en zesvlakken. Dan krijg je figuur 10A en 10B. Twee massieve, slangachtige figuren. We hebben over die figuren een vraag. Stel dat je ze zou maken van hard materiaal, bijvoorbeeld stevig papier, hout of zelfs plexiglas. Zou het dan mogelijk zijn om de twee stukken, net als bij de kraaiepoten, weer tot een kubus in elkaar te schuiven? Eerlijk gezegd, we weten het antwoord niet. Welke ervaren knutselaar wil het eens voor ons uitzoeken?

De ideeën voor dit artikel kwamen van *G. J. Westerink* uit Veenendaal.



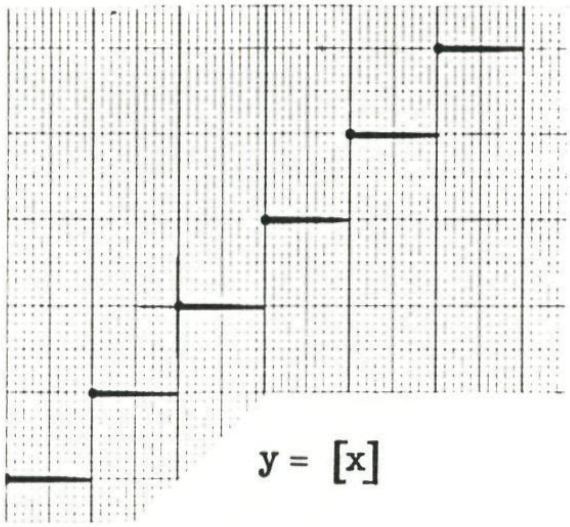
Figuur 10A



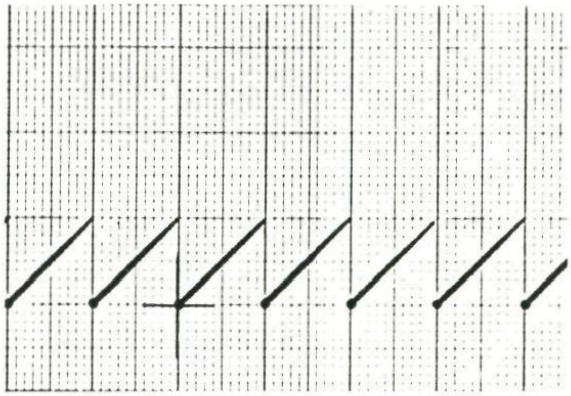
Figuur 10B

Entier-grafieken

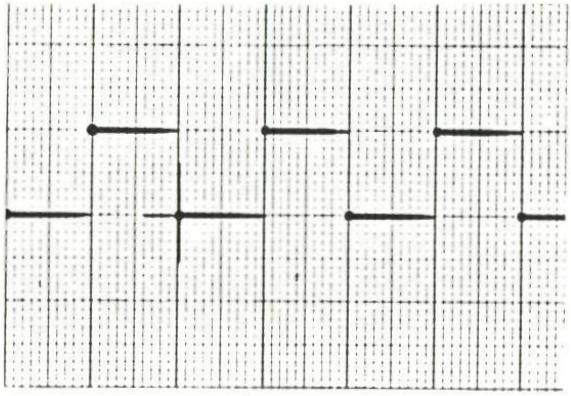
Je vindt hier een vijftal 'gekke grafieken' van functies die de *entier-functie* bevatten: het omlaag afronden op een geheel getal. Dit afronden wordt aangegeven door vierkante haken ([...]). Voor nadere uitleg zie bladzijde 24.



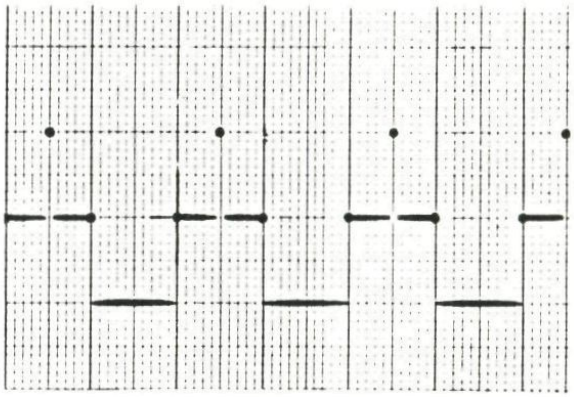
$y = [x]$



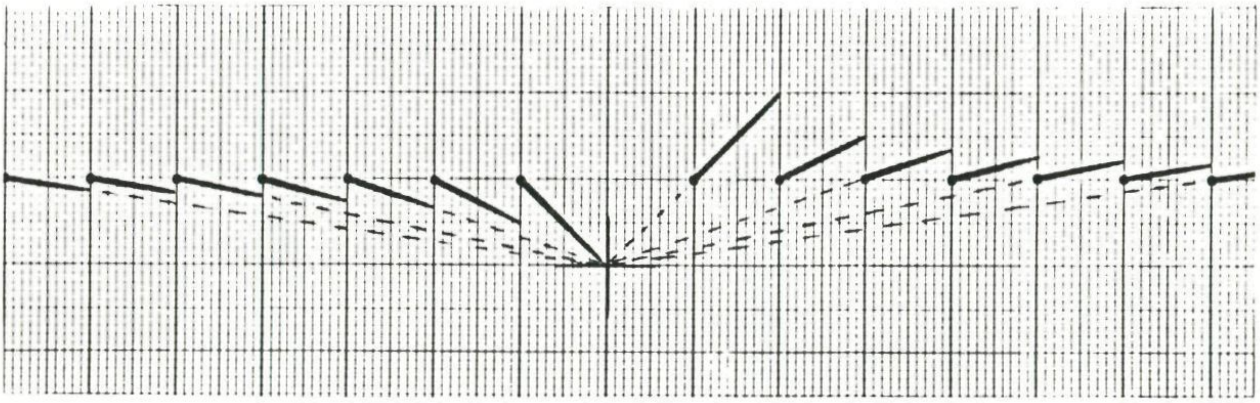
$y = x - [x]$



$y = [x] - 2\left[\frac{x}{2}\right]$



$y = [\sin \pi x]$



$y = \frac{x}{[x]}$

Prijsvraag 1987 – oplossing

Het minimum staat op 84

'Sommetjes met gelijke cijfers waar 1987 uit komt.' De opgave is simpel te geven, en met een klein beetje knutselen is het helemaal niet moeilijk zulke sommetjes te vinden. Alleen stond er (in Pythagoras 26-2, bladzijde 10) nog een kleinigheidje bij: met *zo min mogelijk* gelijke cijfers. Hiermee was het een echte puzzel-opgave geworden. Met spanning hebben we naar de resultaten uitgezien, die bleken uiteindelijk nog fantastischer dan we hadden gedacht.

Op wie niet zelf aan het werk is geweest, zal de bijgaande lijst met sommetjes weinig indruk maken. Maar ongetwijfeld wél op de velen die er fanatiek op gezwoegd hebben. In ieder geval ook op de redactie zelf; we waren er echt van overtuigd het minimum wel (zowat) te pakken te hebben, maar hebben ons daar flink in vergist.

Veel toelichting zal de lijst niet vereisen. De puzzelaars zullen er hun kladjes al wel naast gelegd hebben.

Het aantal inzendingen – enkele tientallen – was niet al te hoog; misschien veroorzaakt door de troubles met de al verlopen inzendtermijn. Of doordat we zelf al het (heus niet kinderachtige) aantal van 100 cijfers hadden genoemd.

De totalen van de inzenders liepen uiteen van 97 tot twee keer 88, drie keer 87 en éénmaal ... 85!! Met dit laatste totaal werd *Niek Ederveen* uit klas 4 vwo van het Dominicus-College te Nijmegen, de onomstreden winnaar van de wedstrijd.

Voor de andere boekebon moest geloot worden tussen de 87'ers *Piet Bikker* Nieuweroord (5 vwo), *Fred Lubbers* Olst (5 vwo) en *Pol Neirinck* Aarsele.
Het lot koos Piet Bikker.

De oplossingen van dit bovenste viertal liepen overigens nog flink uiteen; slechts bij de nrs. 1, 2 en 9 hadden ze alle vier hetzelfde (minimale?) cijfer-aantal.
Van Fred kregen we nog een oplossing in tien (romeinse) tienen:

$$1987 = X \cdot X \cdot (X+X) - X - (X+X+X)/X.$$

En een andere lezer vond een algemene oplossing, geldig voor $c = 1$ tot en met $c = 9$:

$$1987 = \left\{ (cccc - ccc - c)(c+c)/c - cc \right\}/c.$$

Verder hebben veel puzzelaars nog steun gehad aan de formule:

$$1987 = (18\ ccc - cc)/c.$$

Recordverbeteringen?
Van de lijst van negen sommetjes in 84 cijfers denken we nu weer dat verdere verkortingen onmogelijk zullen zijn. Maar bewijzen

$$1987 = 111\,(11-1-1)(1+1) - 11 \qquad 11$$

$$= (1+1)^{11} - (111+11)/(1+1)$$

$$= (1+1)^{11} - (11^{1+1}+1)/(1+1)$$

$$1987 = 222\,(22/2-2) - 22/2 \qquad 10$$

$$= 2\left\{2\,(22^2+2) + 22\right\} - 2/2$$

$$= \left\{222\,(22-2^2) - 22\right\}/2$$

$$= \left\{222\,(2^{2^2}+2) - 22\right\}/2$$

$$1987 = 333\,(3+3) - 33/3 \qquad 8$$

$$1987 = 4^4\,(4+4) - (4^4+4)/4 + 4 \qquad 9$$

$$1987 = \left\{(5+5)^5/(5+5) - 55 - 5 - 5\right\}/5 \qquad 10$$

$$1987 = 66\,(6\cdot 6-6) + 6 + 6/6 \qquad 8$$

$$1987 = 7\cdot 7\,(7\cdot 7-7) - 77 + 7 - 7/7 \qquad 10$$

$$= \left\{777\,(77/7+7) - 77\right\}/7$$

$$1987 = 8\left\{(8+8)(8+8) - 8\right\} + 88/8 - 8 \qquad 10$$

$$= 8\left(\left\{(8+8)/8\right\}^8 - 8\right) + (8+8+8)/8$$

$$1987 = \left\{999\,(9+9) - 99\right\}/9 \qquad 8$$

$$+\ \underline{\underline{84}}$$

kunnen we dat allerminst. Dus: wie heeft er nog verbeteringen? (Natuurlijk zonder de spelregels te verruimen.)

Daarnaast zijn we ook benieuwd naar varianten. Zijn er nog andere manieren om met hetzelfde aantal cijfers als aangegeven in de lijst, uit te komen op het huidige jaartal? (Afgezien van volgorde-wisselingen en van vervanging van 2^2 door $2 \cdot 2$ of $2+2$.) Alle varianten van de inzenders hebben we al aangegeven.

Correcties, aanvullingen

Voorspoedig 1987 (26-2, bladzijde 29)

We meldden eerder nog drie gaten in de eerste honderd sommetjes met de cijfers 1-9-8-7, namelijk de uitkomsten 38, 67 en 69. Het eerste gat blijkt te sluiten, als gevonden door *Valentin Neevel* (Hattem) en door *Bert Boon* (Leidschendam), op deze prachtige manier:

$$38 = -1 + \sqrt{((\sqrt{9})^8 - 7!)}$$

Toen waren er nog maar twee . . .

Zwart-wit-wissel (26-3, bladzijde 18)

Het schuifpuzzeltje blijkt in *zestien* zetten te kunnen, twee minder dan het door ons veronderstelde minimum (we hadden er ook de damschijven niet echt bijgehaald, fout natuurlijk).
Maar liefst drie lezers maakten ons hier op attent: *Arnold Vink* uit Klaaswaal, *Marc-Alexander Fluks* uit Amsterdam, en *Bert Grave* uit Zwolle.
Het kan zelfs op verschillende manieren in 16 zetten: na de eerste (gedwongen) zet met wit, kan de tweede zet zowel met een witte als met een zwarte schijf gedaan worden. Probeer nog maar eens.

Tweeëndertig oplossingen (26-3, bladzijde 19)

Onder de voorwaarden bij de puzzel 'In vier gelijke delen' (Pythagoras 26-2, bladzijde 9) hadden we uitdrukkelijk gesteld dat oplossingen pas verschillend genoemd zouden worden als de vorm van het stukje in de ene verdeling echt afwijkt van de vorm van het stukje in de andere.
P. Kloër uit Stompwijk tikt ons op de vingers, omdat we deze voorwaarde in één geval negeerden bij onze 32 oplossingen. Het zijn er dus echt maar 31. We laten de Lezer uitzoeken wélke twee vierkanten in *gelijk* gevormde stukjes verdeeld waren.

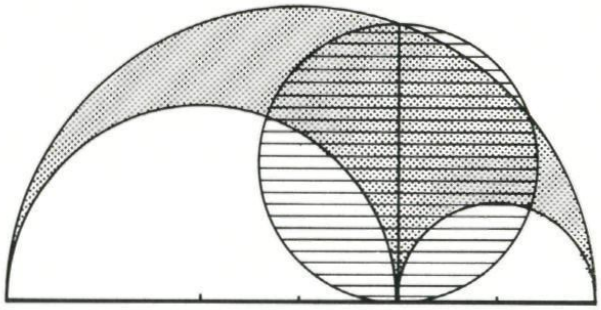
Met dank aan al deze reagerende lezers!

De maantjes van Hippokrates (aanvulling)

Op 'De maantjes van Hippokrates' (vorig nummer bladzijde 1) geven we hier nog twee aanvullingen, en maken van de gelegenheid gebruik om nog twee van die fraaie figuren af te beelden. De maantjes vonden hun oorsprong in de *kwadratuur van de cirkel:* met passer en liniaal een figuur construeren waarin een vierkant en een cirkel voorkomen met exact gelijke oppervlakte. In 1882 werd door de Duitser Lindemann bewezen dat zoiets onmogelijk is.

Of toch wel?

