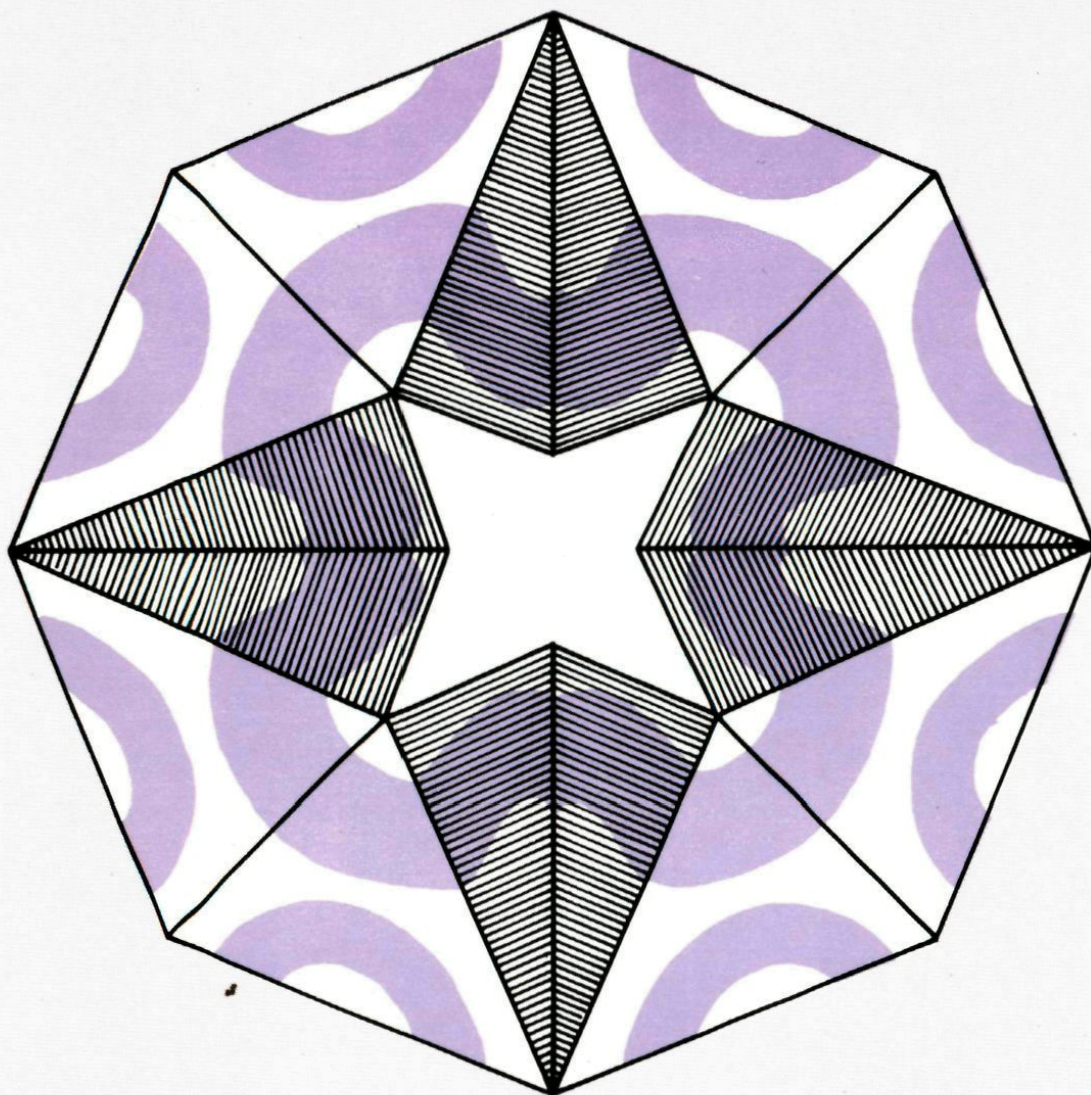
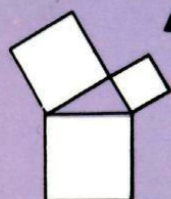




Pythagoras



wiskunde tijdschrift voor jongeren

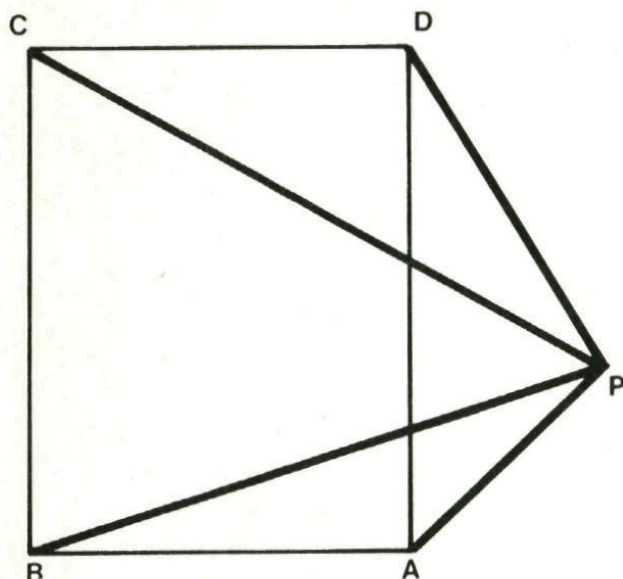
stichting ivio

jaargang 27
nummer 4
mei 1988

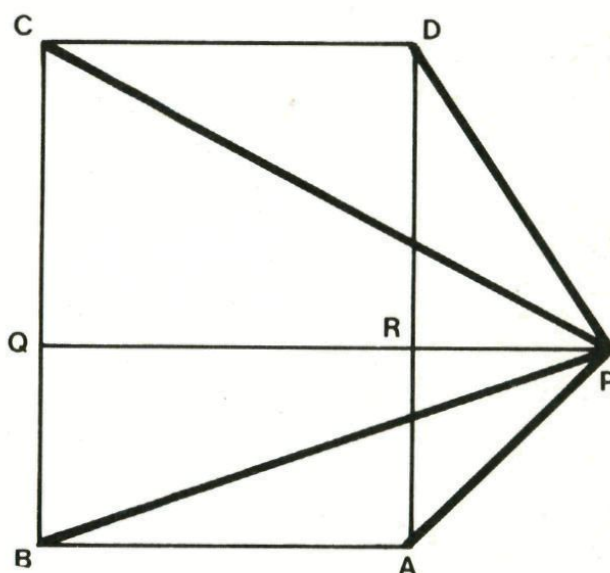
Aan de slag met Pythagoras

Teken een rechthoek $ABCD$. Zet ergens willekeurig een punt P . Trek PA , PB , PC en PD (figuur 1). Dan geldt

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$$



Figuur 1



Figuur 2

Bewijs

Voor de situatie van figuur 1 is het bewijs eenvoudig. Het meeste werk is het uitschrijven.

Trek PRQ loodrecht op AD en BC (figuur 2). Daarna kan viermaal de stelling van Pythagoras worden toegepast.

1 In driehoek APR :

$$PA^2 = PR^2 + AR^2 \quad (1)$$

2 In driehoek PQC :

$$PC^2 = PQ^2 + CQ^2 \quad (2)$$

3 In driehoek PQB :

$$PB^2 = PQ^2 + QB^2 \quad (3)$$

4 In driehoek PRD :

$$PD^2 = PR^2 + RD^2 \quad (4)$$

Omdat $CQ = RD$ en $QB = AR$ kunnen (3) en (4) geschreven worden als

$$PB^2 = PQ^2 + AR^2 \quad (5)$$

$$PD^2 = PR^2 + CD^2 \quad (6)$$

Tel nu (1) en (2) bij elkaar op. En doe hetzelfde met (5) en (6). Dat levert

$$PA^2 + PC^2 = \dots \quad (7)$$

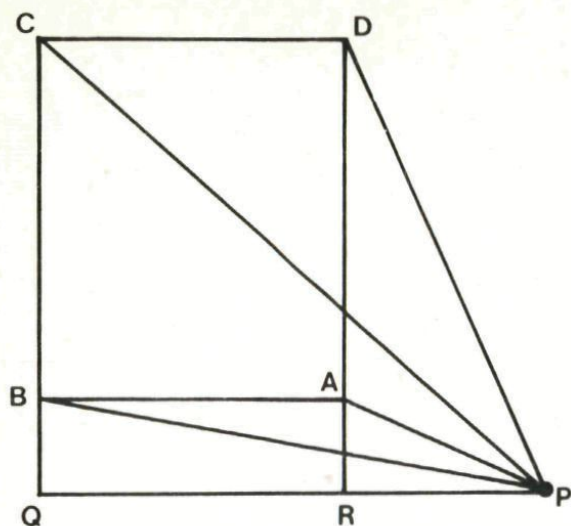
$$PB^2 + PD^2 = \dots \quad (8)$$

Omdat de rechterleden in (7) en (8) hetzelfde zijn, geldt dus

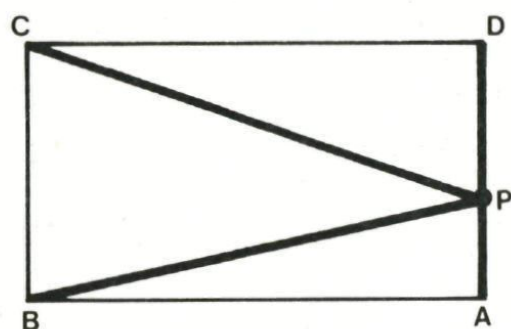
$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$$

Andere situaties

Als punt P ergens anders buiten



Figuur 3



Figuur 4

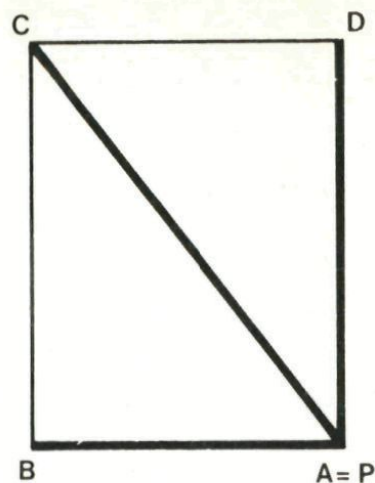
de rechthoek komt, gaat de stelling nog steeds op. Kijk maar naar figuur 3. Met de daar gestippelde hulplijnen is het bewijs gemakkelijk zelf te leveren.

Als P op een van de rechthoekszijden ligt? Geen probleem. Er zijn dan zelfs geen hulplijnen nodig om het bewijs te leveren (figuur 4)! En als P samenvalt met een hoekpunt, zoals in figuur 5 waar $A=P$? Dan is de gelijkheid

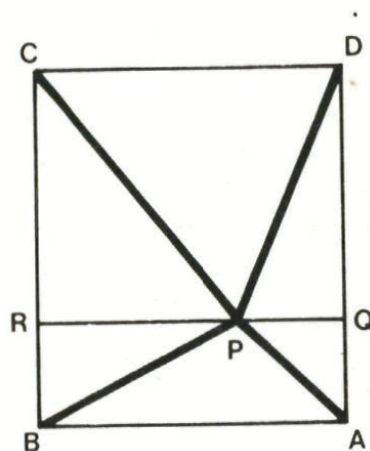
$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$$

gelijkwaardig met

$$AA^2 + AC^2 = AB^2 + AD^2$$



Figuur 5



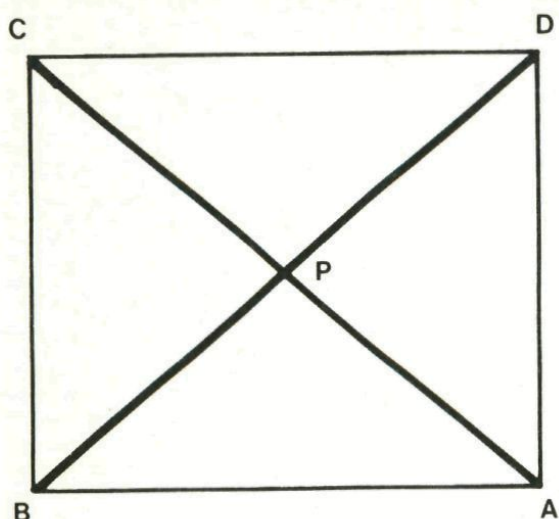
Figuur 6

Omdat $AA=0$, is deze laatste uitdrukking niets anders dan de stelling van Pythagoras zelf!!

Als P binnen de rechthoek $ABCD$ ligt, is het ook al niet moeilijk. Een hulplijntje door P evenwijdig aan CD en AB (figuur 6, een lijntje door P evenwijdig aan BC en AD kan ook), en klaar is Kees. En als P het snijpunt van de diagonalen is, dan is het de moeite niet waard om er woorden aan vuil te maken (figuur 7). Of wel soms?

Punt P in de ruimte

In het vlak dat wordt bepaald door de willekeurige rechthoek $ABCD$, kan P overal worden geko-



Figuur 7

zen. Steeds geldt de in het begin van dit artikel genoemde gelijkheid. Sterker nog, P hoeft niet per se in het vlak van rechthoek $ABCD$ te liggen. P mag zelfs overal in de ruimte komen!

Om dat in te zien en te kunnen bewijzen, is niets extra's nodig. Alle

figuren die tot nu toe zijn getekend, kunnen zo worden gebruikt. Ze moeten alleen worden opgevat als ruimtelijke figuren. Verschuif daartoe in gedachten punt P maar eens heen en weer langs een lijn door P loodrecht op het vlak van de rechthoek. Laat daarbij de punten Q en R uit de figuren 2, 3 en 6 (net als de hoekpunten van de rechthoek) gewoon op hun plaats. In alle gevallen verandert er niets aan het bewijs. Alle lijnen van P naar de hoekpunten en indien nodig, naar Q en R staan dan scheef in de ruimte. Maar dat verandert niets aan de rechthoekige driehoeken waarin voor het bewijs steeds de stelling van Pythagoras moet worden toegepast. Ze staan ook alleen een beetje scheef in de ruimte. Ga dat van geval tot geval maar eens na.

Het idee voor dit artikel kwam van *H. Visscher* uit Utrecht. □

Is dat niet mooi?

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = \dots$$

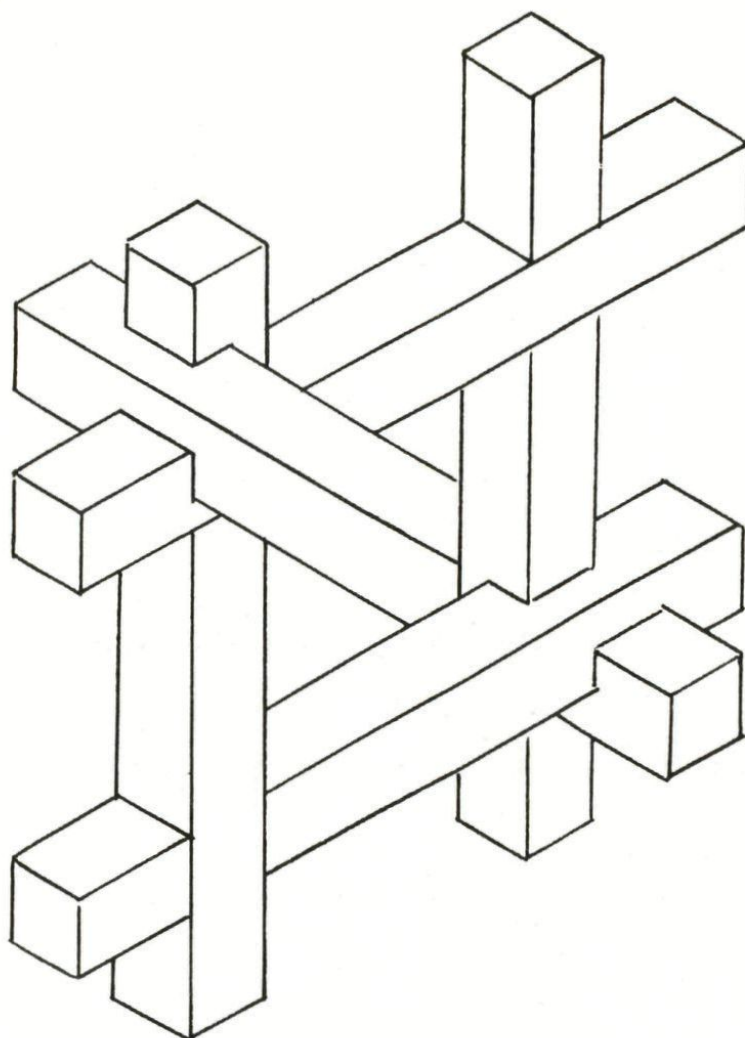
Wie kent meer van dit soort patronen? □

Π -record opnieuw gebroken

Onlangs kwam uit Japan het bericht dat er weer een aantal decimalen aan Π zijn toegevoegd. Professor Yasumasa Kaneda van de universiteit van Tokio bracht het aantal decimalen van Π op 201 326 000. Zijn computer had voor de berekening vijf uur en zevenenvijftig minuten nodig. Professor Kaneda zegt er naar te streven om Π tot op één miljard plaatsen achter de komma te bepalen. We wachten af.

Meer over Π is te vinden in *Pythagoras* 25-4. Daarin zijn een aantal artikelen gewijd aan dit beroemdste getal uit de wiskunde. □

De onmogelijke Escher-puzzel



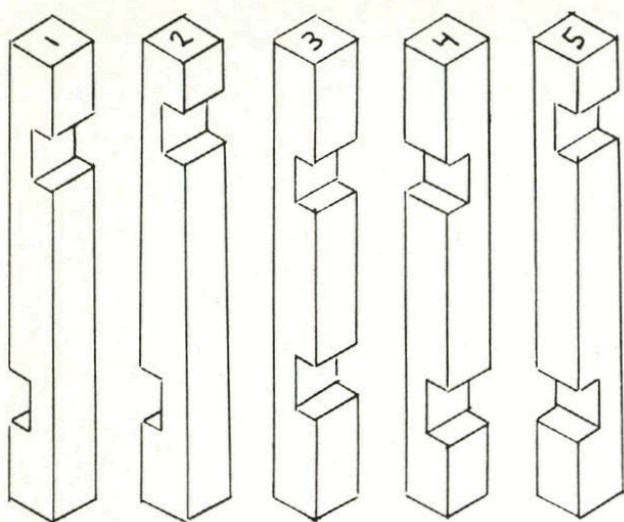
Figuur 1

Onmogelijke figuren laten iets zien dat niet kan bestaan. Een ruimtelijk ding dat niet klopt. Je moet je fantasie er een beetje voor in de knoop leggen. *Oskar van Deventer*, befaamd puzzelaar uit Voorburg, moet wel over een paar heel vreemde hersenkronkels beschikken. Bij de *onmogelijke M.C. Escher-puzzel* (figuur 1) die hij bedacht en getekend heeft, liet hij zich inspireren door de balkjes-puzzels die je misschien wel kent. En natuurlijk door de 'onmogelijke' prenten van M.C. Escher.

