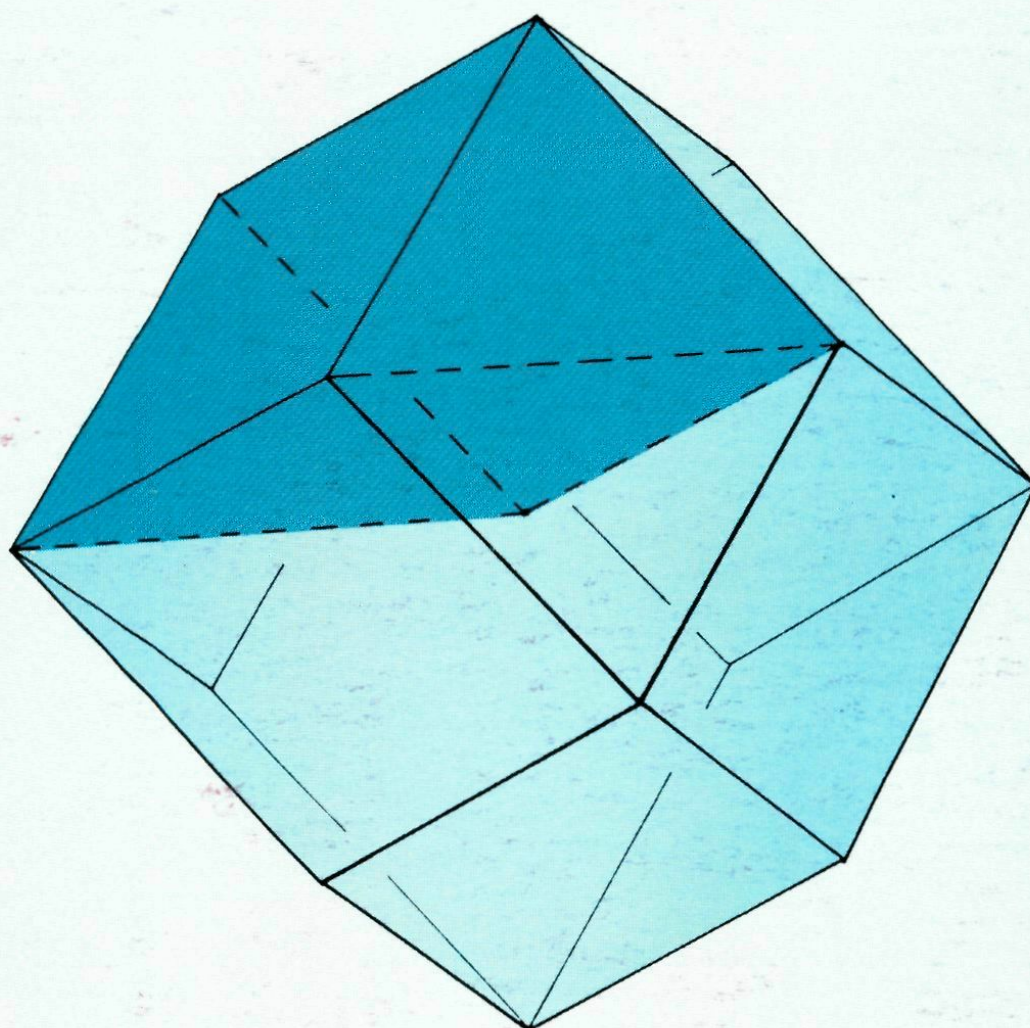




Pythagoras



wiskunde tijdschrift voor jongeren

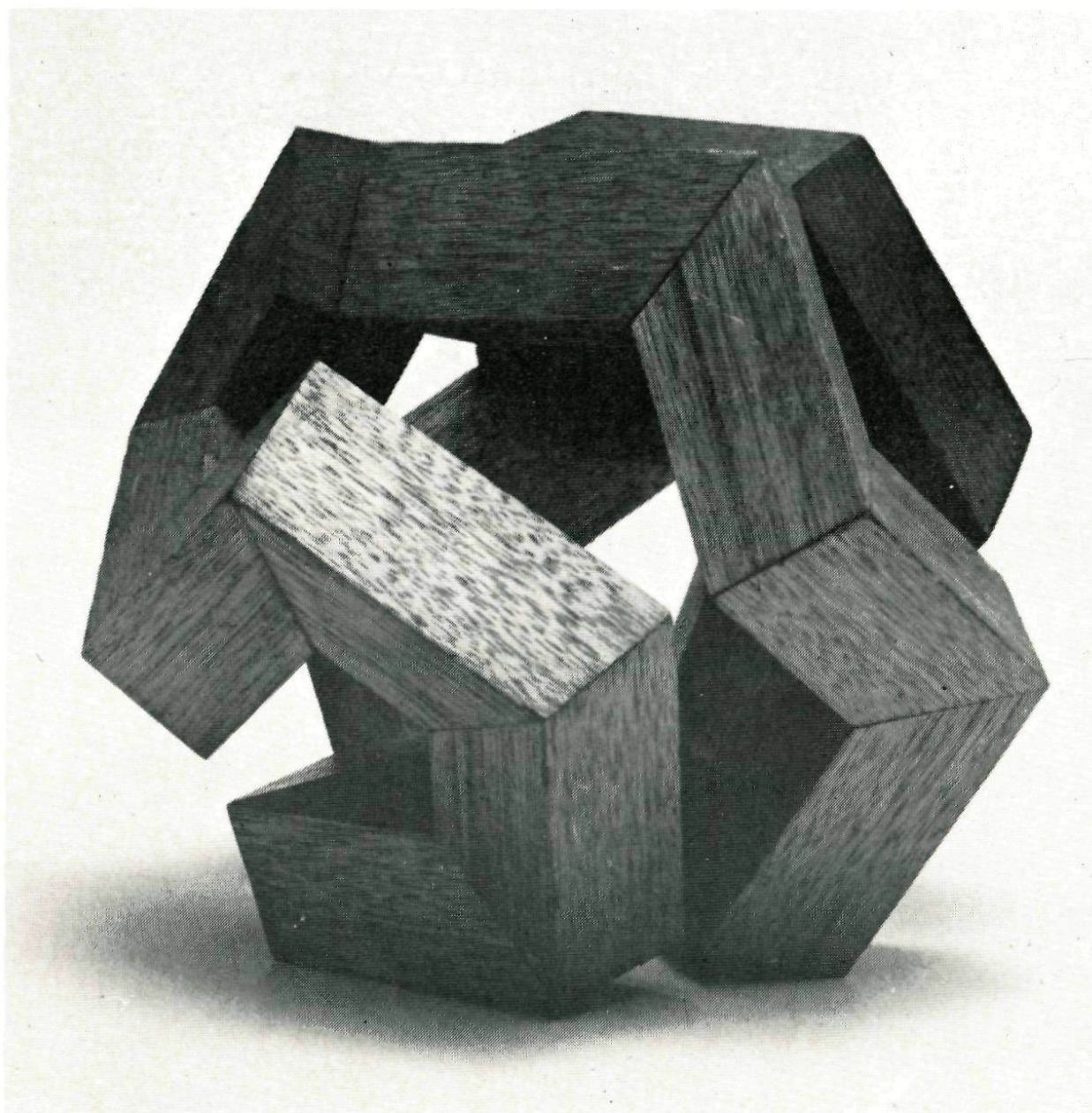
stichting ivio

jaargang 26
nummer 5
juli 1987

Zagen, zagen, . . .

De kunstenaar Popke Bakker uit Bergen aan Zee experimenteert al geruime tijd met constructies van scheef doorgezaagde balken. De voorplaat van Pythagoras 25-1 toonde een van zijn meest fascinerende ontwerpen: een slingerconstructie die de hoekpunten van een regelmatig twaalfvlak doorloopt. Van datzelfde ontwerp is een hologram gemaakt, en dat siert het omslag van het boek 'Holografie, Toveren met licht' van Bruno Ernst.

Een simpel idee leidde tot weer andere ruimtelijke vormen met verrassend mooie meetkundige eigenschappen. We laten dat zien aan de hand van een beeldverhaal.



De slingerconstructie die de hoekpunten van een regelmatig twaalfvlak doorloopt.

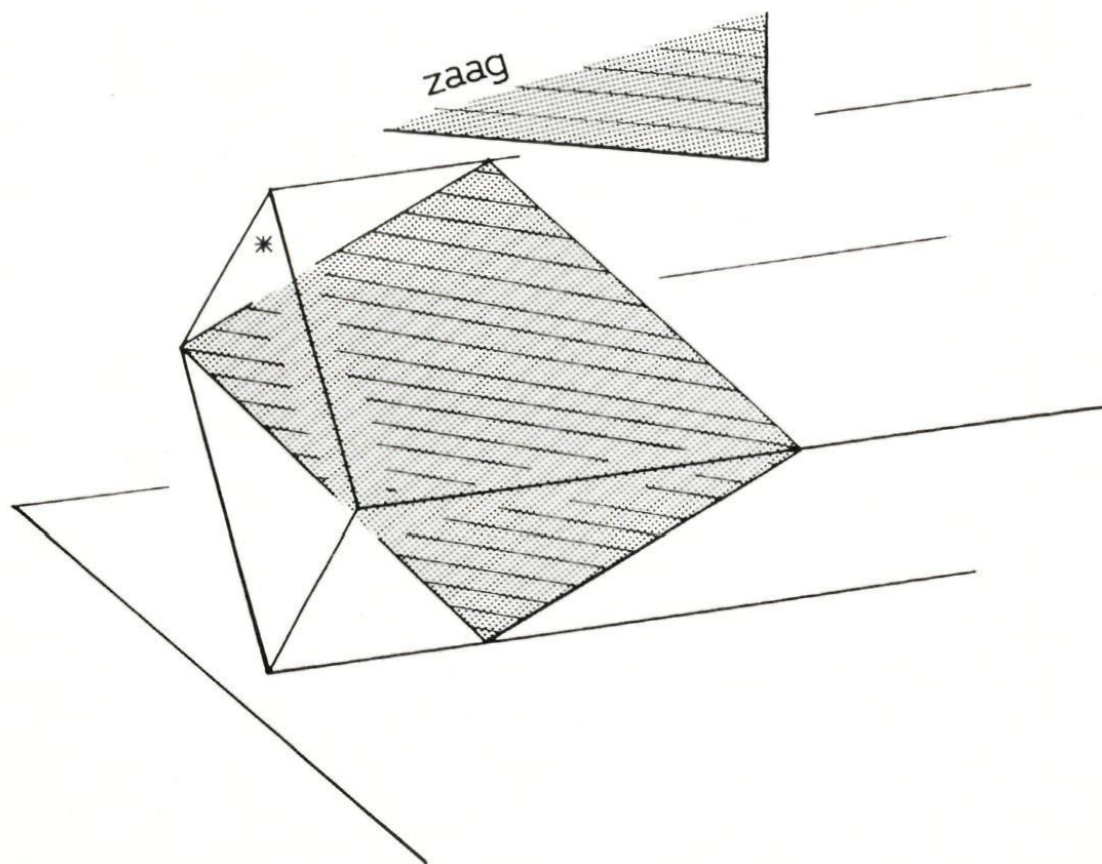
Schuin zagen

Het uitgangspunt is een gewone balk met een vierkante doorsnede. Met een verstekbak kun je die afzagen onder een hoek van 45° . Meestal leg je de balk dan plat in de verstekbak. Maar wat gebeurt er als je hem nu eens *op z'n punt* in de verstekbak vast zet? Dat zie je in figuur 1. De zaagsnede wordt geen vierkant of rechthoek, maar een *ruit*. Het is niet moeilijk om (met de stelling van Pythagoras) de precieze afmetingen ervan uit te rekenen, maar we laten dat voorlopig even rusten. In plaats daarvan gaan we door met zagen. We kantelen de balk een kwartslag, zodat je bovenop de zaagsnede kijkt, schuiven hem een eindje verder, en zagen hem dan nogmaals door onder diezelfde hoek van 45° . Zie figuur 2. Er zijn dan in totaal twee stukken van de

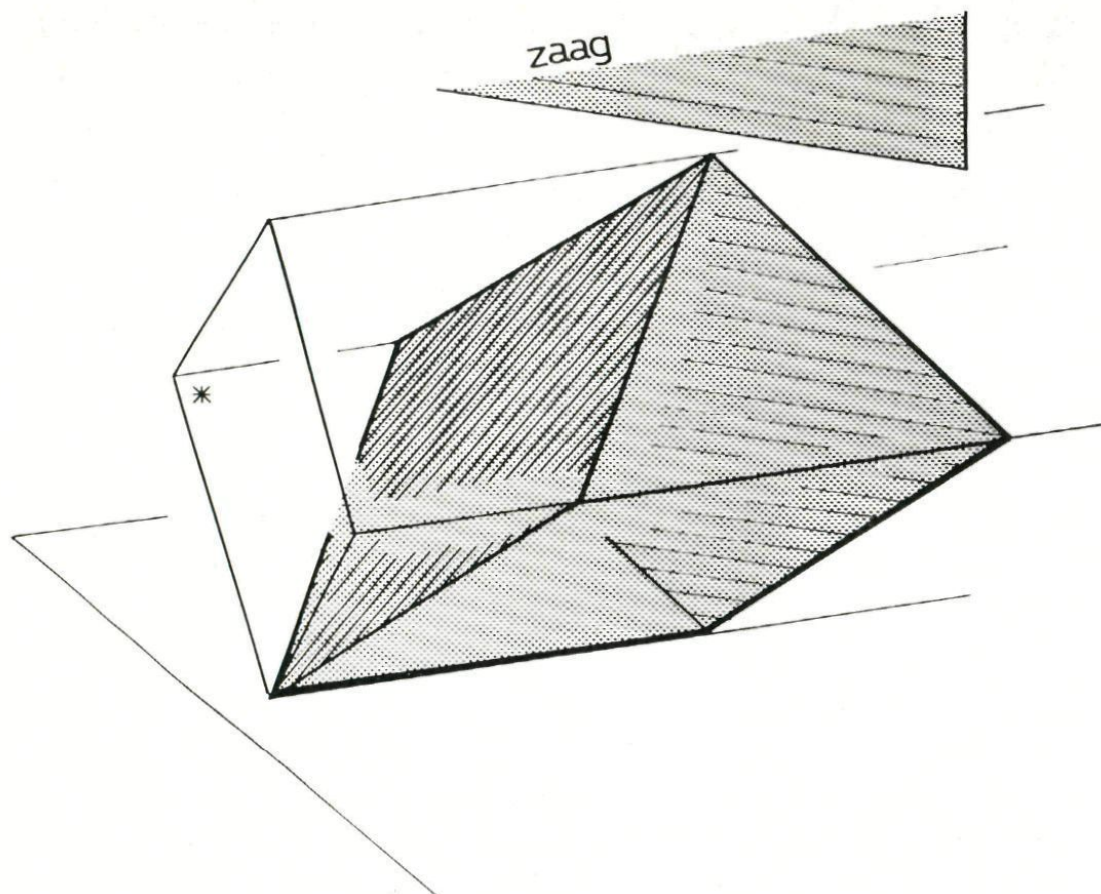
balk afgezaagd. Het eerste, met een vierkant uiteinde, interesseert ons niet zo erg. Maar het tweede stuk is wél interessant. In figuur 2 zie je hoe het in de balk zat. Het is een soort *tentje*, met als dak de twee (gearceerde) zaagsneden, die natuurlijk congruent zijn, want ze zijn op dezelfde manier gezaagd. Het grondvlak is een parallellogram (géén ruit!) en de voor- en achterkant zijn congruente gelijkbenige driehoeken. In geleerde termen heet het tentje een *scheef, driehoekig prisma*.