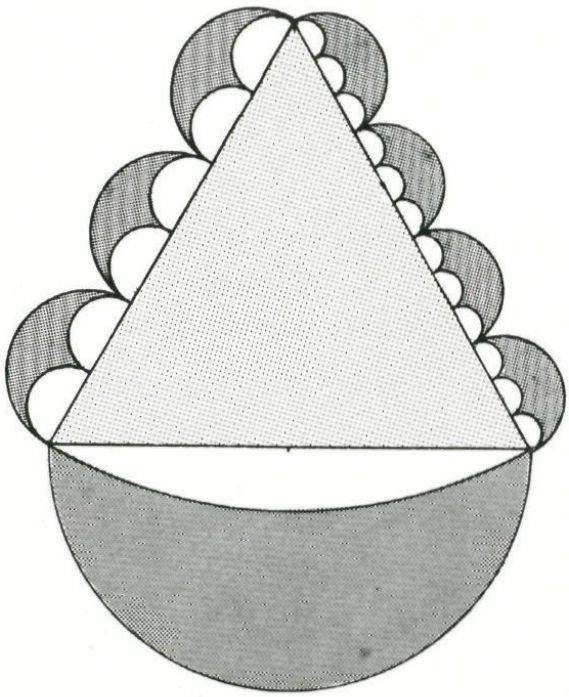
In de figuur op bladzijde 1 van Pythagoras 26 - 2, hebben cirkel en vierkant gelijke oppervlakte. Dat lijkt op een tegenvoorbeeld voor de bewering van Lindemann dat zoiets niet construeerbaar is. Maar. . . er is daar gebruikgemaakt van het 'afrollen' van de cirkel langs een rechte. En dat is in strijd met de klassieke constructie-spelregels.



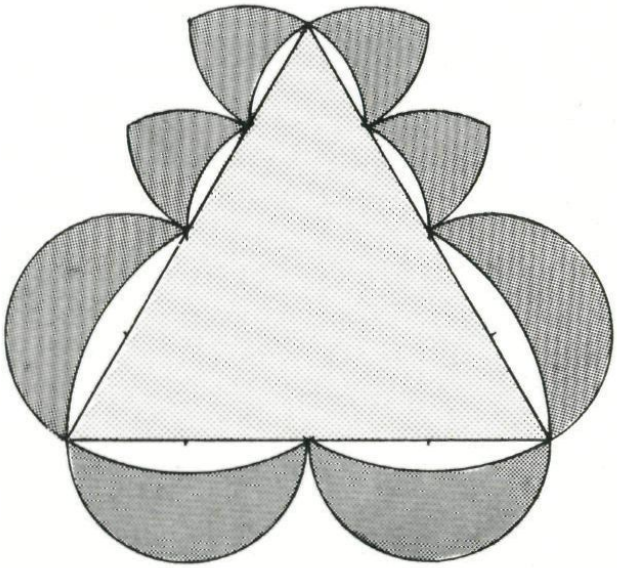
Figuur 1. De sikkel van Archimedes, even groot als de gearceerde cirkel.

Cirkels uit kromlijnige figuren

Sómmige door cirkelbogen begrensde figuren kunnen wél op een toegelaten manier worden omgevormd in een cirkel met gelijke oppervlakte. Maar in die gevallen is er dan weer géén *recht*lijnige veelhoek van te maken, zodat daaruit een even groot vierkant geconstrueerd zou kunnen worden. Het beroemdste voorbeeld is de 'sikkel van Archimedes' (figuur 1). De gearceerde cirkel heeft een even grote oppervlakte als het grijze gebied. En dat geldt zelfs voor élke verdeling van het basis-lijnstuk!

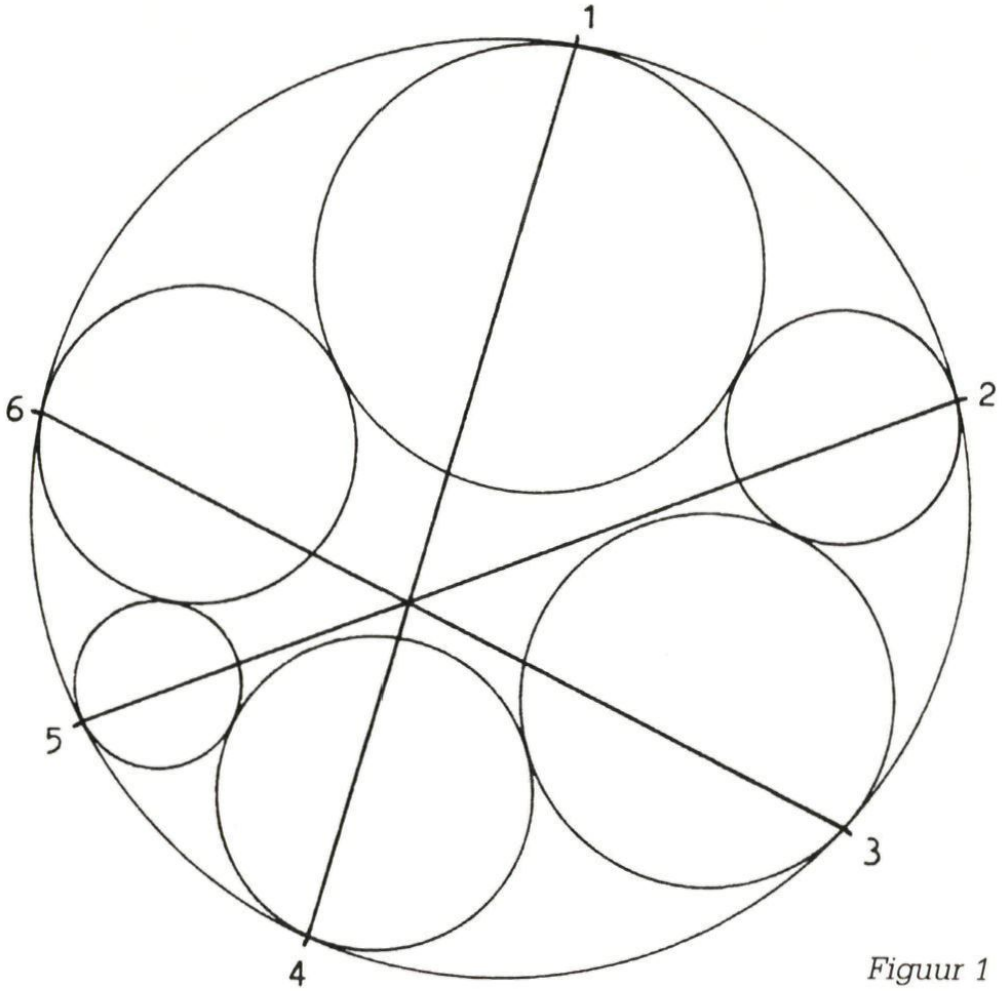


Figuur 2. De 'donkere' en de 'lichte' oppervlakte zijn even groot.



Figuur 3. Ook hier zijn de 'donkere' en de 'lichte' oppervlakte even groot.

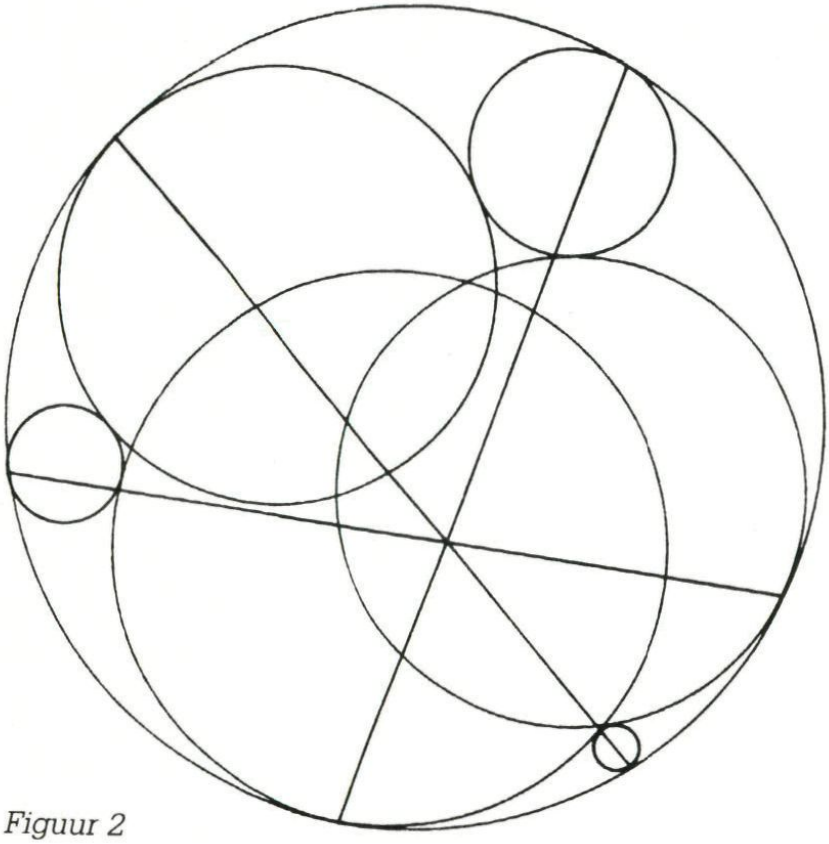
Een eigenschap van zeven cirkels



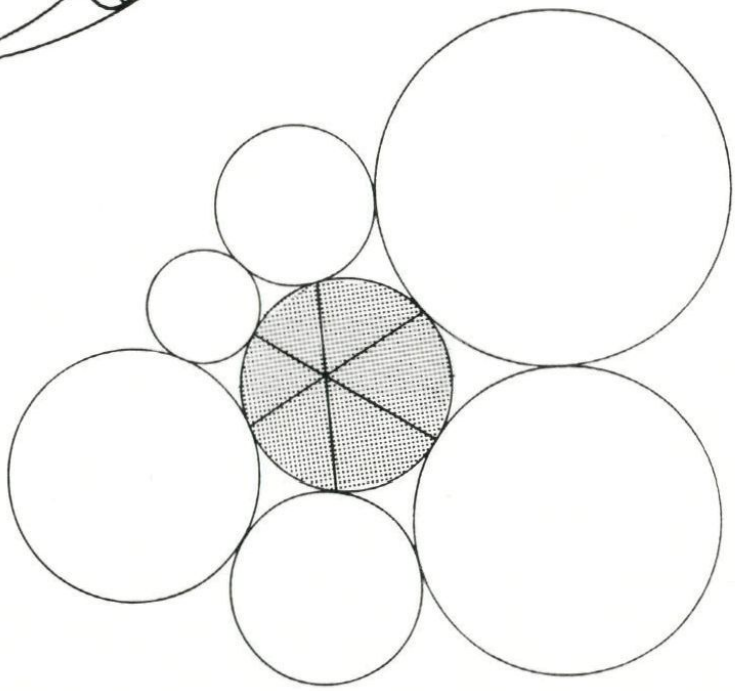
Figuur 1

Begrijp je, door alleen te kijken naar figuur 1, van welke meetkundige eigenschap hier een voorbeeld wordt gegeven?
Eén van de zeven cirkels speelt een speciale rol, we noemen hem de *hoofdcirkel*. De andere zes raken allemaal aan die hoofdcirkel, bovendien vormt dat zestal een gesloten keten van elkaar opvolgend rakende cirkels. Nummeren we de raakpunten aan de hoofdcirkel van 1 tot 6 en trekken we de lijnen 1-4, 2-5 en 3-6, dan . . . gaan die drie lijnen juist door één punt!
We vinden het een fraaie eigenschap. Het meest verrassende eraan is misschien nog wel het feit dat deze eigenschap pas in 1971 voor het eerst gevonden schijnt te zijn (*C. J. A. Evelyn, G. B. Money-Coutts, J. A. Tyrrell:* The Seven Circles Theorem and other new theorems; 1974). En dat terwijl dit soort eenvoudige vlakke meetkunde toch al duizenden jaren lang door zeer velen is onderzocht. Zouden er misschien dan toch nog méér niet-ontdekte eigenschappen zijn, eigenschappen die ook een niet-deskundige min of meer bij toeval zou kunnen vinden?

Een voorbeeld van wát?
In de eerste zin noemden we figuur 1 een *voorbeeld* van de erna in woorden beschreven eigenschap. Dat houdt in dat er ook ándere voorbeelden te geven zijn. Als je even naar de lange reeks van verdere figuren kijkt, krijg je een idee van wat nog meer mogelijk is.
Figuur 1 is het eenvoudigst omdat de zes 'keten-cirkels' elkaar daar nergens overlappen. Dat overlapping best mag vóórkomen zie je in figuur 2. De keten van zes rakende cirkels valt nu wat minder in het oog, maar zit er nog wel degelijk in.



Figuur 2



Figuur 3

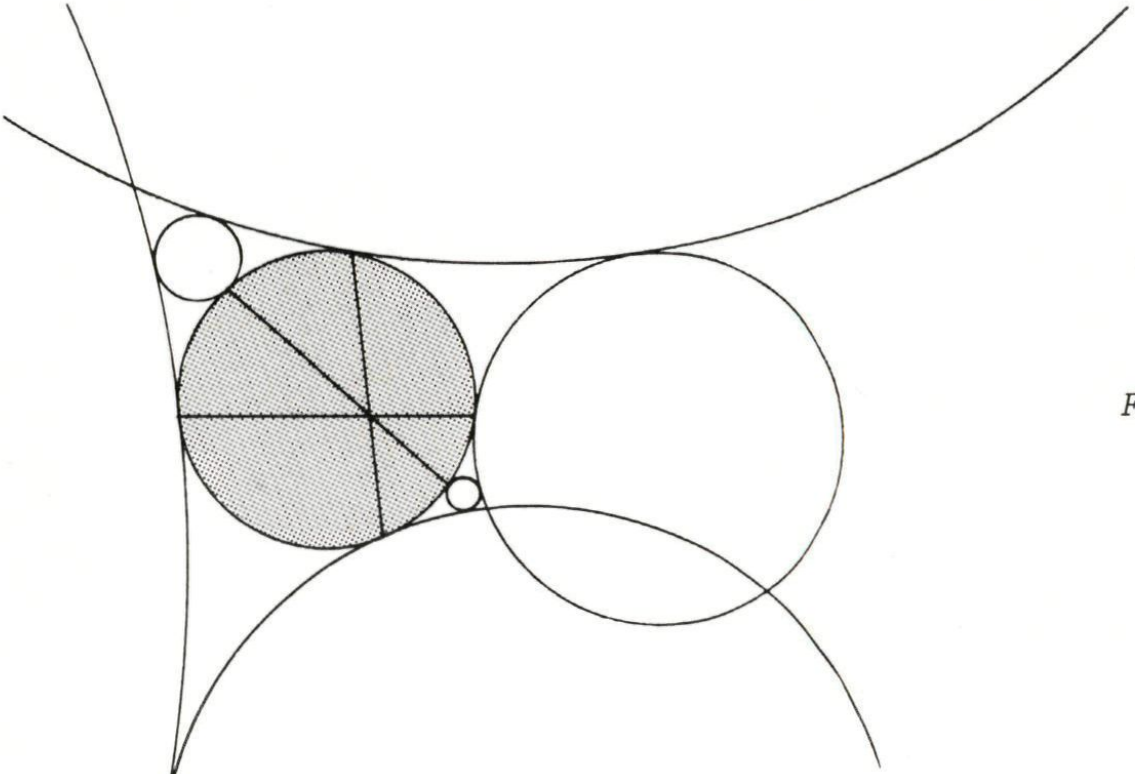
Buiten de hoofdcirkel

De keten-cirkels mogen evengoed aan de *buiten*kant tegen de hoofdcirkel raken. Zie figuur 3, en de wildere varianten in de figuren 4, 5 en 6.