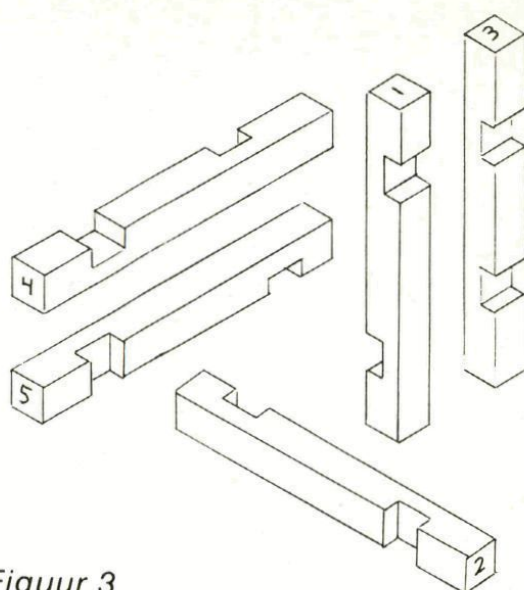
De Balkjes

Balkjes-puzzels bestaan doorgaans uit een aantal balkjes met verschillende inkepingen, die op zo'n manier in elkaar gepast moeten worden dat er een mooie figuur ontstaat. De inkepingen laten alleen bepaalde bewegingen toe,

en de kunst is om die bewegingen op de juiste manier in de juiste volgorde uit te voeren. De M.C. Escher-puzzel bestaat uit vijf balkjes. In figuur 2 zijn ze afzonderlijk getekend. Ze hebben afmetingen van $2 \times 2 \times 18 \text{ cm}^3$, en de inkepingen zijn 1 cm diep en 2 cm lang.



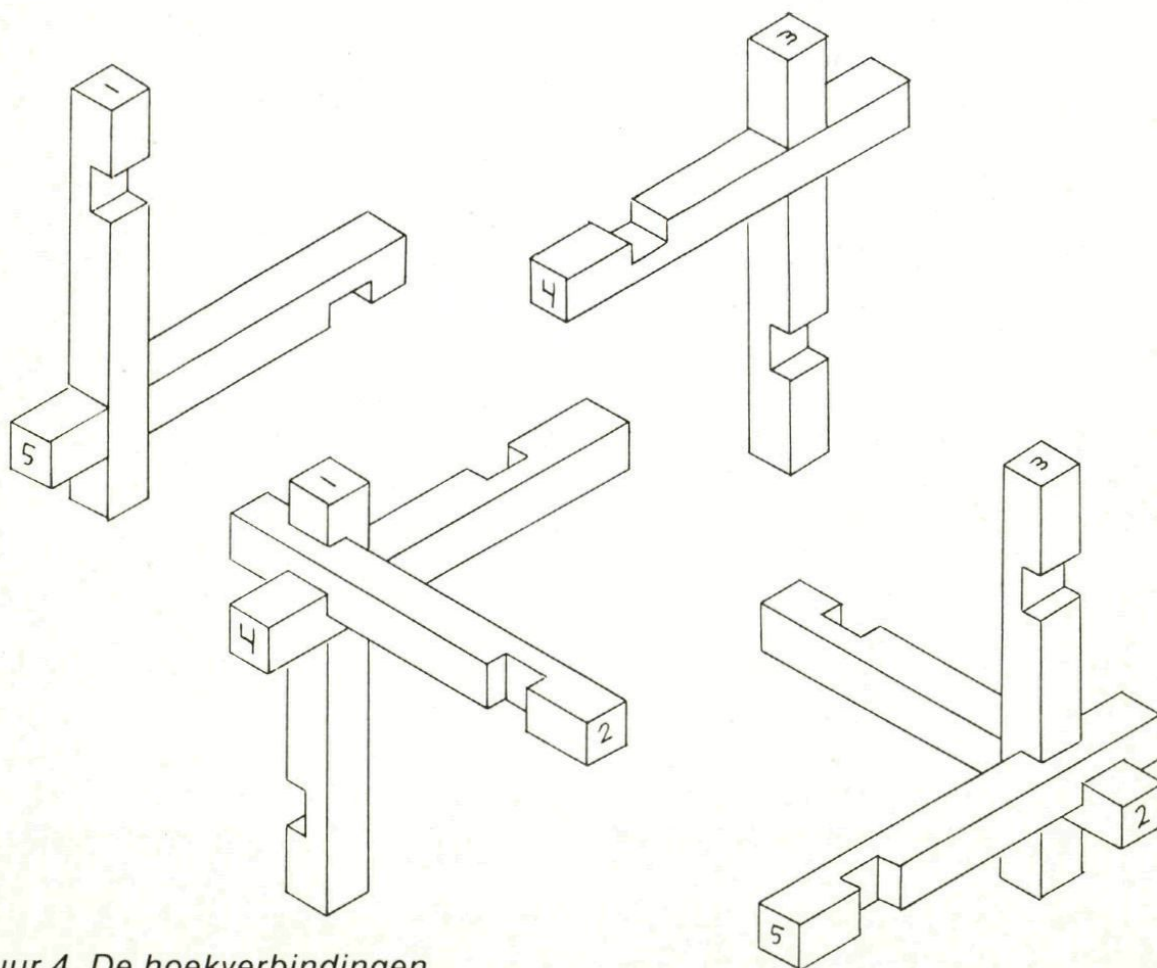
Figuur 2. De balkjes.



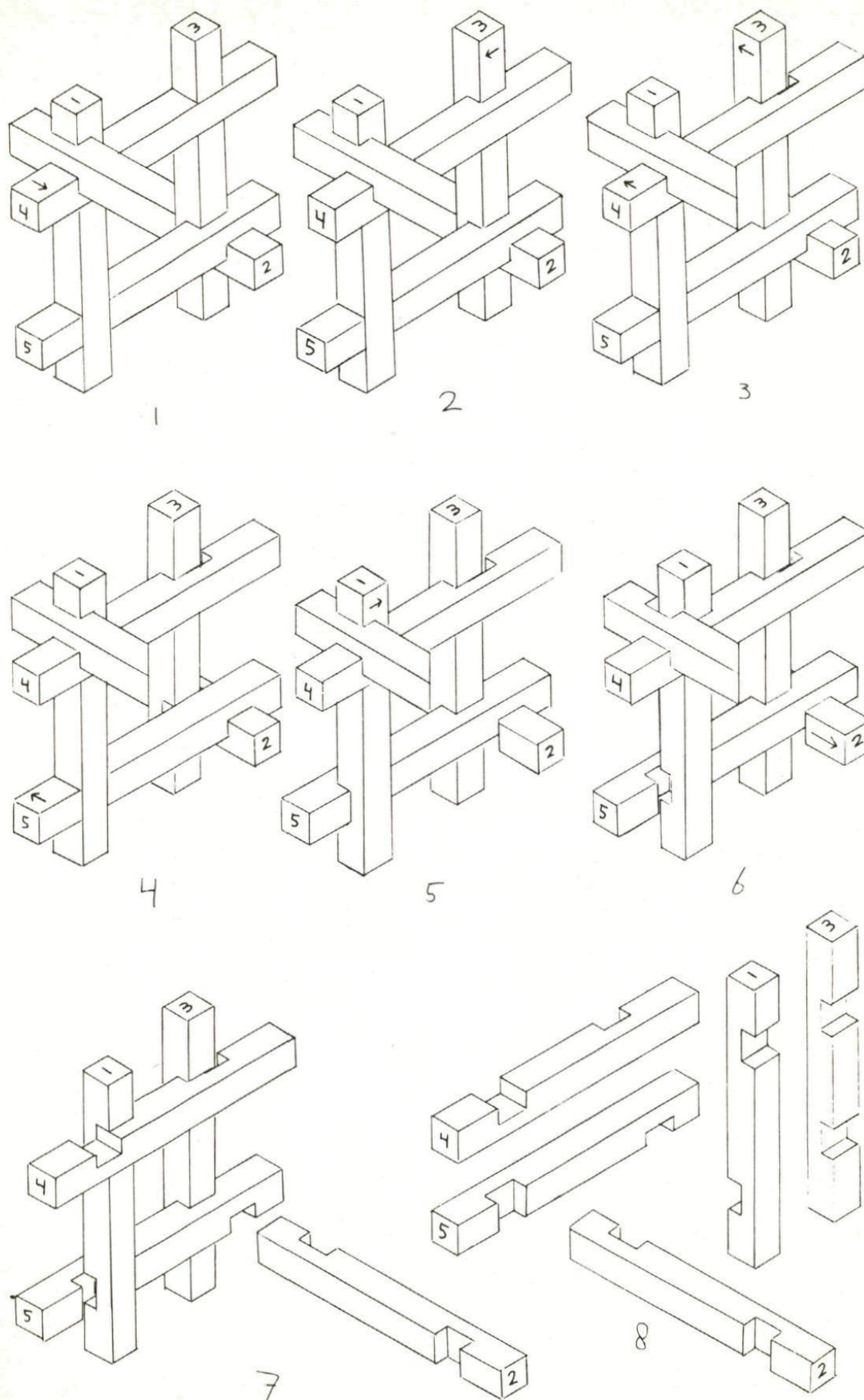
Figuur 3

In figuur 3 zie je ze in de stand waarin ze in de in elkaar gezette puzzel zitten. De vier hoekverbindingen zijn in figuur 4 afzonderlijk getekend. Tot

zo ver is er nog niets bijzonders aan de hand. Alles klopt; je kunt het met echte balkjes, een zaag, een hamer en een beitel gemakkelijk namaken.



Figuur 4. De hoekverbindingen.



Figuur 5. Verschuif telkens een balkje in de richting die door de pijl is aangegeven.

Hoe uit elkaar?

Maar nu stappen we, met Oskar als gids, de onmogelijke wereld binnen van M.C. Escher.

De vijf balk van figuur 1 kan niet bestaan, we weten het, maar in onze fantasie bestaat hij toch. We hebben hem in een onmogelijke puzzelwinkel gekocht, en hij zit nog netjes in elkaar, net als in figuur 1. Hoe krijgen we hem uit elkaar? Welke balkjes zitten vast, en welke balkjes kunnen verschoven worden?

Zonder Oskars hulp komen we er niet uit. Gelukkig heeft hij de oplossing stap voor stap getekend (figuur 5). Telkens laat hij zien welk balkje verschoven moet worden om de puzzel uiteindelijk

uit elkaar te krijgen. En bij de laatste stap... , o wonder, ... zijn we plotseling weer in de gewone wereld terug. Alle balkjes zijn los van elkaar, en je kunt ze gewoon vóór je op tafel leggen.

En in elkaar?

Wil je de puzzel weer in elkaar zetten, dan voer je de afzonderlijke stappen gewoon (nou ja, gewoon...) in de omgekeerde volgorde uit.

Oskar noemde z'n onmogelijke puzzel wél oplosbaar, maar niet uitvoerbaar. Je kunt hem alleen in gedachten oplossen, tenminste als je net zulke vreemde hersenkronkels bezit als hij! □

Kruis-tal-puzzel III

In elk hokje moet één cijfer worden ingevuld, zodat van links naar rechts (horizontaal) en van boven naar beneden (verticaal) getallen ontstaan die moeten voldoen aan de gegeven omschrijvingen. Niet alle nummers zijn rechtstreeks gegeven; soms moet bij een ander nummer worden gezocht. Getallen mogen niet met een nul beginnen. In een genummerd hokje mag dus geen nul komen. Er is slechts één oplossing die aan alle gegeven omschrijvingen voldoet. Deze wordt gepubliceerd in een volgend nummer.

Horizontaal

1. Deelbaar getal.
4. Veelvoud van de som van de cijfers van verticaal 5.
6. Kwadraat van horizontaal 1.
7. Som van horizontaal 1 en verticaal 3.

Verticaal

2. Dertienvoud.
3. Priemgetal.
5. Drievoud plus een.
6. Veelvoud van verticaal 3.

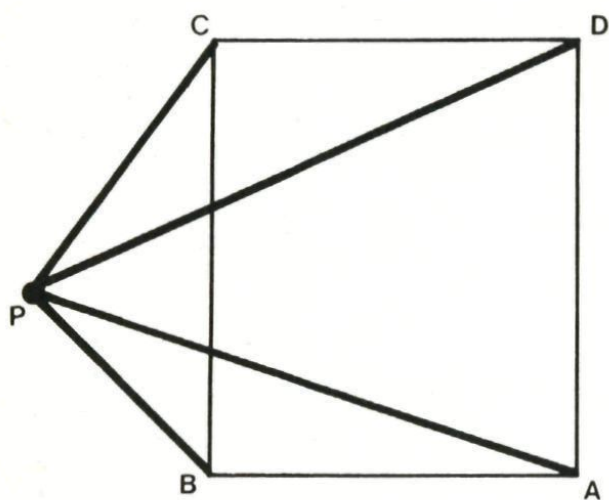
1	2		3
	4	5	
6			
		7	

Verder aan de slag

Teken een rechthoek $ABCD$. Zet ergens in het vlak van die rechthoek (waartoe we ons voorlopig weer zullen beperken) een punt P (figuur 1). Zoals in het artikel 'Aan de slag met Pythagoras' is aangetoond, geldt dan

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$$

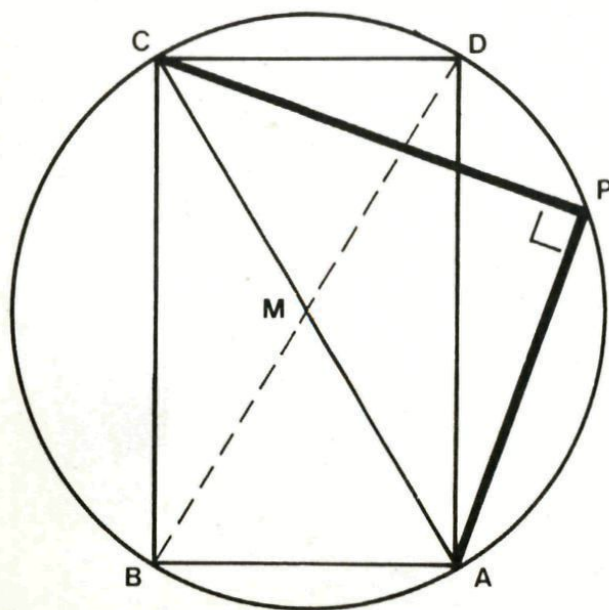
Heb je er enig idee van waar de andere punten P liggen waarvoor $PA^2 + PC^2$ (en dus ook $PB^2 + PD^2$) dezelfde waarde heeft als voor het punt P uit figuur 1? Of algemener uitgedrukt: Wat zijn de verzamelingen van de punten P waarvoor $PA^2 + PC^2$ steeds dezelfde waarde heeft?



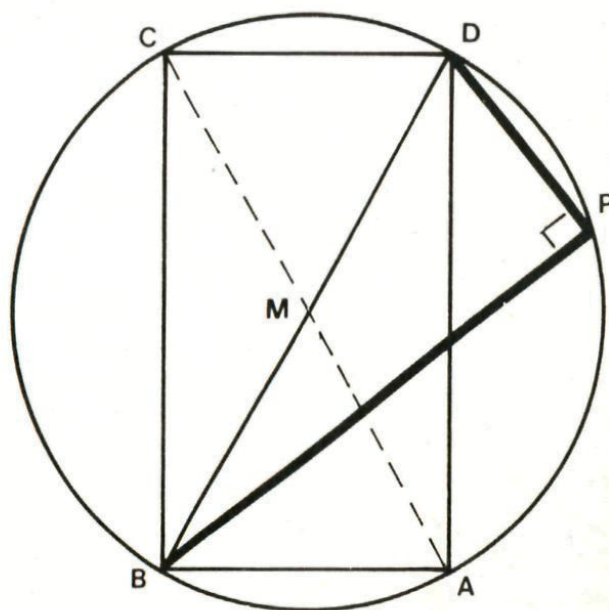
Figuur 1

Eerst eenvoudig

Een antwoord is snel gevonden, als de hoek bij P (dus hoek APC) steeds 90° is. De punten P die dan voldoen, liggen op een cirkel met middellijn AC (figuur 2). Het middelpunt van die cirkel is het snijpunt M van de diagonalen en dus het midden van AC . $PA^2 + PC^2$ is dan steeds gelijk aan AC^2 , en dus constant. Kortom, in dit speciale geval bestaat de verzameling van de punten P uit de omgeschreven cirkel van de rechthoek.



Figuur 2



Figuur 3

Wellicht ten overvloede: $PB^2 + PD^2$ is dan gelijk aan BD^2 (figuur 3) en dus gelijk aan AC^2 . Immers de diagonalen AC en BD van de rechthoek zijn gelijk aan elkaar.