Asymmetrisch

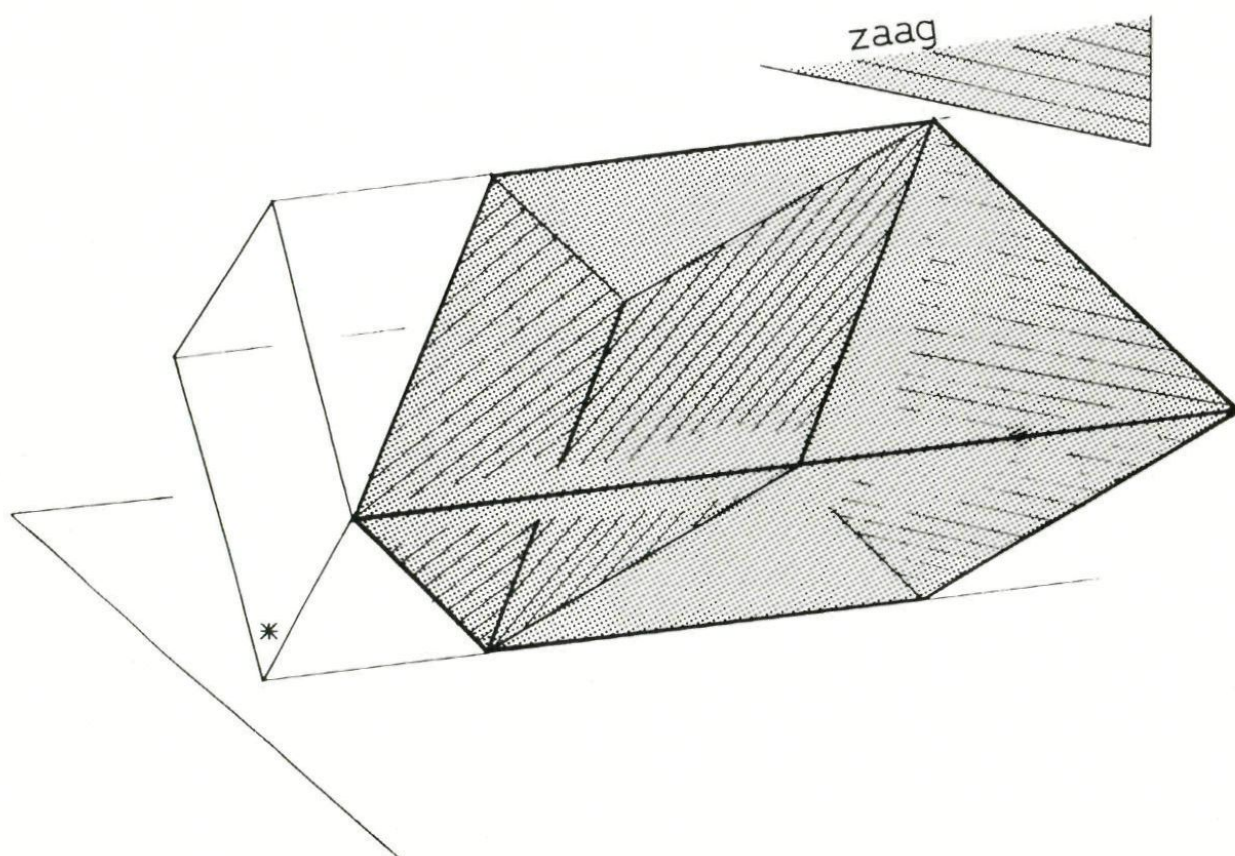
Het tentje heeft geen symmetrievlakken of symmetrieassen. Het is ook niet puntsymmetrisch. Het is dus volstrekt asymmetrisch. Toch moet het mooie meetkundige eigenschappen hebben, want



Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3

als je ernaar kijkt in de richting van de as van de oorspronkelijke balk, dan zie je weer een vierkant. Nog veel merkwaardiger is wat er gebeurt als je een hele rij van die tentjes achter elkaar zet. Je krijgt dan een lange driehoekige koker. En geloof het of niet, de *loodrechte* dwarsdoorsnede is . . . een perfecte *gelijkzijdige* driehoek! Het is een leuk sommetje om dat eens netjes te bewijzen, maar ook dat laten we hier achterwege.

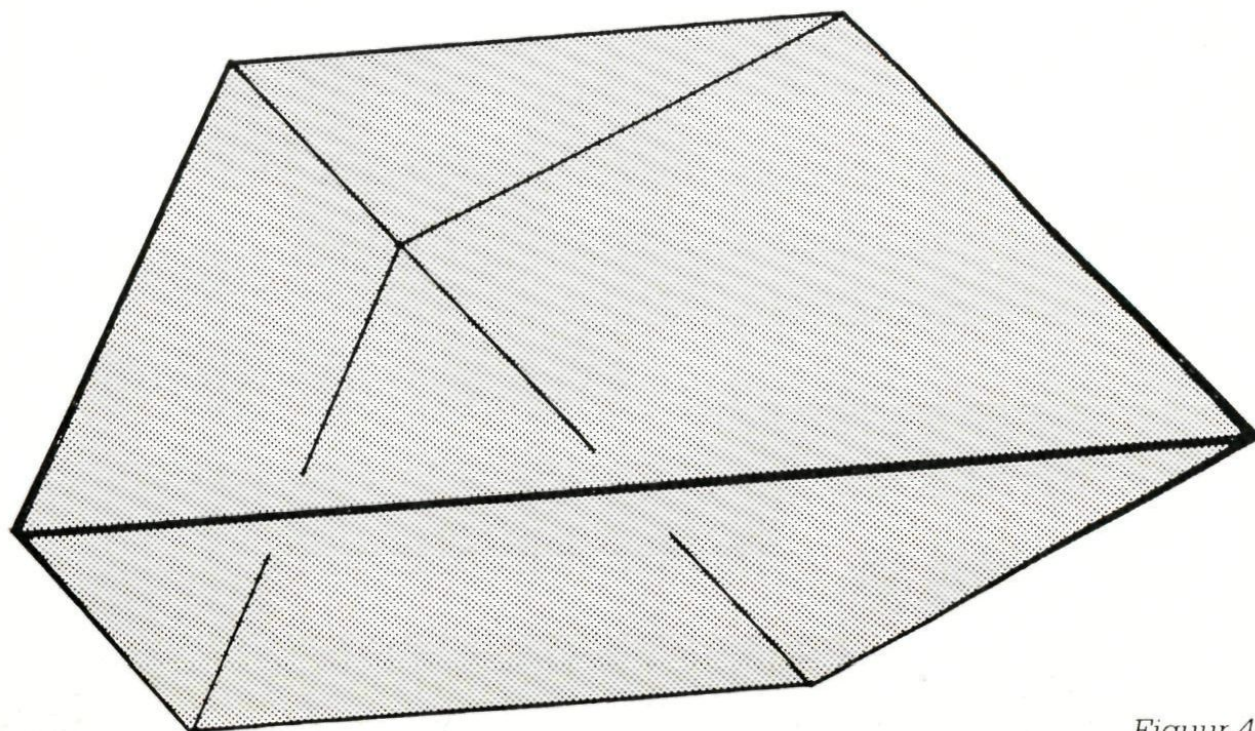
Verder zagen

In plaats daarvan gaan we nog een tweede tentje zagen. We kantelen de balk dus een tweede keer, schuiven hem weer een eindje op, en zagen hem dan nogmaals door (figuur 3). Het tweede tentje is natuurlijk congruent met het eerste, want het is op dezelfde manier ontstaan. Maar het heeft anders in de balk gezeten: een kwartslag gedraaid. Laat je de twee tentjes aan elkaar zitten, dan heb je een vreemd

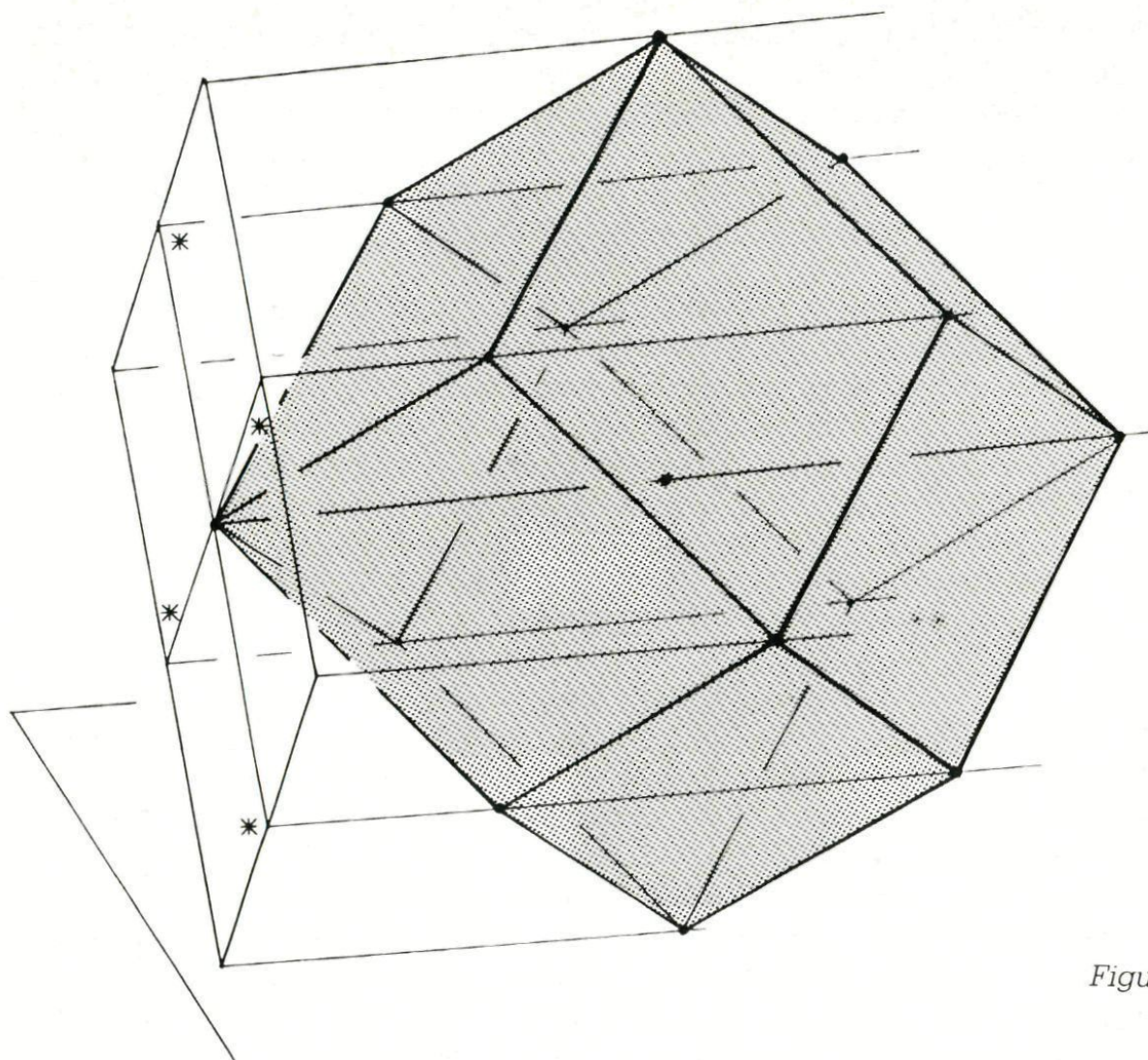
veelvlak met zes zijvlakken. Twee van die zijvlakken zijn gelijkbenige trapezia (elk samengesteld uit een parallellogram en een driehoek), twee andere zijvlakken zijn zaagsneden, dus ruiten, en de twee overblijvende zijvlakken zijn de bekende gelijkbenige driehoeken (figuur 4). In tegenstelling tot de tentjes waaruit het zesvlak is opgebouwd, is dit veelvlak wél symmetrisch: het bevat twee symmetrievlakken, één loodrecht op de as van het balkje, en één horizontaal door die as.

Ruitentwaalfvlak

Neem nu vier balken, zaag uit elk ervan zo'n zesvlak, en plak die vier zesvlakken met hun trapezia tegen elkaar. Wat krijg je dan? Kijk maar in figuur 5, waar we voor de duidelijkheid de vier balken hebben meegetekend. Je zou misschien verwachten dat er een veelvlak ontstaat met als zijvlakken 8 ruiten en 8 driehoe-



Figuur 4

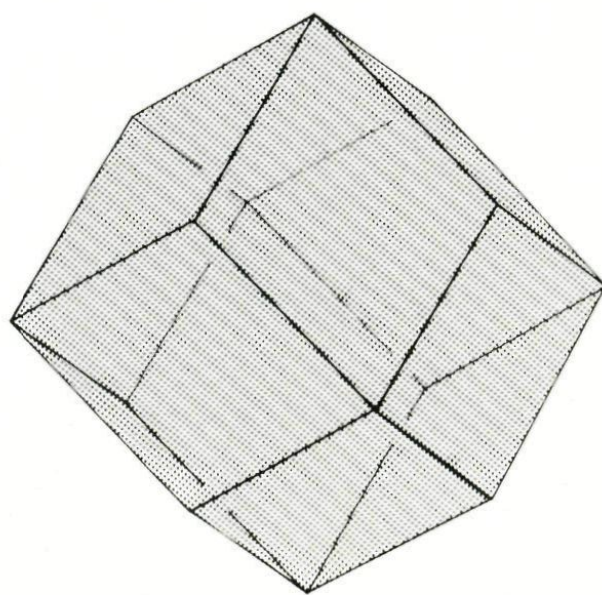


Figuur 5

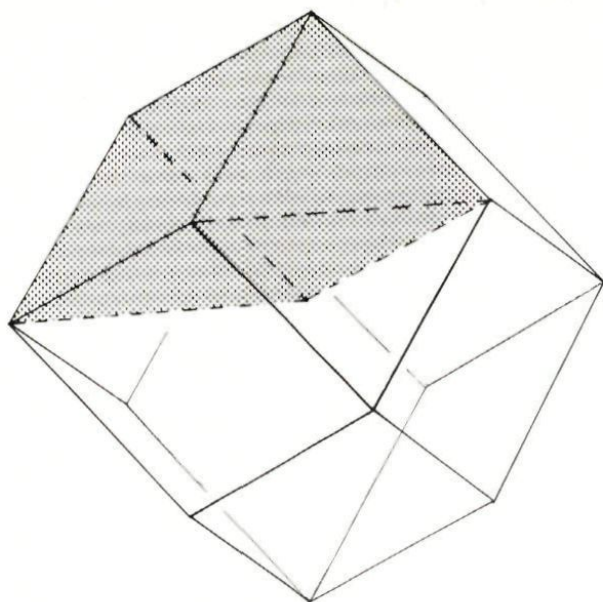
ken. Maar de driehoeken blijken twee-aan-twee precies in één vlak te liggen! Samen vormen ze dan weer zo'n zelfde ruit. Er ontstaat dus een veelvlak met twaalf congruente ruiten als zijvlakken (figuur 6). In figuur 7 zie je hoe één van de acht tentjes in het twaalfvlak past. Eén hoekpunt ervan valt samen met het *middelpunt* van het twaalfvlak.

Ook in figuur 5 is dat middelpunt aangegeven. Je ziet daar ook dat de 14 hoekpunten en het middelpunt op een regelmatige manier over de ribben van de balken verdeeld zijn. Ze vormen een regelmatig rooster dat onbeperkt

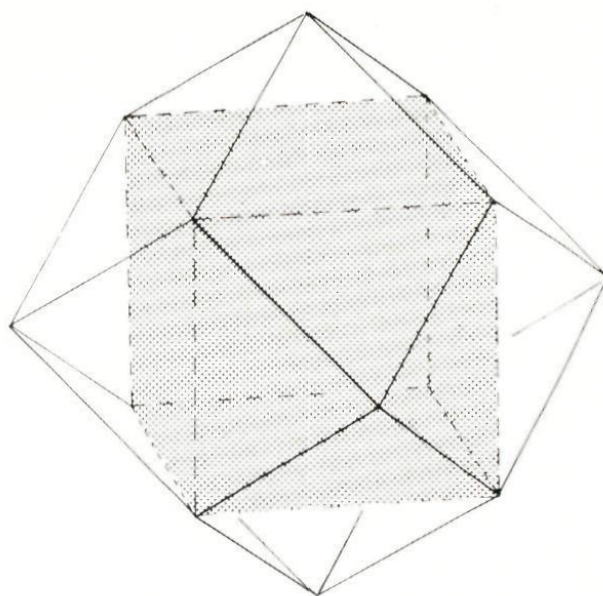
naar alle kanten voortgezet kan worden.