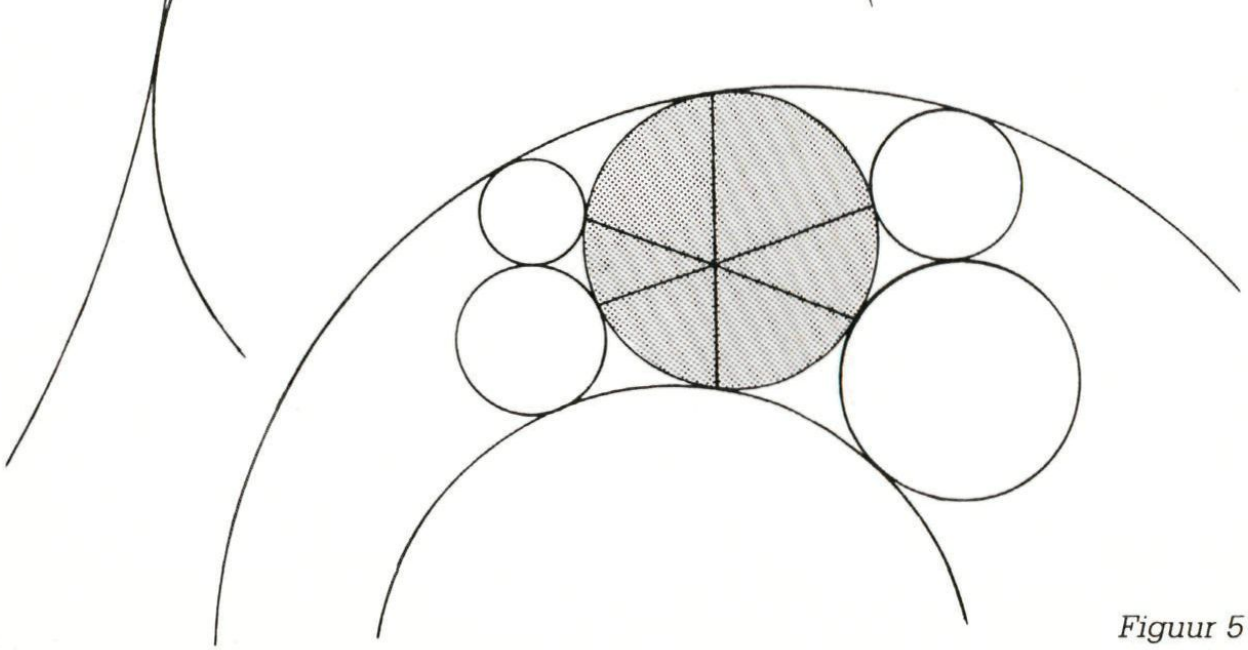
De grootste cirkels zijn maar gedeeltelijk getekend. Sommige zijn zó groot geworden dat ze het grensstadium van de rechte lijn gepasseerd zijn. Ze liggen dan, als het ware binnenste-buiten gekeerd, om de hoofdcirkel heen.

Ook het grensgeval zelf, waarbij het middelpunt van de cirkel 'in het oneindige' ligt, en de rand een rechte lijn is, mag meedoen. Zie figuur 7.

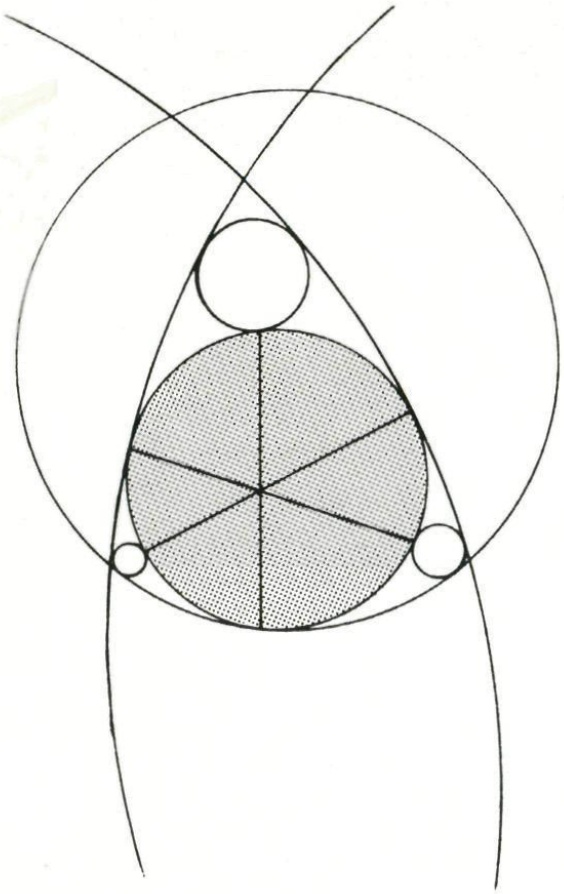
Bij figuur 8 is het nog wat gekker. Daar ráken twee van zulke rechte-lijn-cirkels elkaar. We kunnen alleen dat raakpunt zelf niet tekenen want het ligt óók oneindig ver weg. De eigenschap van de drie verbindingslijnen in de hoofdcirkel geldt nog steeds!



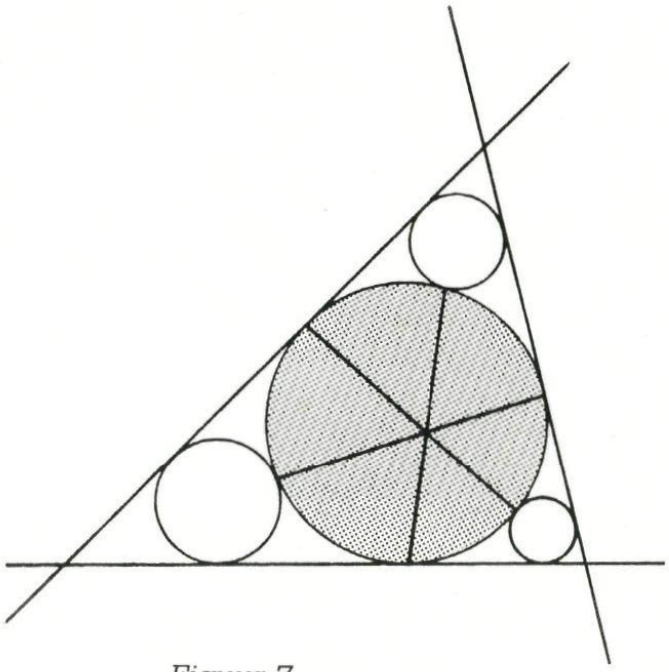
Figuur 4



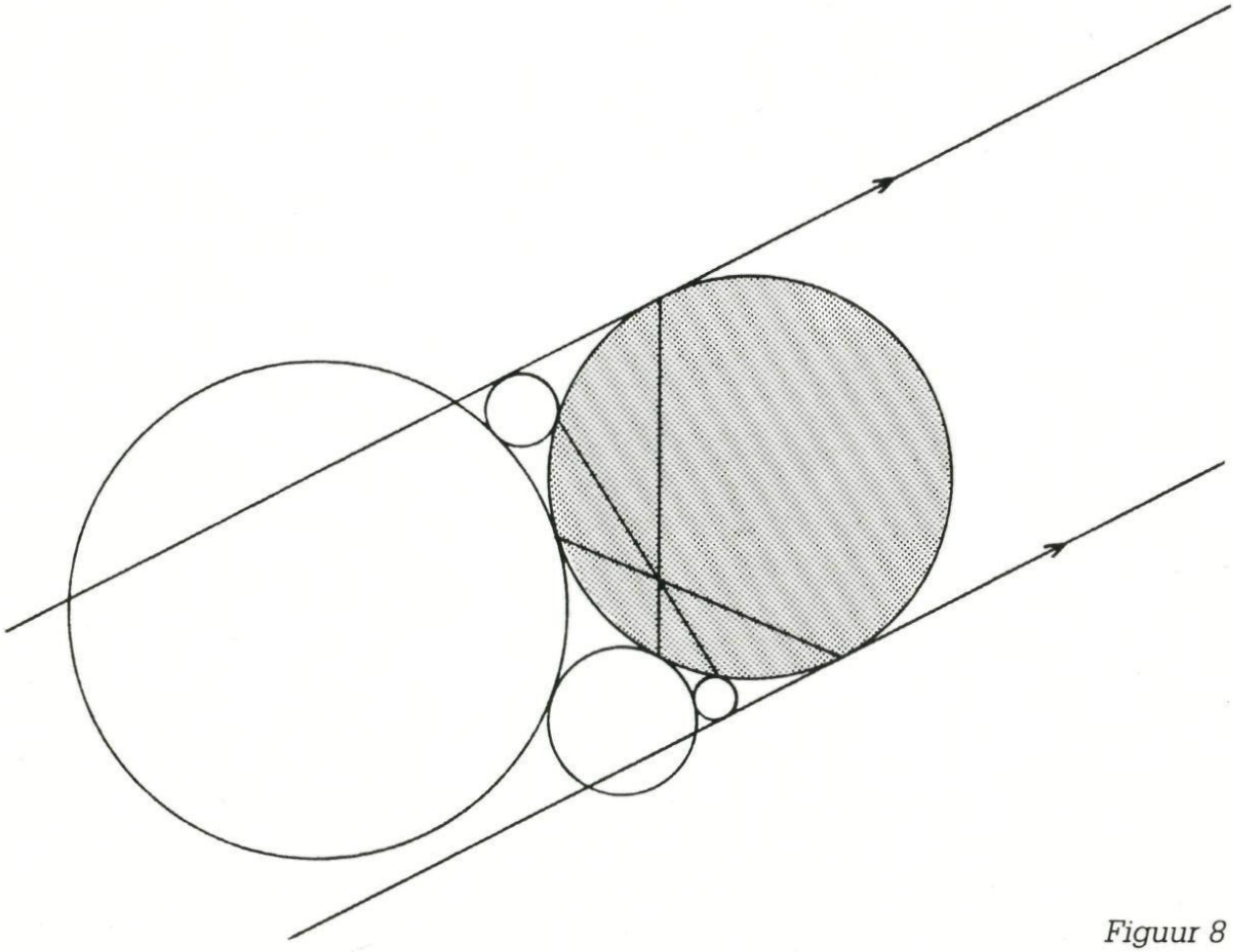
Figuur 5



Figuur 6



Figuur 7

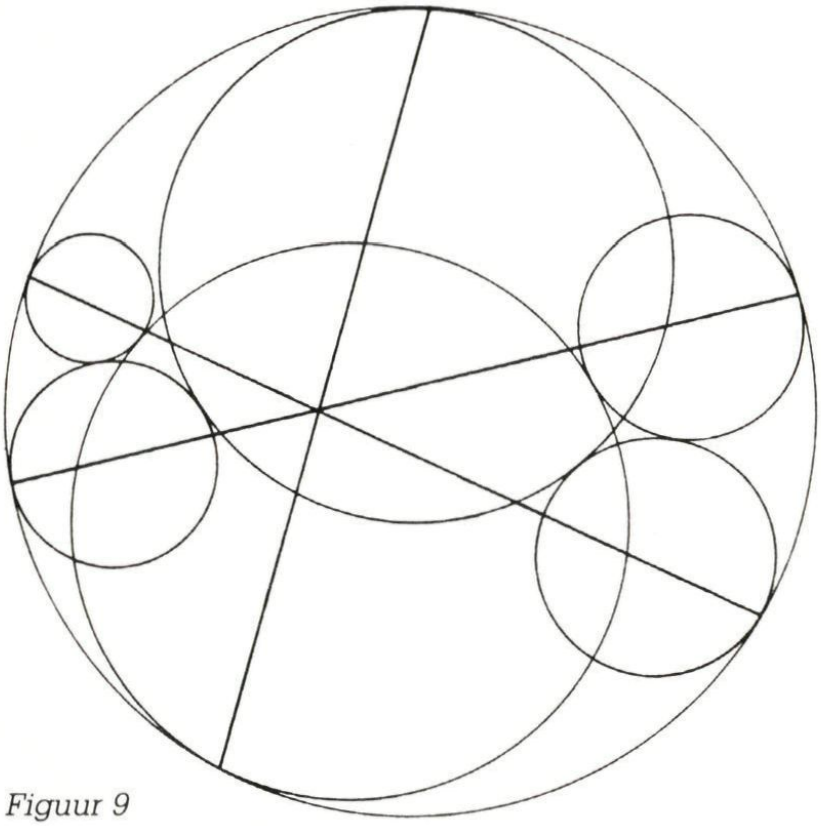


Figuur 8

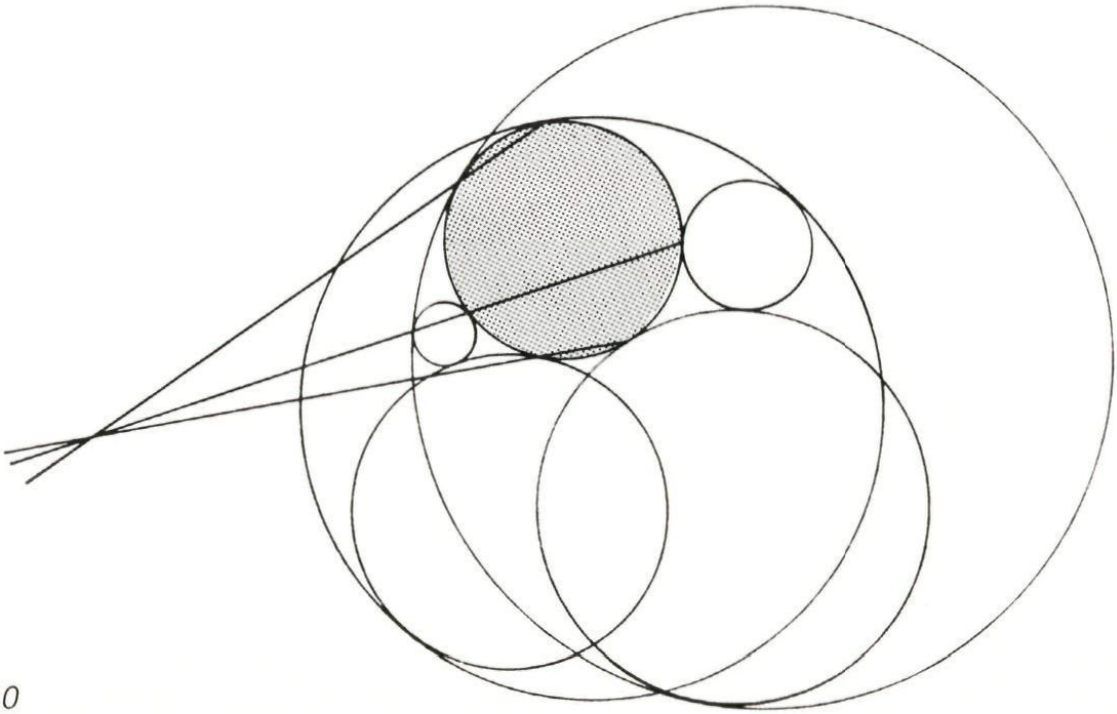
Nog ingewikkelder

Ook in de figuren 9, 10 en 11 is nog steeds sprake van een keten van zes cirkels, elk rakend aan twee buren en aan de hoofdcirkel. Het blijkt dat het gemeenschappelijk snijpunt van de drie verbindingslijnen ook wel eens *buiten* de hoofdcirkel kan vallen.