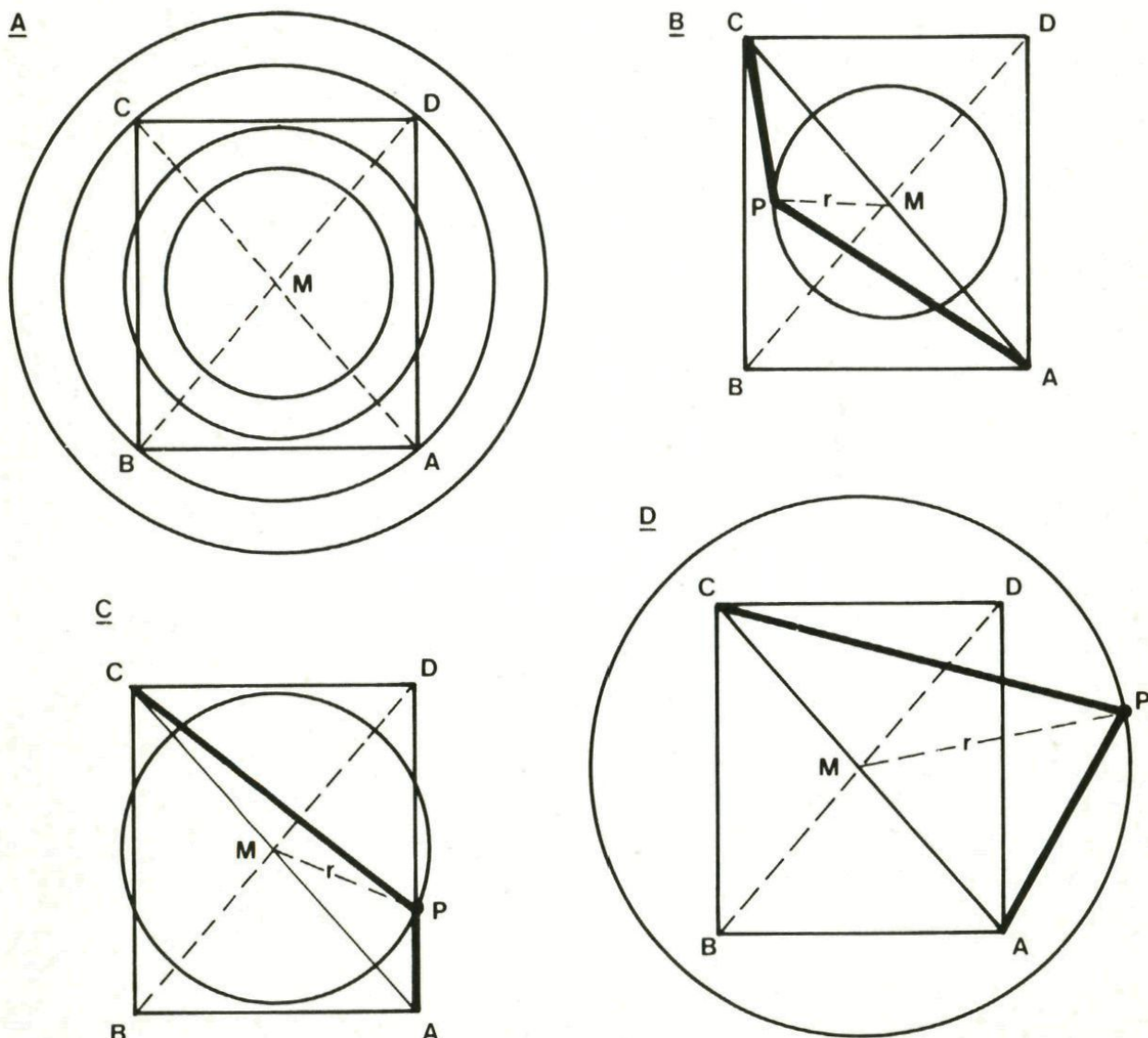
Andere gevallen

Waarschijnlijk vermoed je nu wel wat in andere gevallen (dus de hoek bij P ongelijk 90°) de verzamelingen van de punten P worden waarvoor $PA^2 + PC^2$ steeds een constante waarde heeft. Inderdaad, voor elke vaste waarde van

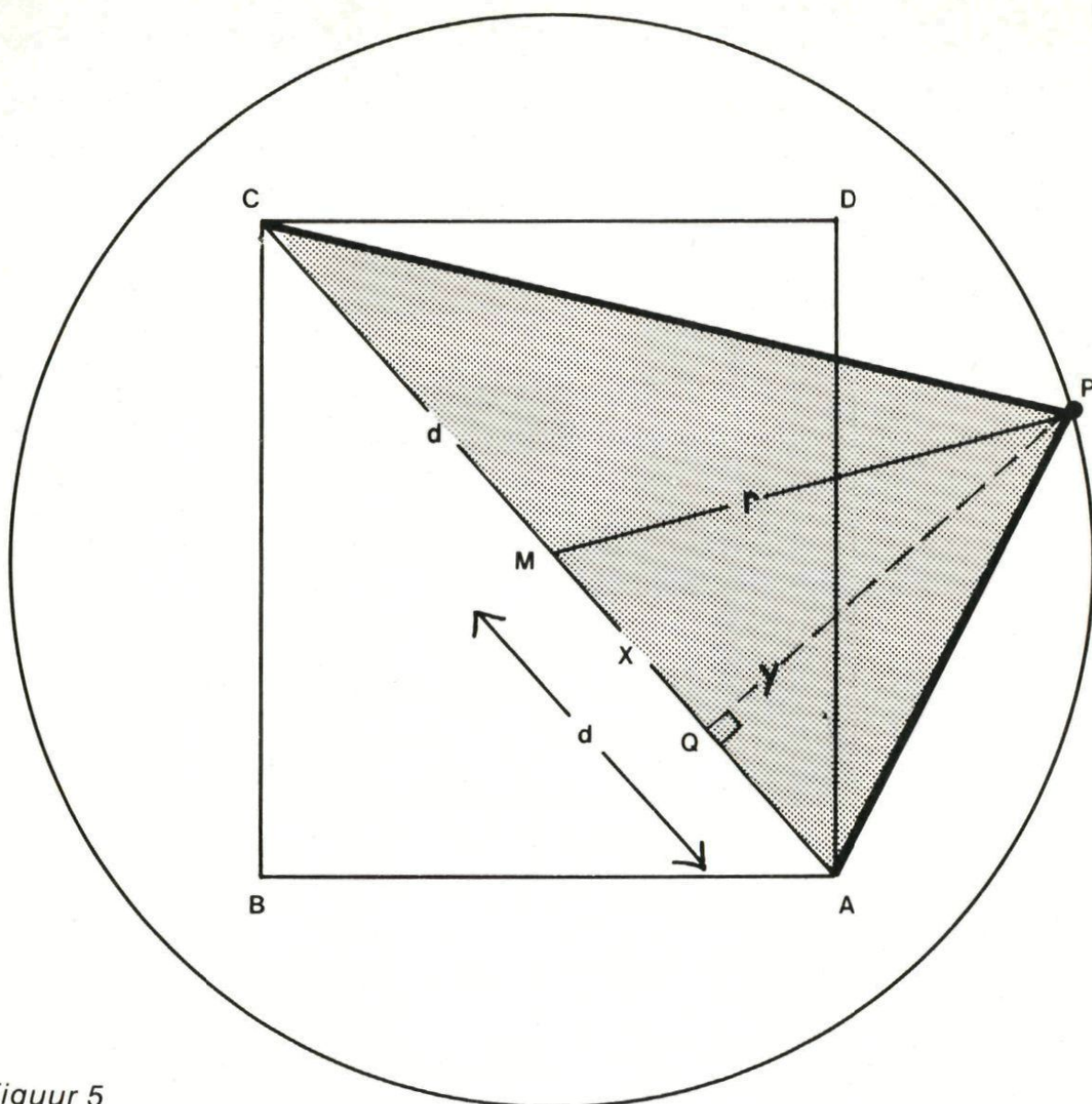
$PA^2 + PC^2$ liggen die punten P op een cirkel. Het middelpunt van zo'n cirkel is steeds het snijpunt M van de diagonalen van de gekozen rechthoek $ABCD$ (figuur 4).

Weer Pythagoras

Het bewijs voor dit vermoeden bestaat weer uit niets anders dan een paar maal de stelling van Pythagoras toepassen. Ga bij een gegeven rechthoek maar eens uit van een cirkel met middelpunt M . Kies daarop een punt P (figuur 5)



Figuur 4. (A) De gevraagde verzamelingen zijn cirkels met het snijpunt van de diagonalen als middelpunt. (B) P binnen de rechthoek. (C) P op een zijde van de rechthoek. (D) P buiten de rechthoek.



Figuur 5

en trek PA , PC , AC en de straal MP . Laat bovendien uit P een loodlijn PQ op AC neer.

Verder is het handig (maar niet noodzakelijk) om CM en MA met d aan te geven, MP met r , PC met y en MQ met x . QA is dan $d-x$ en CQ is $d+x$.

En nu maar weer aan de slag met Pythagoras!

1 In driehoek PQA :
 $PA^2 = y^2 + (d-x)^2$

Verder uitwerken levert
 $PA^2 = y^2 + d^2 - 2dx + x^2$ (1)

2 In driehoek PQC :
 $PC^2 = y^2 + (d+x)^2$
 Verder uitwerken levert
 $PC^2 = y^2 + d^2 + 2dx + x^2$ (2)

3 In driehoek PQM
 $r^2 = y^2 + x^2$ (3)

Optellen van (1) en (2) leidt tot

$$\begin{aligned} PA^2 + PC^2 &= 2y^2 + 2d^2 + 2x^2 \\ &= 2(y^2 + x^2) + 2d^2 \end{aligned}$$

en met (3) geeft dat ten slotte

$$PA^2 + PC^2 = 2r^2 + 2d^2$$

Voor een eenmaal getekende rechthoek heeft d (de halve diagonaal) een vaste waarde. Als $PA^2 + PC^2$ ook een vaste waarde krijgt, moet r ook wel vast zijn. En daarmee is het bewijs geleverd.

Opnieuw de ruimte in

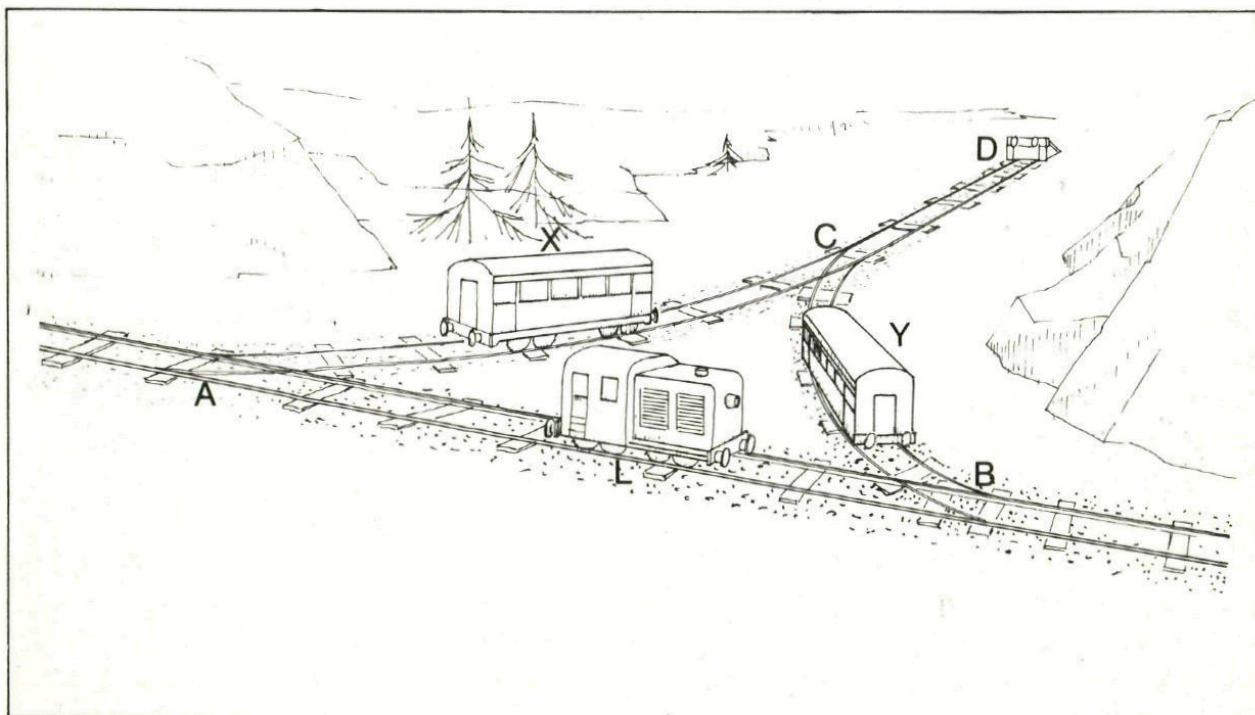
Zoals aan het einde van het artikel 'Aan de slag met Pythagoras' is aangetoond, hoeft P niet noodzakelijk in het vlak van de rechthoek

te liggen. P mag overal in de ruimte komen. Wat zijn dan de verzamelingen van de punten P waarvoor $PA^2 + PC^2$ (en dus ook $PB^2 + PD^2$) steeds dezelfde waarde heeft?

Zie je het niet meteen? Merk dan op dat het bewijs met P in het vlak van de rechthoek zich afspeelt in driehoek PAC (figuur 5). Draai die driehoek in gedachten nu eens rond om AC . Dan kom je er vast wel uit!

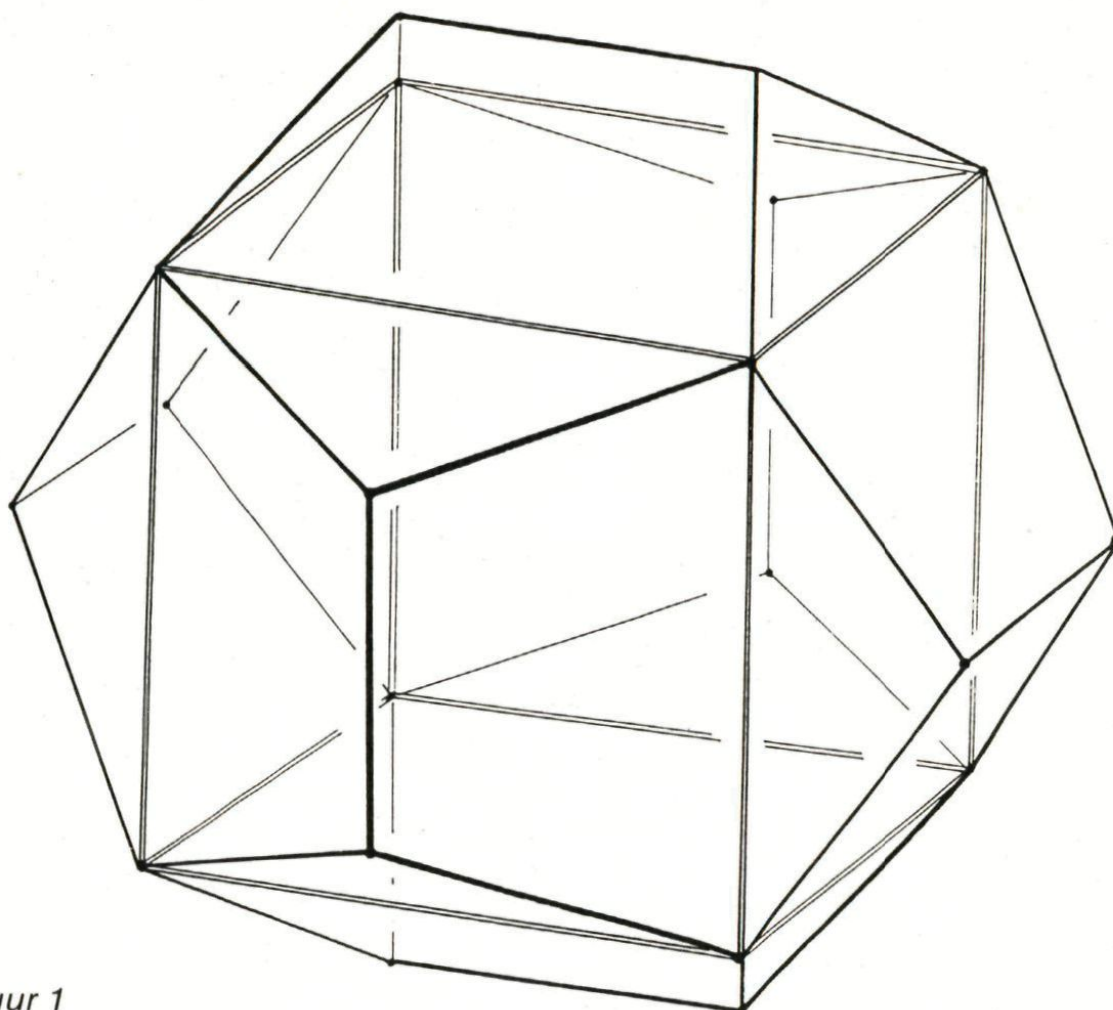
Het idee voor dit artikel kwam van H. Visscher uit Utrecht. □

Rangeer-perikelen 2



Op het spoor CD is net plaats genoeg voor één van de wagons of voor de locomotief. Probeer met de locomotief L de wagons X en Y van plaats te verwisselen. Er zijn twee soorten oplossingen mogelijk: na afloop wijst de neus van de locomotief dezelfde kant op als bij het begin, óf de neus van de locomotief wijst de andere kant op. Bij welk soort oplossing moet er zo min mogelijk gekoppeld of ontkoppeld worden? □

Vijf kubussen in een dodekaëder



Figuur 1

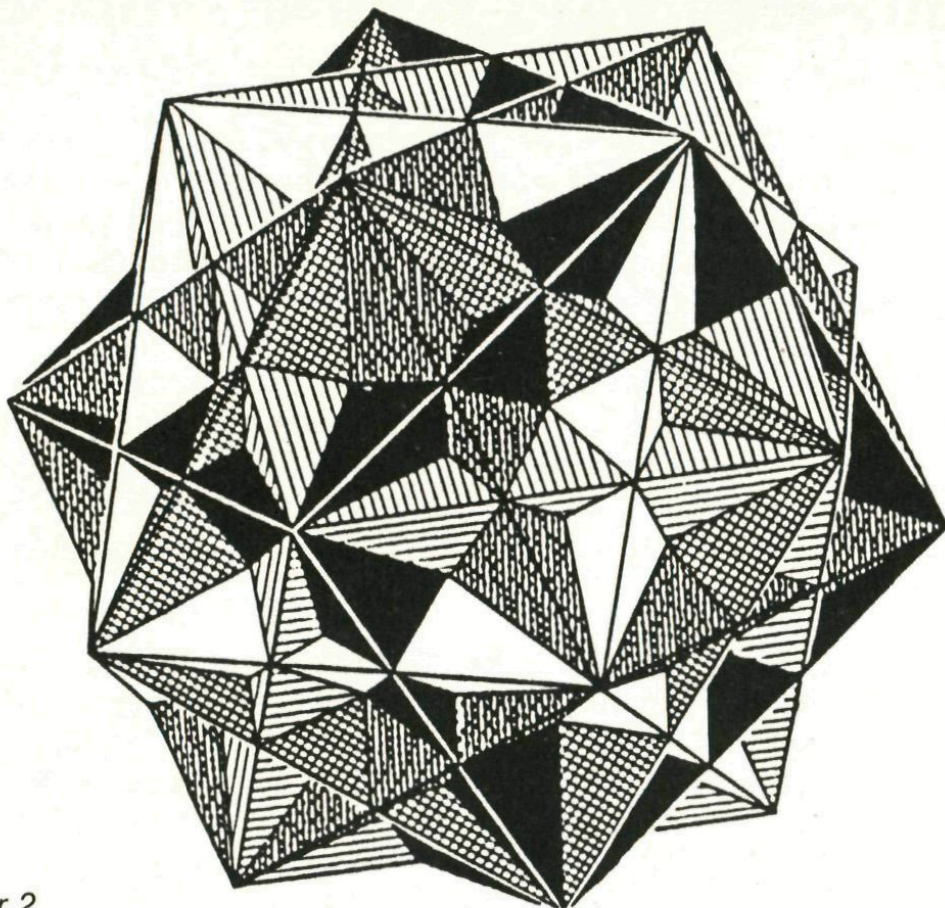
Op de voorplaat van nummer 1 van deze jaargang stond een kubus die bevat is in een *dodekaëder*, een *regelmatig twaalfvlak* (figuur 1). Aan het einde van het artikel dat bij die voorplaat hoorde ('Daken en dodekaëders'), hebben we gezegd dat er op dezelfde manier nog vier andere kubussen in het twaalfvlak kunnen worden ingepast.