Figuur 6



Figuur 7



Figuur 8

Kristallen

Die roosterstructuur komen we ook tegen bij sommige kristallen. Als de moleculen van een vaste stof volgens zo'n rooster geordend zijn, dan kunnen er kristallen ontstaan in de vorm van zo'n ruitentwaalfvlak. Bijvoorbeeld bij edelsteensoorten die *granaat* genoemd worden.

De twaalf ruiten van het twaalfvlak hebben elk een korte diagonaal en een lange diagonaal. De twaalf *korte* diagonalen vormen samen de ribben van een *kubus* (figuur 8), de twaalf *lange* diagonalen vormen de ribben van een *regelmatig achthvlak* (octaëder) (figuur 9).

Ruimteevulling

De ingeschreven kubus laat zien dat je ruitentwaalfvlakken zonder gaten of spleten kunt stapelen: bij elke scherpe punt komen er precies zes bij elkaar, en bij elke botte punt vier.

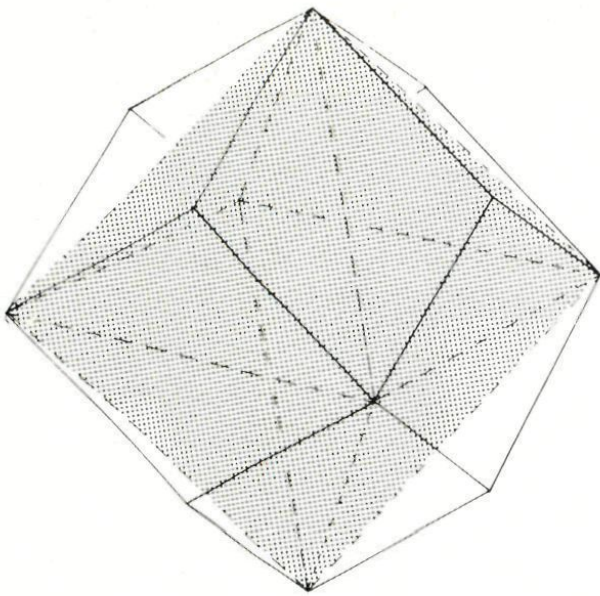
Links en rechts

We gaan weer terug naar het

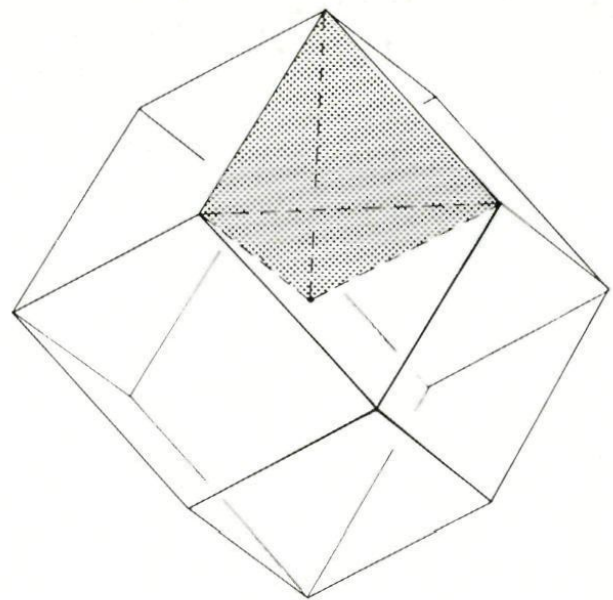
tentje van figuur 2. Omdat het asymmetrisch is, is er ook een spiegelbeeld-tentje. Om ze uit elkaar te houden, zou je de één een *linkertent*, en de ander een *rechtertent* kunnen noemen. Je zou ze ook verschillend kunnen kleuren. In elk geval, twee tentjes van *dezelfde* soort kunnen samengevoegd worden tot het zesvlak van figuur 4. Dat kan zowel van twee linkertenten, als van twee rechtertenten gemaakt worden, want het zesvlak is wél symmetrisch. We hebben het ruitentwaalfvlak opgebouwd uit 4 van die zesvlakken, dus uit 8 tenten. Allemaal van dezelfde soort. Maar je kunt blijkbaar ook mengvormen maken, als je van elke soort maar een even aantal neemt. Bij twee maal vier in verschillende kleuren kun je mooie effecten verkrijgen.

Nog verder zagen

Opnieuw terug naar figuur 2. Draai de zaag een kwartslag om een verticale as. Hij staat dan nog steeds onder een hoek van 45° op



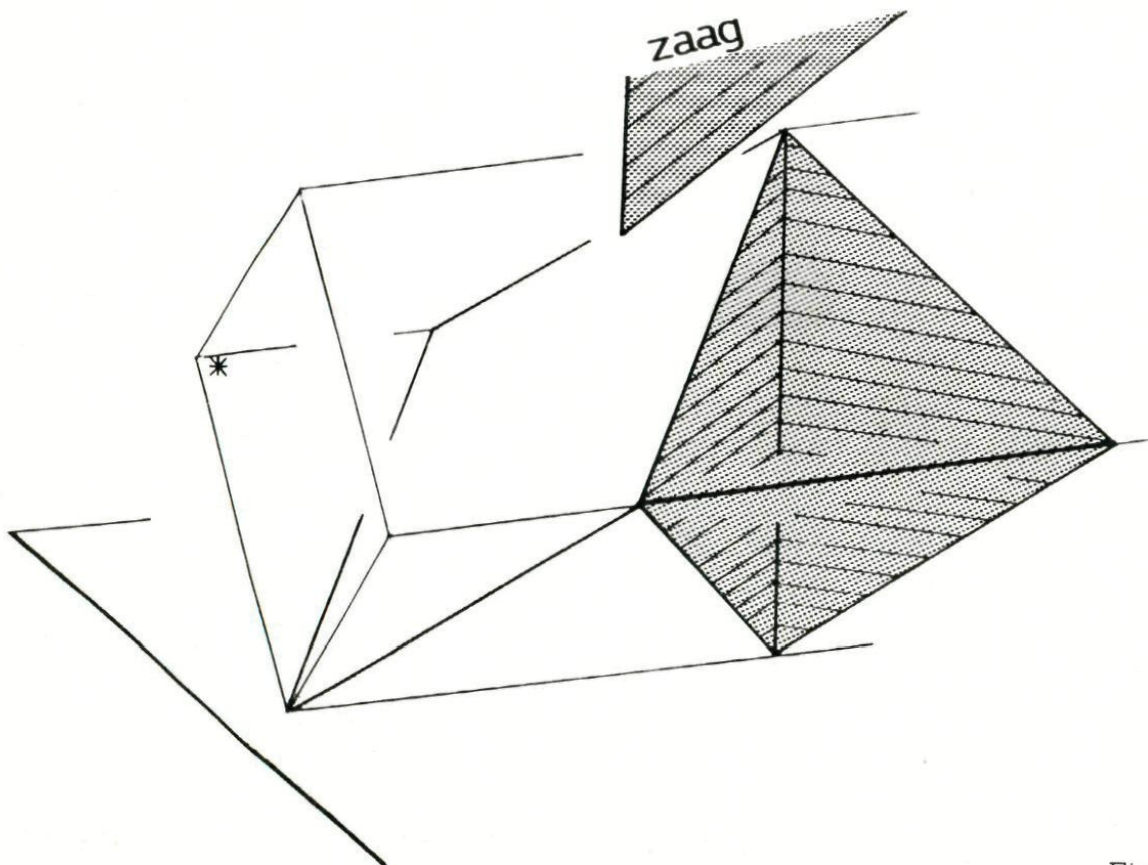
Figuur 9



Figuur 11

de balkrichting, maar nu de andere kant op. Je kunt dan een stuk van het tentje afzagen. Een *viervlak*, zoals figuur 10 laat zien. Als je het overblijfsel weer een kwartslag terugdraait, en dan

nogmaals doorzaagt, ontstaan nog twee van die viervlakken. Zo is het tentje dus in drie congruente viervlakjes gezaagd. Ze zijn niet regelmatig, maar wel symmetrisch: elk viervlakje heeft twee



Figuur 10

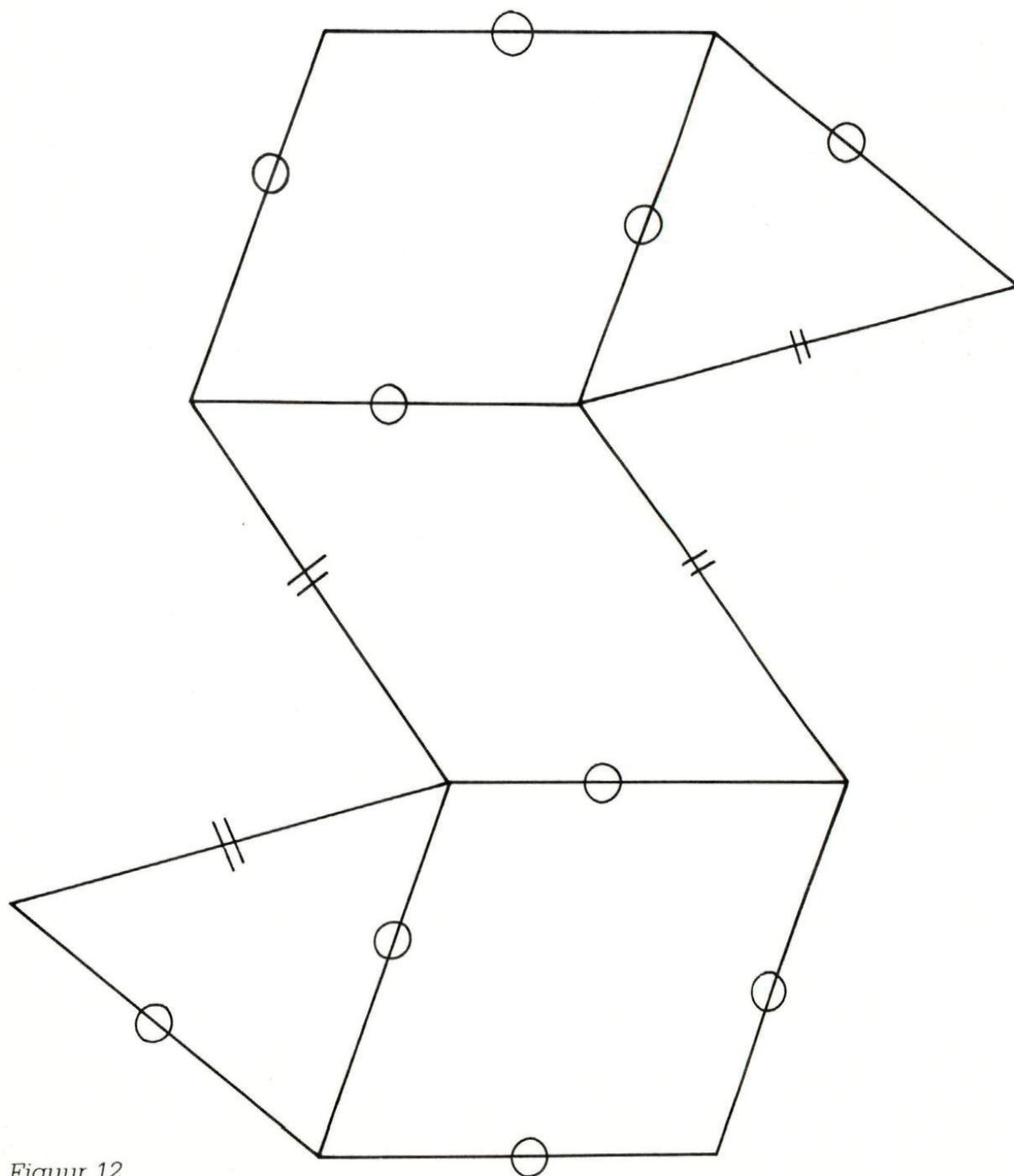
symmetrievlakken en een symmetrieas. In figuur 11 zie je hoe zo'n viervlakje in het ruitentwaalfvlak past. Er passen er precies 24 in.

Het naadje van de kous

Er zijn misschien lezers die alles nog eens precies willen narekenen (en natekenen!). Dat is een mooie oefening in ruimtemeetkunde. We willen ze op weg

helpen door middel van een soort geprogrammeerde instructie. Controleer telkens wat er beweerd wordt, en voer de opdrachten uit. Ga ervan uit dat de oorspronkelijke balken als dwarsdoorsnede een vierkant met zijden 1 hebben.

1 In figuur 1 heeft de ruitvormige zaagsnede diagonalen van lengte $\sqrt{2}$ en 2, en zijden van lengte $\frac{1}{2}\sqrt{6}$.



Figuur 12

- 2 In figuur 2 is het grondvlak een parallellogram met zijden $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ en $\sqrt{2}$. De korte diagonaal ervan heeft ook lengte $\frac{1}{2}\sqrt{6}$.
- 3 Het viervlak van figuur 10 heeft vier ribben van lengte $\frac{1}{2}\sqrt{6}$, en twee ribben van lengte $\sqrt{2}$.
- 4 Onderzoek of het ruitentwaalfvlak van figuur 5 een *omgeschreven bol* bezit, dat wil zeggen een bol die gaat door alle hoekpunten.
- 5 Laat zien dat de figuur die in figuur 8 wordt getoond inderdaad een kubus is. Toon tevens aan dat door spiegeling van het middelpunt in een zijvlak van de kubus één van de andere hoekpunten van het twaalfvlak ontstaat.
- 6 Bereken de inhoud van het ruitentwaalfvlak.

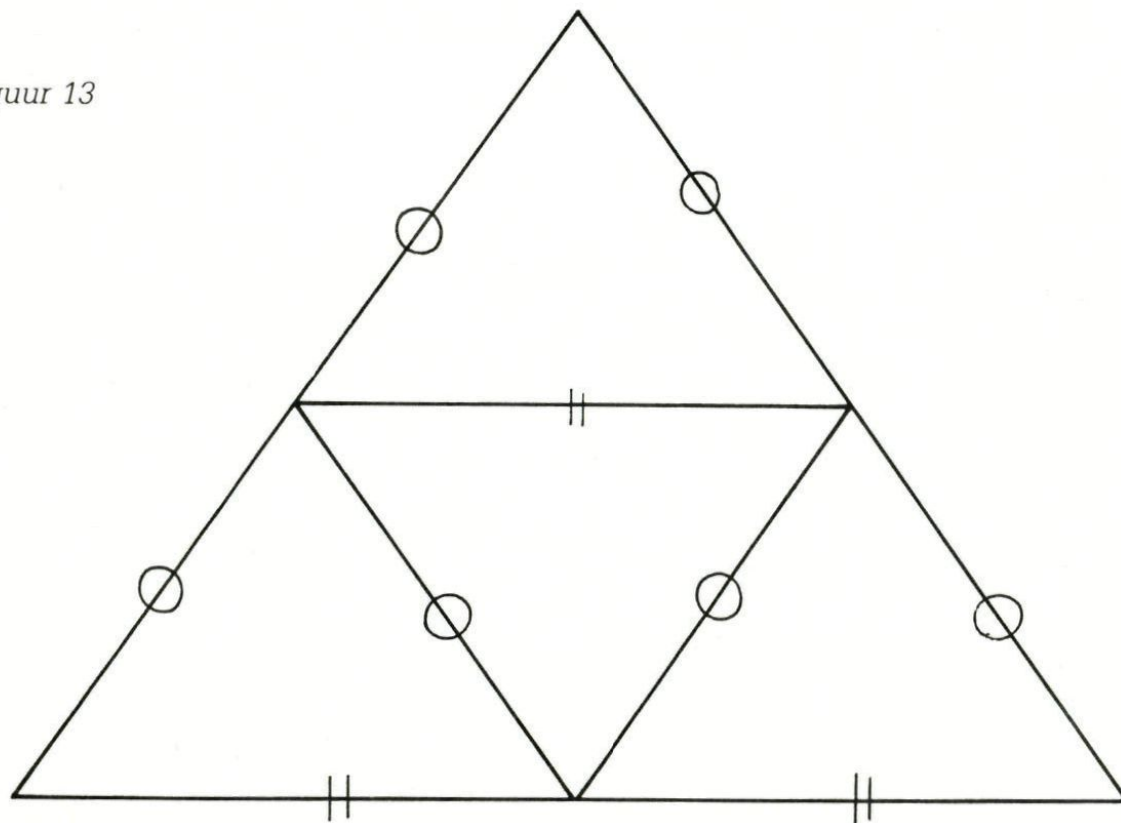
Bouwplaatjes

Wanneer je er moeite mee hebt om van al onze tekeningen een ruimtelijke voorstelling te maken, dan kun je zelf met zaag en

verstekbak aan de slag gaan. Ben je daar niet zo handig in, dan bieden figuur 12 en figuur 13 misschien uitkomst. Figuur 12 is een bouwplaat voor het tentje. Die kun je overnemen op een stuk stevig papier of karton en met doorzichtig plakband of lipjes die je zelf even moet tekenen, is het tentje zo in elkaar geplakt. Om een spiegelbeeld-tentje te krijgen moet je het bouwplaatje binnenste-buiten in elkaar zetten. Ook van het viervlak waarvan er drie in een tentje passen hebben we een bouwplaatje afgebeeld (figuur 13). Door met behulp van figuur 13 drie viervlakken te maken, is de onderverdeling gemakkelijk te controleren.

