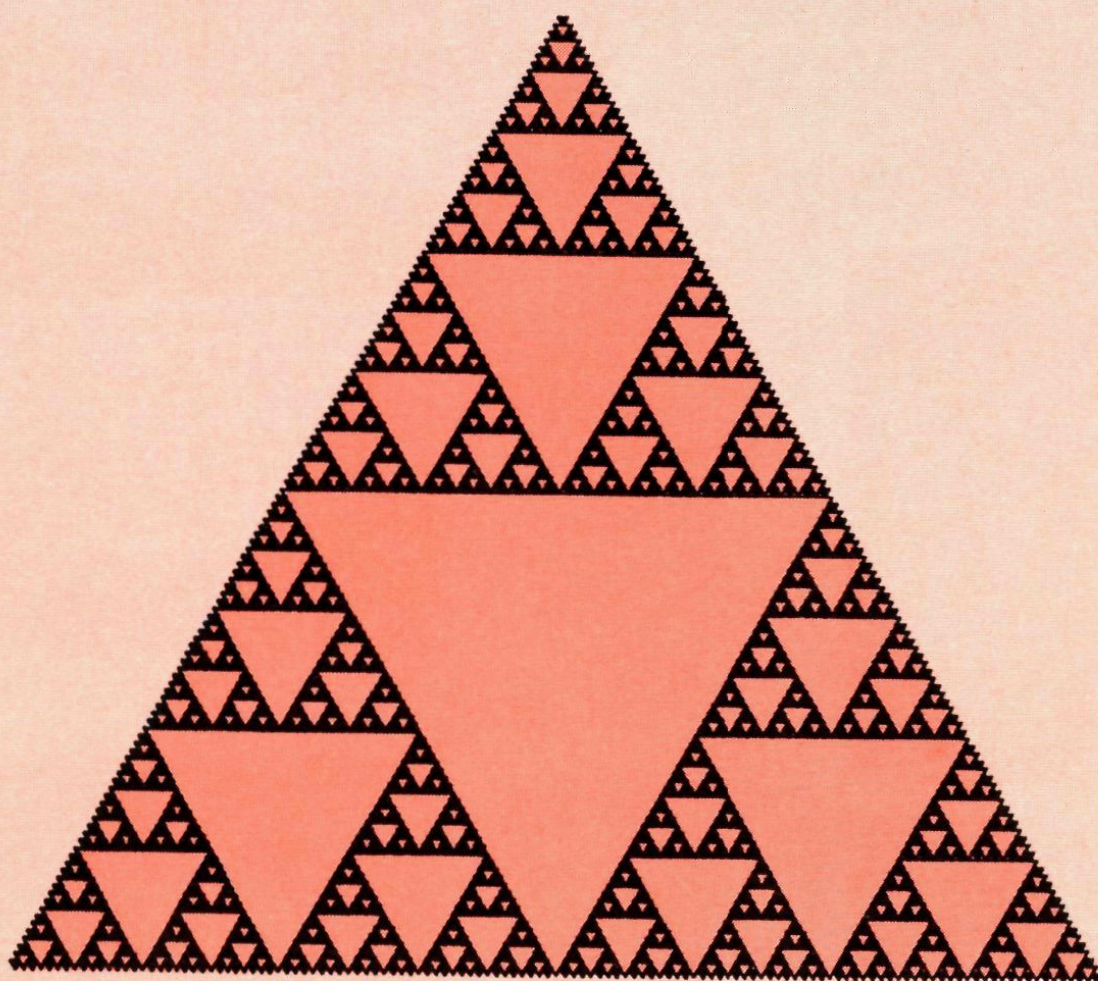




Pythagoras

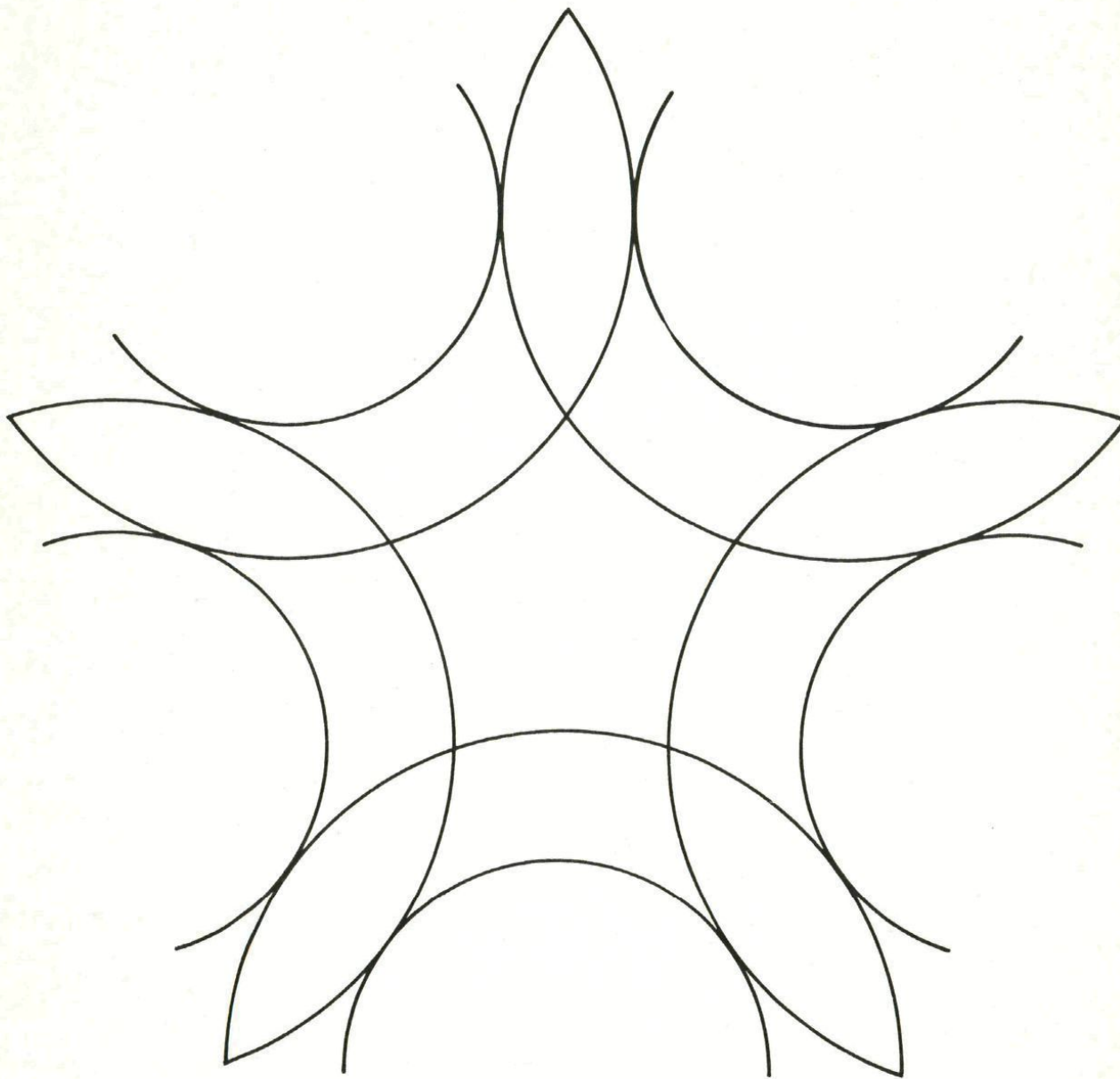


wiskunde tijdschrift voor jongeren

stichting ivio

jaargang 27
nummer 5
juli 1988

Spelen met ringen

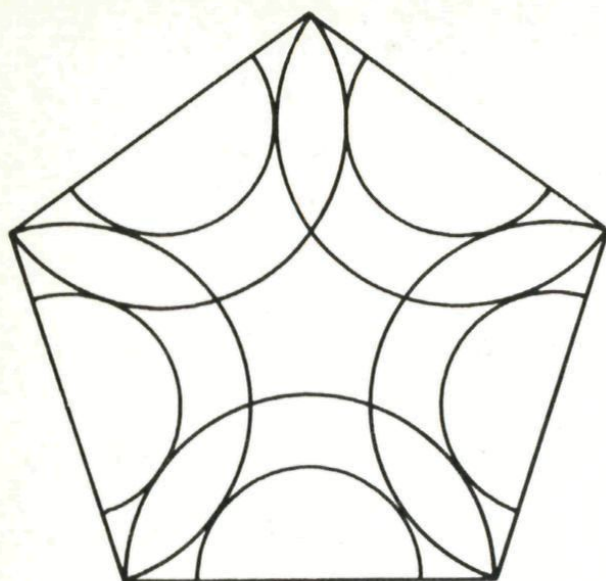


Natuurlijk herkent iedereen direct de figuur hierboven. Het is het beeldmerk (deftiger uitgedrukt: het logo) van de Olympische Winterspelen 1988 die in februari in Calgary (Canada) werden