Inmiddels vonden we in een leuk Engels modellenboekje *) een mooie plaat van die vijf kubussen die door elkaar heen in het twaalfvlak zitten (figuur 2). Het is op het eerste gezicht een onoverzichtelijke wirwar van witte, zwarte, gestreepte, geblokte en grijze figuurtjes. Maar concentreer je aandacht eerst eens op één kleur, bij voorbeeld zwart. Zie je nu de kubus?

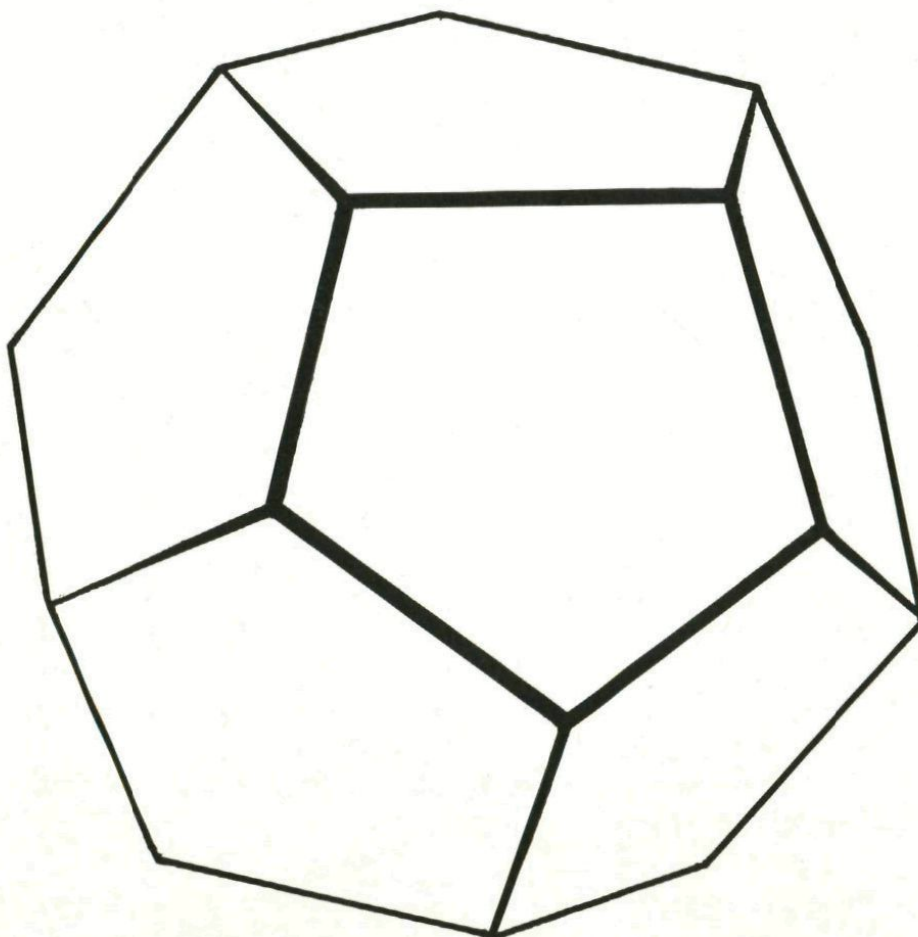
Kijk daarna uitsluitend naar wit, naar grijs, naar de streepjes en naar de ruitjes, dan zie je alle vijf de kubussen afzonderlijk verschijnen.

Het twaalfvlak dat er om heen zit, is in deze figuur niet meegetekend. We hebben het er onder gezet (figuur 3).

*) Mathematical models door H. Martyn Cundy & A. P. Rollett, Oxford University Press, 1952. □



Figuur 2



Figuur 3

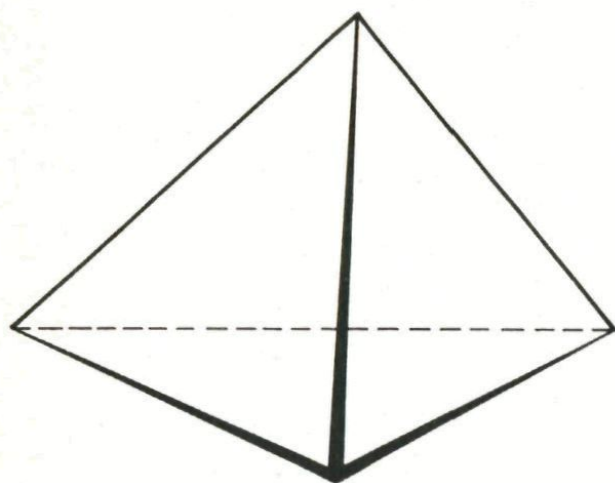
Draaien, draaien, ...

'M.C. Escher Kaleidozyklen' door Doris Schattschneider en Wallace Walker is een boek dat warm kan worden aanbevolen. Waarschijnlijk hebben velen het zelfs al in hun bezit. Deze Duitse vertaling van dit eerder in Amerika verschenen boek is al enige tijd ruimschoots in Nederland verkrijgbaar. Z'n prijs (slechts f 12,50!!) is het dubbel en dwars waard.

Niet goed in Duits? Geen bezwaar. Voordat je ook maar een letter hebt gelezen, ben je al aan het knippen, vouwen en plakken. Want het boek bevat maar liefst zeventien bouwplaten, veelal in kleur. Daar kun je voorlopig je lol wel mee op. En als ze eenmaal in elkaar zitten, kan het feest pas echt goed beginnen.

Keten van viervlakken

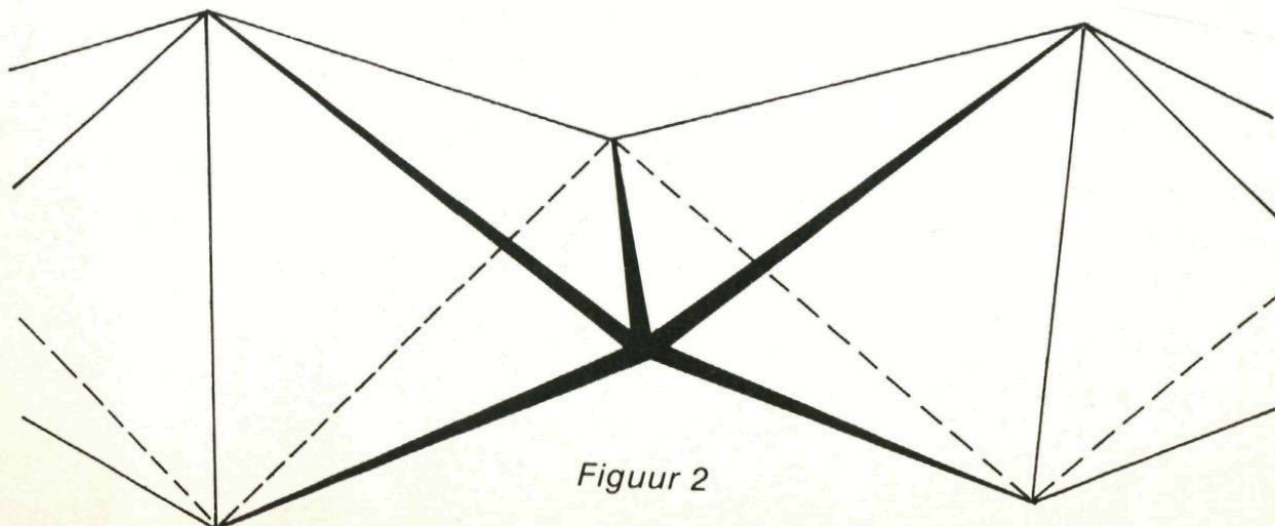
De figuur op het omslag werd al eens eerder afgedrukt in Pythagoras 13-6. Het is een caleidocyclus,



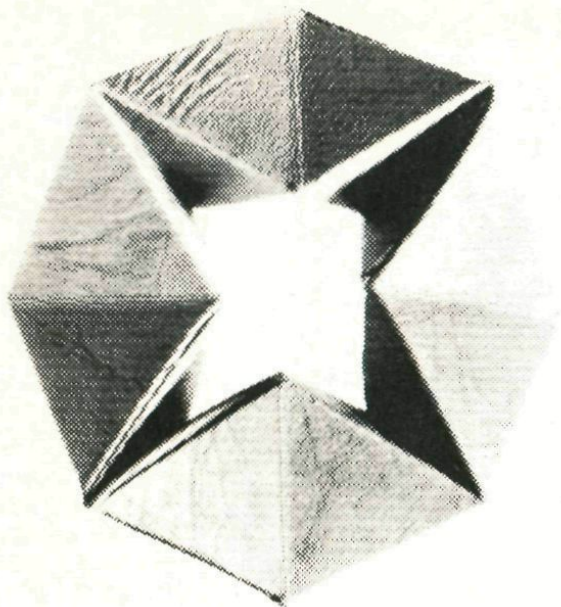
Figuur 1

of beter een *rotator*. Dat is een ring die bestaat uit viervlakken. In dit geval regelmatige viervlakken, en wel 8 stuks. Vandaar dan ook de naam *rotator-8*. Een regelmatig viervlak (tetraëder) is opgebouwd uit vier gelijkzijdige driehoeken (figuur 1). Twee regelmatige viervlakken kunnen met een zijde aan elkaar worden vastgemaakt (figuur 2). Aan elk van die viervlakken kan weer een ander viervlak worden vastgemaakt, enzovoort.

Als de keten van viervlakken lang genoeg is, kunnen de uiteinden worden samengevoegd. Resultaat: een rotator (figuur 3).



Figuur 2



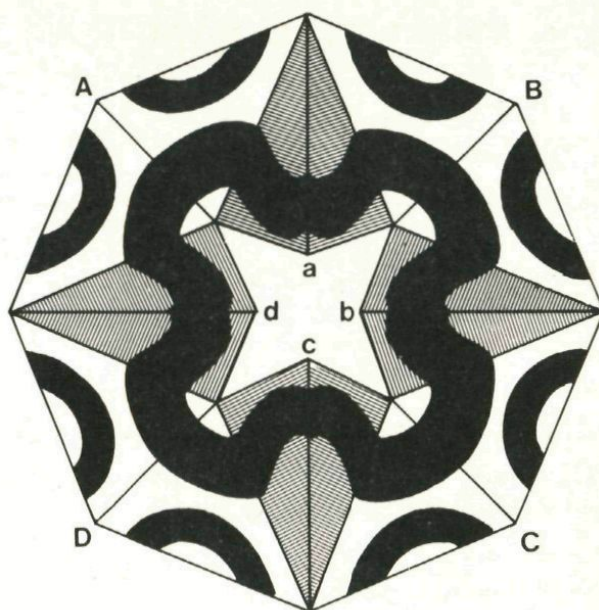
Figuur 3

Op bladzijde 16 is een bouwplaatje met wat aanwijzingen opgenomen. Daarmee kan de rotator-8 van het omslag worden gemaakt.

Rotator-8

Van uit de op het omslag aangegeven stand kunnen de punten *A*, *B*, *C* en *D* naar beneden worden gedrukt (figuur 4). De punten *a*, *b*, *c* en *d* komen dan omhoog. Zo wordt als het ware de binnenzijde naar buiten gedraaid en wordt een ander patroon zichtbaar. Dit kan steeds maar worden herhaald. Daarbij zullen een aantal patronen elkaar afwisselen.

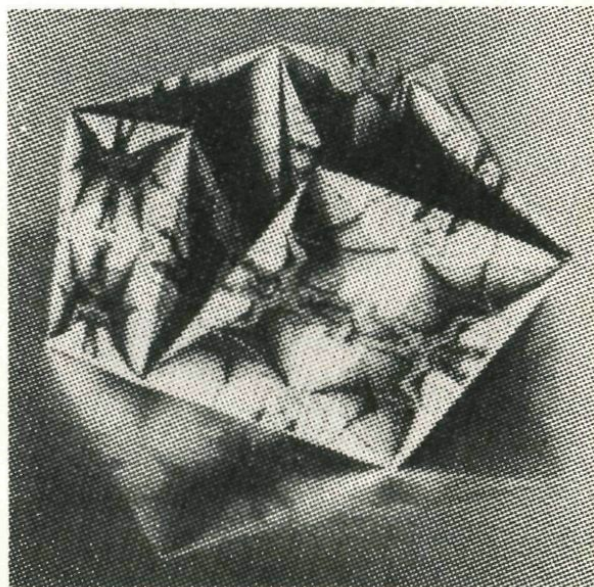
Andersom draaien kan ook. Daartoe moeten de punten *a*, *b*, *c* en *d* naar beneden worden gedrukt. De punten *A*, *B*, *C* en *D* komen dan omhoog. Daardoor wordt de buitenzijde steeds naar binnen gedraaid. De patronen komen nu in omgekeerde volgorde te voorschijn. Wie dit moeilijk voor kan stellen, moet beslist het bouwplaatje in elkaar zetten. En draaien maar.



Figuur 4

Escher-rotators

Met elf bouwplaten uit het boek van Schattschneider en Walker kunnen even zo veel rotators worden gemaakt. Viermaal steeds dezelfde rotator-8 (figuur 5), zesmaal steeds dezelfde rotator-6 (figuur 6) en een zogenaamde gedraaide rotator (figuur 7). Al deze rotators zijn voorzien van escher-achtige



Figuur 5

motieven (zie bij voorbeeld figuur 5 en figuur 6). En dat geeft bij het draaien een prachtig effect. Je weet niet wat je ziet.

De *escher-rotator-8* van figuur 5 bestaat net als de rotator-8 van het omslag, uit acht viervlakken. Ze zijn echter niet regelmatig. Af-

Om in de stemming te komen

Om te zien of 'M.C. Escher Kaleidozyklen' iets voor je is kun je beginnen met dit bouwplaatje in elkaar te zetten. Heb je het boek al? Dan vormt de rotator-8 die uit dit bouwplaatje ontstaat, een aanvulling op je verzameling escher-rotators.

Maak van het bouwplaatje een grotere kopie. Vergroot overtekenen kan ook; kies de zijden van de driehoeken bij voorbeeld 6 cm lang. Waarschijnlijk zul je dan wel gedwongen zijn de patronen weg te laten. Want het zal niet meevallen die ook vergroot over te tekenen.

Knip de plaat uit en vouw het papier langs alle lijnen. Een getrokken lijn betekent een 'bolle' vouw, een gestippelde lijn een 'holle' vouw.

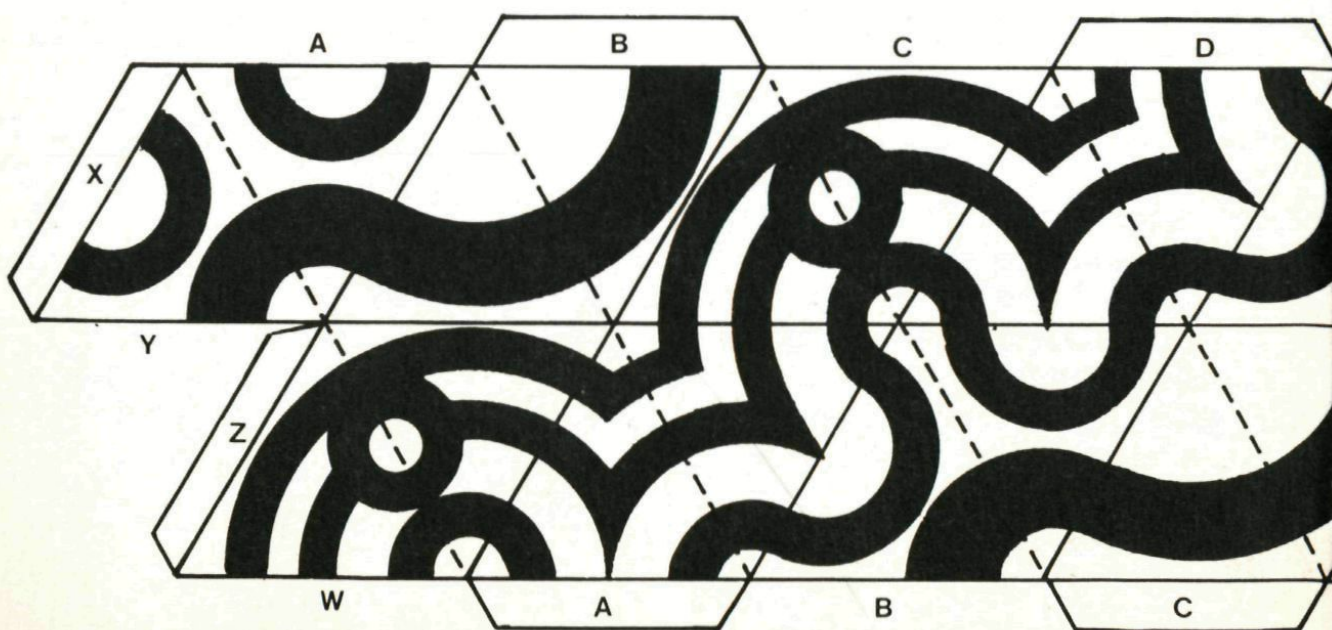
Bestrijk lip *a* aan de kant waar de letter *a* staat, met lijm. Plak hem onder de driehoek met *a* vast. Daarna volgen *b*, *c*, enzovoort. Het resultaat wordt een

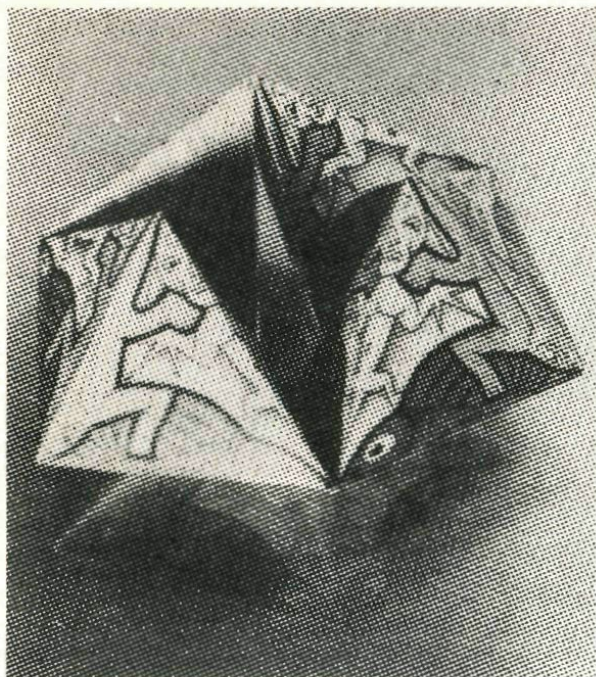
keten van zeven regelmatige viervlakken.