Als je in het bezit wilt komen van een keurig gezaagd setje van acht tentjes (vier linker- en vier rechtertentjes), kun je contact opnemen met *Popke Bakker* (Verspijkweg 7, 1865 BJ Bergen aan Zee (NH), tel. 02208-18547).

Figuur 13



Tangenstoverij met honderdvouden

Neem een getal van zes cijfers en zet er nog twee nullen achter, zeg: 19868700. Pak je rekendoosje (met een tan-knop) en kijk wat het geeft voor:

$$\tan 19868700^\circ = \dots\dots$$

$$(1+9+8+6+8+7 = 39)$$

$$\tan 3900^\circ = \dots\dots$$

$$(3+9 = 12)$$

$$\tan 1200^\circ = \dots\dots$$

$$(1+2 = 3)$$

$$\tan 300^\circ = \dots\dots$$

Als je je doosje niet gelooft, kies je maar gauw een ander startgetal. Méér dan zes cijfers mag ook, als je maar met 100 vermenigvuldigt.

Deze hoogst merkwaardige eigenschap is pas kort geleden ontdekt door *S. W. Rienstra* (Malden). Puur bij toeval, terwijl hij zomaar wat zat te spelen met z'n rekenmachientje. Ongelofelijk nietwaar!!!?

Overigens ontdekte hij aanvankelijk een speciaal geval van deze eigenschap, namelijk de volgende gelijkheden:

$$\tan 100^\circ = \tan 1000^\circ = \tan 10000^\circ = \tan 100000^\circ = \tan \dots\dots \text{etc.}$$

En ook dit laatste is nog niet de volle waarheid, want de állereerste ontdekking was de merkwaardigheid:

$$\sin 1000^\circ = \sin 10000^\circ = \sin 100000^\circ = \sin \dots\dots \text{etc.}$$

Bij $\sin 100^\circ$ gaat het (een beetje) mis. Dit betekent dat de bovenaan genoemde eigenschap met de sinus in plaats van de tangens alleen geldt als je de gekozen cijfers (en de opgetelde cijfers) steeds aanvult met *drie* nullen.

Wie al een klein beetje heeft leren goochelen met goniometrieformules, zal deze zaken wel kunnen bewijzen. Je hoeft er alleen voor te weten dat de sinus niet verandert als je 360° van de hoek afhaalt. En dat de tangens constant blijft bij elke vermindering met 180° . Dit verminderen moet je wel erg váák, en daarom liefst een beetje handig, doen.

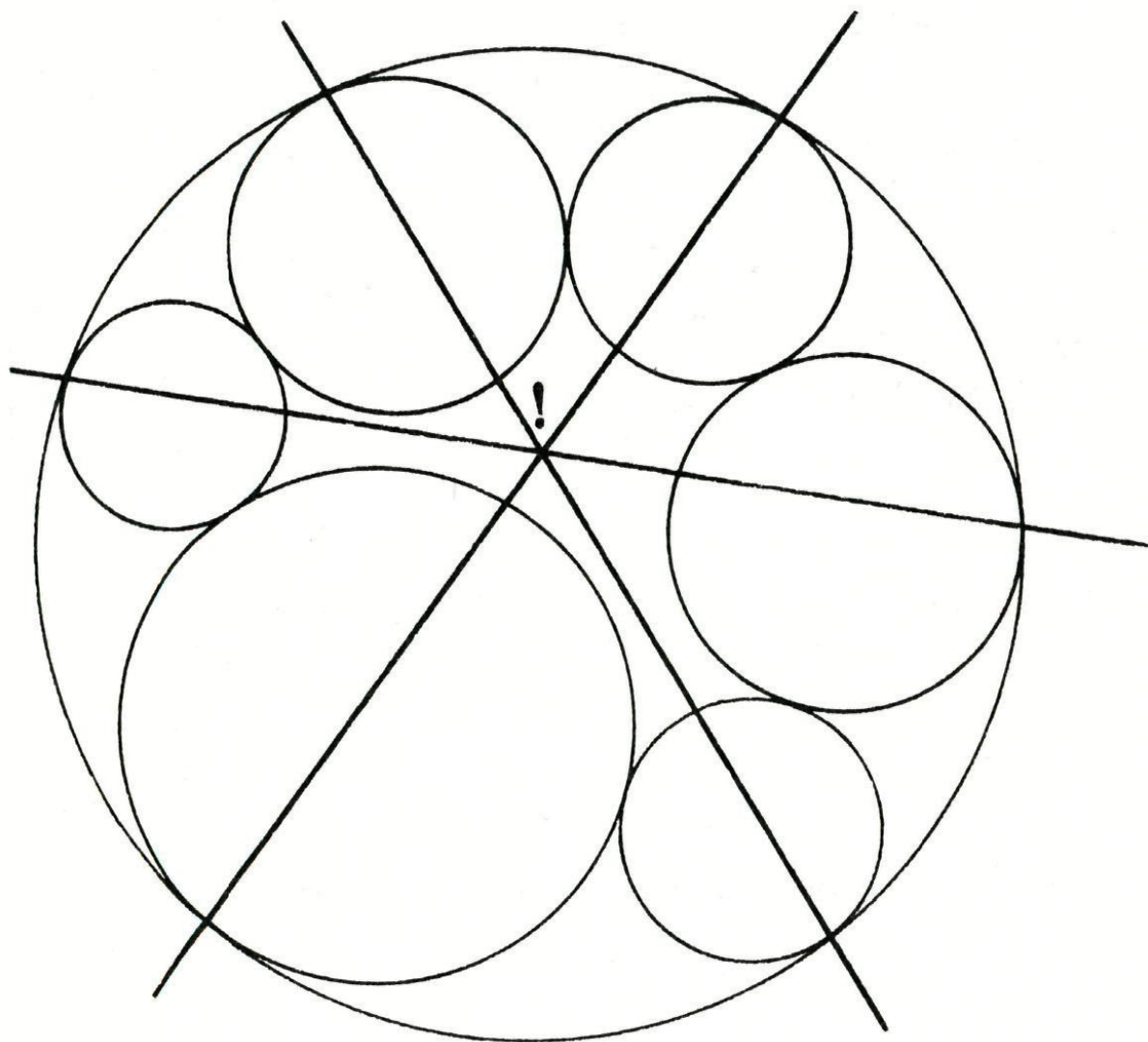
Maar fantástisch blijft het, vinden we!

(Er zijn rekenmachientjes die alleen van hoeken tot 1000° de tangens en de sinus kunnen berekenen. Die zijn hier natuurlijk onbruikbaar.)

Vrijdag de dertiende

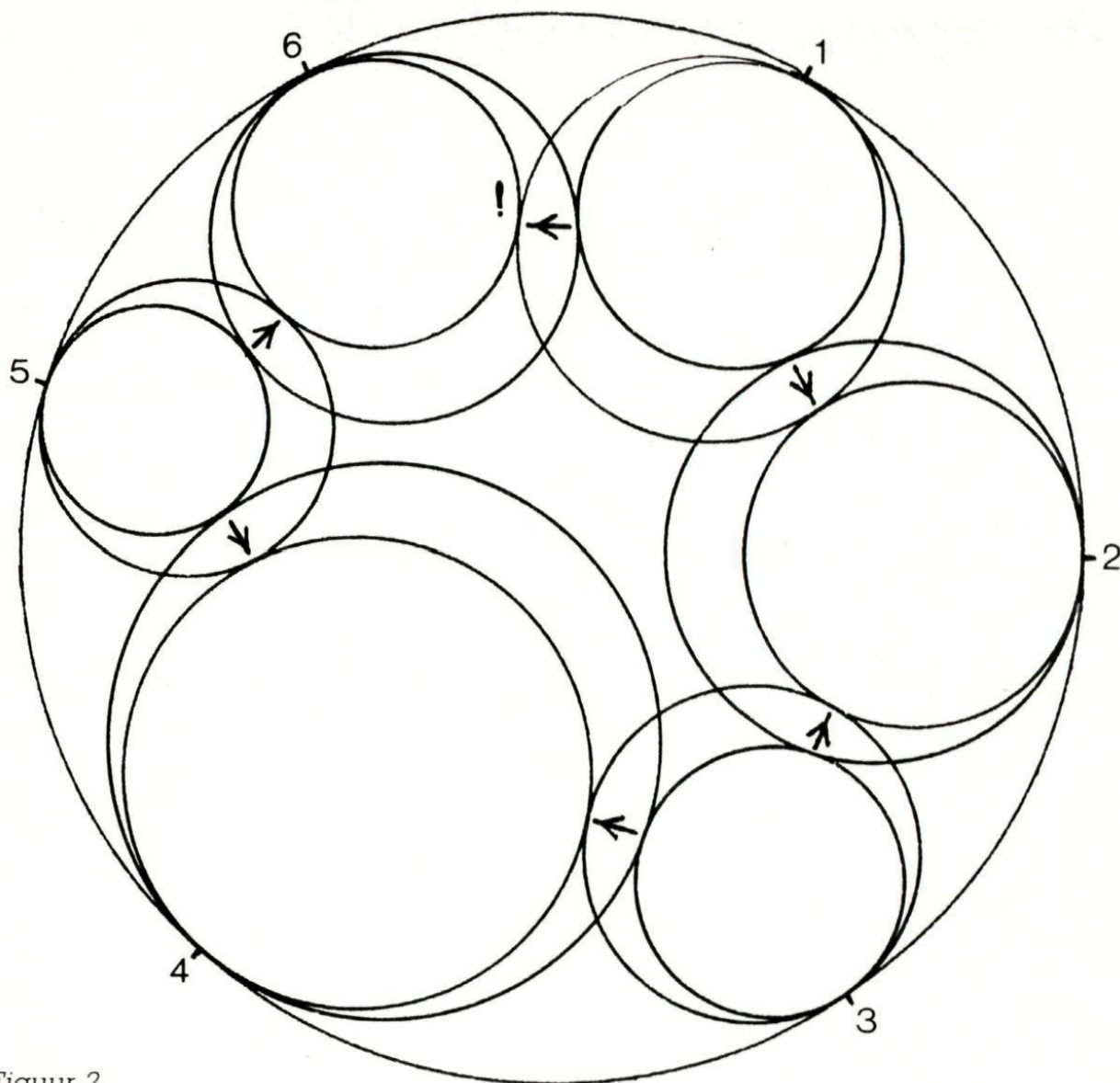
Als de dertiende van een maand op een vrijdag valt, brengt dit ongeluk. Wat is het laatste jaar geweest zonder zulke ongeluksdagen?

De zeven-cirkel-stelling



Figuur 1

Figuur 1 geeft nog eens de door één cirkel omsloten keten van zes rakende cirkels. In het artikel 'Een eigenschap van zeven cirkels' (Pythagoras 26-4) constateerden we dat de drie rechte verbindingen van overstaande raakpunten – meestal! – door één punt gaan. In sommige van de meer ingewikkelde gevallen bleek het echter ook ineens mis te kunnen lopen. Dat maakt nieuwsgierig. Je gaat je dan afvragen hoe het komt dat het in veel gevallen wél precies klopt. We hebben de zeven-cirkel-figuur nog van een heleboel kanten bekeken, en daarbij al zoekend verschillende andere eigenschappen ontdekt. Uiteindelijk lukte het om een aantal van deze vondsten te combineren tot een compleet bewijs. (Waarbij we ons overigens blijven afvragen of het niet nog wat simpeler kan.)



Figuur 2

Zelfde raakpunten, andere cirkels

In figuur 2 zijn eerst dezelfde zeven cirkels van figuur 1 nog eens getekend. We gaan nu wat rommelen aan de zes cirkels van de keten, waarbij we de raakpunten aan de buitencirkels op hun plaats laten:

- De cirkel in raakpunt 1 kiezen we wat groter.
- De cirkel in raakpunt 2 moet dan wat krimpen om aan 1 te blijven raken.
- De cirkel in raakpunt 3 moet dan wat groeien om ...
- ...

– ...

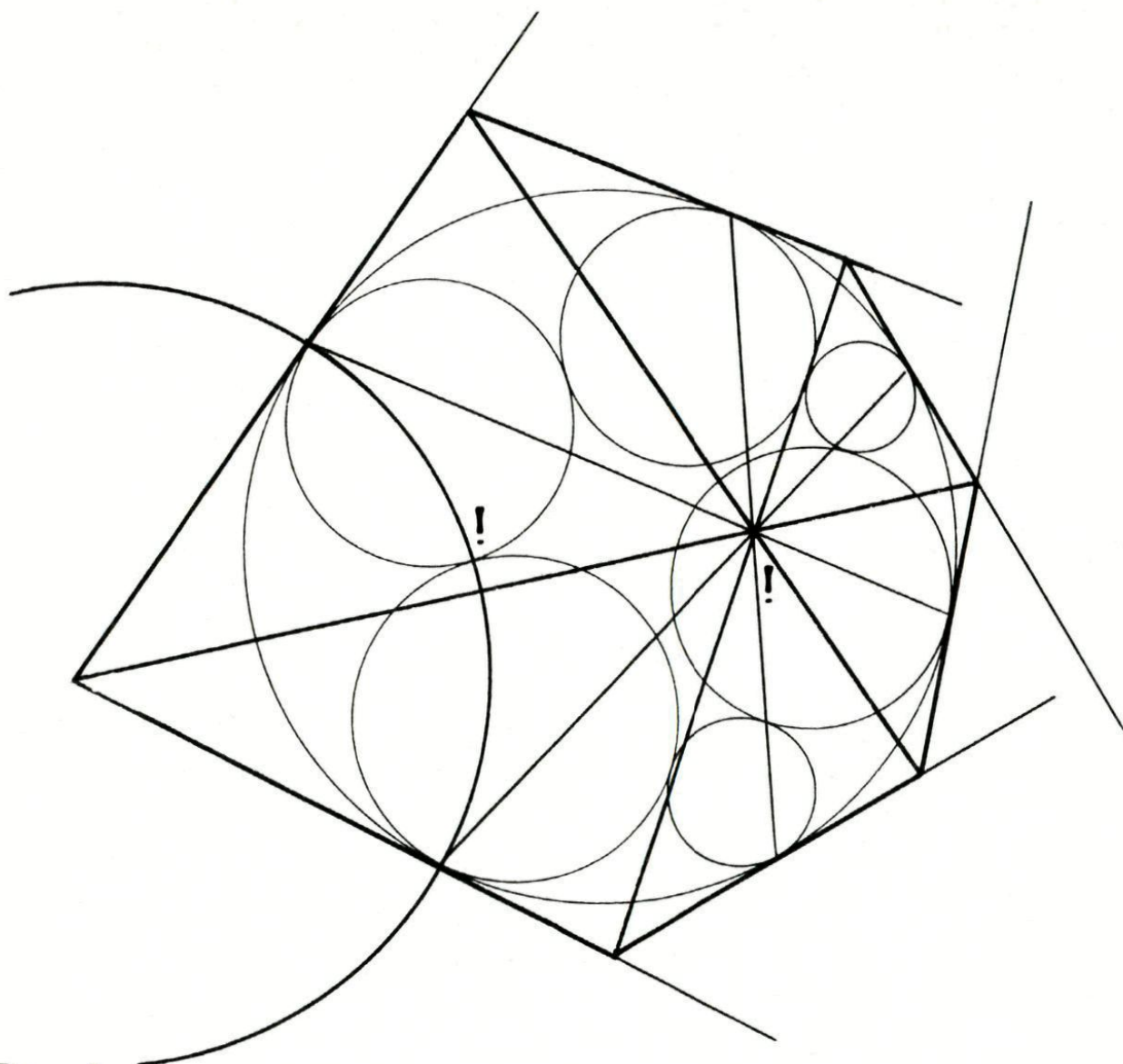
- De cirkel in raakpunt 6 moet dan wat krimpen om aan 5 te blijven raken.