gehouden. Is dat beeldmerk zo maar een willekeurige, fraai ogende compositie van tien halve cirkelbogen? Nee, kijk nog maar eens goed. Misschien begint het dan al wat te dagen.

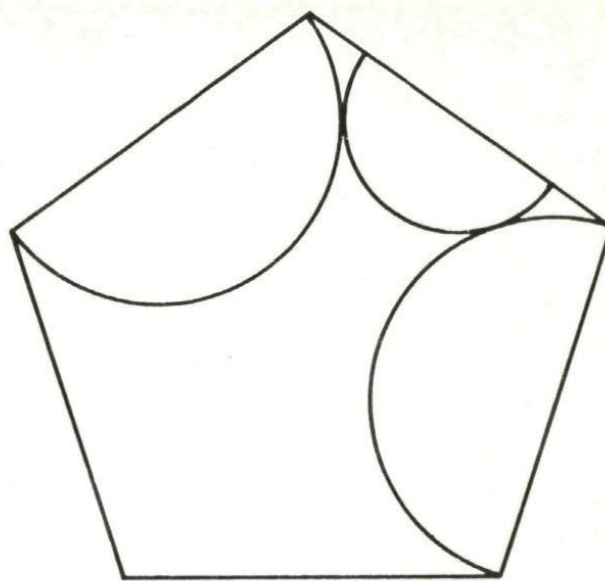
Zo zit dat in elkaar

De omhullende van het beeldmerk is een regelmatige vijfhoek.

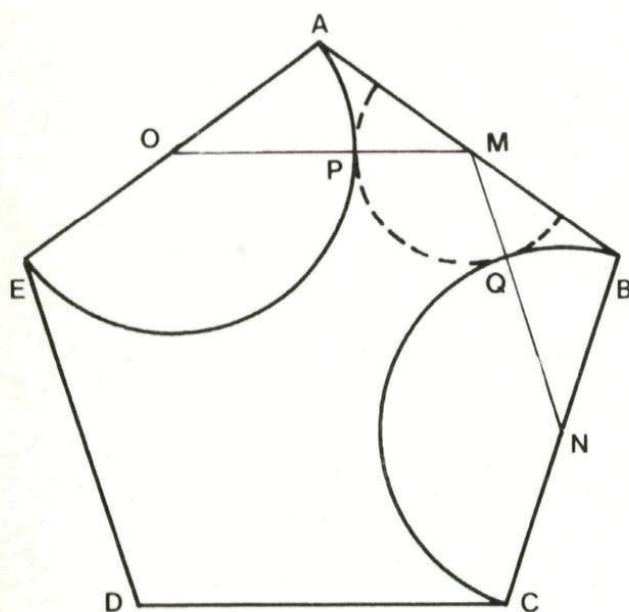
Wanneer die wordt getrokken (figuur 1), is meteen al heel wat duidelijk.