Het achtste viervlak ontstaat door de lippen *w*, *x*, *y* en *z* in één keer op de aangegeven plaatsen vast te plakken. Daardoor wordt tevens de keten gesloten.

Laat de boel goed drogen, ga na of alles goed vast zit en dan ... draaien maar!

De bouwplaten in 'M.C. Escher Kaleidozyklen' zijn overigens wat gemakkelijker in elkaar te zetten. Waarom? Dat merk je wel als je daar eventueel aan begint. □





Figuur 6



Figuur 7

gezien van de motieven die ze bevatten, zijn ze wel allemaal precies gelijk.

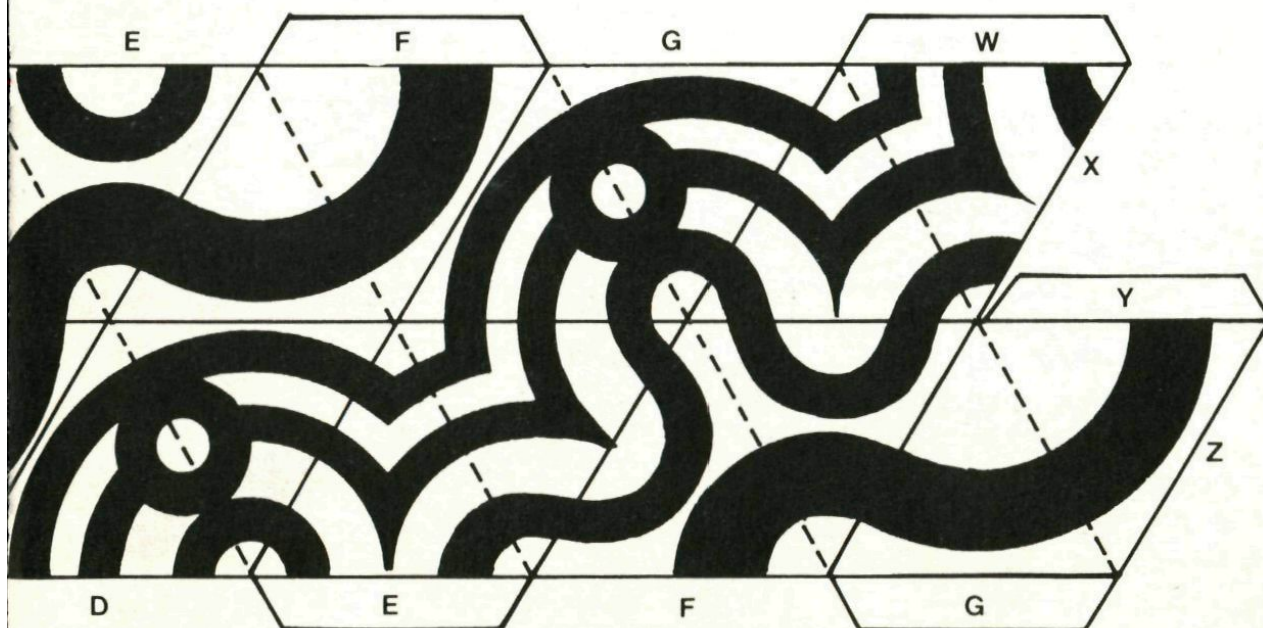
De *rotator-6* van figuur 6 bestaat uit zes volkomen gelijke, niet-regelmatige viervlakken.

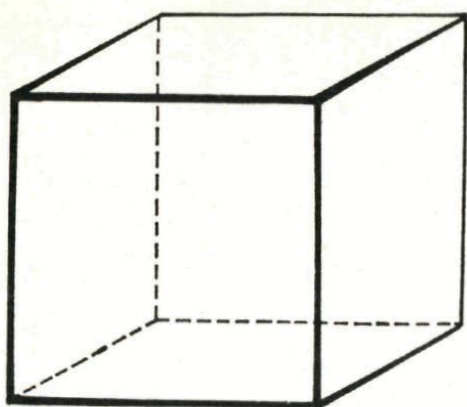
De *gedraaide rotator* van figuur 7 bestaat uit twaalf gelijke, niet-regelmatige viervlakken. Tijdens

het draaien lijken die één voor één, na elkaar, door een gat in het midden te tuimelen.

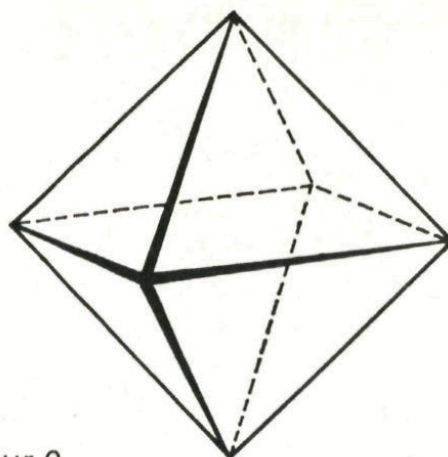
Op de koop toe

De bouwplaten voor de elf escher-rotators en de beschrijving van hun motieven vormen de hoofdschotel van het boek van

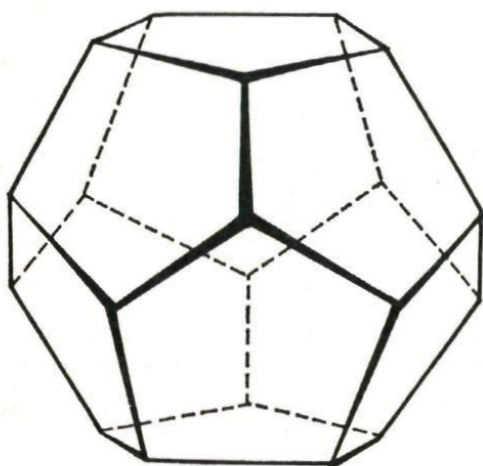




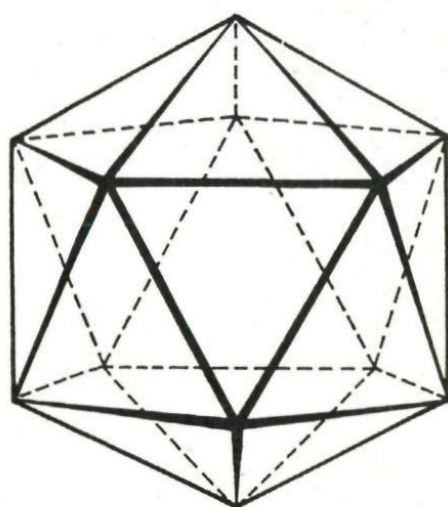
Figuur 8



Figuur 9



Figuur 10



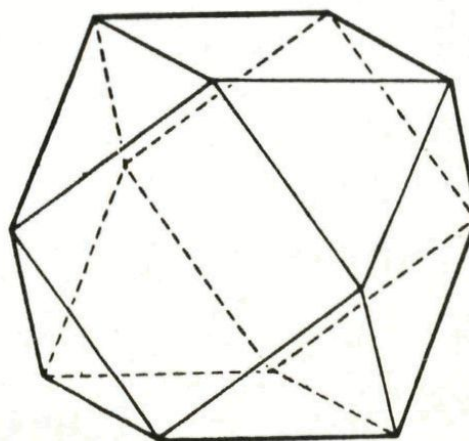
Figuur 11

Schattschneider en Walker. Maar er is meer dat de moeite waard is. Het boek bevat nog zes bouwplaten. Ook allemaal voorzien van escher-achtige motieven.

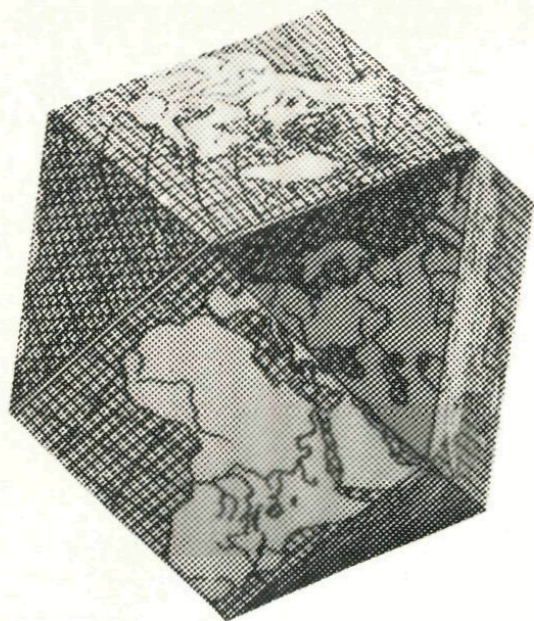
Vijf van die zes bouwplaten leveren de vijf regelmatige veelvlakken: het regelmatig viervlak (tetraëder, figuur 1), de kubus (figuur 8), het regelmatig achthoek (octaëder, figuur 9), het regelmatig twaalfvlak (dodecaëder, figuur 10) en het regelmatig twintigvlak (icosaëder, figuur 11). Het is zonder meer prettig om die regelmatige veelvlakken ook eens echt tastbaar binnen je bereik te hebben.

Cuboctaëder

De laatste van de zes resterende bouwplaten is bestemd voor de cuboctaëder of anders gezegd het



Figuur 12

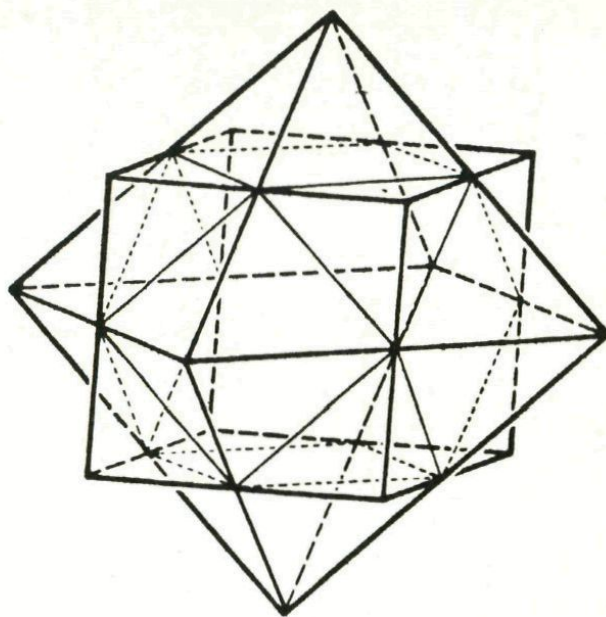


Figuur 13

veertienvlak (figuur 12). Ook al een veelvlak dat de moeite waard is om binnen je bereik te hebben. Een fraai exemplaar werd overigens al eens afgebeeld op het omslag van Pythagoras 25-5 (figuur 13).

Het veertienvlak is opgebouwd uit zes gelijke vierkanten en acht even grote gelijkzijdige driehoeken. In elk van de twaalf hoekpunten komen steeds twee vierkanten en twee gelijkzijdige driehoeken samen. Controleer dat maar bij figuur 12.

Het veertienvlak kan worden verkregen door van een kubus óf van



Figuur 14

een regelmatig achthoekig de hoekpunten af te snijden. Die doorsnijdingen moeten steeds door de middens van de zijden van de kubus of van het regelmatig achthoekig gaan (figuur 14).

'M.C. Escher Kaleidozyklen' door Doris Schattschneider en Wallace Walker is verschenen bij uitgeverij TACO, Berlijn (ISBN 3 89268 013 2; prijs f 12,50). Het is verkrijgbaar bij vestigingen van De Slegte of bij boekhandels die zijn aangesloten bij de ICOB. Ook te bestellen (met betaling van verzendkosten) bij Boekhandel Minerva, Koninginneweg 229, 1075 CS Amsterdam (tel. 020-620877) □

Afstand tussen twee koorden

In een cirkel met een straal van 25 cm zijn twee evenwijdige koorden AB en CD getrokken. AB heeft een lengte van 14 cm, terwijl CD 40 cm lang is.

Bereken de afstand tussen deze koorden.

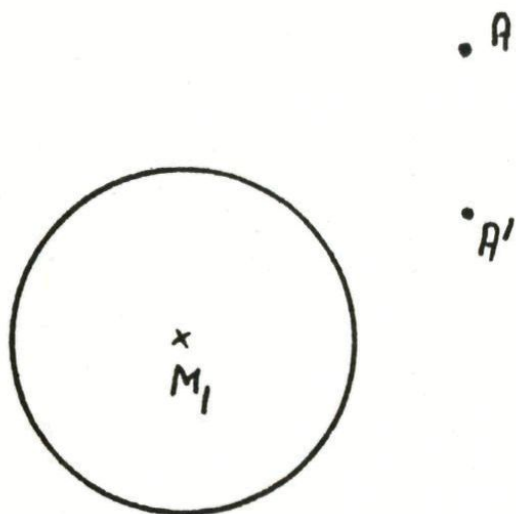
Hoeveel mogelijkheden zijn er?

Uit: Alpha, Oost-Duitsland. □

Drie-koorden-stelling omgekeerd

Een opgave van Professor Grunert

Construeer een cirkel die raakt aan een gegeven cirkel en gaat door twee punten A en A' die buiten de gegeven cirkel liggen (figuur 1). Deze opgave werd onlangs gepubliceerd in ons zusterschrift *Alpha* uit Oost-Duitsland. Ze werd ontleend aan een boek van de Duitse professor in de wiskunde J. A. Grunert (1797-1872) dat in 1834 verscheen.



Figuur 1

Vooraf Als M_1 het middelpunt is van de gegeven cirkel, dan kan deze cirkel kortweg cirkel M_1 worden genoemd. Voor andere cirkels die in het vervolg voorkomen, gaat dat net zo.

Recept

Trek AA' en de middelloodlijn m van AA' (figuur 2). Alle punten van m liggen dan even ver van A als van A' af. Het middelpunt van een cirkel door A en A' ligt dus op m .

Zet de passerpunt ergens op m neer en trek een cirkel M_2 door A en A' . Doe dat zó dat cirkel M_1 door cirkel M_2 in twee punten B

en B' wordt gesneden (figuur 3). Verleng AA' en BB' tot ze elkaar snijden in een punt O (figuur 4). Trek van uit O een raaklijn aan cirkel M_1 . Noem het raakpunt C . De cirkel door A , A' en C is de gevraagde cirkel (figuur 5). Het middelpunt M_3 van deze cirkel is te vinden door de middelloodlijn m van AA' te snijden met M_1C .

Bewijs

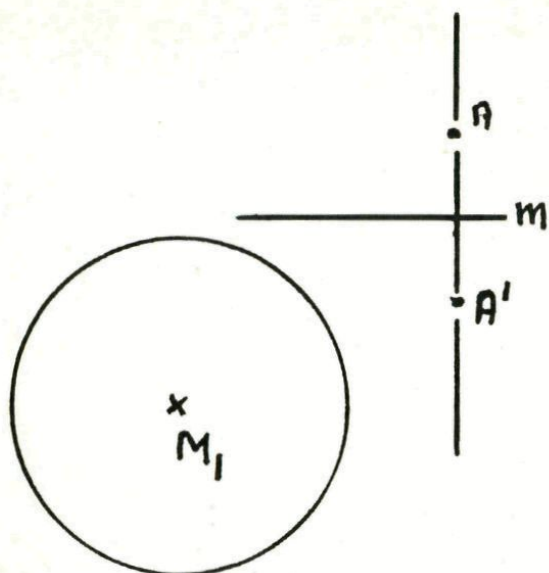
Waarom werkt dit recept? Het bewijs is verrassend eenvoudig. Ga nog maar eens na wat er precies wordt gedaan.

Twee cirkels M_1 en M_2 snijden elkaar. Hun gemeenschappelijke snij-koorde is BB' .

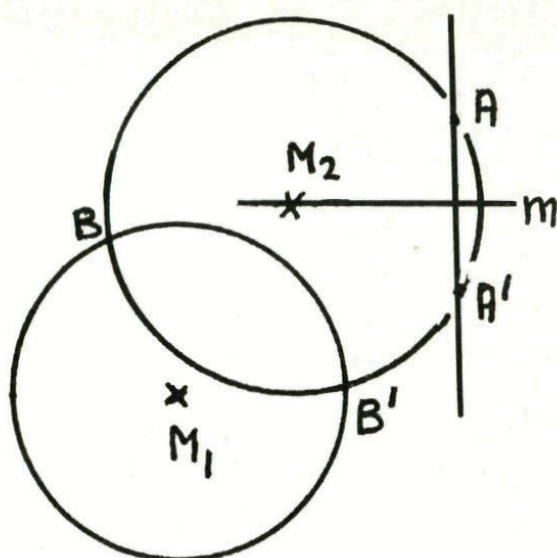
Daarna moet er een derde cirkel (cirkel M_3) komen die cirkel M_2 snijdt in A en A' . De gemeenschappelijke snij-koorde van de cirkels M_2 en M_3 is dus AA' .

Cirkel M_3 moet cirkel M_1 raken, dat wil zeggen snijden in twee samenvallende snijpunten.