Nu blijkt te gelden:

de cirkels 1 en 6 raken nog steeds.

Het lijkt misschien vanzelfsprekend, maar verklaar het maar eens. De groei- en krimpfactoren zijn allemaal verschillend.

Even een uitstapje: kun je uitproberen of dezelfde eigenschap ook geldt voor een keten van vier cirkels? En voor een keten van acht? Voor oneven cirkelaantallen in de keten geldt de groei-krimpeigenschap zeker niet.



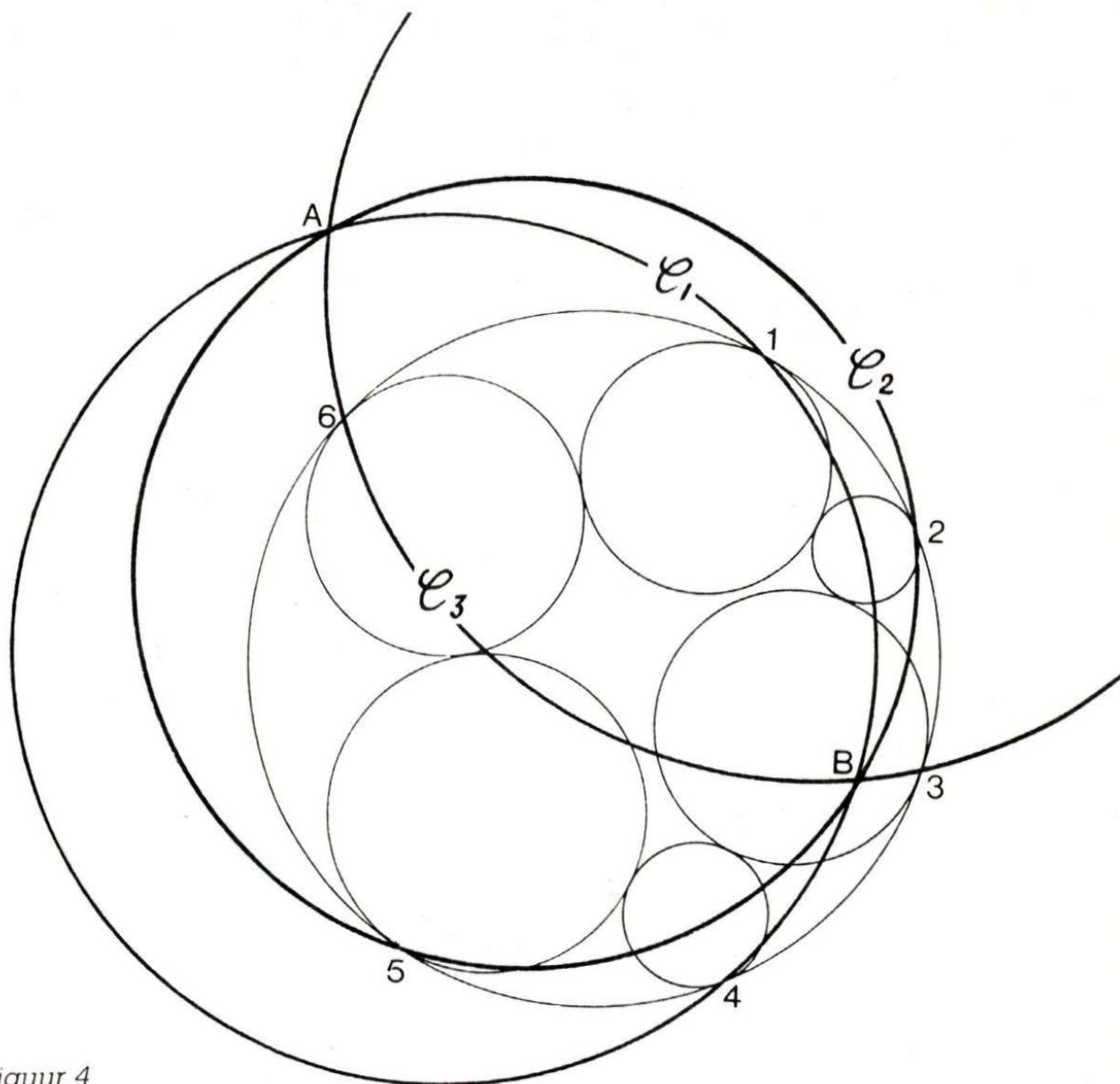
Figuur 3

Raaklijnen-zeshoek

In figuur 3 zie je weer de zeven-cirkel-figuur, in de zes raakpunten op de hoofdcirkel zijn ook nog de raaklijnen getekend. In de zo ontstane zeshoek kunnen we behalve over drie paar overstaande raakpunten, ook spreken over drie paar overstaande raaklijnen, en ook nog over drie stel overstaande hoekpunten.

Er geldt nu:

- De verbindingen van overstaande hoekpunten gaan door één punt, en wel juist het snijpunt van de drie verbindingen van overstaande raakpunten.
- De cirkel met een hoekpunt van de zeshoek als middelpunt, en gaande door twee naburige raakpunten op de hoofdcirkel, gaat ook door het onderlinge raakpunt van twee ketencirkels.
- De snijpunten van overstaande raaklijnen liggen op één rechte. (Deze rechte kon in figuur 3 niet worden getekend, de bedoelde snijpunten vallen niet allemaal binnen ons papierformaat. Als je er een groter stuk papier onder legt, kun je zelf controleren of het (een beetje) klopt.)



Figuur 4

Ronde verbindingen

Voor de derde keer beginnen we met de zeven-cirkel-figuur. We kijken nu niet naar rechte verbindingen tussen overstaande raakpunten, maar naar verbindingen door *ronde* cirkelbogen. Zie figuur 4.

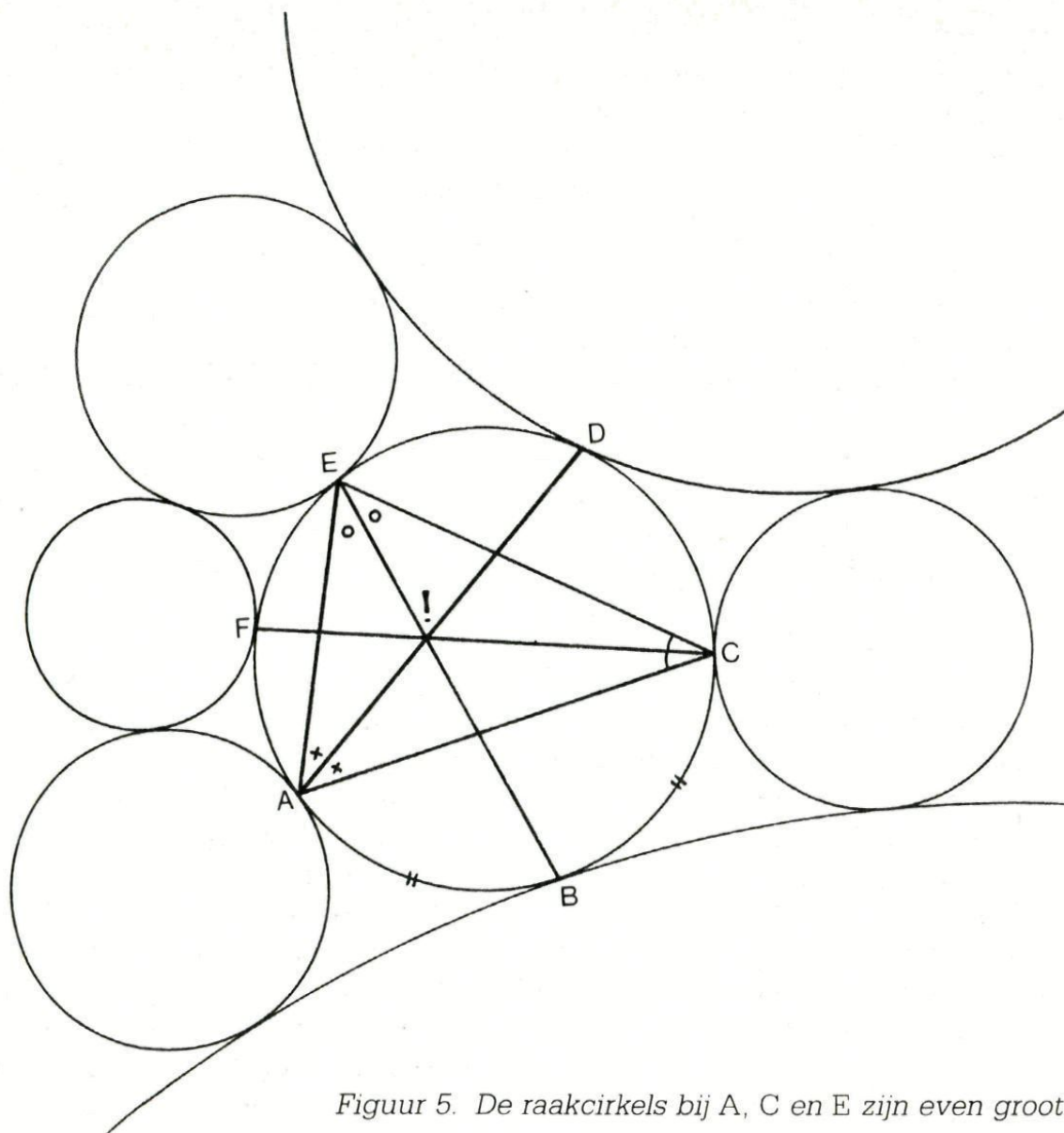
Tekenen we cirkel C_1 door de raakpunten 1 en 4, maar verder willekeurig, cirkel C_2 door 2 en 5 en verder willekeurig, en noemen we de snijpunten van die beide cirkels A en B, dan geldt:

de punten 3, B, 6 en A liggen op één cirkel (C_3).

Een cirkel door *drie* punten is niets bijzonders, maar als er zoals hier *vier* punten op dezelfde cirkel liggen, moet er iets speciaals aan de hand zijn.

Alle tot hier toe vermelde eigenschappen werden al experimenterend gevonden. Bewijzen ervoor vonden we pas achteraf – voorzover we ze al vonden; we geven ze hier niet.

In de laatste twee onderdelen van dit artikel bewijzen we wél de oorspronkelijke eigenschap: het door één punt gaan van de drie centrale diagonalen. Eerst een



Figuur 5. De raakcirkels bij A, C en E zijn even groot.

vrij makkelijk bewijs voor een bijzonder geval, daarna een wat pittiger algemeen bewijs.

Drie ketencirkels even groot

De zeven-cirkel-eigenschap is makkelijk aan te tonen in het speciale geval dat drie van de keten-cirkels (de nummers 1, 3 en 5, óf 2, 4 en 6) *even groot* zijn. Zie figuur 5, de ketencirkels hebben we hier maar eens buiten de hoofdcirkel gekozen.

Uit de symmetrie van de figuur blijkt dat de hoofdcirkel door de zes raakpunten verdeeld wordt in

drie paar gelijke cirkel-bogen (bg $AB = bg BC$, enzovoorts). Als we dan nog weten dat bij gelijke bogen ook gelijke omtrekshoeken horen, dan zien we dat de centrale diagonalen AD , CF en EB , bissectrices zijn in driehoek ACE . Een bekende stelling zegt ten slotte dat de bissectrices van een driehoek elkaar altijd in één punt snijden.

Met het bovenstaande is natuurlijk ook het geval bewezen dat in het vorige artikel in figuur 7 getekend was. Daar was niet uitgegaan van drie gelijke cirkels, maar

van drie aan de hoofdcirkel raken-
de rechte lijnen. Deze lijnen kun-
nen opgevat worden als even
(oneindig) grote cirkels.

Als in figuur 5 de zes raakpunten van
de keten-cirkels *niet op volgorde*
langs de hoofdcirkel liggen, zal het
bewijs soms ergens moeten falen
(zoals aan het slot van het vorige
artikel bleek!).

In deze gevallen blijft er sprake van
drie paar gelijke bogen op de hoofdcir-
kel, maar de bissectrices zijn niet
meer allemaal *binnen*-bissectrices
van driehoek *ACE*. Er kunnen één,
twee of drie *buiten*-bissectrices voor-
komen. Voor deze gevallen zegt de
uitgebreide bissectrice-stelling:

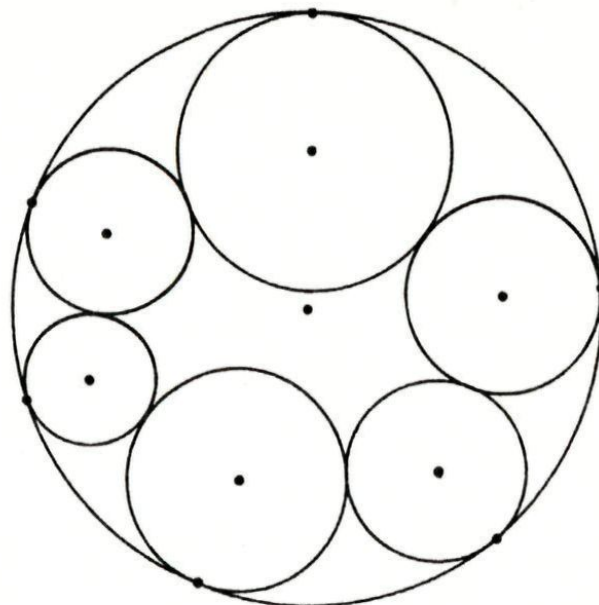
drie bissectrices van een driehoek
gaan door één punt
dan en slechts dan als
het drie binnenbissectrices zijn, óf
twee buitenbissectrices en één
binnenbissectrice.

Kort gezegd: het aantal binnenbissec-
trices moet drie of één zijn.

Een algemeen bewijs

Deze paragraaf is bedoeld voor
wie nieuwsgierig is naar een
gedetailleerd bewijs van de ze-
ven-cirkel-eigenschap. Dat zullen
waarschijnlijk vooral degenen
zijn die zélf al min of meer uitvoer-
ig geprobeerd hebben zo'n be-
wijs te vinden.