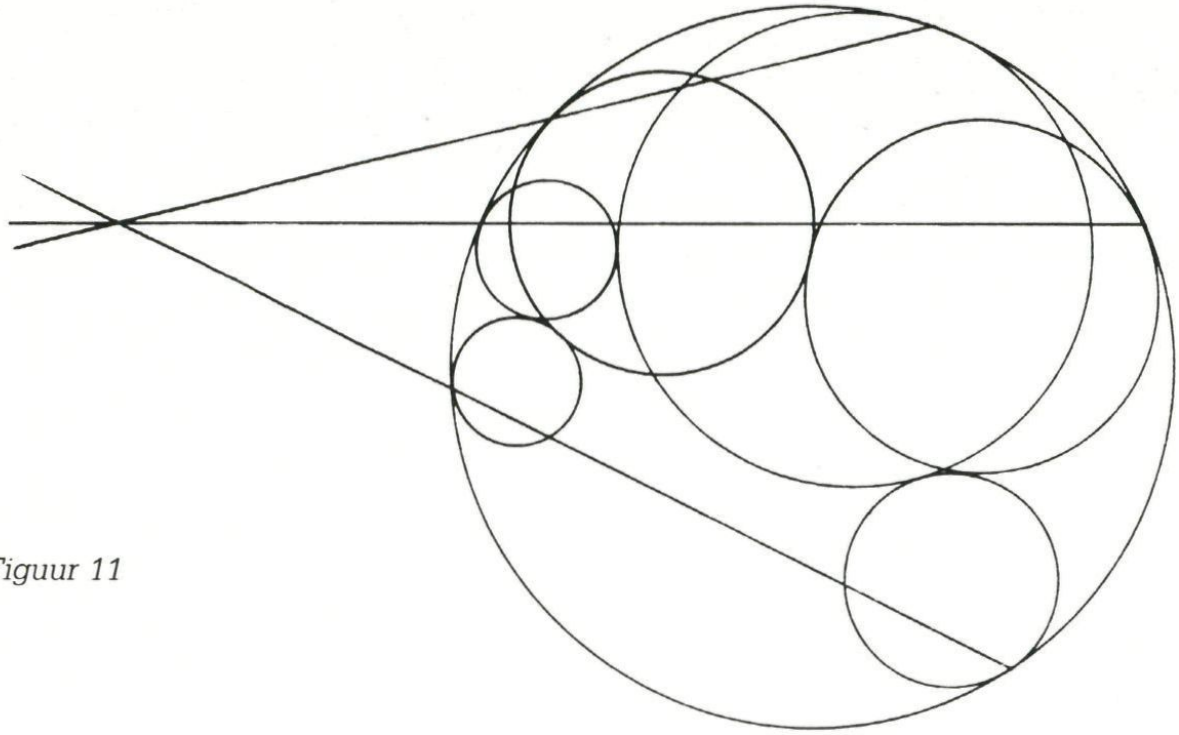
In het geval van figuur 12, waar de verbindingslijnen een evenwijdig drietal vormen, ligt dat snijpunt in het oneindige.



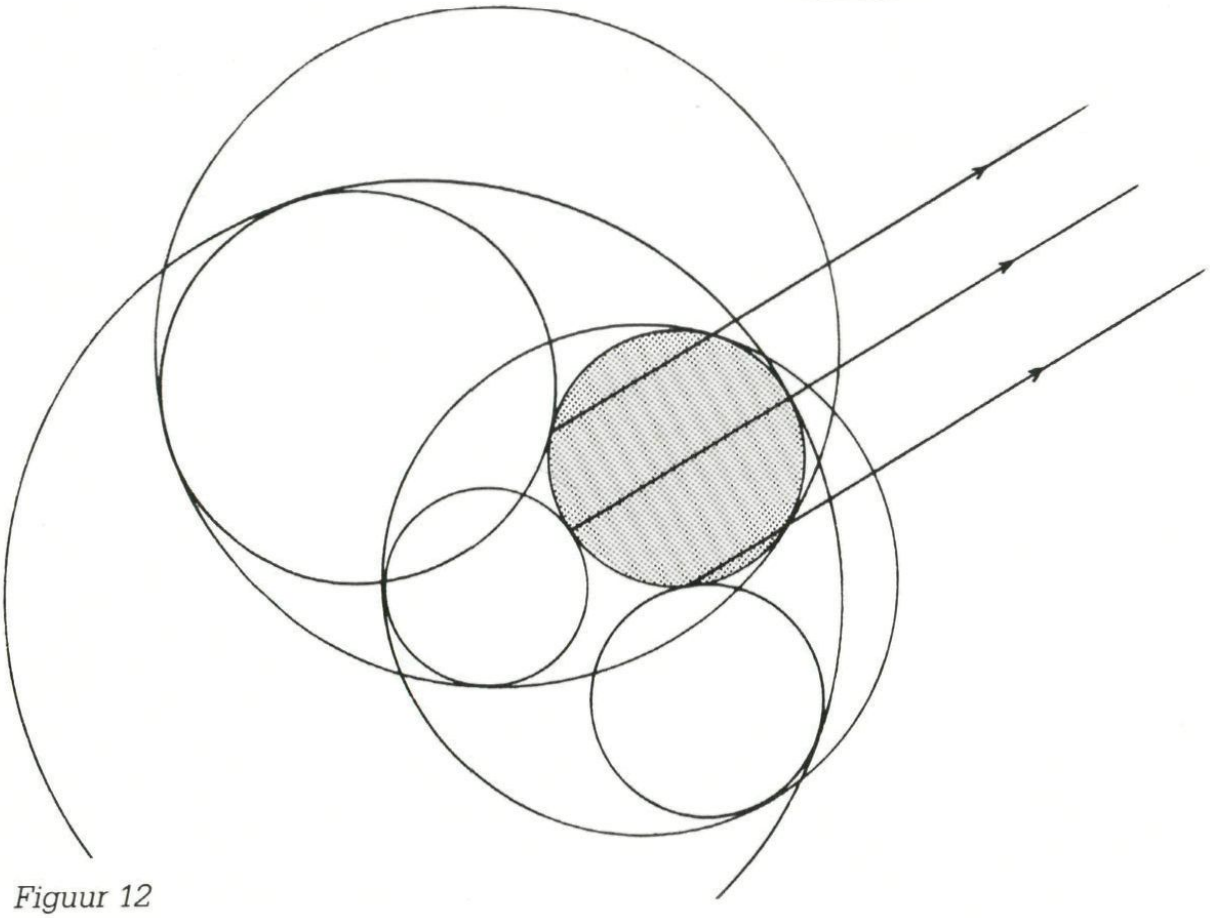
Figuur 9



Figuur 10



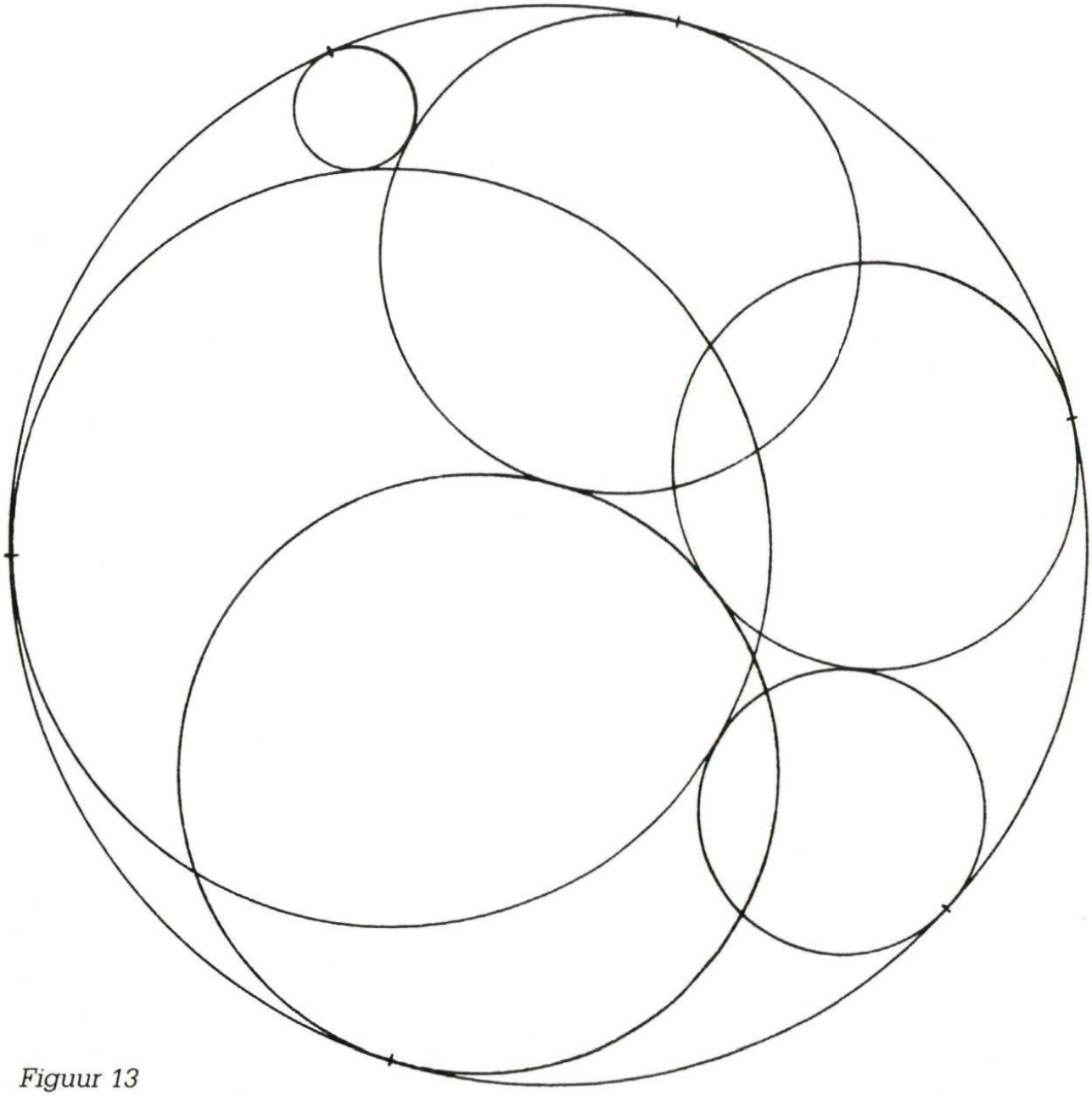
Figuur 11



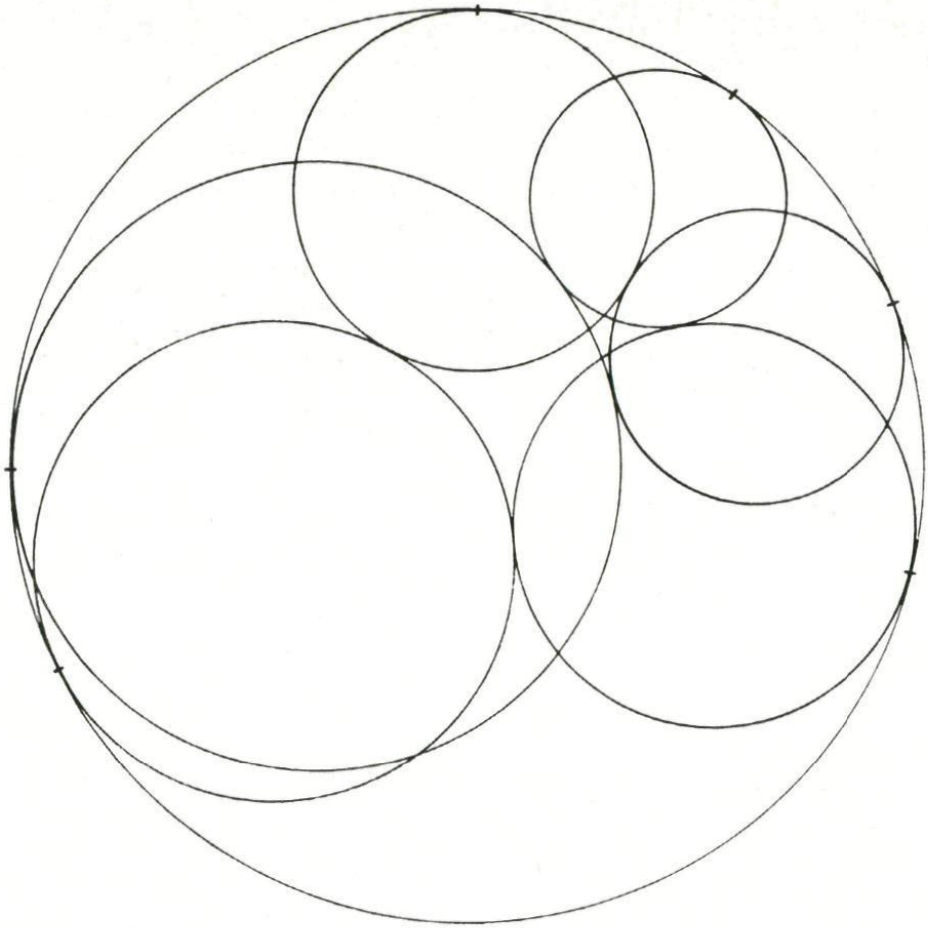
Figuur 12

Heeft het zin om naar een bewijs te zoeken?
Ik kan me helemaal aansluiten bij de lezer die op deze vraag reageert met: Is dat nou nodig? De eigenschap zelf is leuk en boeiend; alle varianten laten overduidelijk zien dat het echt altijd opgaat. Al twaalf keer! Het zoeken naar een bewijs heeft daarom geen enkele functie meer.