Figuur 1



Figuur 2



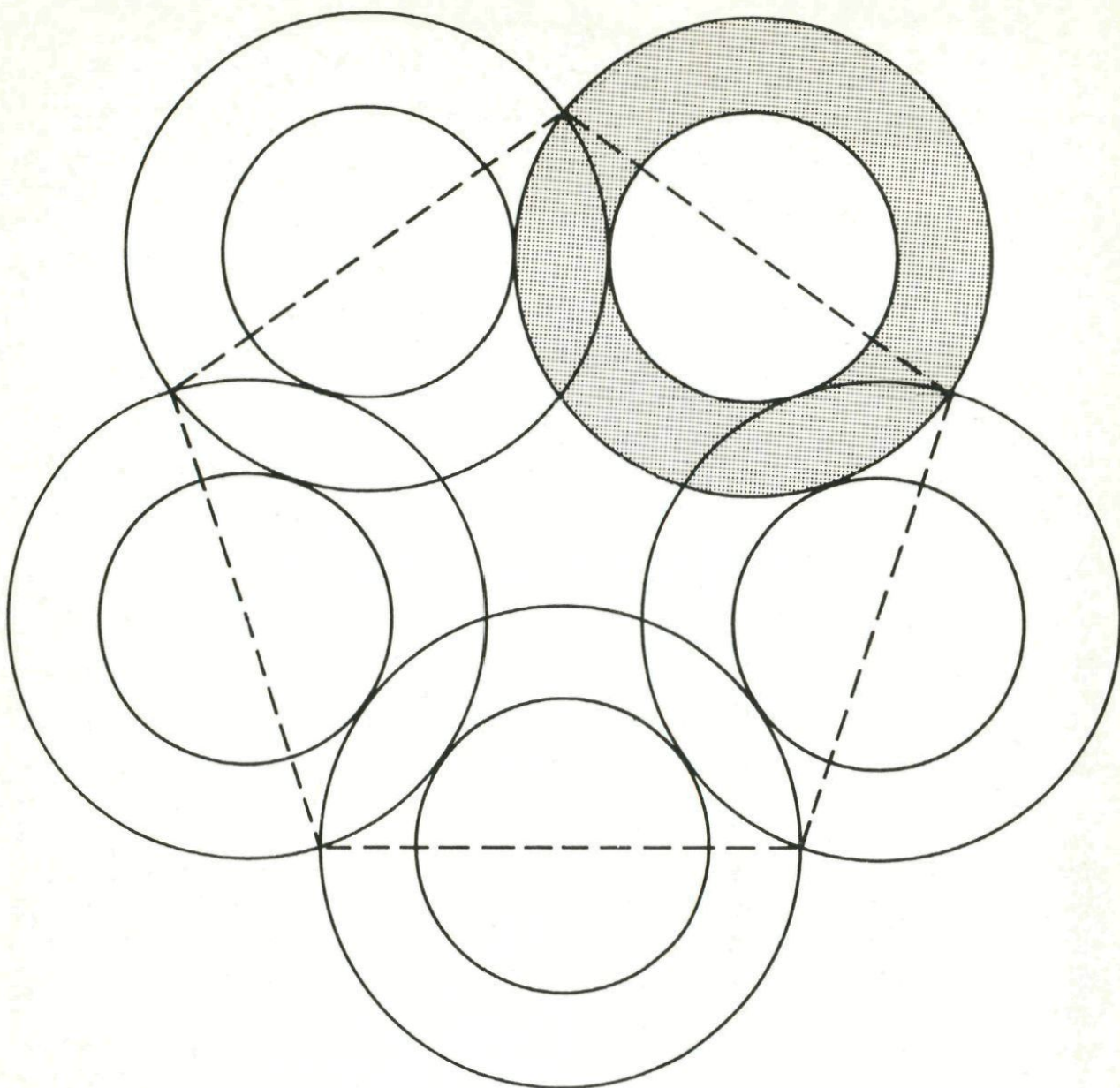
Figuur 3

Op elke zijde van die regelmatige vijfhoek staan twee halve cirkelbogen met als middelpunt het midden van zo'n zijde. Een halve cirkelboog heeft precies de betreffende zijde van de regelmatige vijfhoek als middellijn. De andere is zó gekozen, dat hij precies raakt aan de twee grote halve cirkelbogen die op de naastliggende zijden zijn getrokken (figuur 2).

Hoe krijg je dat voor elkaar?

Hoe je dat voor elkaar krijgt? Geen kunst aan. Er komt zelfs geen berekening aan te pas. Wanneer twee cirkels elkaar raken, liggen hun middelpunten én het raakpunt op één lijn. Teken daarom eerst een regelmatige vijfhoek. Trek op elke zijde de halve cirkelboog die als middellijn de zijde zelf heeft. Verbind vervolgens de middens van de naastliggende zijden van de regelmatige vijfhoek met elkaar. De snijpunten van deze verbindingslijnen met de cirkelbogen zijn dan de raakpunten.

Zo is in figuur 3 M het midden van de zijde AB van de vijfhoek. De naastliggende zijden van AB zijn EA en BC . Daarop zijn de halve cirkelbogen met middellijn EA respectievelijk BC getrokken. M is verbonden met de middens O en N van EA respectievelijk BC . ON snijdt de boog op EA in P en MN de boog op BC in Q . P en Q zijn dus de raakpunten van de kleinere halve cirkelboog op AB



Figuur 4

met de grote halve cirkelbogen op EA respectievelijk BC . MP en MQ zijn gelijk aan elkaar en bepalen de straal van de kleinere halve cirkelboog op AB . Op deze manier kun je de hele vijfhoek rondgaan.