We beginnen in figuur 6 voor de
laatste maal met de keten van zes
rakende cirkels. De keten gaat
éénmaal de hoofdcirkel rond.
Belangrijke punten in de figuur
zijn de middelpunten van de zes-
plus-een cirkels, en de zes raak-
punten aan de hoofdcirkel (dat
zijn de eindpunten van de drie
centrale diagonalen waar de stel-
ling over gaat). Belangrijke leng-



Figuur 6

ten zijn de stralen $r, a, b, \dots, f$ van
de hoofdcirkel en de ketencirkels.
Hulplijnen kiezen we zó, dat de
belangrijke punten en afstanden
er op voorkomen. Zie figuur 7.
Voor de overzichtelijkheid zijn de
zes kleine cirkels nu weggelaten.
We willen bewijzen dat in de
koordenzeshoek *ABCDEF* de drie
centrale diagonalen door één
punt gaan. We zullen daartoe
eerst de zijde-lengten van die
zeshoek uitdrukken in $r, a, \dots, f$.
En wel via de sinussen van de
halve middelpuntshoeken $\alpha, \beta, \gamma,$
 δ, ϵ, ξ (dit zijn de Griekse letters
alfa, bèta, gamma, delta, epsilon
en zèta).

Wat goniometrie en algebra
geeft:

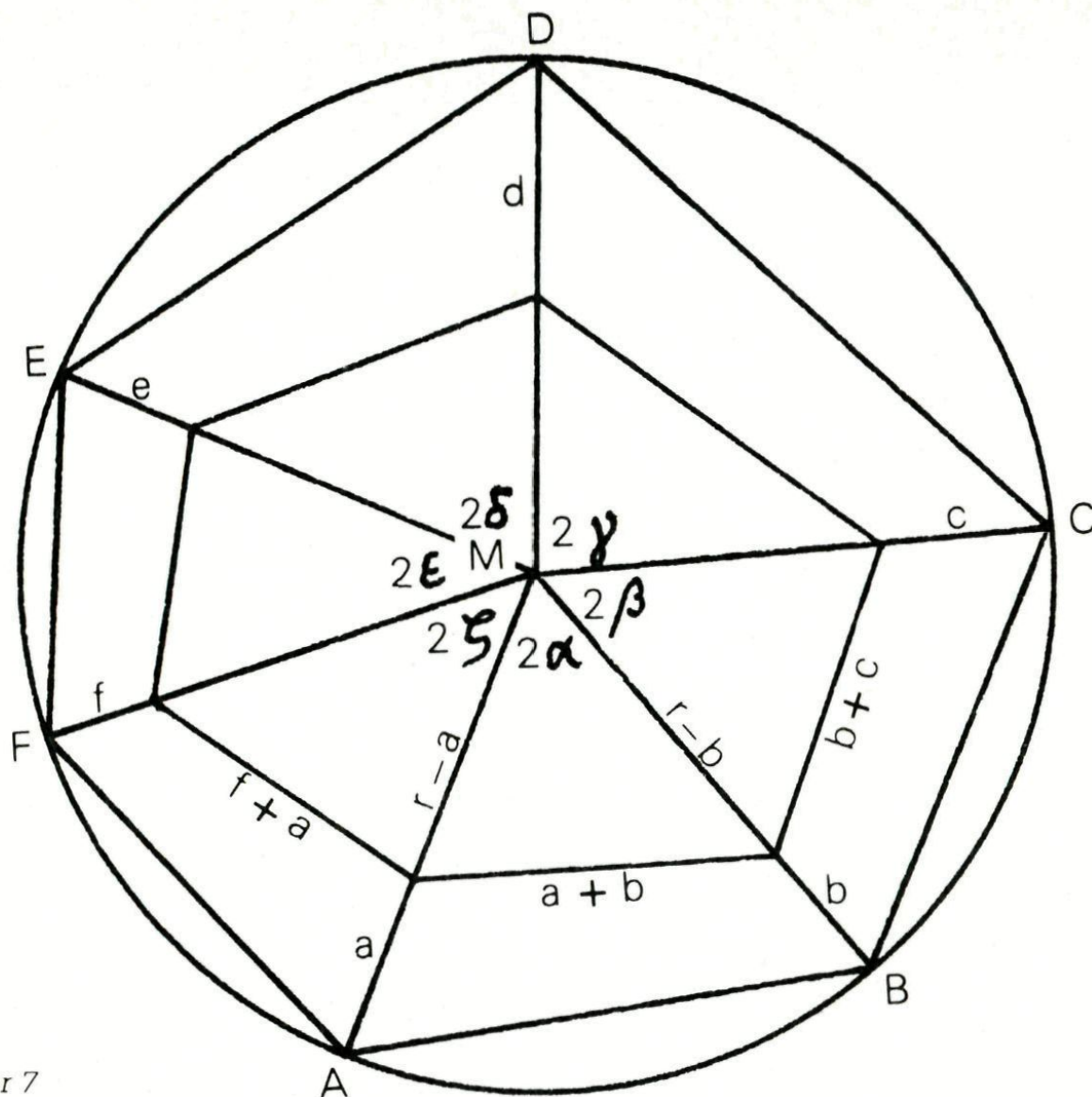
$$\sin \alpha = \sqrt{1/2} (1 - \cos 2\alpha) =$$

(cosinusregel invullen)

$$= \sqrt{1/2} \left(1 - \frac{(r-a)^2 + (r-b)^2 - (a+b)^2}{2(r-a)(r-b)} \right) =$$

(vereenvoudigen)

$$= \sqrt{\frac{a}{r-a}} \cdot \sqrt{\frac{b}{r-b}}.$$



Figuur 7

Evenzo voor de andere hoeken bij M:

$$\sin \beta = \sqrt{\frac{b}{r-b}} \cdot \sqrt{\frac{c}{r-c}}.$$

... ..

$$\sin \xi = \sqrt{\frac{f}{r-f}} \cdot \sqrt{\frac{a}{r-a}}.$$

Hieruit blijkt te volgen:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \delta} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \xi} \cdot \frac{\sin \epsilon}{\sin \beta} = 1 \quad (1)$$

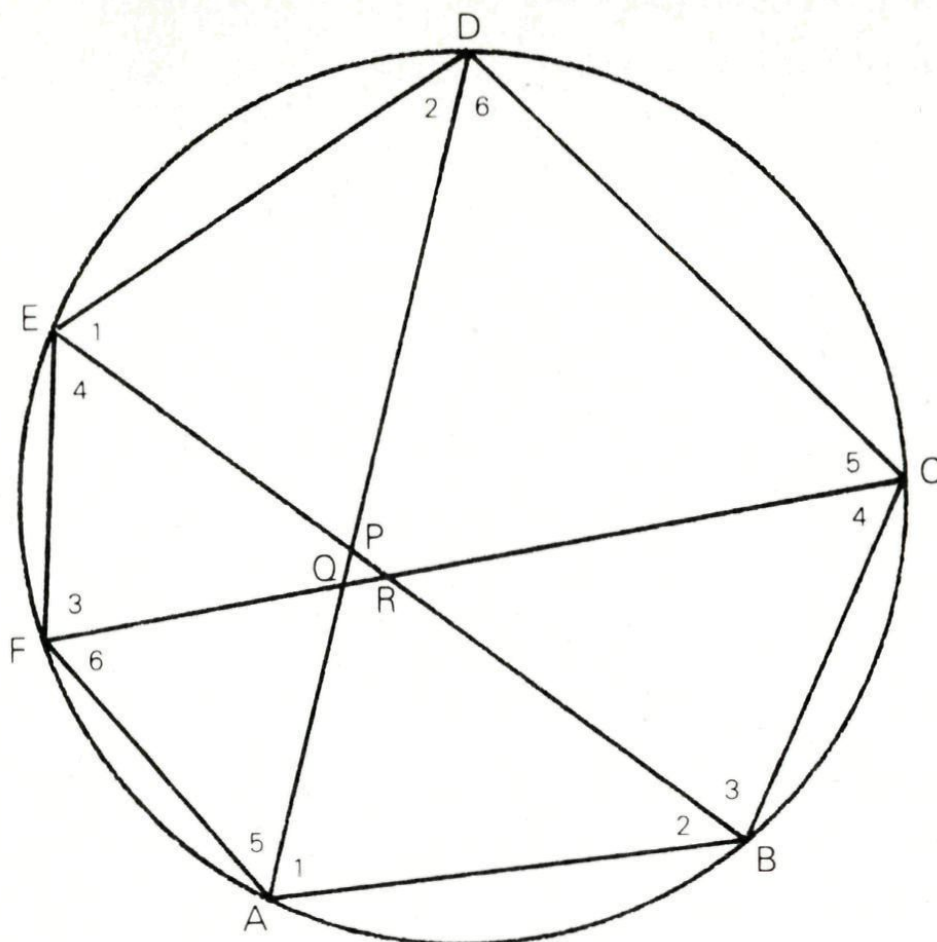
Met $AB = 2r \sin \alpha$, $BC = \dots$, etc. gaat (1) over in

$$\frac{AB}{ED} \cdot \frac{CD}{AF} \cdot \frac{EF}{CB} = 1 \quad (2)$$

Even rusten. We zijn zowat halverwege; voor het vervolg hebben we alleen de laatste formule (2) nodig.

In figuur 8 zijn $A, B, \dots, F$ nog steeds de raakpunten van de ketencirkels aan de hoofdcirkel. Trekken we de zijden van de zeshoek en de centrale diagonalen AD, BE en CF , dan komen er in de figuur drie stel gelijkvormige driehoeken voor. (Want uit het gelijk zijn van omtrekshoeken die dezelfde cirkelboog uitsnijden volgt:

$$\angle A_1 = \angle E_1, \angle B_2 = \angle D_2, \angle B_3 = \angle F_3, \text{ enzovoorts.})$$



Figuur 8

Uit deze gelijkvormigheid volgen de volgende drie evenredigheden:

$$\frac{AB}{ED} = \frac{AP}{EP'} \quad \frac{CD}{AF} = \frac{CQ}{AQ'} \quad \frac{EF}{CB} = \frac{ER}{CR}$$

Invullen in (2), en wijzigen van de volgorde van de noemers geeft:

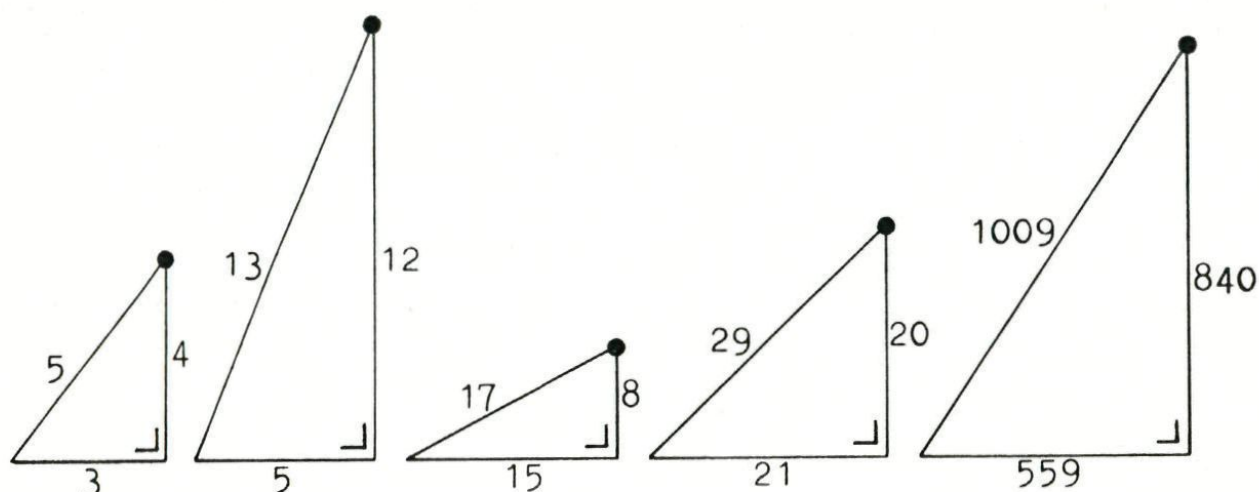
$$\frac{AP}{AQ} \cdot \frac{CQ}{CR} \cdot \frac{ER}{EP} = 1. \quad (3)$$

Tekenen we (zoals in figuur 8 is gebeurd) de centrale diagonalen *niet* door één punt, dan zijn de drie breuken in het linkerlid van (3) óf allemaal groter dan 1, óf allemaal kleiner dan 1. Dit komt beide in strijd met het rechterlid van (3) en dus hebben de drie diagonalen wél een gemeenschappelijk snijpunt. Dit is juist wat we wilden bewijzen.

Het laatste argument (alle breuken óf groter, óf kleiner dan 1) blijkt helaas niet meer te gelden als de raakpunten $A, B, \dots, F$ *niet* op volgorde liggen langs de hoofdcirkel. In dat geval moet op een andere manier (die we hier niet laten zien) worden aangetoond dat de stelling toch nog geldt indien juist één van de drie centrale diagonalen door het binnengebied van driehoek ACE gaat. (Of, wat op hetzelfde neerkomt, één centrale diagonaal door het binnengebied van driehoek BDF .)

Nog een opmerking, bestemd voor wie de *stelling van Ceva* kent. Uit deze stelling kan een variant worden afgeleid (de 'sinusstelling van Ceva') die zegt dat indien voor zes punten op een cirkel formule (1) geldt, de drie centrale diagonalen door één punt gaan. Klaar!

Puntige driehoeken in een grafiek



Figuur 1

Je ziet hier enkele van de (oneindig vele) *pythagorische driehoeken*, dat zijn rechthoekige driehoeken waarbij de lengte van elke zijde een geheel getal is.

De meest voor de hand liggende manier om een heleboel van zulke driehoeken te vinden is: gewoon maar alles uitproberen. Vroeger was dat natuurlijk een geweldig zweet-karwei; tegenwoordig is het een heel stuk minder moeilijk om een lange lijst van zulke getal-drietallen uit je micro-computer te laten komen. Bij het bekijken van zo'n lijst heeft een mens gauw de neiging om te proberen er een of andere regelmaat in te ontdekken. Vaak is de bedoeling daarvan dan, om die regelmaat om te zetten in een recept waarmee het vervolg van de lijst te voorspellen is. En wel zónder al het 'stomme' probeerwerk.

Een van onze lezers, *G. Schol* uit Drachten, kwam op het idee deze kwestie aan te pakken met . . . grafieken. Na wat schuiven en prutsen bleek de grafiek een aantal geheimen prijs te geven die in de getal-tabellen onmogelijk te vinden waren. We laten dit hier nader zien.

De lijst van figuur 2

Een probeer-programma op de micro leverde de lijst drietallen van figuur 2. Ze staan op volgorde van het derde getal, de lengte van de schuine zijde. Van de beide rechthoekszijden staat steeds de kortste voorop.

De lijst geeft alle primitieve driehoeken met schuine zijde kleiner dan 1000. Het zijn er 158. Met

'primitief' wordt hier bedoeld dat de drie zijden geen gemeenschappelijke factor hebben (niet vereenvoudigbaar zijn).

De (3, 4-5)-driehoek is wel primitief, maar niet z'n vergrotingen (6, 8-10), (9, 12-15) . . . enzovoorts.

Wat voor bijzonderheden kun je in deze lijst ontdekken?