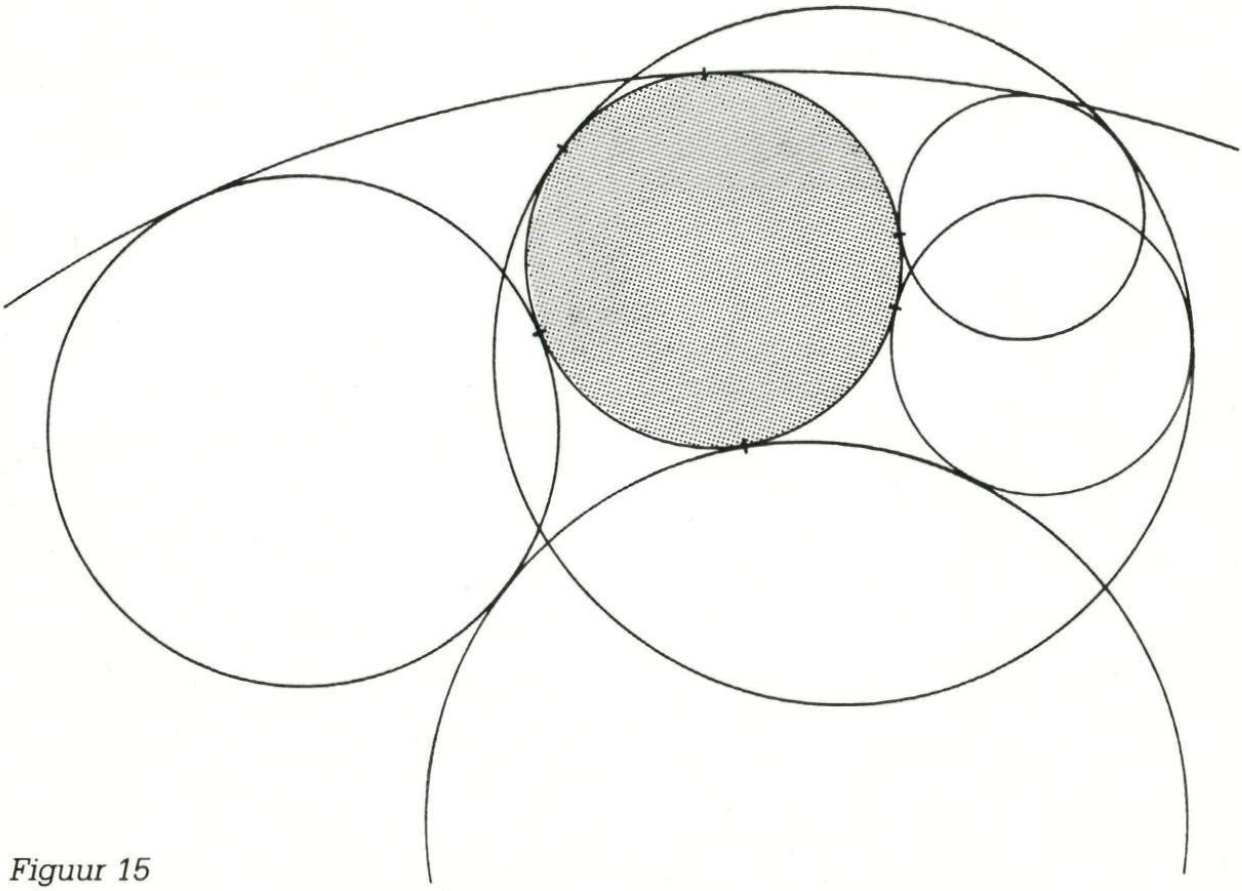
Of . . . brengt figuur 13 ongeluk
Als slot een kleine teken-opgave. Kijk naar figuur 13. Je ziet daar wéér een hoofdcirkel met erin zes keten-cirkels, waarvan elk opvolgend tweetal elkaar raakt, en die alle zes aan de hoofdcirkel raken. Nummer de raakpunten aan de hoofdcirkel van 1 tot 6, overeenkomend met de volgorde van de cirkels in de keten. Waar je met 1 begint, en in welke richting je de keten rondgaat, doet er niet toe (dit was in de eerdere figuren ook niet van belang). Verbind nu weer 1 met 4, 2 met 5, en 3 met 6, en zoek het gemeenschappelijke snijpunt . . .
Probeer het ook in de figuren 14 en 15.



Figuur 13



Figuur 14



Figuur 15

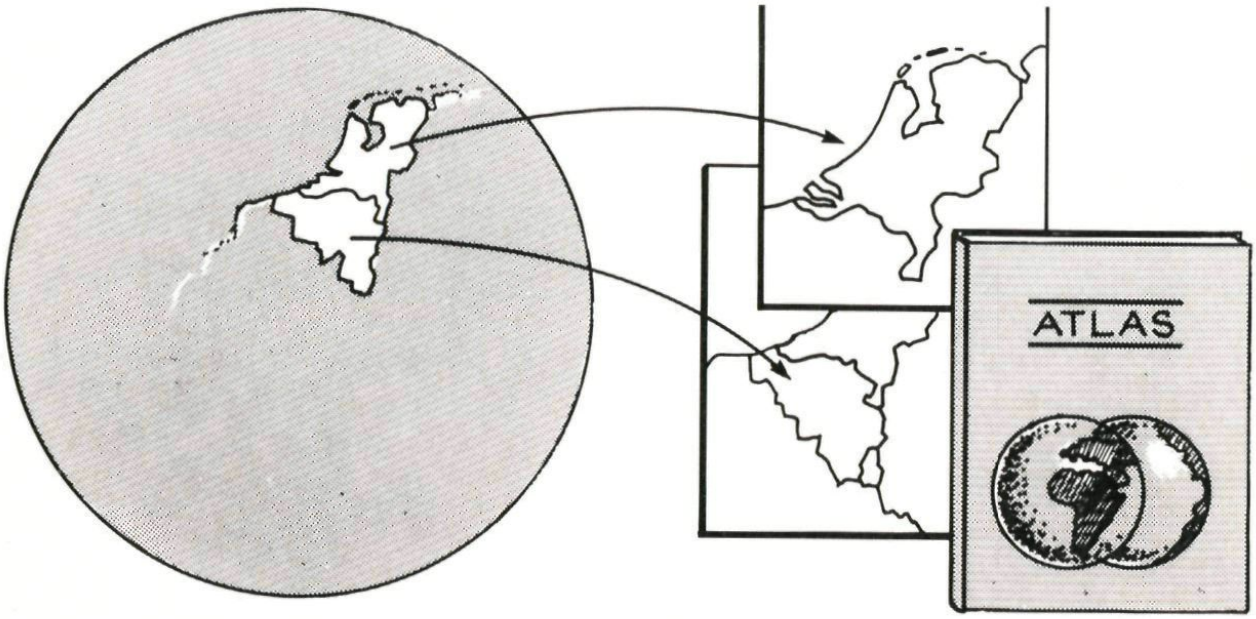
Riemannse ruimten

In het artikel 'Ruimte' (Pythagoras 26-3) hebben we kennisgemaakt met n-dimensionale ruimten in hun meest algemene vorm. Er werd in dat artikel ook al opgemerkt dat een riemannse ruimte een (gekromde) n-dimensionale ruimte is met een afstandsbegrip of metriek. Wat er in het platte vlak onder afstand moet worden verstaan is bekend. Minder eenvoudig is dat echter voor gekromde ruimten, zeker als je die ruimten niet van buiten af kunt bekijken. Uitgaande van het afstandsbegrip voor het platte vlak, zullen we eerst aangeven wat er onder een metriek moet worden verstaan in een gekromde twee-dimensionale ruimte. Daarna zullen we nog iets zeggen over het bepalen van afstanden in hoger dimensonale ruimten.

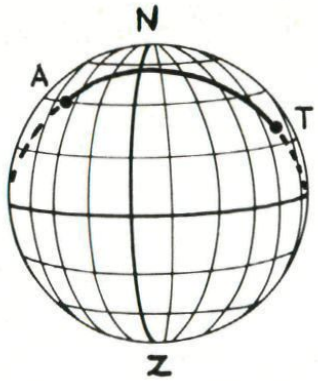
We hebben gezien hoe je bij een gekromd oppervlak (een 'gekromde twee-dimensionale ruimte') een *atlas* van *kaarten* kunt maken. Een kaart geeft een afbeelding van een deel van het oppervlak, met daarop aangebracht een coördinatenstelsel. Alle kaarten samen, de atlas, overdekken het hele oppervlak (figuur 1).
Op elkaar overlappende stukken moet het verband tussen de kaarten bekend zijn, dat wil zeggen dat bekend moet zijn hoe de coördinaten van het ene stelsel worden uitgedrukt in die van het andere stelsel.

Afstanden op een bol

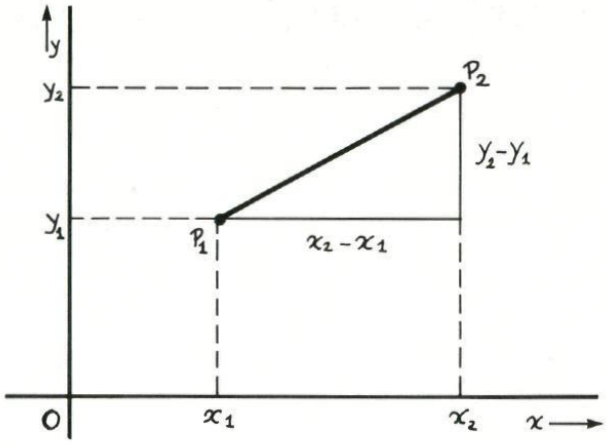
We zullen nu laten zien hoe je in zo'n gekromd oppervlak afstanden kunt bepalen. Als voorbeeld nemen we het oppervlak van een bol. Denk maar aan onze vertrouwde aardbol. Afstanden meet je langs kortste verbindingslijnen. Op de bol zijn dat de grote cirkels, cirkels waarvan het



Figuur 1. Een atlas van kaarten voor het aardoppervlak.



Figuur 2. De meridianen en de evenaar zijn grote cirkels, de breedtecirkels niet. De kortste weg van Amsterdam (A) naar Tokio (T) is een grote cirkel over de Noordpool.



Figuur 3. De stelling van Pythagoras in orthonormale coördinaten.

middelpunt samenvalt met dat van de bol. Enkele voorbeelden van grote cirkels zijn de meridianen en de evenaar. Maar de andere breedtecirkels niet (figuur 2). Een vliegtuig dat bij voorbeeld langs de kortste weg van Amsterdam naar Tokio vliegt, gaat niet via een breedtecirkel (wat je misschien zou verwachten op grond van een wereldkaart), maar langs een grote cirkel. Deze loopt ongeveer over de Noordpool. Op een globe is dat direkt te zien.

Bolbewoners

Denk je nu eens in dat er 'twee-dimensionale' wezens op het bol-oppervlak leven die er niet 'van buiten af' op kunnen kijken. Dit is min of meer te vergelijken met de situatie waarin wij, aardbewoners, verkeerden voordat de ruimtevaart haar intrede deed. Deze bolbewoners beschikken alleen over twee-dimensionale kaarten. Uit die kaarten moeten ze dan toch kunnen opmaken hoe de kortste verbindingslijnen lopen. Op veel kaarten worden die kortste verbindingslijnen *niet* door rechte lijnen gegeven. Vaak worden bij voorbeeld de meridianen en breedtecirkels als verticale en horizontale rechte lijnen getekend. Zo is op de wereldkaarten de kortste verbinding tussen Amsterdam en Tokio een kromme lijn.

Afstand op detailkaarten

Nemen die bolbewoners echter een *detailkaart* van een *klein* gebied, te vergelijken met bij voorbeeld de provincie Utrecht in het geval van onze aardbol, dan hebben ze nauwelijks problemen. Zo'n klein gebied is in ruwe *benadering* immers als een stukje plat vlak op te vatten. Op een goede kaart zijn de kortste verbindingen dan gewoon rechte lijnen. Heeft die kaart een orthonormaal coördinatiestelsel (de rechthoekige cartesische coördinaten waarmee je op school hebt leren werken), dan wordt de afstand s tussen twee punten P_1 en P_2 met coördinaten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) volgens de stelling van Pythagoras (figuur 3) gegeven door de formule

$$s = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$

Redding uit het oneindig kleine
Helemaal ideaal is dit nog niet. Willen die bolbewoners het écht goed doen, dan moeten ze een ontzaglijk klein stukje boloppervlak nemen. Zó klein, dat twee punten P_1 en P_2 ontzettend dicht bij elkaar liggen in vergelijking met de straal van de bol. Dat betekent dat de afstand s en de coördinaatverschillen $x_2 - x_1$ en $y_2 - y_1$ ook heel klein zijn, weer met betrekking tot de straal van de bol.
Om dit tot uitdrukking te brengen geven we de afstand op zeer kleine schaal aan met ds en de coördinaatverschillen met dx en dy. Voor dat ontzaglijk kleine stukje boloppervlak kunnen de bolbewoners weer een orthonormaal coördinatenstelsel kiezen. Daardoor wordt de afstand ds tussen die twee dicht bij elkaar gelegen punten, gegeven door de eenvoudige pythagoras-formule, nu dus te schrijven als

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} \qquad (2)$$

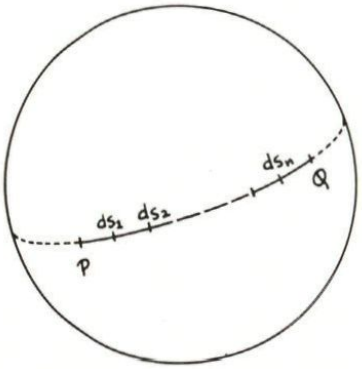
Zouden ze andere coördinaten invoeren, iets wat in de praktijk geregeld voorkomt, dan kunnen ze ds ook in die andere coördinaten uitdrukken, maar de formule wordt dan vaak ingewikkelder.