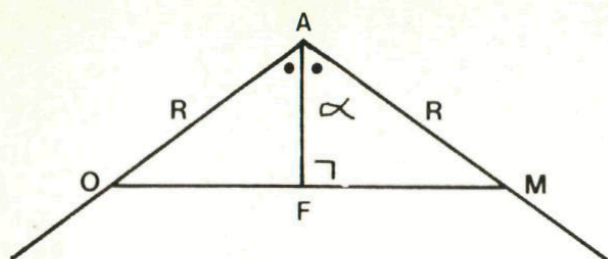
Waarom een vijfhoek?

Is snel verteld. Maak van alle halve cirkelbogen maar eens volledige cirkels (figuur 4). Dat levert vijf in elkaar geschoven ringen. In figuur 4 is er één grijs gemaakt.

Die vijf ringen vormen het symbool van de olympische gedachte. Voor elk werelddeel één. Denk maar eens aan de vijf gekleurde ringen op de olympische vlag.

Reken mee

Hoe dik is een ring? Hoe groot is de straal van een kleine halve cirkel? Als eenmaal bekend is hoe het beeldmerk in elkaar zit, is het antwoord op deze vragen niet zo moeilijk meer. De dikte d van een ring en de straal r van een kleine



Figuur 5

halve cirkel zijn eenvoudig uit te drukken in de straal R van een grote halve cirkel.

In figuur 5 is alleen het bovenste stuk van de vijfhoek uit figuur 3 weergegeven. Voorlopig zonder de bogen. AM en OA zijn gelijk aan R , de straal van de grote cirkel. (Dus de zijden van de vijfhoek zijn $2R$.) Hoek OAM is een hoek van de vijfhoek en dus gelijk aan 108° .

AF staat loodrecht op OM en deelt hoek OAM middendoor. Hoek FAM ($= \alpha$) is dus 54° .

In driehoek FAM geldt

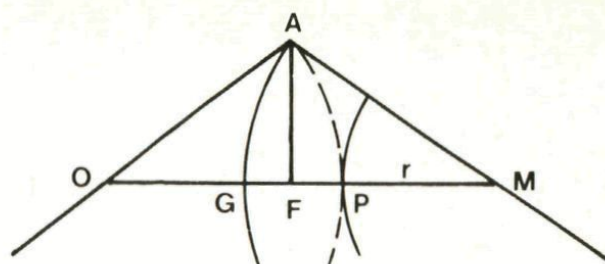
$$\sin \alpha = \frac{FM}{AM} = \frac{FM}{R}$$

Dus $FM = R \sin \alpha = R \sin 54^\circ$.

Nu wordt figuur 5 aangevuld met stukjes van de halve cirkels (figuur 6). Omdat $MG = R$ en $GF = MG - FM$, geldt

$$GF = R - R \sin 54^\circ$$

De dikte d van een ring is gelijk aan GP en $GP = 2GF$. Dus voor d geldt dan



Figuur 6

$$d = 2(R - R \sin 54^\circ)$$

of netter geschreven

$$d = 2R(1 - \sin 54^\circ) \quad (1)$$

Voor de straal r van een kleine cirkel geldt $r = MP = R - d$ ofwel

$$r = R - 2R(1 - \sin 54^\circ) \quad (2)$$

Omdat $\sin 54^\circ$ ongeveer 0,81 is, volgt uit (1) $d \approx 0,38R$ en uit (2) $r \approx 0,62R$.

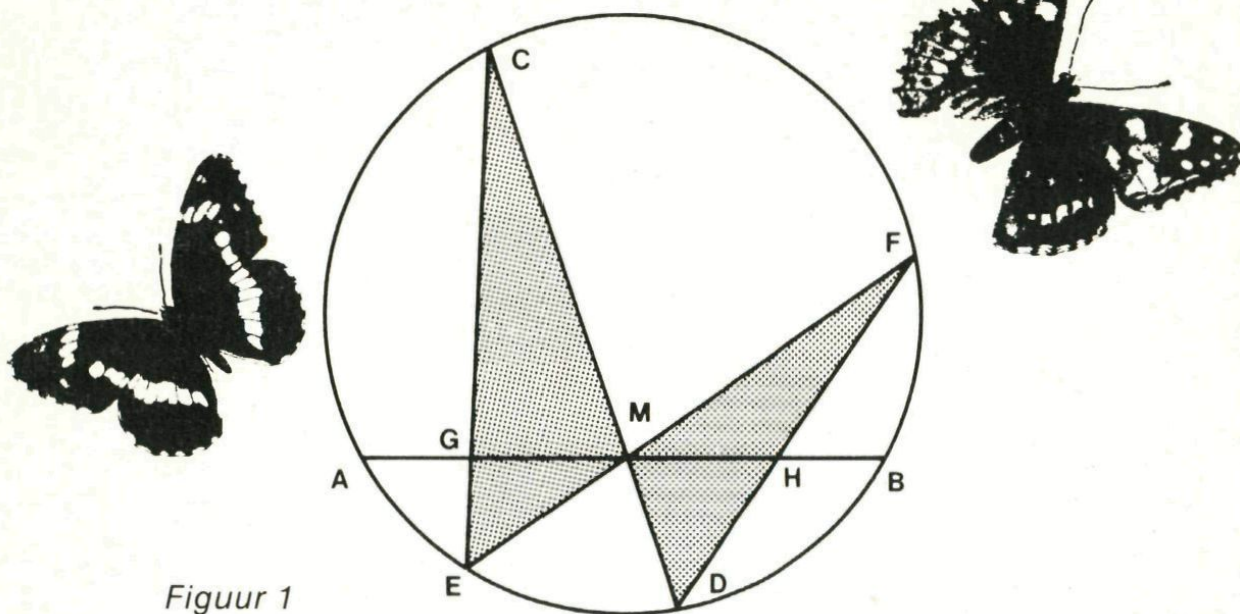
Lastiger

Heel wat lastiger is het om de oppervlakte in R uit te drukken van het gebied dat door de vijf (halve) ringen wordt ingesloten. Daarbij is de oppervlakte O_5 van de vijfhoek nodig en daarvoor geldt (Ga na!)