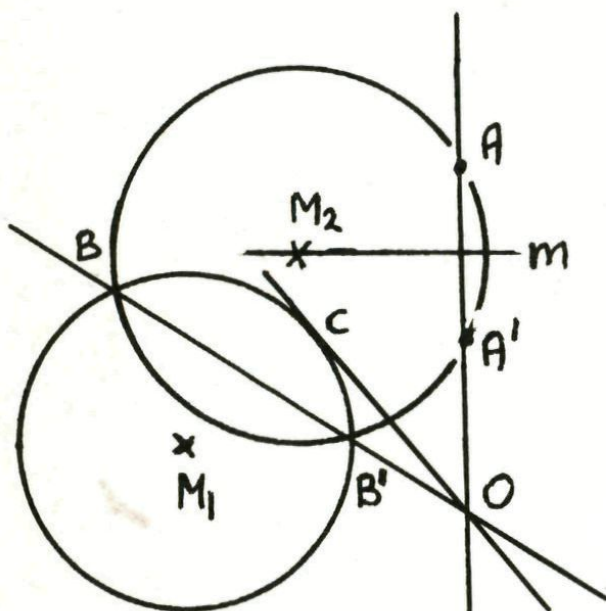
Het uiteindelijke resultaat is dus drie elkaar twee aan twee snijden-de of rakende cirkels. Daarvoor geldt de **drie-koorden-stelling** (Pythagoras 27-2). Met andere woorden, de drie gemeenschappelijke snij-koorden of raaklijnen gaan door één punt. Met twee ge-



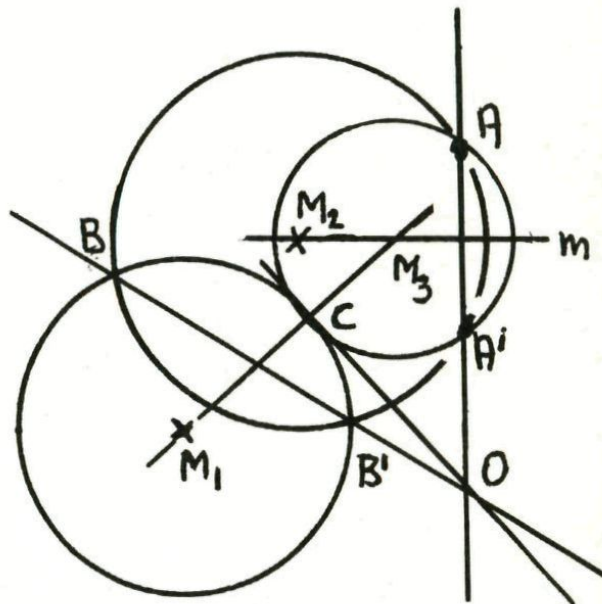
Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4



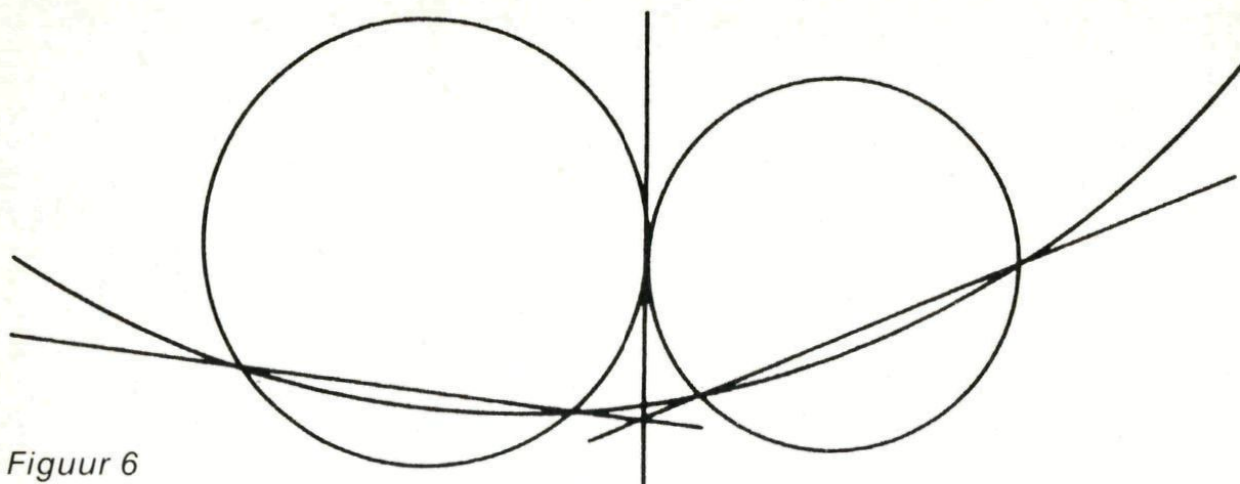
Figuur 5

meenschappelijke snij-koorden AA' en BB' wordt dit ene punt O gevonden.

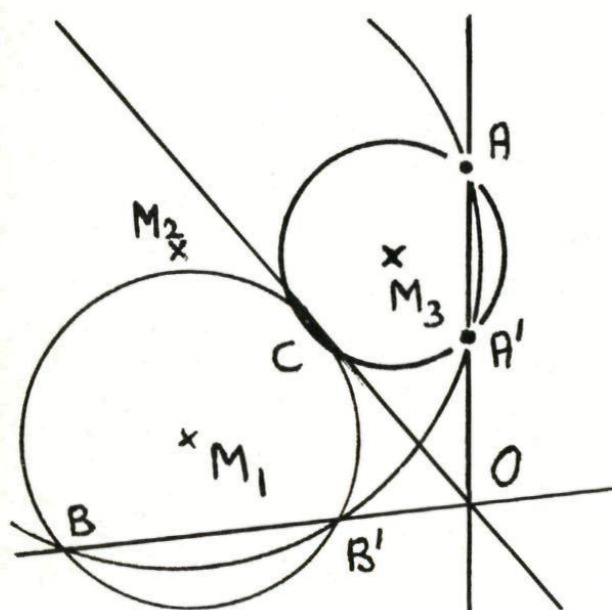
Omdat de cirkels M_1 en M_3 elkaar moeten raken, zal hun gemeenschappelijke raaklijn ook door O gaan. Die gemeenschappelijke raaklijn OC kan worden getrokken en daarmee is het raakpunt C bepaald. Cirkel M_3 ligt dan volkomen vast. Immers door drie gege-

ven punten (in dit geval A , A' en C) is maar één cirkel mogelijk.

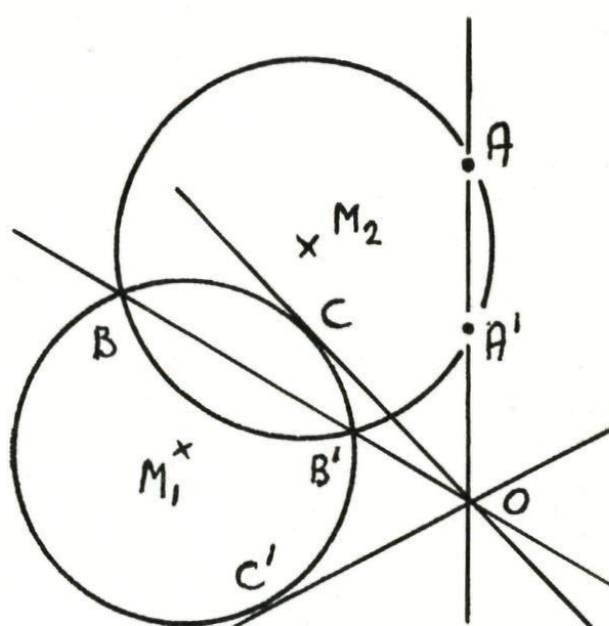
Opmerking Het gelukkige toeval wil — en of je het geloven wilt of niet, het is écht puur toeval — dat figuur 5 overeenkomt met figuur 9 uit het genoemde artikel 'Driekoorden-stelling'. Ter vergelijking is die figuur nog een keer opgenomen (figuur 6). En als je daar-



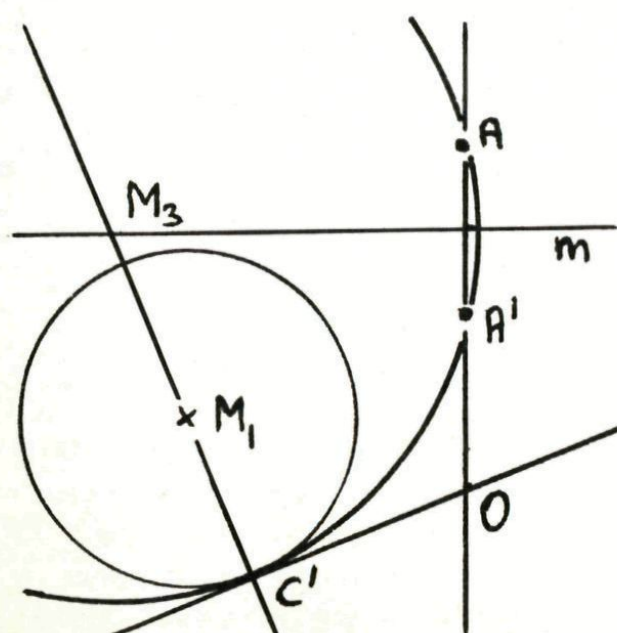
Figuur 6



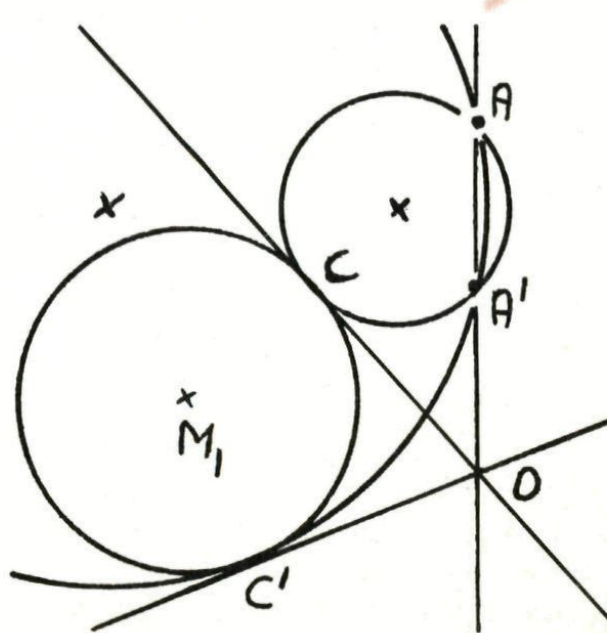
Figuur 7



Figuur 8



Figuur 9



Figuur 10

voor op eigen kracht het bewijs van de drie-koorden-stelling nogmaals hebt uitgeschreven (zoals werd gevraagd), zul je wel helemaal overtuigd zijn van de werking van het recept.

Zonder drie-koorden-stelling

In het tijdschrift *Alpha* werd bij het bewijs de drie-koorden-stelling niet gebruikt. Ook dan is het bewijs niet moeilijk. Zeker niet, als je inmiddels bedreven bent in het toepassen van de 'stelling-uit-de-oude-doos' en zijn varianten die in het artikel 'Drie-koorden-stelling' uitvoerig zijn behandeld. Probeer het maar eens.

Alles goed en wel, maar . . .

In het constructie-voorschrift mag cirkel M_2 willekeurig worden gekozen. Als hij cirkel M_1 maar snijdt en gaat door de punten A en A' . Door een andere cirkel M_2 te kiezen wordt cirkel M_1 in twee andere punten B en B' gesneden. Na verlenging zullen BB' en AA' elkaar dan echter in precies hetzelfde punt O snijden en wordt precies dezelfde cirkel M_3 verkregen (figuur 7). Kun je dat verklaren?

Toch staat in de opgave uitdrukkelijk: Construeer een cirkel die ..., en niet: Construeer de cirkel die... Er moet dus nog minstens een andere cirkel M_3 verkregen kunnen worden. Zie je al hoe?

Tweede oplossing

Wanneer de ligging van O is bepaald, moet van uit O een raaklijn worden getrokken aan cirkel M_1 . Dat kan op twee manieren! Naast OC is ook OC' een raaklijn aan cirkel M_1 (figuur 8). Behalve de cirkel door A , A' en C , voldoet

dus ook de cirkel door A , A' en C' aan de opgave (figuur 9). Het middelpunt van de cirkel door A , A' en C' wordt weer verkregen door M_1C' te snijden met de middelloodlijn m van AA' .

Merk op dat de gegeven cirkel M_1 en de twee mogelijke oplossingen van de opgave ook drie elkaar twee aan twee snijdende of raken-de cirkels vormen en dus... Inderdaad, drie-koorden-stelling (figuur 10).

Werkt het recept altijd?

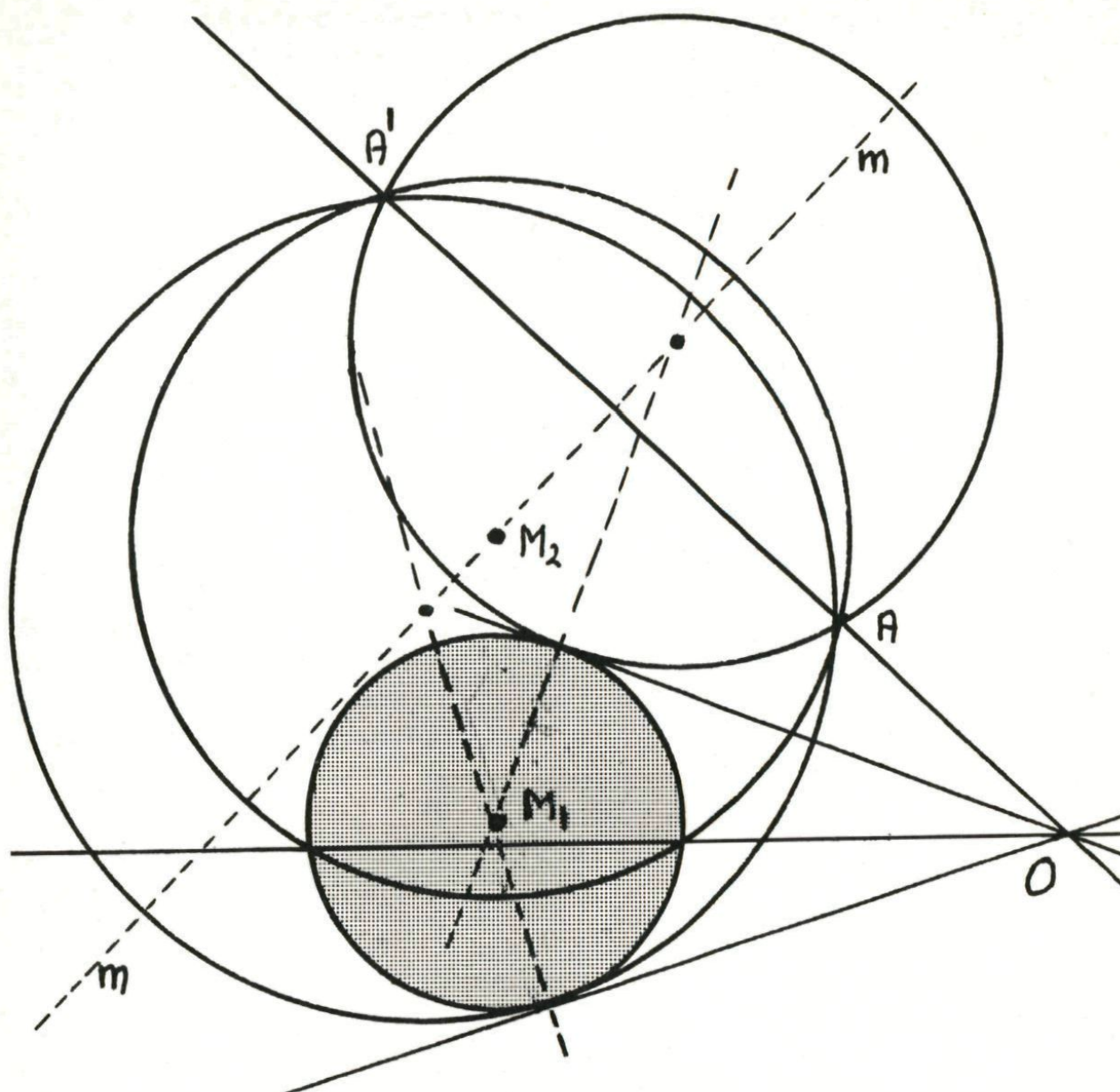
Tot nu toe is de ligging van A en/of A' niet veranderd. Andere keuzen voor die punten zijn natuurlijk ook mogelijk. Dat levert naast een ander punt O uiteraard ook andere oplossingen. Probeer dat maar eens uit. Of loop de constructie van figuur 11 nog eens na.

Gaat 'natuurlijk' goed, want er is toch aangetoond waarom het recept werkt... Ja, maar dat is het nu juist. Er is aangetoond *waarom* het recept werkt, maar niet dat het *altijd* werkt! Dus het bewijs is nog niet helemaal compleet.

Overdreven? O, ja? En als O nu een binnen cirkel M_1 komt? Of als er geen punt O gevonden wordt? Dan kunnen er geen raaklijnen van uit O aan cirkel M_1 worden getrokken!

Het is gemakkelijk in te zien dat O niet binnen cirkel M_1 terecht kan komen.

Trek een cirkel M_1 en snijd die met een willekeurige andere cirkel. Doe nu eens alsof dat de cirkel M_2 is uit het recept. Dan zijn de snijpunten van die cirkels de punten B en B' uit het recept (figuur 12).



Figuur 11

De punten A en A' moeten ergens op die cirkel M_2 liggen. Waar doet er niet toe, als ze maar buiten cirkel M_1 liggen. Daaruit volgt dat het snijpunt O en BB' en AA' altijd buiten cirkel M_1 ligt. Tenzij... AA' en BB' evenwijdig zijn (figuur 13). Dan is er geen punt O .

Geen nood

Vooraf is zo'n situatie als in figuur 13 gemakkelijk te constateren. Want in dat geval ligt het middelpunt M_1 van de gegeven cirkel op

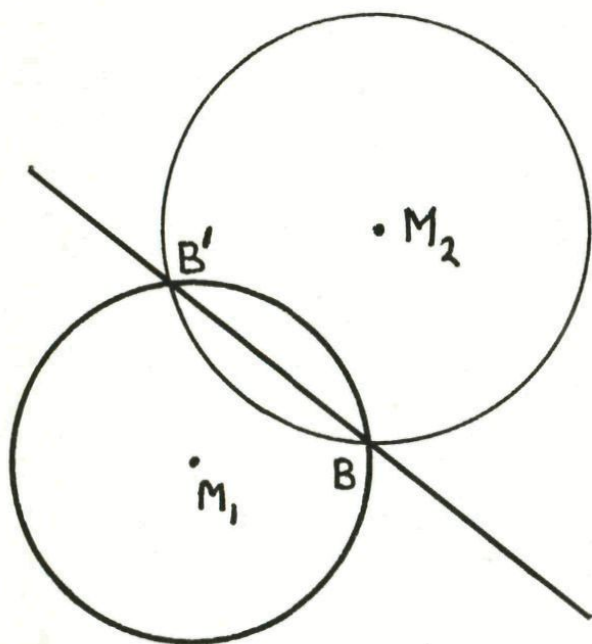
de middelloodlijn van AA' . Met wat goede wil werkt het recept nog steeds. Het gaat zelfs wat sneller.

Doe namelijk even in gedachten alsof AA' en BB' elkaar in het oneindige snijden. Trek van daaruit raaklijnen aan cirkel M_1 . Die lopen evenwijdig aan AA' en BB' en gaan door de snijpunten van m met cirkel M_1 (figuur 14). Daarmee zijn C en C' bepaald. In de praktijk komt dat op het volgende neer.