Misschien zie je na een poosje dat

3, 4 - 5	23, 264 - 265	217, 456 - 505	39, 760 - 761
5, 12 - 13	96, 247 - 265	336, 377 - 505	481, 600 - 769
8, 15 - 17	69, 260 - 269	220, 459 - 509	195, 748 - 773
7, 24 - 25	115, 252 - 277	279, 440 - 521	56, 783 - 785
20, 21 - 29	160, 231 - 281	92, 525 - 533	273, 736 - 785
12, 35 - 37	161, 240 - 289	308, 435 - 533	168, 775 - 793
9, 40 - 41	68, 285 - 293	341, 420 - 541	432, 665 - 793
28, 45 - 53	136, 273 - 305	33, 544 - 545	555, 572 - 797
11, 60 - 61	207, 224 - 305	184, 513 - 545	280, 759 - 809
16, 63 - 65	25, 312 - 313	165, 532 - 557	429, 700 - 821
33, 56 - 65	75, 308 - 317	276, 493 - 565	540, 629 - 829
48, 55 - 73	36, 323 - 325	396, 403 - 565	41, 840 - 841
13, 84 - 85	204, 253 - 325	231, 520 - 569	116, 837 - 845
36, 77 - 85	175, 288 - 337	48, 575 - 577	123, 836 - 845
39, 80 - 89	180, 299 - 349	368, 465 - 593	205, 828 - 853
65, 72 - 97	225, 272 - 353	240, 551 - 601	232, 825 - 857
20, 99 - 101	27, 364 - 365	35, 612 - 613	287, 816 - 865
60, 91 - 109	76, 357 - 365	105, 608 - 617	504, 703 - 865
15, 112 - 113	252, 275 - 373	336, 527 - 625	348, 805 - 877
44, 117 - 125	135, 352 - 377	100, 621 - 629	369, 800 - 881
88, 105 - 137	152, 345 - 377	429, 460 - 629	60, 899 - 901
17, 144 - 145	189, 340 - 389	200, 609 - 641	451, 780 - 901
24, 143 - 145	228, 325 - 397	315, 572 - 653	464, 777 - 905
51, 140 - 149	40, 399 - 401	300, 589 - 661	616, 663 - 905
85, 132 - 157	120, 391 - 409	385, 552 - 673	43, 924 - 925
119, 120 - 169	29, 420 - 421	52, 675 - 677	533, 756 - 925
52, 165 - 173	87, 416 - 425	37, 684 - 685	129, 920 - 929
19, 180 - 181	297, 304 - 425	156, 667 - 685	215, 912 - 937
57, 176 - 185	145, 408 - 433	111, 680 - 689	580, 741 - 941
104, 153 - 185	84, 437 - 445	400, 561 - 689	301, 900 - 949
95, 168 - 193	203, 396 - 445	185, 672 - 697	420, 851 - 949
28, 195 - 197	280, 351 - 449	455, 528 - 697	615, 728 - 953
84, 187 - 205	168, 425 - 457	260, 651 - 701	124, 957 - 965
133, 156 - 205	261, 380 - 461	259, 660 - 709	387, 884 - 965
21, 220 - 221	31, 480 - 481	333, 644 - 725	248, 945 - 977
140, 171 - 221	319, 360 - 481	364, 627 - 725	473, 864 - 985
60, 221 - 229	44, 483 - 485	108, 725 - 733	696, 697 - 985
105, 208 - 233	93, 476 - 485	216, 713 - 745	372, 925 - 997
120, 209 - 241	132, 475 - 493	407, 624 - 745	
32, 255 - 257	155, 468 - 493	468, 595 - 757	

Figuur 2

alle schuine zijden een *oneven* lengte hebben. En ook dat van de getallen voor de rechthoekszijden er altijd één even en één oneven is.

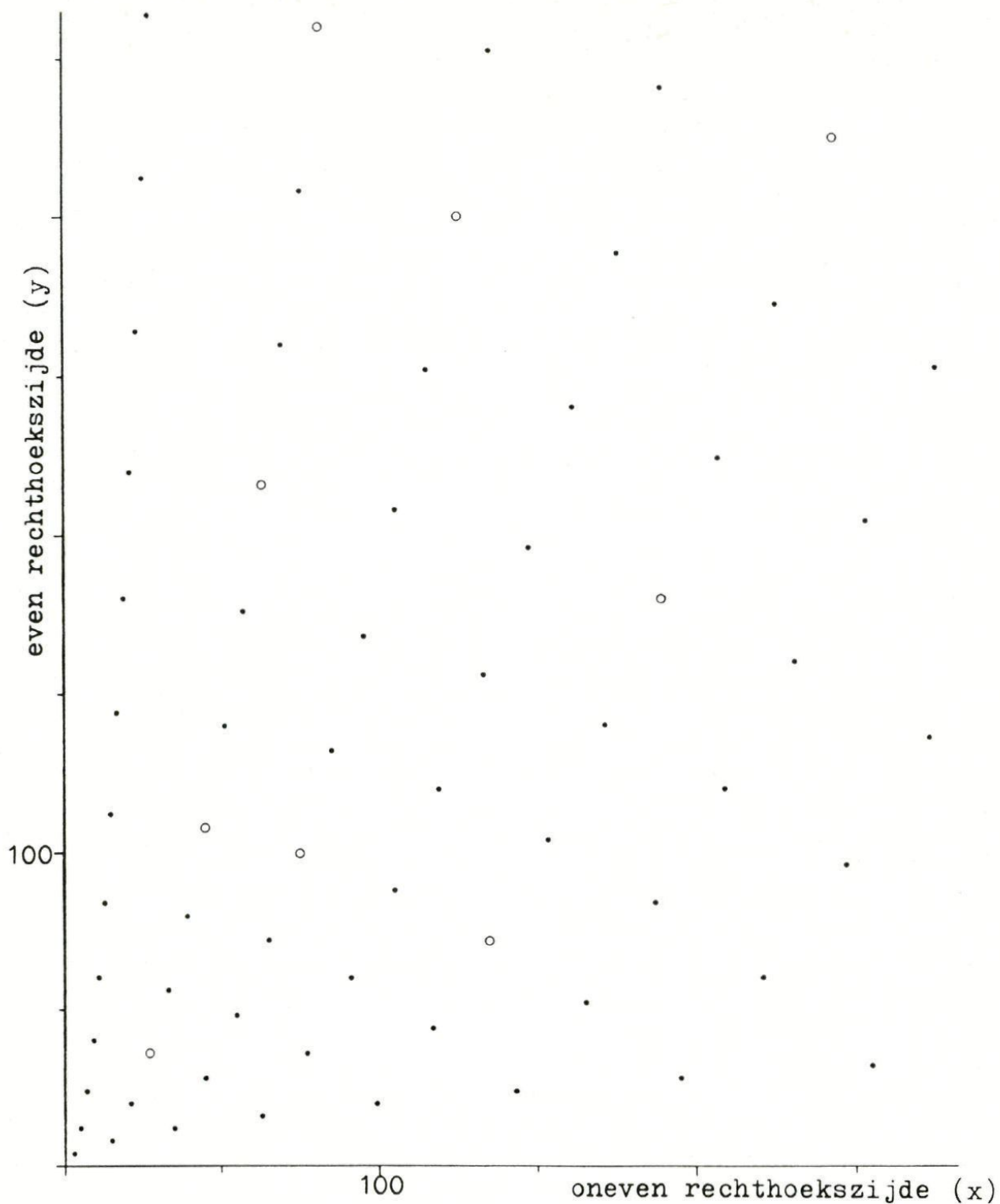
Daarnaast merk je misschien op dat er gevallen zijn waar de twee langste zijden juist 1 verschillen. En ook nog, hoewel veel zeldzamer, gevallen waarbij de beide kórtste zijden juist 1 verschillen (bijvoorbeeld het voorlaatste drietal van de lijst).

Veel meer regelmatig zul je aan de lijst wel niet zien, laat staan dat je er uit kunt afleiden wat het eerstvolgende drietal is. Zoals

gezegd, proberen we dat met behulp van een *grafiek*.

De punten-grafiek

Onze inzender maakte van de lijst op de volgende manier een grafiek. De lengten van de rechthoekszijden van de pythagorische driehoeken worden gebruikt als coördinaten van een punt in een assenstelsel. Zie figuur 3. Het dicht bij de oorsprong getekende punt heeft coördinaten (3, 4) en stelt dus de driehoek 3, 4-5 voor. Zo staat elke zwarte punt voor een driehoek uit de lijst (voorzover ze binnen de tekening vallen). Na wat proberen bleek dat de



Figuur 3

grafiek er wat regelmatig uit komt te zien als niet de kórtste zijde van de driehoek als horizontale coördinaat wordt gekozen, maar altijd de óneven rechthoekszijde. Zo is driehoek (8, 15-17)

voorgesteld door het punt (15, 8).

Mogelijk verbaas je je er over dat we de groep losse punten in figuur 3 een grafiek noemen. Want meestal denk je bij 'grafiek' aan

een rechte of kromme *lijn*. Toch is er wel een goede reden om ook hier deze naam te gebruiken. De belangrijke eigenschap die de puntenfiguur gemeen heeft met andere grafieken is namelijk het feit dat de informatie die in de figuur vastligt, bepaald wordt door de *plaats* van de op het papier aangemerkte punten.

Bij onze punten-grafiek hoort ook een formule, namelijk

$x^2 + y^2 =$ een zuiver kwadraat, met als beperkingen:

1. x en y zijn positieve *gehele* getallen, en
2. x en y hebben géén gemeenschappelijke factor.

Bij weglating van de eerste beperking stelt de formule een stelsel van cirkels voor. Echter alleen de róósterpunten op die cirkels hebben te maken met heeltallige pythagorische driehoeken.

Bij weglating van de tweede beperking zouden ook alle niet-primitieve pythagorische driehoeken een eigen punt in het assenkruis van figuur 3 moeten krijgen. En ook dié wilden we er niet bij hebben. Van *sommige* niet-primitieve driehoeken is de plaats in de figuur aangegeven met een open rondje. Dit maakt de regelmaat in de figuur nog duidelijker zichtbaar. Een rondje kreeg bijvoorbeeld het punt (27, 36) voor de niet-primitieve driehoek (27, 36-45). Z'n kleinere broertjes (6, 8-10), (9, 12-15), (12, 16-20), (15, 20-25), enzovoorts, zijn echter helemaal niet aangeduid, omdat ze de regelmaat van de rest juist verstoren.

Bekijk nu de grafiek eens van alle kanten, en probeer er zoveel mo-

gelijk regelmatigheden in te vinden.

Parabolen

Voorals je een beetje scheef langs het papier kijkt, zie je dat de punten in figuur 3 bepaalde series vormen. Eén zo'n serie punten ligt steeds op een wat gebogen lijn, misschien doet die vorm je wel denken aan een (stuk van een) parabool. En als je in een andere richting kijkt zie je weer een andere bundel parabolen. Er zijn zeker wel vier van zulke bundels te ontdekken.

Nu het kijken naar de grafiek ons op het idee van parabolen heeft gebracht, weten we in welke richting we verder kunnen zoeken.

Het blijkt dan dat bepaalde series punten inderdaad precies op parabolen liggen. Een ook dat de vier bundels parabolen beschreven kunnen worden door de volgende functie-formules

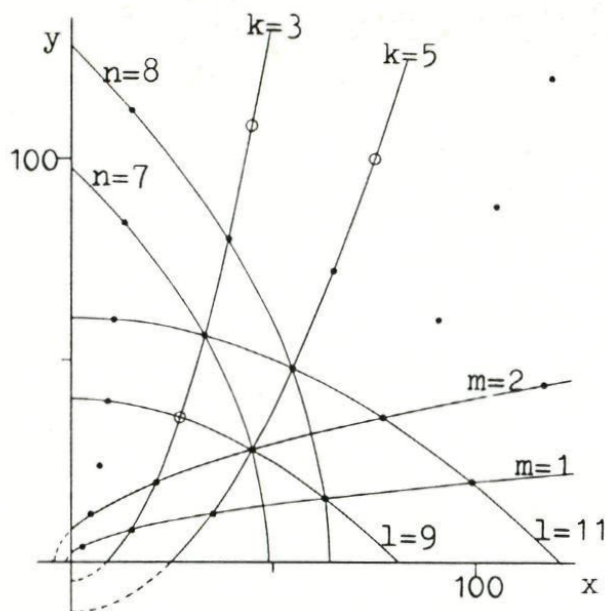
$$\text{bundel 1: } y = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{k^2} - k^2 \right) \\ \text{voor } k = 1, 3, 5, \dots;$$

$$\text{bundel 2: } y = \frac{1}{2} \left(l^2 - \frac{x^2}{l^2} \right) \\ \text{voor } l = 1, 3, 5, \dots;$$

$$\text{bundel 3: } y = 2m \sqrt{(m^2 + x)} \\ \text{voor } m = 1, 2, 3, 4, \dots;$$

$$\text{bundel 4: } y = 2n \sqrt{(n^2 - x)} \\ \text{voor } n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

In figuur 4 zijn van elke bundel twee exemplaren getekend. Uit de paraboolformules kunnen we nu een handig recept afleiden voor het vinden van alle (primitieve) pythagorische driehoeken. De snijpunten van de parabolen blij-



Figuur 4

ken het handigst te vinden uit de formules voor de bundels 1 en 2. Eerst y elimineren, en dan x levert:

$$x = k \cdot l, \quad y = \frac{1}{2}(l^2 - k^2).$$

Elke keuze van twee oneven pos. getallen k en l ($l > k$) geeft gehele getallen x en y met de bijzonderheid dat óók $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ geheel is. Probeer maar!

Als we k en l zo kiezen dat ze géén gemeenschappelijke factor hebben, dan geldt dat ook voor x en

y . We vinden zo in sneltreinvaart, zonder eindeloos probeerwerk, álle primitieve pythagorische driehoeken.

We hopen hier vooral duidelijk gemaakt te hebben dat het tekenen van de grafiek (op een handige manier), en het bekijken ervan, een belangrijke rol speelde bij het vinden van de receptformules.

Een laatste vondst!

Op het laatste moment ontdekten we nog iets erg interessants. We geven hier alleen aan op welke manier dit te vinden is.

Teken zelf een puntengrafiek (liefst op millimeter-papier) van primitieve pythagorische driehoeken op net zo'n soort manier als in figuur 3. Ook met de lengte van de oneven rechthoekszijde als horizontale coördinaat, *maar nu de lengte van de **schuine** zijde als verticale coördinaat.*

Wat voor regelmaat vind je dan in de tekening?

Het vinden van een receptformule voor de drietallen is nu nog een stuk simpeler dan bij die lastige kromme parabolen van hierboven.

Tentoonstelling Schoonheid in de chaos

Onder de titel 'Schoonheid in de chaos' is er van 4 juli tot 30 augustus 1987 in het museum voor Hedendaagse Kunst (Achter de Dom) te Utrecht een tentoonstelling van computerbeelden.

Deze beelden zijn gemaakt door de Duitsers H. O. Peitgen en P. H. Richter van de Universiteit van Bremen met niet al te ingewikkelde computerprogramma's, hoewel de wiskunde die eraan ten grondslag ligt lang niet eenvoudig is. Maar ook zonder kennis van die wiskunde zullen de figuren velen boeien door hun prachtige kleuren en spectaculaire vormen.

Openingstijden: dinsdag tot en met zaterdag 10-17 uur, op zon- en feestdagen 13-17 uur.