$$O_5 = \frac{5R^2}{\tan 36^\circ}$$

Ook moet de oppervlakte worden bepaald van het gebied waar twee ringen elkaar overlappen (waarom?). Maar met behulp van de boven verkregen (tussen)resultaten moet die zijn te vinden. Probeer maar eens. Het antwoord staat op bladzijde 13. $\square$

Opnieuw de vlinderstelling



Figuur 1

In nummer 2 van deze jaargang was het voorplaat-artikel gewijd aan de vlinderstelling:

Trek door het midden M van een koorde AB van een cirkel twee andere koorden CD en EF (figuur 1). Geef de snijpunten van CE en DF met AB aan met G en H . Dan is M ook het midden van GH .

We hebben toen twee bewijzen van die stelling gegeven: een 'vlak' bewijs en een 'ruimtelijk' bewijs met behulp van projectie.

Een ander bewijs

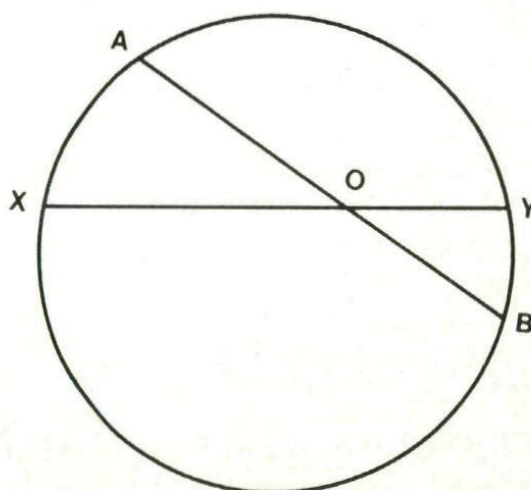
Jeroen Paasschens uit Bladel stuurde ons nog een ander 'vlak' bewijs dat heel fraai is. Het maakt gebruik van een *puntspiegeling* in M en van het begrip *macht* van een punt ten opzichte van een cirkel.

Dat laatste heeft direct te maken met de twee stellingen uit de oude doos die we in datzelfde nummer hebben opgerakeld. De eerste zegt:

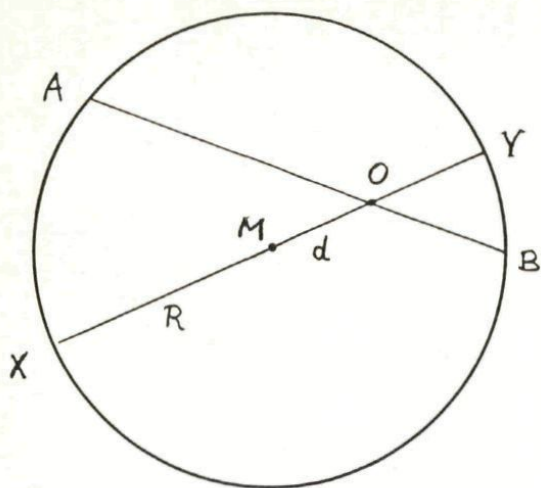
Als twee koorden AB en XY van een cirkel elkaar snijden in

O (figuur 2), dan geldt

$$AO \cdot OB = XO \cdot OY$$



Figuur 2



Figuur 3

Nemen we (figuur 3) voor XY de middellijn door O , dan blijkt dat

$$\begin{aligned} AO \cdot OB &= XO \cdot OY \\ &= (R+d)(R-d) \\ &= R^2 - d^2 \end{aligned}$$

Dat getal $R^2 - d^2$ heet de *macht* van O ten opzichte van de cirkel, de zojuist genoemde stelling heet ook wel de *machtsstelling*.

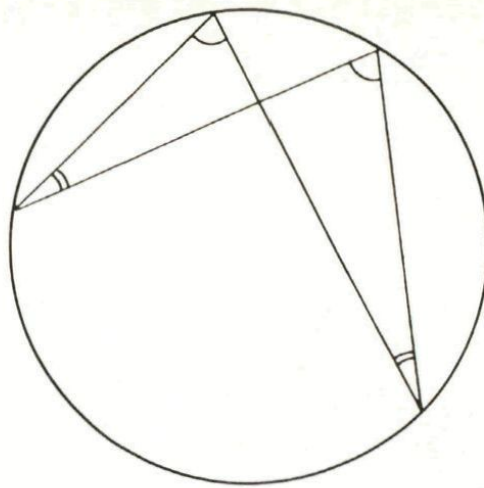
Jeroen gebruikt in zijn bewijs het feit dat de macht van een punt ten opzichte van een vaste cirkel blijkbaar alleen afhangt van de afstand d van dat punt tot het middelpunt van de cirkel.

Omtrekshoek

De tweede stelling uit de oude doos is die over omtrekshoeken (figuur 4):

Omtrekshoeken die op dezelfde boog staan, zijn gelijk.

Het bewijs hiervan staat in nummer 2 op de bladzijden 6 en 7, en de machtsstelling is hiervan een



Figuur 4

direct gevolg. Kijk alles nog maar eens na als je het vergeten bent.

Jeroens bewijs

Spiegel de figuur van de vlinderstelling in het midden M van de koorde AB (figuur 5).