Bolbewoner meet afstand
Wat moeten de bolbewoners nu doen om de afstand s te vinden tussen twee punten P en Q die heel ver van elkaar verwijderd liggen? Lang geen flauwe vraag: denk maar eens aan het probleem hoe vroeger zeelieden hun koers moesten bepalen. Het bepalen van de afstand tussen P en Q is niet zo eenvoudig, omdat er een heleboel wegen van P naar Q mogelijk zijn. En de bolbewoners weten natuurlijk niet van te voren welke weg de kortste is.
In een plat vlak weet je wel wat de kortste weg is: een rechte lijn van P naar Q. Op een bol weet een buitenstaander ook wat de kortste weg is: een grote cirkel door P en Q. Maar een bolbewoner die niet buiten het boloppervlak kan komen, heeft niet zo maar weet van grote cirkels. Er blijft de bolbewoners in principe niets anders over dan voor *alle* wegen tussen P en Q de afstand te bepalen. Daaruit moet hij dan de weg tussen P en Q kiezen die de kortste afstand heeft.

De afstand s van een weg tussen P en Q bepalen de bolbewoners door deze weg in héél kleine stukjes te verdelen (figuur 4). Hoe kleiner, hoe beter. De lengte van ieder van die stukjes bepalen ze met de pythagoras-formule (2). En de afstand s wordt dan de som van de afstanden ds_1 van al die kleine stukjes. Dus

$$s = ds_1 + ds_2 + \ldots + ds_n$$

Je ziet, een moeizame weg, maar onvermijdelijk als je niet weet hoe de kortste verbindingslijnen op grote kaarten lopen.



Figuur 4

Gekromd?

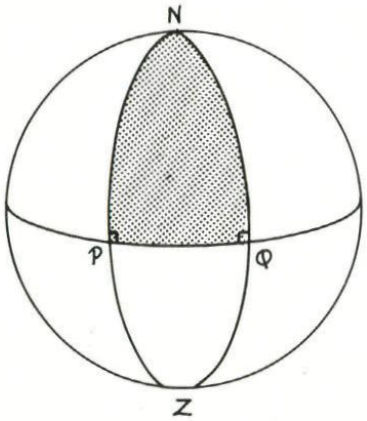
Hoe komen twee-dimensionale bolbewoners er trouwens achter dat ze inderdaad in een gekromde ruimte leven? Je zou misschien kunnen zeggen: omdat ze merken dat op hun grote kaarten de rechte lijnen meestal geen kortste verbindingslijnen zijn. Maar dat zou aan hun grote kaarten kunnen liggen.

Kunnen ze dan geen grote kaarten maken die niet aan dit euvel lijden? Het ligt voor de hand te vermoeden dat dit voor een bol niet kan, want anders zouden wij zulke kaarten ook wel in onze eigen atlassen gebruiken.

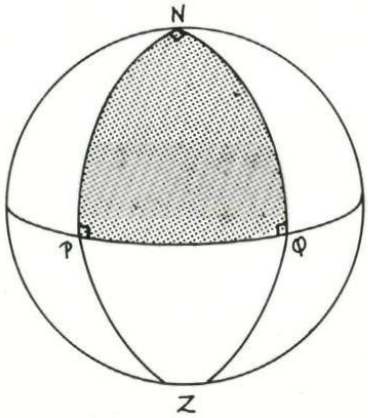
Waarom het niet kan is niet in een paar woorden uit te leggen. Grote wiskundigen als Gauss en Riemann hebben zich in de vorige eeuw diepgaand met dit soort problemen beziggehouden. Zij vroegen zich met name af hoe het mogelijk is om vast te stellen of een ruimte gekromd is, als je alleen maar gebruik kan maken van de meetkunde in die ruimte zelf. Bovendien vroegen ze zich af hoe je de 'kromming' dan zou moeten definiëren zonder buiten de ruimte te komen.

Bolbewoner ontdekt kromming

Een bolbewoner die niet van buiten af op de bol kan kijken, kan aan de meetkunde zien dat hij op een gekromd oppervlak leeft. Rechte lijnen zijn voor hem natuurlijk de kortste verbindingslijnen in het oppervlak. Een driehoek bestaat uit drie recht lijnstukken. Hoeken meet hij op de gewone manier, want op detailkaarten is de meetkunde precies hetzelfde als de gewone, 'platte' meetkunde. Maar als die bolbewoner nu eens naar een hele grote driehoek kijkt, bij voorbeeld een driehoek op de aardbol gevormd door twee meridianen en de evenaar (figuur 5), dan merkt hij dat die driehoek *twee rechte hoeken* heeft! Sterker nog, er bestaan zelfs driehoeken met drie rechte hoeken (figuur 6). Een bolbewoner die zo iets ontdekt, weet dat hij niet op een plat oppervlak leeft. Immers in een plat vlak is de som van de hoeken van een driehoek 180°. Wat het dan wel voor een oppervlak is zal hij door verder onderzoek te weten moeten zien te komen. Is die kromming meetbaar? En is het oppervlak overal even sterk gekromd? Het zou te ver voeren



Figuur 5



Figuur 6

hier verder op door te gaan, maar misschien snap je voor wat voor problemen de twee-dimensionale bolbewoner komt te staan als hij zijn wereld wil onderzoeken.

Ruimte-bewoner

Waarom is dit alles zo uitgebreid behandeld? Om je voor te bereiden op het afstandsbegrip in een gekromde drie-dimensionale ruimte. Stel je voor dat onze twee-dimensionale oppervlak-bewoner nu een drie-dimensionale ruimte-bewoner wordt. Zijn detailkaarten worden dan *detailruimten,* modellen van kleine stukjes van zijn ruimte. Hij voorziet ze van drie-dimensionale coördinatenstelsels, en op zeer kleine schaal kan hij afstanden met de pythagoras-formule uitdrukken in coördinaatverschillen.

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

De onvermijdelijke overgang op andere coördinatenstelsels zal weer via eenvoudige of minder eenvoudige transformatie-formules geschieden. Gewapend met dit instrumentarium kan de ruimte-bewoner de meetkundige structuur van zijn ruimte gaan onderzoeken. Dit zou bij voorbeeld weer kunnen door de som van de hoeken van allerlei driehoeken te bepalen.

Is die ruimte 'plat' of 'gekromd'? Riemann heeft voor het eerst gekromde drie-dimensionale ruimten beschreven en onderzocht.

Meer dimensies

Heb je eenmaal de stap van dimensie 2 naar dimensie 3 gezet, dan kun je nog hoger klimmen, en n-dimensionale gekromde ruimten beschrijven en onderzoeken. Riemann's werk heeft niet alleen de meetkunde fundamenteel veranderd, maar ook tot allerlei toepassingen in de natuurkunde geleid, onder andere in de relativiteitstheorie. Uitgangspunt is steeds een ruimte die op voldoende kleine schaal een gewone ruimte is met afstanden die ten opzichte van een orthonormaal coördinatenstelsel beschreven worden via een pythagoras-formule, maar die op grote schaal bekeken, gekromd kan zijn, met een kromming die bovendien nog geleidelijk kan veranderen.

Misschien hebben we je hiermee een glimp laten zien van dit fascinerende grensgebied tussen meetkunde en fysica.

Denkertje

Hoe ziet de verzameling punten eruit waarvan de coördinaten x, y, z (in een rechthoekig assenstelsel) voldoen aan:

$$\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} \cdot \sqrt{1-z^2} = 0$$

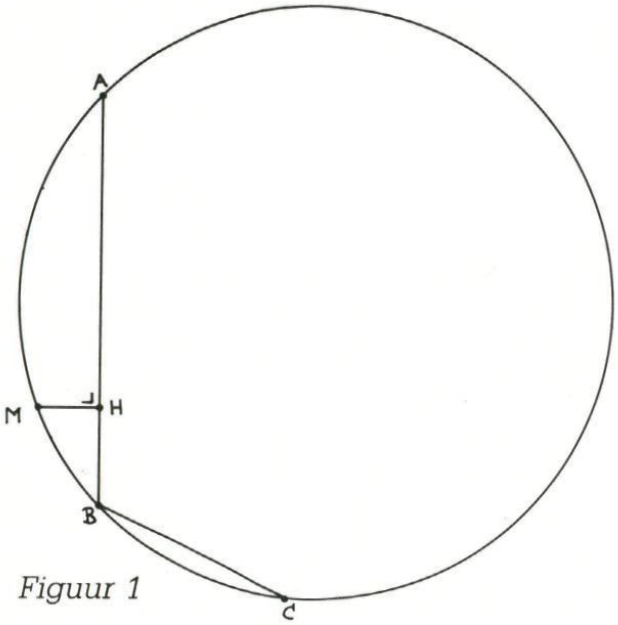
Het antwoord is te geven in één woord van vijf letters.
(Deze opgave is bedacht in een 5e klas van het Wagenings Lyceum. Wie een aanwijzing nodig heeft, kan die vinden in Pythagoras 26-1 op bladzijde 11 en 16).

Een sommetje van Archimedes: oplossing

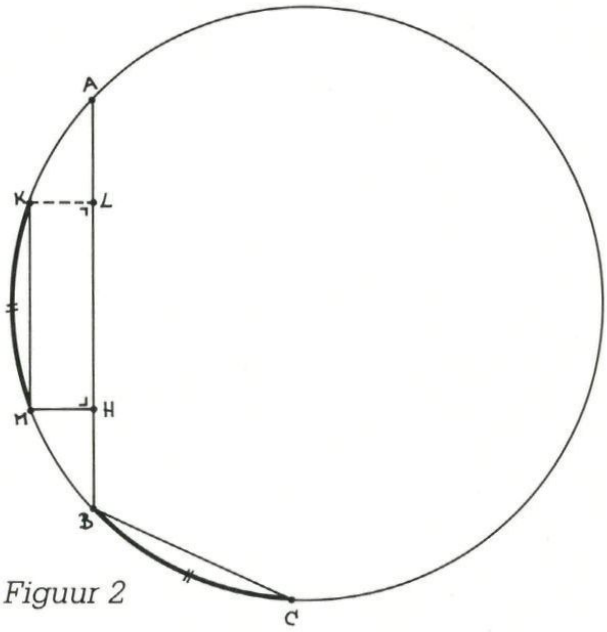
Vorige maand plaatsten we een sommetje van Archimedes, dat was overgenomen uit ons Russische zusterblad KWANT. Het ging er om te bewijzen dat in figuur 1 geldt dat

$$AH = HB + BC$$

als gegeven is dat M het midden is van de cirkelboog ABC.
We vinden het eigenlijk niet zo leuk om hier een droog bewijs op te schrijven. Liever vullen we de tekening wat aan, zodat je na enig nadenken de oplossing zélf kunt ontdekken. Kijk maar naar figuur 2.



Figuur 1



Figuur 2

Het punt K is daar zó gekozen, dat de bogen KM en BC gelijk zijn. De clou van de zaak is nu dat je opmerkt dat het lijnstuk KM evenwijdig is aan AB. Zie je zelf waarom? (Bedenk dat M het midden is van boog AB, en leid daaruit af dat de bogen AK en MB gelijk zijn.) Als je dan nog bedenkt dat $KLHM$ dus een rechthoek is, en dat daarom $LH = KM = BC$, zal de rest je wel duidelijk zijn!

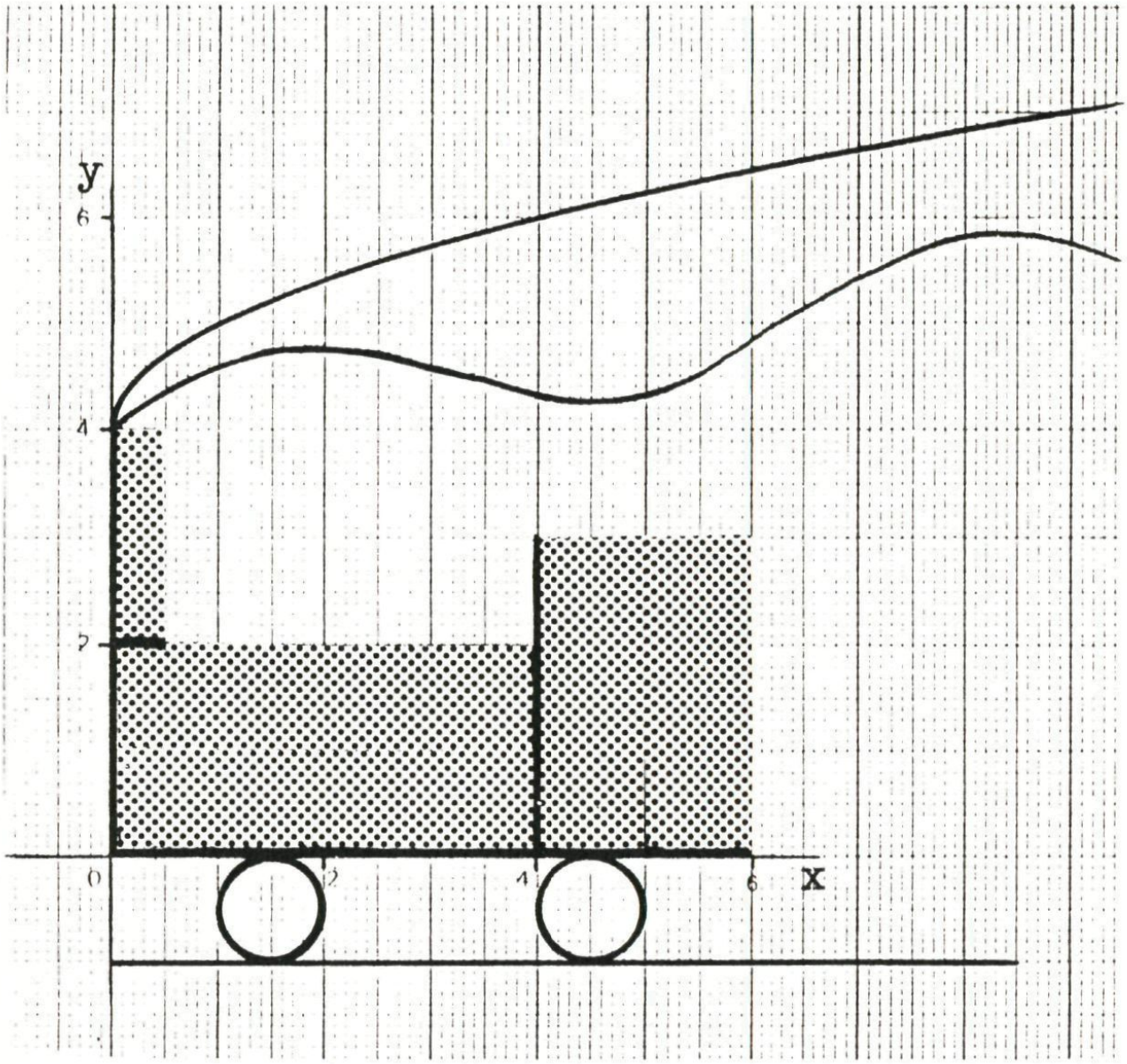
Goede oplossingen ontvingen we van *Jan Hut* (Middelburg), *Harry Wilderink* (Twello) en *F. J. Luider* (Groningen).