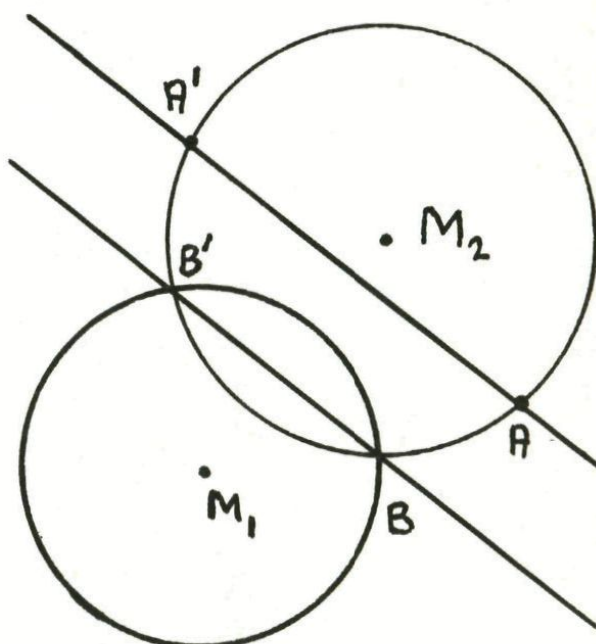
Trek de middelloodlijn m van AA' . Wanneer die gaat door M_1 , zal de gevraagde cirkel gaan door één van de snijpunten C of C' van m met cirkel M_1 en (uiteeraard) door de punten A en A' (figuur 15). Het middelpunt van de gevraagde cirkel is nu niet meer te vinden door M_1C (of M_1C') met m te snij-

den. Dat is echter geen probleem, want er bestaat wel een andere methode om door drie gegeven punten een cirkel te trekken. (Hoe gaat dat?)

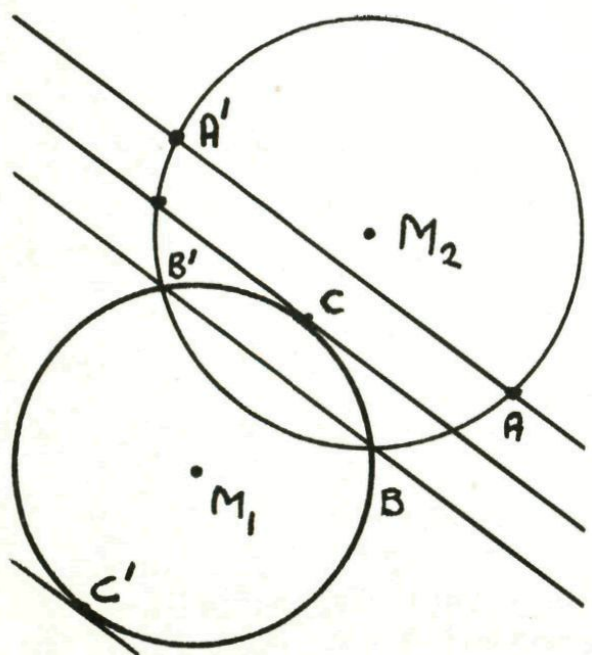
Zo, nu kan dus worden gezegd dat het recept altijd werkt. Dat wel, maar...



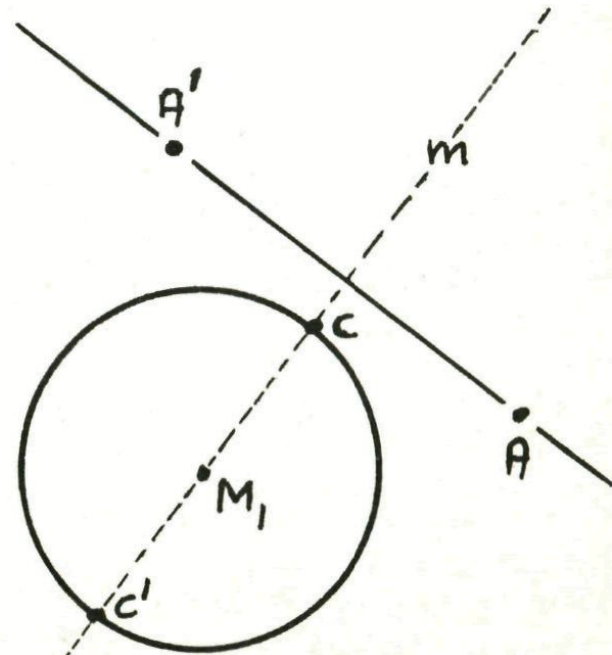
Figuur 12



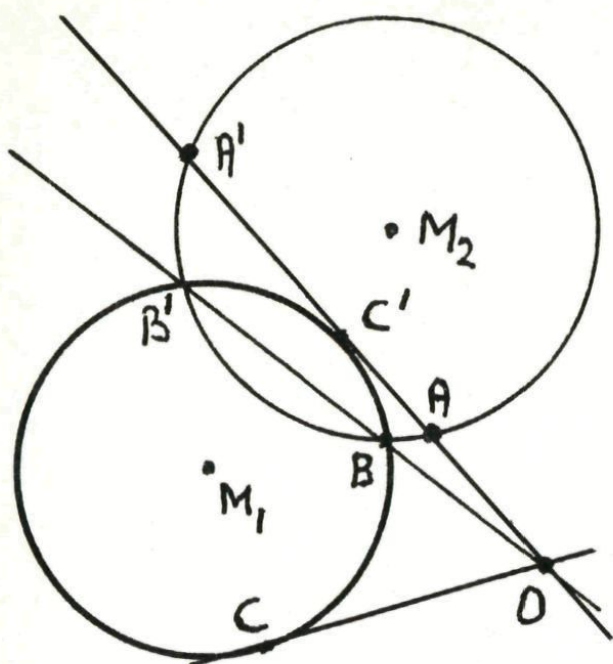
Figuur 13



Figuur 14



Figuur 15

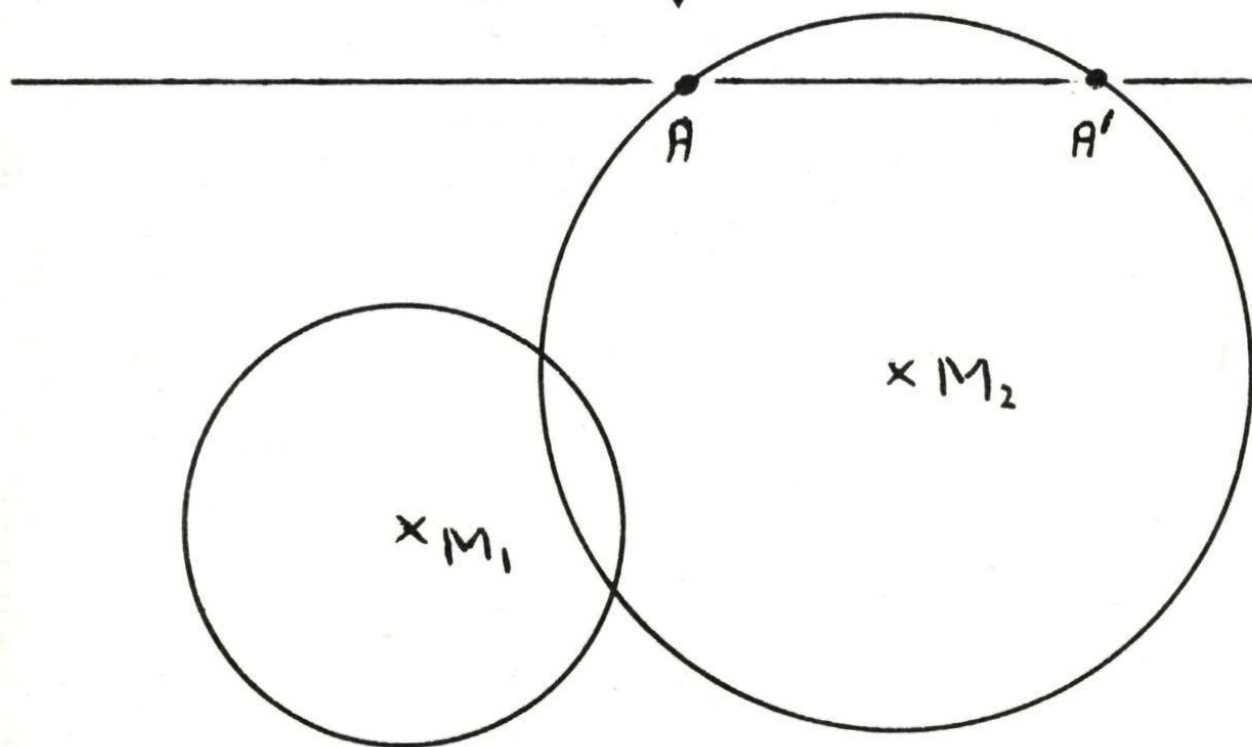


Geen tweede oplossing

Als AA' raakt aan cirkel M_1 , is er slechts één oplossing (figuur 16). Immers één van de raaklijnen van uit O aan cirkel M_1 valt dan samen met AA' . Dus liggen A , A' en C' op één lijn en is er geen cirkel door die drie punten te trekken. In dat geval is de cirkel door A , A' en C de enige oplossing. $\square$

◀ Figuur 16

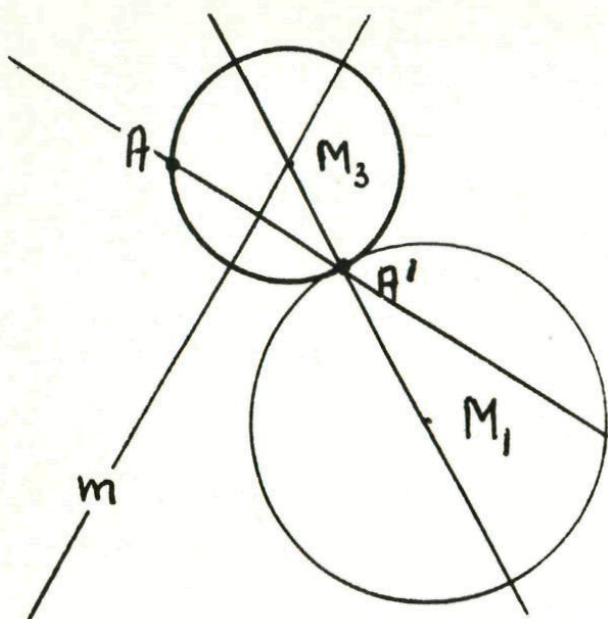
Figuur 17. Loop onderstaande constructie na en maak hem af door de cirkels M_3 te construeren.



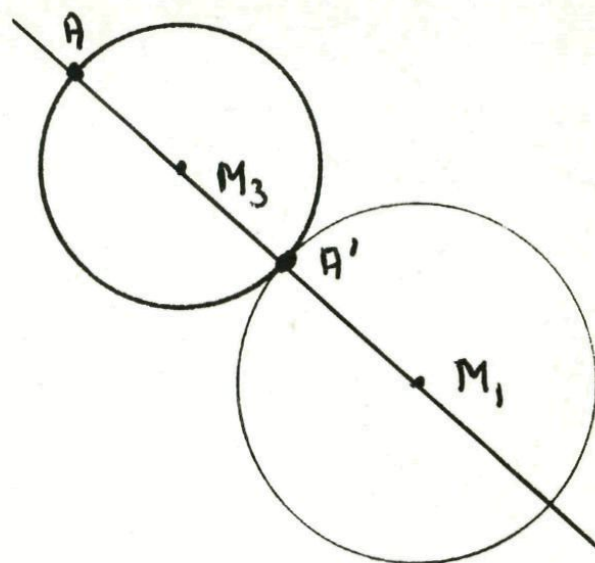
In vogelvlucht

Construeer een cirkel die raakt aan een gegeven cirkel en gaat door twee punten A en A' .

Bij de opgave van Professor Grunert (artikel 'Drie-koorden-stelling omgekeerd') lagen A en A' buiten de gegeven cirkel. Als A en A' anders liggen ten opzichte van de gegeven cirkel, zijn er op één enkele situatie na nog steeds oplossingen mogelijk. Ze zijn te vinden met het recept



Figuur 1



Figuur 2

dat werd gegeven bij de opgave van Professor Grunert, of een ingekorte versie daarvan. In vogelvlucht worden de andere liggingen van A en A' hier behandeld. Uitvoerige beschrijvingen van de (ingekorte) constructie-methoden en bijbehorende bewijzen worden dus achterwege gelaten. Desgewenst zijn die gemakkelijk zelf te vinden.

Buiten en op

Als A buiten de gegeven cirkel M_1 ligt en A' er op, dan is het middelpunt M_3 van de gevraagde cirkel het snijpunt van $A'M_1$ en de middelloodlijn m van AA' (figuur 1).

Als M_1 op het verlengde ligt van AA' , dan is M_3 zelfs het midden van AA' (figuur 2).

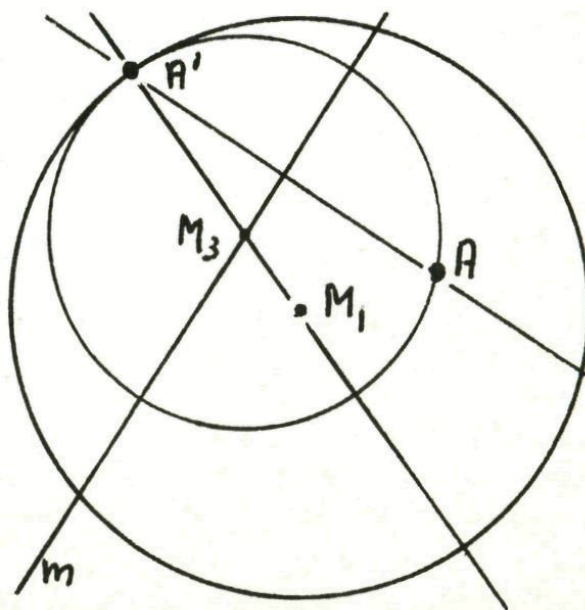
In beide gevallen is er slechts één oplossing.

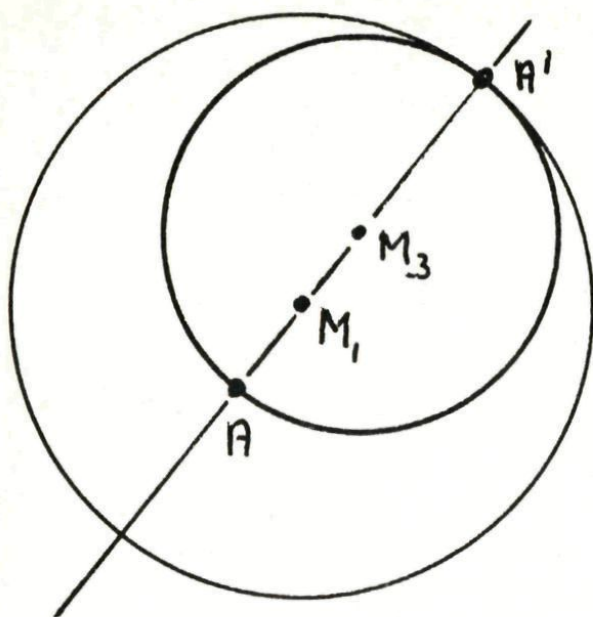
Binnen en op

Als A binnen de gegeven cirkel M_1 ligt en A' er op, dan gaat het net zo. Het middelpunt M_3 van de gevraagde cirkel is het snijpunt van $A'M_1$ en de middelloodlijn m van AA' (figuur 3).

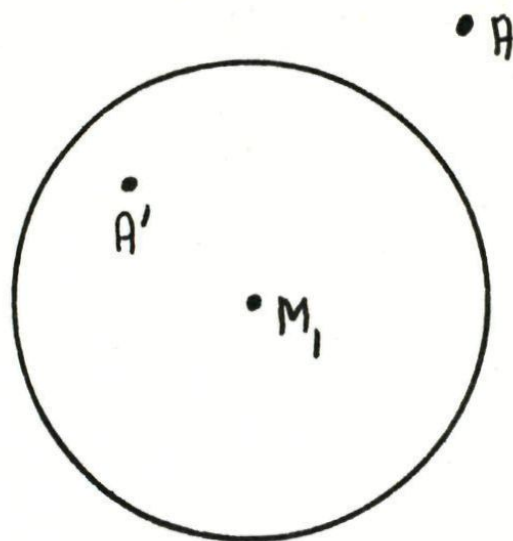
Als M_1 op het verlengde ligt van AA' , wordt M zelfs weer het mid-

den van AA' (figuur 4). In beide gevallen is er weer slechts één oplossing.





Figuur 4



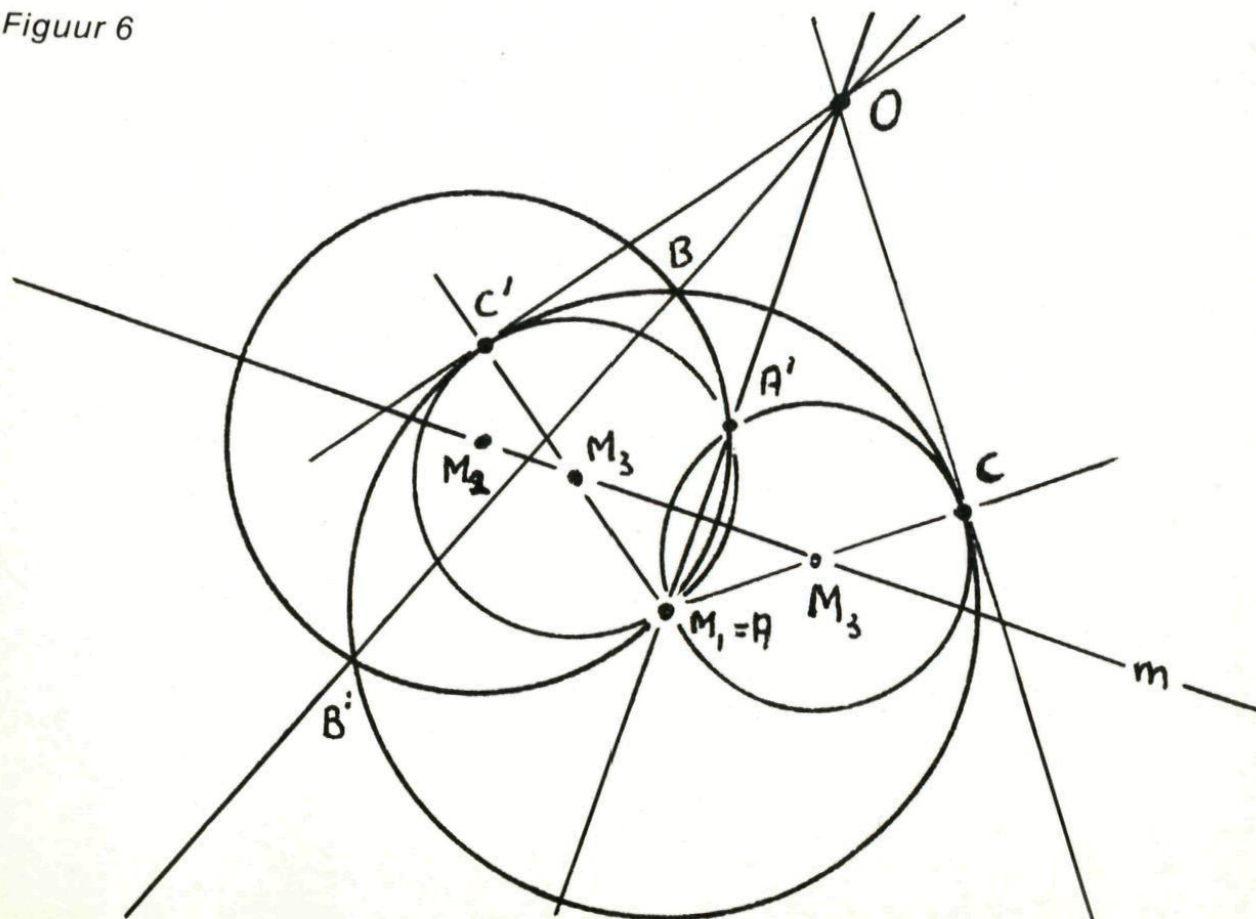
Figuur 5

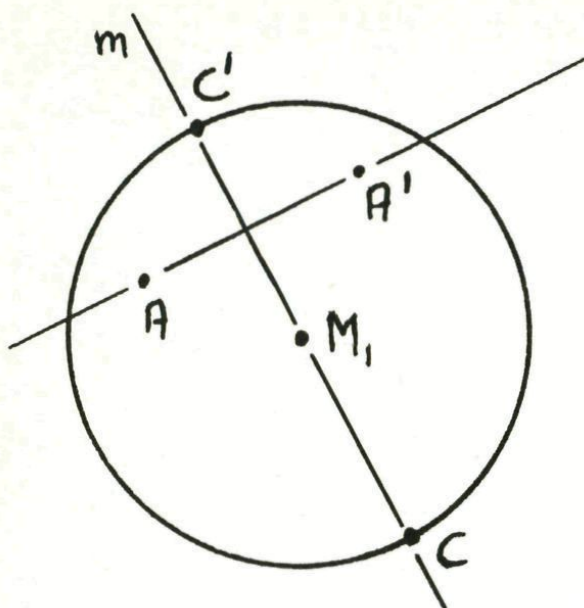
Beide op?