De cirkel $\mathcal{C}$ gaat dan over in een cirkel $\mathcal{C}'$, het middelpunt O in O' , enzovoort. (In het algemeen geven we beeldpunten aan met een accent.) Voor de duidelijkheid van het vervolg hebben we de koorde AB weggelaten. Pas helemaal op het einde van het bewijs gaat die weer een rol spelen.

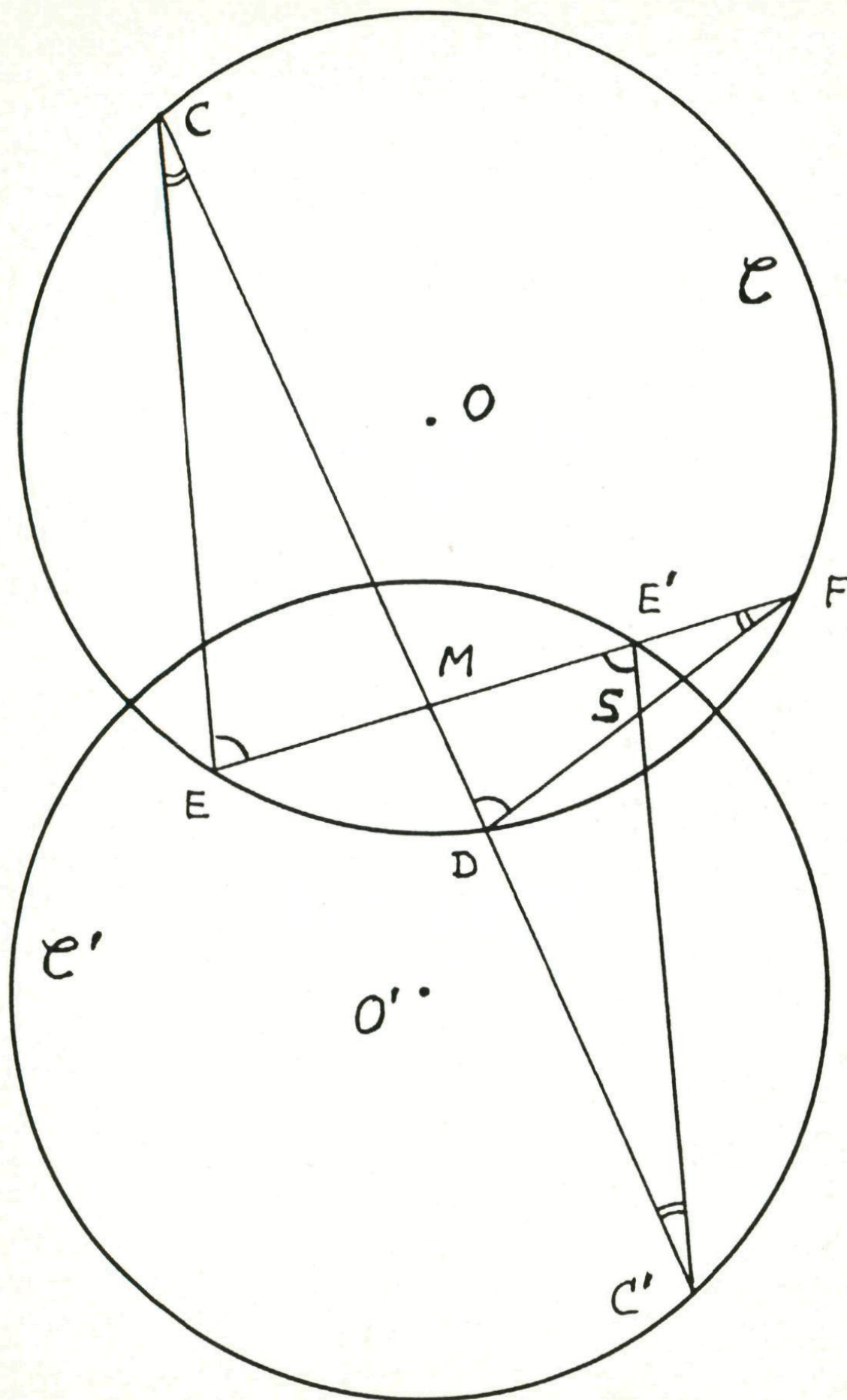
In figuur 5 zie je onmiddellijk dat alle als zodanig aangegeven hoeken gelijk zijn. Dat volgt uit de (punt)spiegeling en uit de omtrekshoekenstelling. Het snijpunt van FD en $C'E'$ is S genoemd.

De driehoeken $SE'F$ en SDC' zijn gelijkvormig, want hun overeenkomstige hoeken zijn gelijk. Daaruit volgt

$$FS : E'S = C'S : DS.$$

En dat levert

$$FS \cdot DS = E'S \cdot C'S.$$



Figuur 5

Figuur 6

Het linkerlid hiervan is de macht van S ten opzichte van de cirkel e . Het rechterlid is de macht van S ten opzichte van e' . Die machten zijn gelijk, en dus zijn ook de afstanden van S tot de beide middelpunten O en O' gelijk. Maar dat betekent dat S op de middelloodlijn van O en O' ligt. En dat is de weggelaten lijn AB .

S valt dus samen met het snijpunt H van AB en DF . Daarmee is het bewijs rond, want (figuur 6) $S=H$ is als snijpunt van AB en $E'C'$ het beeld onder (punt)spiegeling in M van het snijpunt van BA en EC . Maar dat is G .

Conclusie: $MG = MH$, en dat moest worden bewezen! $\square$

Zo ver de woestijn in

In de tank van de terreinwagen van een woestijn-patrouille kan maximaal 10 liter benzine. Bij een post ligt een aantal vaten opgeslagen, elk met 50 liter benzine. Daaruit kan de tank van de terreinwagen worden (bij)gevuld. De wagen kan slechts één vat tegelijk meenemen. Of er nu een vat wordt meegenomen of niet, steeds is het benzine-verbruik 1 liter op 10 kilometer.