Deelbaarvrije series

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37

Onder deze twaalf getallen is er geen enkel dat deelbaar is door één van de andere. Geen wonder, want het zijn de eerste twaalf priemgetallen.
Er zijn echter ook series van twaalf (positieve, gehele) getallen die *niet* allemaal priem zijn, en waarvoor toch dezelfde eigenschap geldt. Zoek zo'n serie, en probeer het grootste van die twaalf getallen zo klein mogelijk te houden.

Een formule die loopt als een trein



$$\underset{A}{\left\{\left[\frac{x}{4}\right]^2+\left[\frac{y}{2}\right]^2\right\}}\cdot\underset{B}{\left\{\left[\frac{x}{2}-2\right]^2-\left[\frac{y}{3}\right]^2\right\}}\cdot\underset{C}{\left\{\left[2x\right]^2+\left[\frac{y}{2}-1\right]^2\right\}}\cdot\underset{D}{\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}}\cdot$$

$$\cdot\underset{E}{\left\{\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}}\cdot\underset{F}{\left\{\sqrt{x}+4-y\right\}}\cdot\underset{G}{\left\{\frac{x}{6}+\frac{\sin x}{2}+4-y\right\}}\cdot\underset{H}{\left\{y+1\right\}}=0$$

Hebben het simpele locomotiefje en de formule eronder, iets met elkaar te maken? Ja zeker! We zullen zien.

De entier-functie

Bij het woord *grafiek* denk je vaak in de eerste plaats aan een ononderbroken rechte, of vloeiende kromme lijn. Er is echter op grafiekengebied meer te koop. Neem maar de *entier-functie*, met alle reële getallen als originelen en alleen de (positieve én negatieve) gehele getallen als functiewaarden. 'Entier' is het Franse woord voor 'geheel'.

Als we schrijven: $[x]$, zeggen we daar tegen: de entier van x, en bedoelen daarmee: het grootste gehele getal dat kleiner is dan, of gelijk aan x.

Voorbeelden:

$[0{,}1] = 0$, $[0{,}5] = 0$, $[0{,}9] = 0$,

$[1] = 1$, $[1{,}99] = 1$, $[2{,}0] = 2$,

$[\pi] = 3$,

en ook (pas op) $[-0{,}1] = -1$,
$[-62] = -62$.

'De entier nemen van x' wil dus zeggen: x naar beneden afronden op een geheel getal. Wanneer je van deze functie de grafiek tekent, krijg je een soort trap, met alleen horizontale treden die links wel een beginpunt, maar rechts geen eindpunt hebben.
De vierkante haken hebben hier dus een heel andere betekenis dan de gewone 'voorrangshaakjes'. $[x]^2$ is meestal niet gelijk aan $[x^2]$, want bijvoorbeeld:

$$\left[\frac{5}{2}\right]^2 = 2^2 = 4 \text{ en } \left[\left(\frac{5}{2}\right)^2\right] = \left[\frac{25}{4}\right] = 6.$$

In de formule onder de locomotief komt deze speciale 'afrondings'-functie zes keer voor. Soms met de x tussen de vierkante haken, en soms met de y. Dit afronden zowel in de x-richting als in de y-richting, heeft tot gevolg dat in de tekening in plaats van lijnen volle (rechthoekige) gebieden door de formule worden voorgesteld.

De loc-formule

De grote formule aan het begin bestaat uit acht factoren (elk tussen een stel accoladen), met als produkt *nul*. De hoofdletters A, B, ..., H onder die factoren dienen alleen om er makkelijk naar te kunnen verwijzen.
In deze formule, een vergelijking in de variabelen x en y, zit de hele treintjesfiguur opgesloten. En wel op de volgende manier: een punt in het vlak van tekening met coördinaten (x,y) hoort wél/niét bij het treintjesfiguur, als die getallen x en y wél/niét voldoen aan de vergelijking.
Onze vergelijking is wel lang, maar toch niet al te ingewikkeld. Want een getallenpaar (x,y) voldoet aan de vergelijking als geheel, als het ten minste één van de factoren A, B, ..., H nul laat zijn. Want 'iets-keer-nul-keer-iets' is altijd nul! Op deze manier heeft elk van de acht factoren in de formule, te maken met één bepaald onderdeel in de figuur. De eerste drie (de lastigste) hebben te maken met de drie grijze rechthoeken in de loc-figuur. Eén ervan bekijken we wat uitvoeriger.

Factor C

De derde factor (C) van de formule stelt – nulgesteld – de pijp van de trein voor. Kijk maar:

$$\left[2x\right]^2 + \left[\frac{y}{2} - 1\right]^2 = 0 \iff$$

De som van de twee kwadraten kan alleen maar nul zijn als *beide* grondtallen nul zijn, dus

$$\left[2x\right] = 0 \text{ én } \left[\frac{y}{2} - 1\right] = 0 \Longleftrightarrow$$

Nu de betekenis van de rechte haken goed tot je laten doordringen. (Als de entier van iets gelijk aan 0 is, moet dat 'iets' liggen tussen 0 en 1; inclusief 0, maar exclusief 1).

$$0 \leqslant 2x < 1 \text{ én } 0 \leqslant \frac{y}{2} - 1 < 1 \Longleftrightarrow$$

Wat op de normale manier te herleiden is tot:

$$0 \leqslant x < 1/2 \text{ én } 2 \leqslant y < 4.$$

De punten met een x-coördinaat tussen 0 en 1/2, en een y-coördinaat tussen 2 en 4 zijn juist de punten van de schoorsteen-rechthoek.

De andere factoren

A = 0 stelt de stoomketel voor (de buik van de loc); B = 0 is de cabine.
De vergelijkingen D = 0 en E = 0 hebben de vorm van een cirkelvergelijking, het zijn (alleen de randen van) de wielen.
F = 0 is de vergelijking van een parabool die in zijn top (0, 4) raakt aan de y-as. En G = 0 geeft een sinuslijn, opgeteld bij een licht omhooglopende rechte. Samen geven ze de grenzen van de, naar rechts oneindig doorlopende, rooksliert.

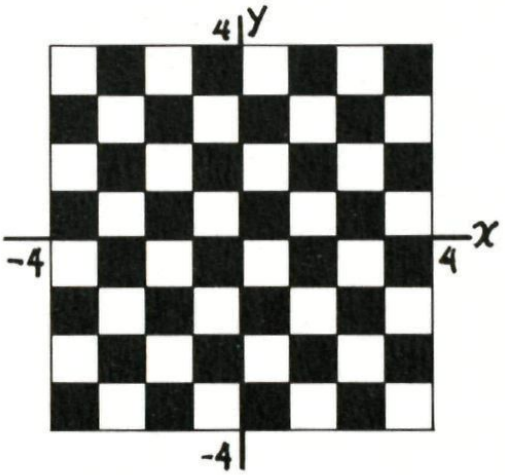
Ten slotte zorgt H = 0 er voor, dat het hele zaakje stevig op de rails komt te staan.

Ook andere figuren

Om een ingewikkelde figuur met behulp van een formule te beschrijven, moet je dus – net als in Legoland – de figuur in standaardbouwstenen ontleden. Bij elke bouwsteen hoort een (vrij) eenvoudige formule. En de totale formule krijg je door de linkerleden van die deelformules als factoren achter elkaar te zetten, *en het gehele produkt gelijk aan nul te stellen.*

Een opgave

We hebben geprobeerd om met de entier-functie een formule te vinden die het *schaakbord* beschrijft (rechtopstaand, met z'n centrum in de oorsprong). Ook dit blijkt te lukken, zelfs op verschillende manieren. De lezer mag het eerst zelf proberen, we komen er in het volgende nummer op terug.



Ierse vrienden

Bewijs dat er zeker twee Ieren zijn met hetzelfde aantal Ierse vrienden. (Ierse vriendschappen zijn altijd wederzijds.)

Zijn wij familie? . . . ja!

Dit stukje gaat over de vraag of wij misschien familie van elkaar zijn. Met 'wij' bedoel ik: de lezer die dit nu onder ogen heeft, en ikzelf. Vermoedelijk zullen veel lezers op deze vraag reageren met iets als: dat zal wel heel toevallig zijn. Of: nou ja, als je maar vér genoeg teruggaat, is iederéén familie van elkaar. Mijn vraag is, hóé ver je daarvoor moet teruggaan. Honderd generaties? Duizend generaties? Nog veel méér? Het lijkt een vraag waar weinig zinnigs over te zeggen valt, maar een klein beetje rekenen leidt toch tot een verrassend resultaat.

Hoe ver terug zit onze meest nabije gemeenschappelijke voorouder?

Het exacte antwoord hangt natuurlijk af van degeen met wie ik me vergelijk. Bovendien zal het antwoord meestal niet te geven zijn omdat beide stambomen van (biologische) voorouders onvoldoende ver bekend zijn.
Toch kan ik wel een schatting maken van onze *maximale* verwantschaps-afstand. En wel met de volgende redenering.

Ik heb 2 ouders, 4 grootouders, 8 overgrootouders, 16 betovergr....., etcetera. Juist dit 'etcetera' bekijken we nader. We gaan daarbij voor het gemak eerst maar uit van de aanname dat die hele voorouderstamboom zo lang mogelijk uit allemaal *verschillende personen* bestaat. Tot hóé lang geleden is dit een aanvaardbare aanname?
Gaan we uit van gemiddeld vier opvolgende generaties per 100 jaar, dan waren er een eeuw geleden $2^4 = 16$ voorouders van mij op de wereld. Twee eeuwen geleden waren dat er $2^8 = 256$.
Drie eeuwen geleden: $2^{12} = 4096$.
.....
Zeven eeuwen geleden: $2^{28} \approx 270$ miljoen.
Dat was in het jaar 1287, in de tijd van graaf Floris de Vijfde. In een encyclopedie vind ik als oudste schatting voor de totale wereldbevolking:
1650 → 470 miljoen.
Daarvan uitgaande lijkt het niet al te onaannemelijk om te stellen dat het er ruim dubbel zo lang geleden zeker niet meer dan 270 miljoen waren.
En dus . . . zijn álle tijdgenoten van Floris-V voorvaders en -moeders van mij. (Althans, voorzover hun nageslacht inmiddels niet volledig uitgestorven is.) En eveneens zijn ze dat van de overige huidige vijf miljard aardbewoners.
Ik heb dus met iedereen ter wereld een gemeenschappelijke voorouder in maximaal de 28e voorouder-generatie!

Verrassende conclusies

Ik vind deze uitkomst verrassend laag. Er zijn wel families die een stamboom op papier hebben die tot diep in de middeleeuwen teruggaat (verschillende koninklijke en adellijke families bijvoor-

beeld). Stel nu eens dat zo'n stamboom steeds zowel aan vaders- als aan moederskant terug zou gaan tot ten minste de 28e generatie. Dan zal *iedere* nu (waar ook ter wereld) levende persoon, ergens in zo'n stamboom een eigen voorouder kunnen aanwijzen.

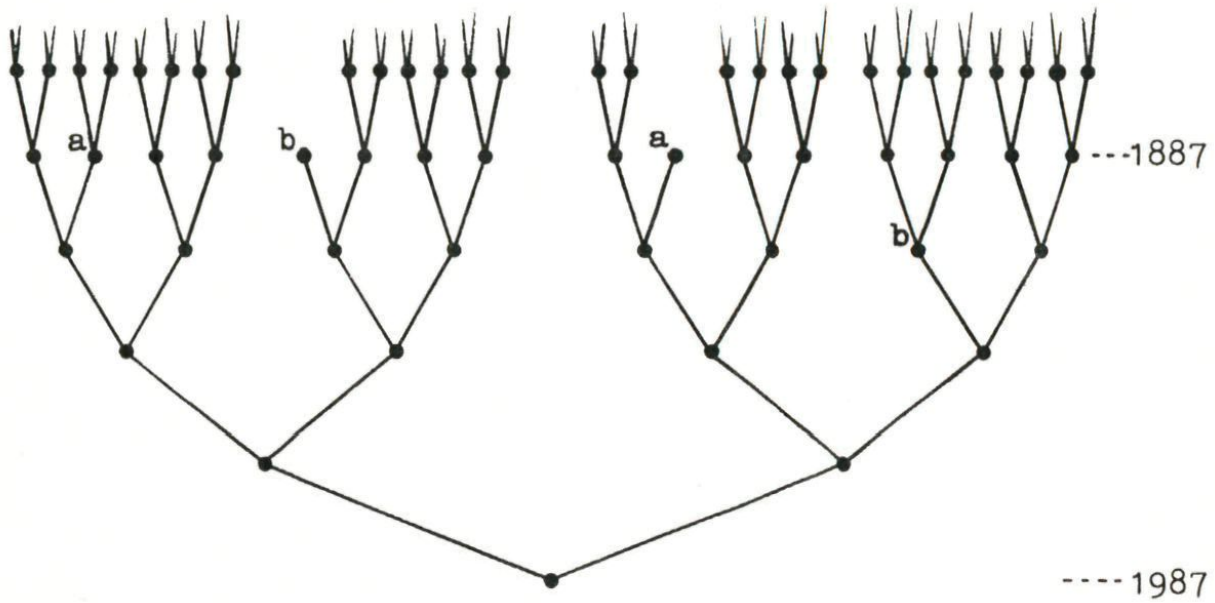
Je kunt ook zeggen: als Reagan en Gorbatsjov hun voorouderstambomen tot aan de 28e generatie naast elkaar zouden leggen, komt daar zeker iemand gemeenschappelijk op voor.