Zelf zoeken naar eigenschappen

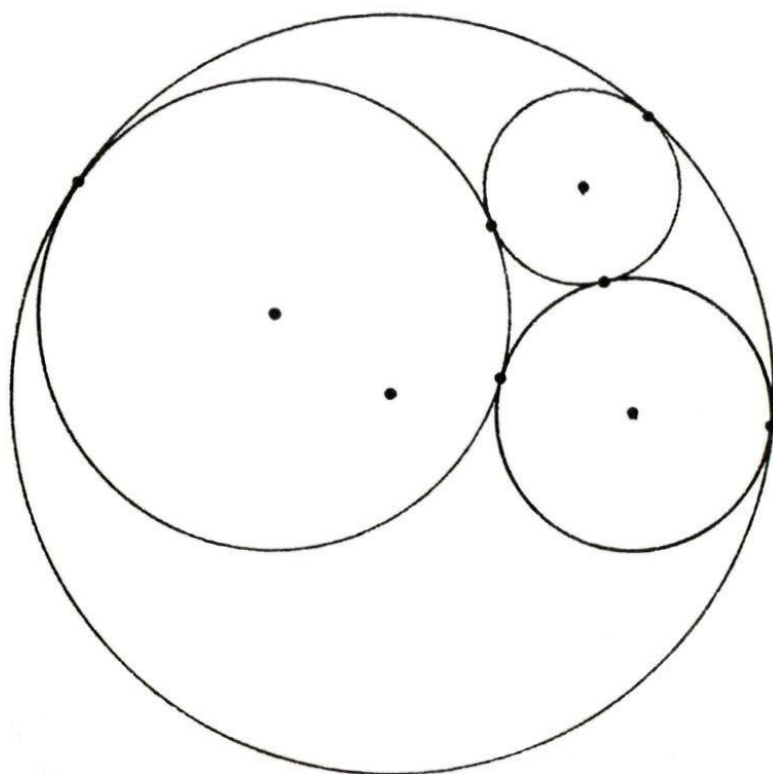
In het artikel over de zeven-cirkel-stelling hebben we je verschillende eigenschappen en bewijzen kant en klaar voorgelegd. Op die manier kreeg je echter niet de kans kennis te maken met de boeiende kanten van het *zelf onderzoeken*. Het zelf, met veel papier en tekengerei (een goede passer!) speuren naar eigenschappen in meetkundige figuren. Het voelen van de spanning of na een hoop tekenwerk een laatste rechte lijn wél of níet door het snijpunt gaat van twee eerder gevonden lijnen. (Waarbij je voortdurend moet schatten of een afwijking van een paar millimeter veroorzaakt kan zijn door onnauwkeurigheid in je tekenwerk, óf doordat het ook in theorie niet hoeft te kloppen.) Het dan nóg eens tekenen, uitgaande van een iets veranderde begin-figuur. We gaan hier proberen je uit te dagen zelf op speurtocht te gaan. We zullen dit keer niet achteraf gaan schoolmeesteren over wat je wel en niet had kunnen vinden, en evenmin over hoe die zaken te bewijzen zijn.

Drie- en vier-in-de-pan

Je zult wel kunnen zien dat de beide figuren familie zijn van de uitvoerig besproken zeven-cirkel-figuur.

Bijzondere punten in de figuren zijn de middelpunten, de raakpunten en de snijpunten van de cirkels.

Bijzondere lijnen zijn (rechte)



lijnen door twee bijzondere punten, en ook raaklijnen aan twee cirkels. De vraag is nu om van deze bijzondere lijnen en punten speciale eigenschappen op te sporen, zoals:

- zijn er drie (of meer) bijzondere lijnen die een gemeenschappelijk snijpunt hebben?
- zijn er punten-drietallen waar juist een rechte lijn door gaat?
- zijn er lijnen of cirkels die elkaar onder rechte hoeken snijden?

En, moeilijker te vinden:

- zijn er punten-viertallen die op één cirkel liggen?
- zijn er lijnen-viertallen die aan één cirkel raken?

Enzovoort.

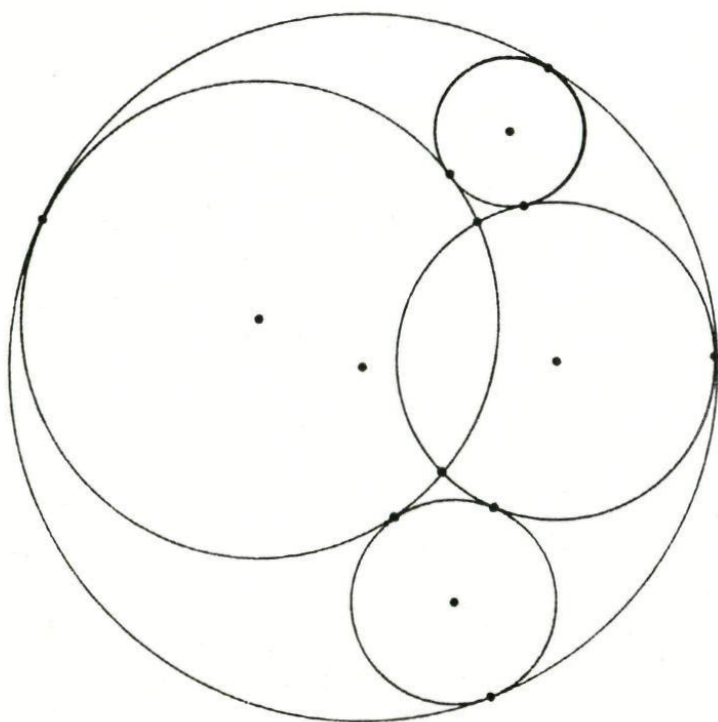
Het beste kun je de figuren op een

groter stuk papier overtekenen. (Je merkt dan tegelijk ook hoeveel moeite wij gehad hebben om alle cirkels steeds zo mooi mogelijk rakend te laten zijn.) Goed teken-gereedschap, zeker ook een goede passer, is noodzakelijk.

Natuurlijk spreken we pas echt van een speciale eigenschap, als die eigenschap óók geldt wanneer de verhoudingen in de oorspronkelijke cirkel-figuur wat anders zijn.

Zulk onderzoek kan eindeloos worden voortgezet als je de snijpunten van de bovenbedoelde bijzondere lijnen, opvat als nieuwe bijzondere punten, waar ook weer lijnen door getrokken kunnen worden. Enzovoort.

Of je zo ver wilt gaan moet je zelf weten. We hebben al wel gezien dat er ook zónder van zulke 'tweederangs' punten en lijnen gebruik te maken, best al héél wat te ontdekken valt!



Pythagoras Olympiade



Nieuwe opgaven

Oplossingen vóór 15 augustus insturen naar: *Pythagoras Olympiade, Marinus de Jongstraat 12, 4904 PL OOSTERHOUT (NB)*. Vermeld op elk (éénzijdig beschreven) vel je naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas. Verder moet elke oplossing op een nieuw vel beginnen, want we corrigeren ze afzonderlijk. We bekijken alleen goed leesbare oplossingen die volledig zijn uitgewerkt, met verklarende tekst in goed lopende zinnen. Verdere informatie over de wedstrijd vind je in nummer 1 van deze jaargang op bladzijde 24.

PO 100

Bewijs dat er een natuurlijk getal n is zo, dat 1987^n in decimale schrijfwijze eindigt op honderd nullen gevolgd door een 1.

PO 101

Op een $n \times n$ -schaakbord telt men het aantal vierkanten met zijden evenwijdig aan de zijden van het bord, waarvoor de hoekpunten samenvallen met middelpunten van velden. Bij een 2×2 -bord is dit aantal 1, bij een 3×3 -bord is het 5. Wat is het kleinste getal n waarvoor dit aantal groter is dan 1987? Geef een volledig gemotiveerd antwoord.

Oplossingen en prijswinnaars van de opgaven PO 94 en 95

PO 94

Een pak kaarten, genummerd van 1 tot en met 52, wordt als volgt geschud. Eerst wordt de stapel in tweeën gedeeld, en daarna wordt er 'om en om' een nieuwe stapel van gemaakt. Dat kan op twee manieren:

- (a) zo, dat de nieuwe volgorde is
1, 27, 2, 28, 3, 29, 4, 30, ...
- (b) zo, dat de nieuwe volgorde is
27, 1, 28, 2, 29, 3, 30, 4, ...

Onderzoek of de oorspronkelijke volgorde weer terugkeert als je methode (a) vaak genoeg herhaalt, en zo ja, bepaal dan na hoeveel keer dit voor het eerst gebeurt. Beantwoord dezelfde vragen ook voor het herhaald schudden volgens methode (b).

Oplossing van Teun Duynstee, 5 vwo, Den Haag (iets bewerkt):

Je kunt van elke kaart de 'levensloop' volgen, dat wil zeggen de plaatsen die hij achtereenvolgens bezet. Doe je dit bij het schudden volgens methode (a), dan zie je dat de kaarten 1 en 52 op hun plaats blijven, dat de kaarten 18 en 35 telkens van plaats wisselen, en dat de andere kaarten allemaal in cycli van 8 van plaats verwisselen. Een voorbeeld is de cyclus $2 - 3 - 5 - 9 - 17 - 33 - 14 - 27 - 2$ (Teun gaf ook de andere cycli aan). Omdat het kleinste gemene veelvoud van 1, 2 en 8 gelijk is aan 8, zal na 8 keer schudden elke kaart weer op zijn oorspronkelijke plaats liggen.

(Opmerking: ervaren goochelaars zijn inderdaad in staat op zo'n manier na acht keer schudden de oude volgorde weer terug te krijgen.)

Bij de methode (b) blijkt er één lange cyclus van 52 plaatsen te zijn. Daarbij zal dus pas na 52 keer schudden de oorspronkelijke volgorde terugkeren.

Er waren 17 inzendingen, allemaal correct. Prijzen: *Robert Lukassen*, 6 vwo, Veldhoven en *Sjef Ederveen*, 5 vwo, Nijmegen.

PO 95

Hoeveel positieve gehele getallen zijn er met de eigenschap dat er (in de

gewone decimale schrijfwijze) geen twee gelijke cijfers in voorkomen?

Oplossing van *Piet Bikker*, 5 vwo, Nieuweroord:

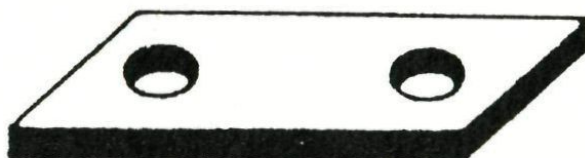
Aan de voorwaarde voldoen 9 getallen met 1 cijfer, 9×9 getallen met 2 cijfers, $9 \times 9 \times 8$ getallen met 3 cijfers, $9 \times 9 \times 8 \times 7$ getallen met 4 cijfers, . . . , $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ getallen met 10 cijfers. In totaal zijn dit 8877690 getallen.

Er waren 19 inzendingen, allemaal correct. Prijswinnaars: *Wim Oudshoorn*, Vrije School bovenbouw, Heiloo, en *Pieter Rijken*, 5 vwo, Nijmegen.

Maak ze los

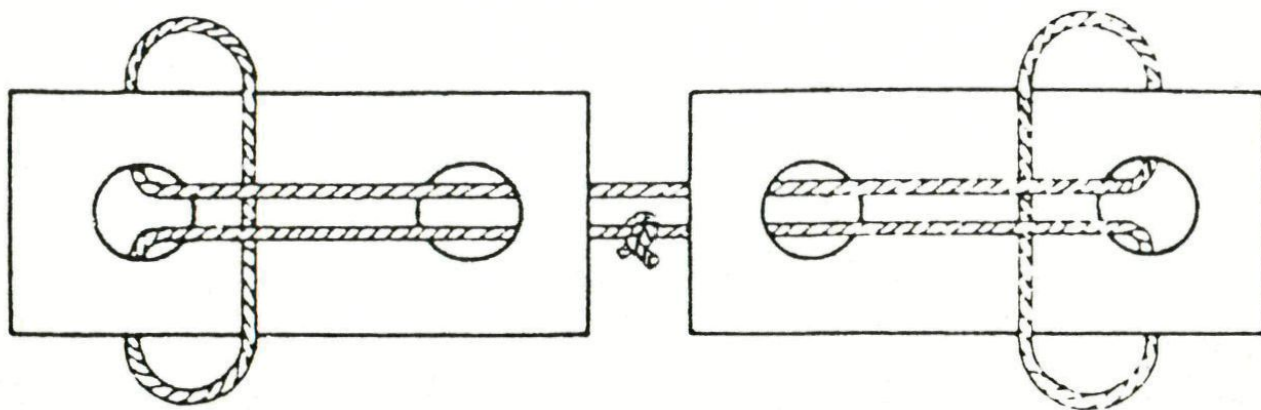
Neem een hulsje van een lucifersdoosje. Snijd of knip de boven- en onderkant los. Maak daarin twee gaatjes (figuur 1) met een diameter van ongeveer 1 centimeter.

Rijg een touwtje (niet te kort) door de gaatjes en knoop het vast (figuur 2).



Figuur 1

Probeer nu zonder de knoop los te maken de stukjes karton van het touwtje af te halen.



Figuur 2

Redactioneel

Met de artikelen 'De zeven-cirkel-stelling' en 'Zelf zoeken naar eigenschappen' komen we uitgebreid terug op het artikel 'Een eigenschap van zeven cirkels' uit het vorige nummer. Verder wordt je ruimtelijk inzicht, zoals beloofd in het vorige nummer, nogmaals op de proef gesteld in het artikel 'Zagen, zagen, ...'. Genoemde artikelen bepalen voor het grootste deel de inhoud van dit nummer. Ze leveren echter zoveel aanknopingspunten om op allerlei manieren zelf aan de slag te gaan, dat andere onderwerpen daar best even voor mogen wijken. Daarom komen we in het volgende nummer terug op de opgave aan het einde van het artikel 'Een formule die loopt als een trein' uit het vorige nummer.

In het volgende nummer hopen we ook nader in te gaan op de onderwerpen uit de tentoonstelling 'Schoonheid in de chaos' (zie bladzijde 23).

Vrijdag de dertiende: oplossing

In *elk* jaar valt er wel een 13e op vrijdag! Een jaarkalender laat zien dat (in een normaal jaar) de maanden: januari, februari, april, mei, juni, augustus en september alle zeven op een verschillende weekday beginnen. En dus is ook de 13e dag van die maanden verspreid over de zeven weekdays.

Voor schrikkeljaren geldt een dergelijke redenering.

Nader onderzoek van de maandlengten leert dat beide gevallen kunnen worden samengevat in de uitspraak:

In *élk* jaar (schrikkeljaar of niet) valt de 13e van de maanden mei tot en met november op *zeven verschillende* weekdays.

Lay-out: Klaas Lakeman, Amsterdam.

Tekenwerk: Armand Haye, Amsterdam; Hans van Kuyk, Amsterdam.

Foto's en andere illustraties: Jan van de Craats, Oosterhout (NB) (omslag, blz. 2, 3, 4, 5, 6, 7); Popke Bakker, Bergen aan Zee (blz. 1, 8, 9); Hessel Pot, Woerden (blz. 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 24, 25).

© 1987 Redactie Pythagoras - ALLE RECHTEN VOORBEHOUDEN, NADruk OF WEERGAVE, GEHEEL OF GEDEELTELIJK, IN WELKE VORM DAN OOK, ZONDER SCHRIFTELIJKE TOESTEMMING VAN DE REDACTIE VERBODEN.

Pythagoras wiskunde tijdschrift voor jongeren

Een uitgave onder auspiciën van de Stichting Christiaan Huygens en de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Redactie: Jan van de Craats, Klaas Lakeman, Hessel Pot, Hans de Rijk.

Redactiesecretariaat: Klaas Lakeman, Cornelis Krusemanstraat 60^{II},
1075 NS Amsterdam (NL).

Inhoud jaargang 26, nummer 5

Zagen, zagen, . . . / **1**

Popke Bakker/Jan van de Craats/Klaas Lakeman

Tangenstoverij met honderdvouden / **10**

Hessel Pot

Vrijdag de dertiende / **10, 28**

De zeven-cirkel-stelling / **11**

Hessel Pot

Puntige driehoeken in een grafiek / **19**

Hessel Pot

Tentoonstelling Schoonheid in de chaos / **23**

Klaas Lakeman

Zelf zoeken naar eigenschappen / **24**

Hessel Pot

Pythagoras Olympiade / **26**

Jan van de Craats

Maak ze los / **27**

Klaas Lakeman

Redactioneel / **28**

Pythagoras verschijnt zesmaal per schooljaar; opgave van abonnementen bij de uitgever (zie onder).

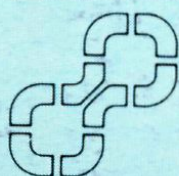
Abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 september schriftelijk bij de uitgever is opgezegd.

Bij tussentijdse abonnering ontvangt men ook de reeds verschenen

nummers. Betaling per acceptgirokaart.

Tarieven*	NLG/BEF
Abonnement Pythagoras	20,—/365
Inclusief Archimedes	36,—/660
Losse nummers	5,—/ 90

* Luchtpost-toeslag 15%



stichting ivio

Postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL).

Tel. 03200-26514

educatieve uitgeverij - instituut voor buitenschools

onderwijs - wereldschool - AO-reeks - leerprojecten

Postgiro Nederland: 287934 Postcheck België: 000-0130850-94