In het artikel 'Zo ver mogelijk de woestijn in' (Pythagoras 27-2) werd aangegeven hoe de patrouille 600 kilometer van de post af kan komen met twee vaten benzine. Zoals gezegd, was die afstand van 600 kilometer voor verbetering vatbaar. Door het wat handiger aan te pakken kan de patrouille $733\frac{1}{3}$ kilometer ver komen. Kijk maar.

*vul de tank uit vat 1
laad vat 2
50 km vooruit
zet vat 2 neer
terug naar de post
vul de tank uit vat 1
laad vat 1
100 km vooruit
zet vat 1 neer
vul de tank uit vat 1
50 km terug naar vat 2
laad vat 2
50 km vooruit naar vat 1
vul de tank uit vat 1
 $33\frac{1}{3}$ km vooruit*

*zet vat 2 neer
 $33\frac{1}{3}$ km terug naar vat 1
laad vat 1
 $33\frac{1}{3}$ km vooruit naar vat 2
...*

Op dit punt aangekomen is de terreinwagen $133\frac{1}{3}$ km van de post verwijderd. De tank is leeg, vat 1 bevat nog 10 liter benzine en vat 2 is nog helemaal vol.

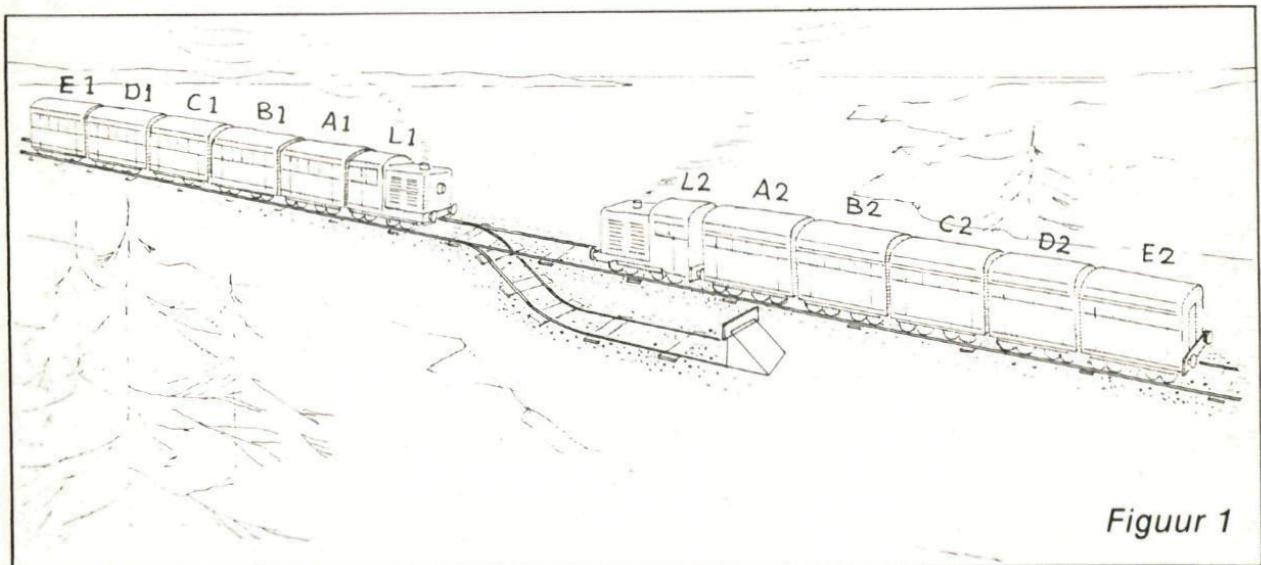
De tank wordt gevuld uit vat 1. Vat 2 wordt opgeladen en meegenomen, terwijl vat 1 leeg wordt achtergelaten. Met de 10 liter benzine in de tank en de 50 liter benzine in vat 2 kan de wagen dan nog 600 km afleggen. In totaal kan de wagen dus $733\frac{1}{3}$ km van de post af komen.

Voor de inzittenden is het te hopen dat op die plek een tweede post is met enkele vaten benzine. Anders zullen ze terug moeten lopen naar de post waar ze vandaan kwamen! $\square$