Aanmerkingen

Op welke punten is bovenstaande redenering aan te vallen? Niet op de schatting van de wereldbevolking in de middeleeuwen. Zelfs als die zo groot geweest zou zijn als de huidige vijf miljard, dan hoeven we nog niet eens één volle eeuw verder terug te gaan voor hetzelfde resultaat.

Er is wél een andere grond voor twijfel aan de gemaakte berekening. Het aantal *verschillende* personen in mijn *n*-de voorouder-generatie zal zeer waarschijnlijk ook al voor *n* kleiner dan 28, wat minder zijn dan 2^n. En wel doordat er af en toe 'binnen de familie' getrouwd wordt (een achter-achter-neef met een achter-achter-nicht, of iets dergelijks). In vroeger eeuwen, met vergeleken bij nu veel sterker geïsoleerde dorpsgemeenschappen en woongebieden, zal dit effect nog groter geweest zijn. Men bleef gemiddeld vaker 'dicht bij huis'. En ook nog vaak 'binnen de eigen stand'.

Hoe sterk zal dit onze uitkomst beïnvloeden? Ik moet bekennen dat ik het niet weet.
Om een schatting van die invloed te kunnen maken, zijn gegevens nodig over de gemiddelde verwantschaps-graad van (huwelijks-)partners. Hoe was dit in



Een voorouder-stamboom. *Elke stip stelt een persoon voor, naar boven toe verbonden met zijn/haar vader en moeder. Gelijke letters duiden aan dat dezelfde persoon op meer dan één plaats in de stamboom voorkomt. In zo'n geval worden de voorouders maar op één plaats verder aangegeven en meegeteld.*

vroeger eeuwen? Hoe vaak werd het isolement van dorps- en volksgemeenschappen doorbroken? Dit geeft heel wat problemen.
Enerzijds zal het moeilijk zijn er voldoende betrouwbare gegevens over bij elkaar te krijgen. En anderzijds leiden die gegevens tot een veel ingewikkelder en onregelmatiger stamboom-model; er zal heel wat wiskundig vernuft nodig zijn om daar dan nog algemeen geldige uitkomsten uit af te leiden.

Wat minder moeilijk

Het moeilijkst is natuurlijk de vraag, via hoeveel generaties diep iemand familie is van de totale 100% van de wereldbevolking. Misschien is die vraag ook wel vrij principieel onbeantwoordbaar, omdat daarbij kwesties meespelen als de wijze van ontstaan van het menselijk leven. Is dat ooit op één plaats of in één gebied geweest, of zijn er meerdere oer-bronnen geweest?
Veel van zulke moeilijkheden kunnen buiten beschouwing gelaten worden als we niet meer vragen naar 100%, maar bijvoorbeeld naar het verwant zijn met 50% (of 10%) van de wereldbevolking. Of nog verder beperkt, naar het verwant zijn met 50% van de huidige bevolking van Nederland en België. Anders gezegd:
Is de kans groter dan 50% dat een willekeurige Belg en een willekeurige Nederlander een gemeenschappelijke voorouder hebben die leefde ná de 'Guldensporenslag' in het jaar 1302?
In deze vorm is de vraag wat concreter gesteld; eventuele familierelaties vóór het genoemde jaartal spelen geen rol meer.

Een afwijkende uitkomst

Nog een verrassende uitkomst tot slot.
Ons Australische zusterblad *Function* (10-2, april '86) houdt zich ook met deze verwantschapsvraag bezig. Een geheel anderssoortige statistische berekening geeft daar het volgende resultaat:

> In een altijd constante totale bevolking van 15 miljoen (zowat het huidige Australië, maar ook Nederland) geldt voor een willekeurig tweetal mensen, dat het gemiddelde aantal generaties dat ze terug moeten gaan om een gemeenschappelijke voorouder te vinden, gelijk is aan 30 000 000.

Dertig miljoen generaties terug, dat is wél even wat anders dan onze *achtentwintig* generaties voor de hele wereld!

Waarmee nog weer eens gezegd wil zijn dat de resultaten van wiskundige en statistische berekeningen bepaald niet altijd heilig en onaantastbaar zijn. En dat de wetenschap nog op lang niet alle vragen een betrouwbaar antwoord heeft.

Drievoudig priemgetal

Welk geordend cijfer-paar geeft een priemgetal aan in zowel het 8-tallige, het 10-tallige en het 12-tallige positiestelsel? Er is één oplossing.

Pythagoras Olympiade

Nieuwe opgaven
Oplossingen vóór 15 juni insturen naar: *Pythagoras Olympiade, Marinus de Jongstraat 12, 4904 PL OOSTERHOUT (NB).* Vermeld op elk (éénzijdig beschreven) vel je naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas. Verder moet elke oplossing op een nieuw vel beginnen, want we corrigeren ze afzonderlijk. We bekijken alleen goed leesbare oplossingen die volledig zijn uitgewerkt, met verklarende tekst in goed lopende zinnen. Verdere informatie over de wedstrijd vind je in nummer 1 van deze jaargang op bladzijde 24.

PO 98
Bewijs dat elke tienhoek (zonder inspringende hoeken) een diagonaal bezit die met geen enkele zijde evenwijdig is.

PO 99
Hoeveel verschillende kettingen kun je maken van 7 rode en 3 witte kralen? (Telkens moeten alle kralen, die behalve in kleur op geen enkele wijze van elkaar verschillen, worden gebruikt. De kralen zijn symmetrisch.)

Oplossingen en prijswinnaars van de opgaven PO 92-93

PO 92
In een straat wonen meer dan 100 mensen.
Bewijs dat er 11 mensen in die straat wonen zo dat de som van hun leeftijden deelbaar is door 11.

Oplossing van *Leon Bun,* 5 vwo, Sint Oelbertgymnasium, Oosterhout (NB):
Voor de leeftijd van de mensen tellen in dit geval elfvouden niet mee. Er zijn dan elf verschillende leeftijden, namelijk 0, 1, 2, . . . 9, 10. Verder wonen er in de straat minstens 101 mensen. Er zijn nu twee mogelijkheden:

a. In één categorie zijn er minstens 11 mensen. De som van de leeftijden van 11 van die mensen is dan een elfvoud.
b. In elke categorie zijn er hoogstens 10 mensen. Maar dan moet elke categorie ook minstens één persoon bevatten, anders waren er maar hoogstens 10×10 mensen = 100 mensen. Uit elke categorie kan dan één persoon gekozen worden, en de som van hun leeftijden is dan $0 + 1 + \ldots + 10 = 55$, en dat is een elfvoud.

Er waren 10 inzendingen, waarvan 8 correct. Prijzen: *Leon Bun* en *Erik Fledderus,* 5 vwo, Nassau College, Wolvega.
Verder kwamen er correcte oplossingen van *Rien Schot* (Rotterdam), *Joris van der Hoeven* (Amsterdam), *Piet Bikker* (Nieuweroord), *Jeroen Tiggelman* (Rijswijk (ZH)), *Peter de Boer* (Driel) en *Arnold Metselaar* (Apeldoorn).

PO 93

Hoeveel rijtjes van nullen en enen ter lengte 20 zijn er waarin de combinatie 01 precies vijf maal voorkomt? (We vragen een volledig beredeneerd antwoord!).

Oplossing van *Rien Schot*, 6 vwo, RSG Guido de Brès, Rotterdam:

Hoe maak je een rijtje? Je begint bijvoorbeeld met enen neer te zetten. Op een gegeven moment *wissel* je, en dan ga je nullen zetten. Na een tijdje *wissel* je weer, en dan zet je weer enen, enz. In totaal zijn er voor een rijtje van lengte 20 op die manier 19 mogelijke wisselplaatsen. Om rijtjes te tellen met 5 wisselingen van de vorm 01 onderscheiden we vier soorten rijtjes:

a. rijtjes die met een 0 beginnen en met een 0 eindigen. Daarin moeten in totaal 10 wisselingen plaatsvinden: vijf maal 01, en vijf maal 10. Dat kan op 19 plaatsen, dus hun aantal is $\binom{19}{10} = 92378$.
b. Rijtjes van de vorm 0 . . . 1. Daarin zijn 9 wisselingen nodig, dus hun aantal is $\binom{19}{9} = 92378$.
c. Rijtjes van de vorm 1 . . . 0. Daarin zijn 11 wisselingen nodig, dus hun aantal is $\binom{19}{11} = 75582$.
d. Rijtjes van de vorm 1 . . . 1. Daarin zijn 10 wisselingen nodig, dus hun aantal is weer 92378.

In totaal krijg je zo 352716 mogelijke rijtjes. Tot zo ver de oplossing van Rien.

Je kunt nog opmerken dat

$\binom{19}{10} + \binom{19}{9} + \binom{19}{11} + \binom{19}{10} =$

$\binom{20}{10} + \binom{20}{11} = \binom{21}{11} = 352716$, en dat kun je met Riens methode ook direct zien als je elk rijtje vooraf laat gaan door een extra 1, en afsluit met een extra 0. Je krijgt dan rijtjes van lengte 22, en je moet daarin 11 wisselingen aanbrengen op 21 mogelijke plaatsen.

Er waren 12 inzendingen, waarvan 7 correct. Prijzen: *Rien Schot* en *Frederik Geertsema*, 5 vwo, Menso Alting College, Hoogeveen.

Verder kwamen er correcte oplossingen van *Joris van der Hoeven* (Amsterdam), *Piet Bikker* (Nieuweroord), *Ronald Wanink* (Hoogeveen), *Erik Fledderus* (Wolvega) en *Jeroen Tiggelman* (Rijswijk (ZH)).

Drievoudig priemgetal: oplossing

$37_8 = 3 \times 8 + 7 = 31$ (priem),
$37_{10} = 3 \times 10 + 7 = 37$ (priem),
$37_{12} = 3 \times 12 + 7 = 43$ (priem).

Uit de lijst van priemgetallen onder de honderd, geschreven in het 10-tallig stelsel, kunnen geschrapt:

- cijferparen waarin een 8 of een 9 voorkomt (deze cijfers bestaan niet in het 8-tallig stelsel),
- cijferparen met een 3 als tweede cijfer (want in het 12-tallig stelsel zijn dat allemaal drievouden).

Van de overblijvende cijferparen blijkt in het 8-tallig stelsel alleen 37 een priemgetal voor te stellen.

Redactioneel

Met het artikel 'Knutselen met een kubus' (bladzijde 1) doen we net als de ruimtemeetkunde op school een beroep op je ruimtelijk inzicht. We verklappen alvast dat we voor het volgende nummer een soortgelijk artikel in petto hebben. Dan zullen er zelfs een zaag en een verstekbak aan te pas komen!

Ondanks de verlengde inzendtermijn, is in dit nummer al de uitslag te vinden van de 'Prijsvraag 1987' uit nummer 2 van deze jaargang. Het was een heel karwei om dat nog zo snel voor elkaar te krijgen.
We doen ons best om in deze jaargang nóg een prijsvraag uit te schrijven. In de volgende nummers lees je daar (hopelijk) meer over.

De speurtocht naar gekke grafieken die we zijn begonnen in nummer 1, gaat in dit nummer met sneltreinvaart verder, zoals je kunt vaststellen in het artikel 'Een formule die loopt als een trein' (bladzijde 24). Wie levert de volgende 'gekke grafiek'?

Deelbaarvrije series: oplossing

4 of 8, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 23.

Ierse vrienden: oplossing

Bij N Ieren is N-1 het maximale aantal Ierse vrienden van een Ier, en 0 het minimale aantal.
De rij 0, 1, 2, . . ., N-1 bevat precies N getallen; wat dat betreft zou het nét kunnen dat alle vriendenaantallen verschillen. Maar. . . de vriendenaantallen 0 en N-1 sluiten elkaar uit: als er een Ier is die met álle andere Ieren bevriend is, kan er niet tegelijk ook een Ier zijn zonder enige vriend.

Lay-out: Klaas Lakeman, Amsterdam.
Tekenwerk: Armand Haye, Amsterdam.
Foto's en andere illustraties: Jan van de Craats, Oosterhout (NB) (omslag, blz. 1, 2, 3, 4, 23); Hessel Pot, Woerden (blz. 5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 28); N. M. Buizert, Amsterdam (blz. 24).

© 1987 Redactie Pythagoras - ALLE RECHTEN VOORBEHOUDEN, NADRUK OF WEERGAVE, GEHEEL OF GEDEELTELIJK, IN WELKE VORM DAN OOK, ZONDER SCHRIFTELIJKE TOESTEMMING VAN DE REDACTIE VERBODEN.

Pythagoras wiskunde tijdschrift voor jongeren

Een uitgave onder auspiciën van de Stichting Christiaan Huygens en de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Redactie: Jan van de Craats, Klaas Lakeman, Hessel Pot, Hans de Rijk.

Redactiesecretariaat: Klaas Lakeman, Cornelis Krusemanstraat 60^{II}, 1075 NS Amsterdam (NL).

Inhoud jaargang 26, nummer 4

Knutselen met een kubus / **1**
Jan van de Craats
Entier-grafieken / **5**
Hessel Pot
Prijsvraag 1987 – oplossing / **6**
Hessel Pot
Correcties, aanvullingen / **8**
De maantjes van Hippokrates (aanvulling) / **9**
Hessel Pot
Een eigenschap van zeven cirkels / **10**
Hessel Pot
Riemannse ruimten / **18**
Gerard Bäuerle/Klaas Lakeman/ Jan van de Craats
Denkertje / **22**
Een sommetje van Archimedes (oplossing) / **23**
Jan van de Craats
Deelbaarvrije series / **23, 32**
Een formule die loopt als een trein / **24**
N. M. Buizert
Ierse vrienden / **26, 32**
Zijn wij familie? . . . ja! / **27**
Hessel Pot
Drievoudig priemgetal / **29, 31**
Pythagoras Olympiade / **30**
Jan van de Craats
Redactioneel / **32**

Pythagoras verschijnt zesmaal per schooljaar; opgave van abonnementen bij de uitgever (zie onder).
Abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 september schriftelijk bij de uitgever is opgezegd.
Bij tussentijdse abonnering ontvangt men ook de reeds verschenen nummers. Betaling per acceptgirokaart.

Tarieven*	NLG/BEF
Abonnement Pythagoras	20,—/365
Inclusief Archimedes	36,—/660
Losse nummers	5,—/ 90

* Luchtpost-toeslag 15%

stichting ivio
Postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL). Tel. 03200-26514
educatieve uitgeverij - instituut voor buitenschools onderwijs - wereldschool - AO-reeks - leerprojecten
Postgiro Nederland: 287934 Postcheck België: 000-0130850-94