Enigszins flauwe vraag. Want als de punten A en A' beide op de

gegeven cirkel liggen, dan is cirkel M_1 zelf de gevraagde cirkel (en hoef je dus niets te doen) óf er

Figuur 6





Figuur 7. Construeer zelf de cirkels door A , A' en C en door A , A' en C' .

is geen oplossing mogelijk. Het is maar wat je nog onder raken wilt verstaan.

Eén binnen en één buiten

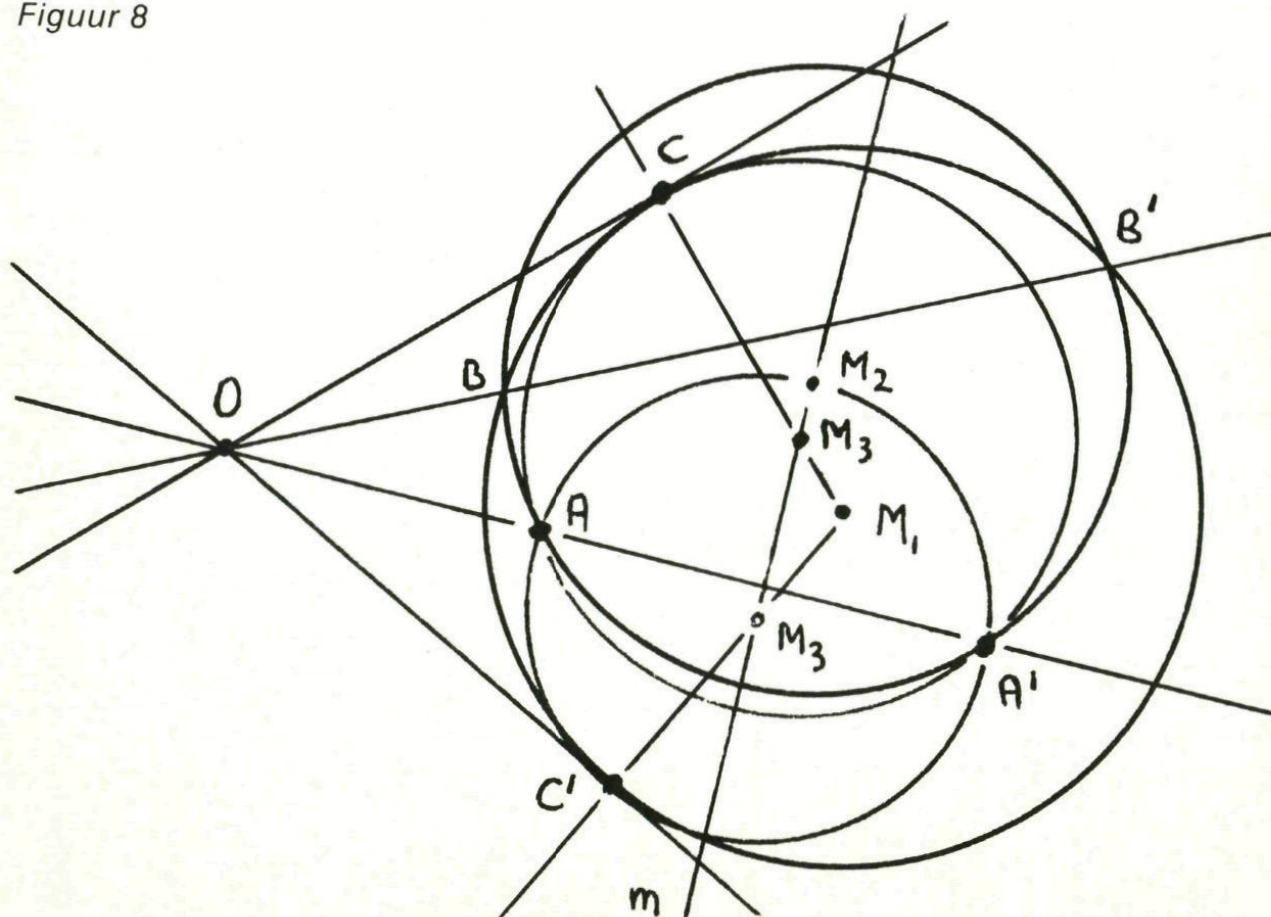
Echt geen oplossing mogelijk! Een cirkel door A en A' zal namelijk altijd cirkel M_1 snijden en nooit kunnen raken (figuur 5).

Beide binnen

Liggen de punten A en A' binnen de gegeven cirkel M_1 , dan verandert er niets aan het recept (figuur 6). Behalve als de middelloodlijn m van A en A' door het middelpunt M_1 gaat. Dan gaat de gevraagde cirkel door één van de snijpunten C of C' van m met cirkel M_1 en (uiteeraard) door de punten A en A' (figuur 7).

In alle gevallen zijn er twee oplossingen. Zelfs als één van de punten A of A' samenvalt met het middelpunt M_1 van de gegeven cirkel (figuur 8). □

Figuur 8



Pythagoras Olympiade

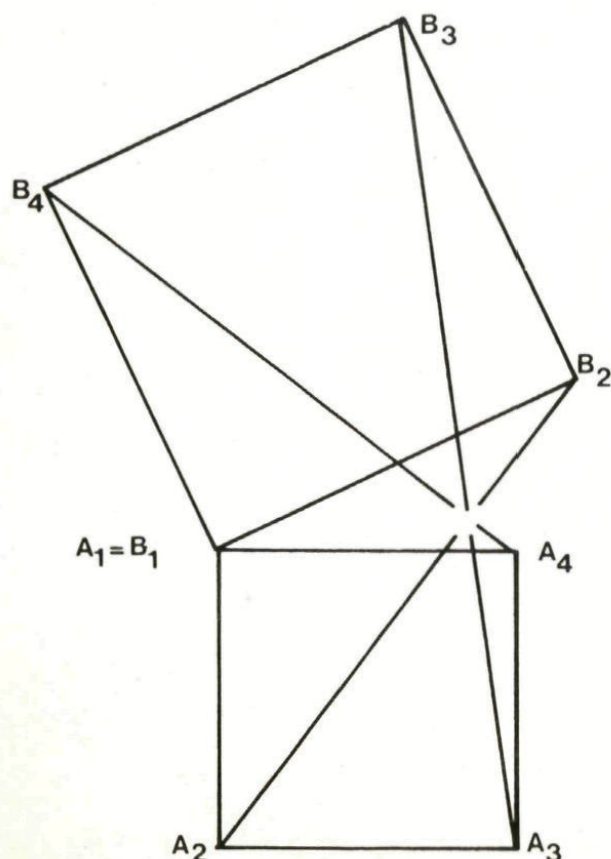


Nieuwe opgaven

Oplossingen vóór 15 juli insturen naar: *Pythagoras Olympiade, Marinus de Jongstraat 12, 4904 PL OOSTERHOUT (NB)*. Vermeld op elk (éénzijdig beschreven) vel je naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas. Verder moet elke oplossing op een nieuw vel beginnen, want we corrigeren ze afzonderlijk. We bekijken alleen goed leesbare oplossingen die volledig zijn uitgewerkt, met verklarende tekst in goed lopende zinnen. Verdere informatie over de wedstrijd vind je in nummer 1 van deze jaargang op bladzijde 24.

PO 110

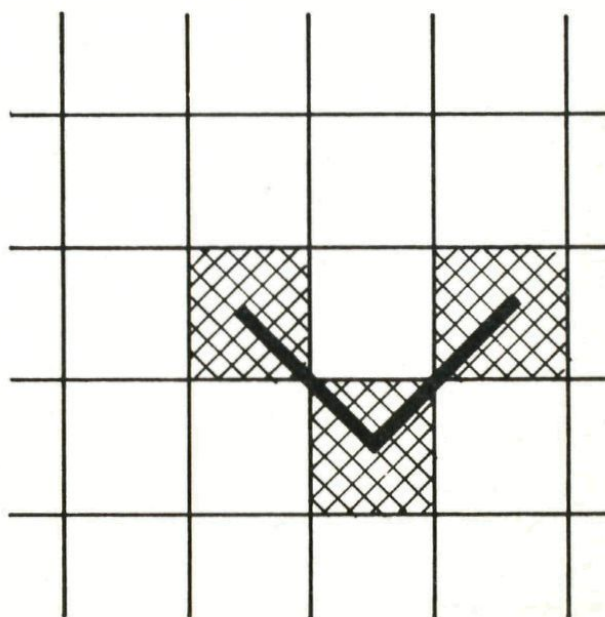
Gegeven zijn twee vierkanten $A_1A_2A_3A_4$ en $B_1B_2B_3B_4$ met $A_1 = B_1$. De hoekpunten van beide vierkanten zijn linksom genummerd (figuur 1). Bewijs dat de lijnen A_2B_2 , A_3B_3 en A_4B_4 door één punt gaan.

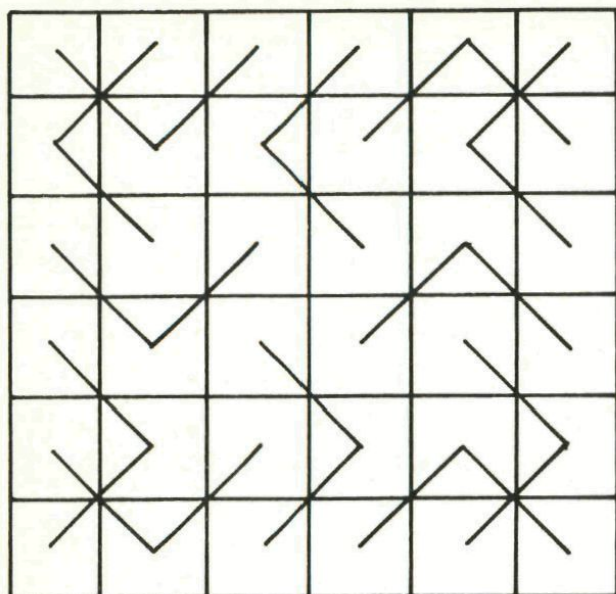


PO 111

Een *vomino* is een v-vormige figuur die bestaat uit drie velden van een schaakbord die met een hoekpunt aan elkaar grenzen (figuur 2). In figuur 3 zie je een schema waaruit blijkt dat je een 6×6 -schaakbord in vomino's kunt opdelen (vomino's mogen elkaar wel kruisen, maar ze mogen geen veld gemeen hebben).

Geef voor een 7×7 -schaakbord een verdeling in vomino's waarbij precies





één veld ongebruikt blijft, of bewijs dat zo'n verdeling onmogelijk is. Doe hetzelfde voor een 8×8 — bord.

PO 104 en PO 105

Bij nader inzien was de inzendtermijn voor de opgaven PO 104 en PO 105 uit nummer 1 van deze jaargang wel heel erg kort. Daarom krijg je alsnog tot **15 juli** de gelegenheid om de oplossingen van deze twee opgaven in te zenden. □

Figuur 3

Welke vier?

De som van de kwadraten van vier op elkaar volgende *gehele* getallen is 630. Bereken die getallen. Hoeveel mogelijkheden zijn er?

Uit: Alpha, Oost-Duitsland. □

Rangeer-perikelen 2: oplossing

Locomotief achteruit voorbij *A*, vooruit *AC* op en *X* vastkoppelen. Locomotief achteruit met *X* voorbij *A*, daarna vooruit *X* voorbij *B* duwen en *X* ontkoppelen. Locomotief alleen achteruit terug voorbij *A*, dan vooruit naar *CD*, achteruit naar *CB*, wagon *Y* koppelen en voorbij *B* duwen. Daar *X* aan *Y* koppelen en *LYX* in z'n geheel voorbij *A* rijden. Dan *LYX* naar spoor *AC* en *X* op *CD* zetten. *LY* iets vooruit, *Y* ontkoppelen en op nieuwe positie achterlaten. Locomotief alleen vooruit voorbij *A*, vervolgens achteruit voorbij *B*, vooruit *BC* oprijden, *X* koppelen en van *CD* naar nieuwe positie trekken. *X* ontkoppelen, locomotief alleen voor *B* en vervolgens *AB* op.

De locomotief staat nu met z'n neus de andere kant op. Er is *acht* keer gekoppeld of ontkoppeld. Met één extra beweging ergens in deze oplossing kun je *L* met z'n neus weer dezelfde kant op laten wijzen. Er moet dan nog één keer gekoppeld én één keer ontkoppeld worden!

Met een kleine wijziging van de gegeven oplossing kun je hetzelfde resultaat (dus locomotief met z'n neus de andere kant op) bereiken met maar zes keer koppelen of ontkoppelen. Hopelijk heb je genoeg aanwijzingen gekregen om uit te zoeken hoe dat moet. □

Redactioneel

In dit nummer is wat minder plaats ingeruimd voor de Olympiaden dan in de eerste drie nummers van deze jaargang. De eerste oplossingen van de vragen uit de Pythagoras Olympiade van deze jaargang komen in het volgende nummer. (Let op de verlengde inzendtermijn van PO 104 en PO 105, zie bladzijde 31.) We komen in het volgende nummer trouwens ook nog even terug op de in februari gehouden Olympische Winterspelen.

De artikelen 'Aan de slag met Pythagoras' en 'Verder aan de slag' hebben wel iets met elkaar te maken, maar kunnen los van elkaar worden gelezen. Dit is niet het geval met het artikel 'Drie-koordenstelling omgekeerd'. Dat bestaat uit twee delen: 'Een opgave van Professor Grunert' en 'In vogelvlucht'. Deze delen moeten na elkaar worden gelezen. Daarom zijn ze ook vlak na elkaar geplaatst. □

Uitgave onder toezicht van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Lay-out: Klaas Lakeman, Amsterdam.

Tekenwerk: Hans van Kuyk, Amsterdam.

Foto's en andere illustraties: Klaas Lakeman, Amsterdam (omslag, blz. 1, 2, 3, 8, 9, 10, 14, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29); Oskar van Deventer, Voorburg (blz. 4, 5, 6); W. F. Kroeze, Den Haag (blz. 7); Peter Bata (blz. 11); Jan van de Craats, Oosterhout (NB) (blz. 12, 13, 30, 31); Mathematical Models, H. Martyn Cundy & A. P. Rollet, Londen (blz. 13, 18, 19); M. C. Escher Kaleidozyklen, Doris Schattschneider & Wallace Walker, uitgave TACO, Berlijn (blz. 15, 17).

© 1988 Redactie Pythagoras - ALLE RECHTEN VOORBEHOUDEN, NADruk OF WEERGAVE, GEHEEL OF GEDEELTELIJK, IN WELKE VORM DAN OOK, ZONDER TOESTEMMING VAN DE REDACTIE VERBODEN.

Pythagoras wiskunde tijdschrift voor jongeren

Redactie: Jan van de Craats, Klaas Lakeman, Hans de Rijk.

Medewerkers: Popke Bakker, Gerard Bäuerle, F. van der Blij,
Niels M. Buizert, Hans Lauwerier, Hessel Pot.

Redactiesecretariaat: Klaas Lakeman, Cornelis Krusemanstraat 60^{II},
1075 NS Amsterdam (NL).

Inhoud jaargang 27, nummer 4

Aan de slag met Pythagoras / 1

Klaas Lakeman

Is dat niet mooi? / 3

Klaas Lakeman

π -record opnieuw gebroken / 3

Klaas Lakeman

De onmogelijke Escher-puzzel / 4

Jan van de Craats

Kruis-tal-puzzel III / 7

W. F. Kroeze

Verder aan de slag / 8

Klaas Lakeman

Rangeer-perikelen 2 / 11, 31

Klaas Lakeman

Vijf kubussen in een

dodekaëder / 12

Jan van de Craats

Draaien, draaien, ... / 14

Klaas Lakeman

Afstand tussen twee koorden / 19

Drie-koorden-stelling omgekeerd

Een opgave van Professor

Grunert / 20

In vogelvlucht / 26

Klaas Lakeman

Pythagoras Olympiade / 30

Jan van de Craats

Welke vier? / 31

Redactioneel / 32

Pythagoras verschijnt zesmaal per schooljaar; opgave van abonnementen bij de uitgever (zie onder).

Abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 september schriftelijk bij de uitgever is opgezegd.

Bij tussentijdse abonnering ontvangt

men ook de reeds verschenen nummers. Betaling per acceptgirokaart.

Tarieven*

Abonnement Pythagoras

Inclusief Archimedes

Losse nummers

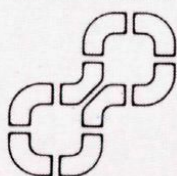
* Luchtpost-toeslag 15%

NLG/BEF

20,—/365

36,—/660

5,—/ 90



stichting ivio

Postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL).

educatieve uitgeverij - instituut voor buitenschools

onderwijs - wereldschool - AO-reeks - leerprojecten

Postgiro Nederland: 287934

Postcheck België: 000-0130850-94

Tel. 03200-76411