Rangeer-perikelen 3

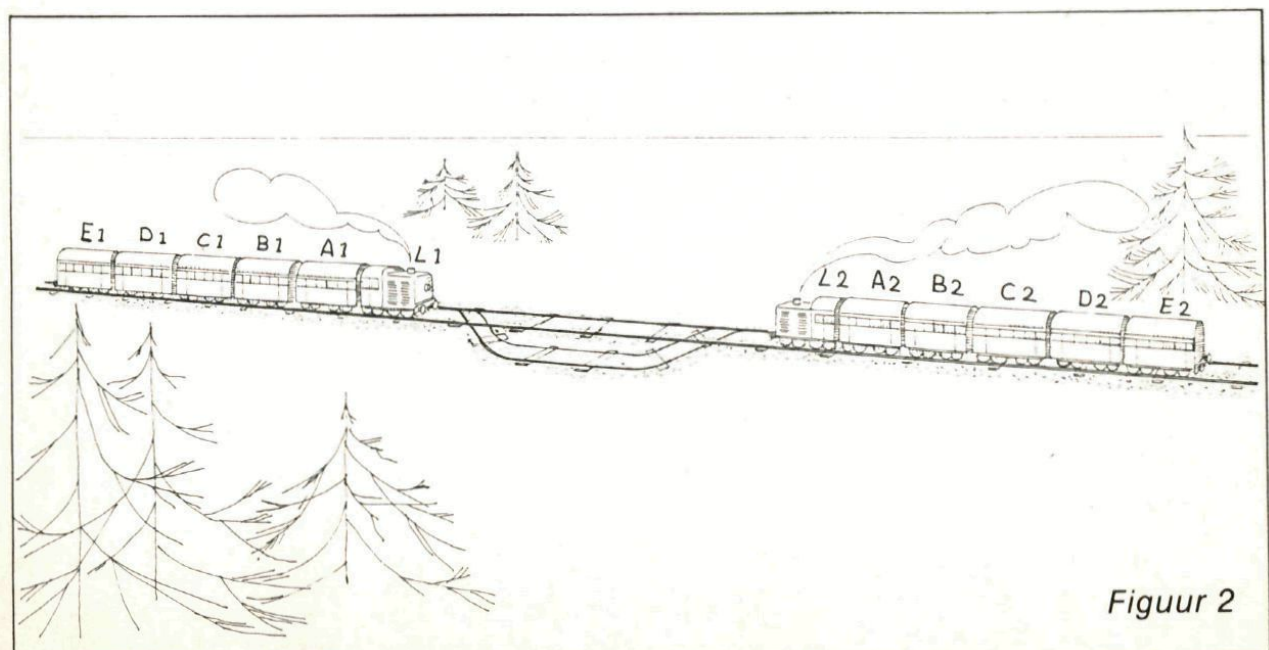
Twee locomotieven $L1$ en $L2$ die elk vijf wagons trekken, komen elkaar op een enkelspoor tegen. De machinist van $L1$ vindt dat $L2$ maar terug moet gaan, zodat hij zijn weg kan vervolgen. De machinist van $L2$ denkt daar niet over. Hij vindt juist dat $L1$ terug moet rijden.

Net op het moment dat de machinisten elkaar in de haren willen vliegen bedenkt één van hen dat er een stukje verderop een zijspoor is. Daar rijden ze heen, maar valt dat even tegen! Op het zijspoor is slechts plaats voor één wagon of één locomotief (figuur 1). Toch slagen ze er na heel wat heen en weer gerij in om elkaar te passeren. Hoe? Wat bepaalt de duur van het hele karwei?



Figuur 1

Als er een dubbelspoor is waarop slechts één wagon of één locomotief past, wordt het dan eenvoudiger voor de machinisten om elkaar te passeren (figuur 2)? Wat bepaalt nu de duur van het hele karwei? □



Figuur 2

Nieuw wereldrecord ontbinden van grote getallen

$$(6^{131} - 1) / (5.263.3931.6551) =$$

25590419435661766569669195465155692745666184377627375121409756912567458209805153386642764777 =

1284827442574221936870974393373403 *

19917397922626842334449833677404096613537638684348856178059

Medewerkers van het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) te Amsterdam hebben op de gloednieuwe supercomputer van het Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium (NLR) in de Noordoostpolder een nieuw wereldrecord 'ontbinden van moeilijke getallen' gevestigd. Op 25 april realiseerden *Herman te Riele*, *Walter Lioen* en *Dik Winter* op de computer, een Japanse NEC SX-2, na 95 uur rekenen bovenstaande ontbinding van een getal van 92 cijfers in twee priemfactoren (getallen die alleen door één en zichzelf deelbaar zijn). Eerdere pogingen door onderzoekers van de computerfirma DEC in Californië om dit geval te 'kraken' faalden, ondanks een rekenpartij van meer dan 25.000 uur op een aantal gekoppelde VAX-computers.

Het vorige record werd nog maar enkele weken geleden gevestigd door de Amerikaan Robert Silverman van 'The MITRE Corporation'. Hij ontbond na 15.000 uur rekenen op een parallel netwerk van 24 SUN-3 werkstations een soortgelijk getal van 90 cijfers. Het nieuwe record bevestigt de berichten dat de Japanse NEC SX-2 thans de snelste computer ter wereld is, voor de berekening van dit record 5 tot 10 maal zo snel als de snelste Amerikaanse supercomputers, zoals de CRAY X/MP en CDC CYBER 205.

Deze recordjacht dient niet alleen als maat voor de rekenkracht van de meest geavanceerde computers. Sinds enkele jaren worden produkten van grote priemgetallen gebruikt bij het coderen en decoderen van vertrouwelijke boodschappen (door militairen, banken, e.d.). Omdat het praktisch onmogelijk is om uit het produkt de samenstellende priemgetallen terug te vinden, wordt de versleuteling als zeer veilig beschouwd. 'Veilige' getallen moeten dus in ieder geval veel groter zijn dan het nieuwe record.

De nieuwe supercomputer van het NLR werd op 6 april officieel in gebruik genomen door minister Smit-Kroes van Verkeer en Waterstaat. Om dit te vieren stelde het NLR een gratis rekenweek in, onder meer om de computer onder extreem zware rekenomstandigheden te testen. Een belangrijk deel van het voor het nieuwe wereldrecord benodigde rekenwerk werd in deze week verricht.

□

Hoofdcijfers en kleine cijfers

Iedereen kent wel het verschil tussen *hoofdletters* en *kleine letters*. Het eerste woord van een zin schrijven we steeds met een hoofdletter. En in gedrukte, of in drukletters geschreven tekst wordt soms een heel woord of een hele titel-zin in HOOFDLETTERS geschreven.

Maar heb je wel eens opgemerkt dat er ook bij *cijfers* een onderscheid bestaat dat wel wat lijkt op het onderscheid tussen hoofd- en kleine letters? Als je naar de bijgaande plaatjes kijkt, zie je al wel wat we bedoelen.

1234567890

'Tabelcijfers'
(tweelijnstype)

1234567890

'Mediaevalcijfers'
(vierlijnstype)

Hoofdcijfers

Bij het meest gebruikelijke cijfer-soort hebben alle symbolen dezelfde hoogte. Net als de hoofdletters (behalve bij enkele lettertypes de J en de Q), staan ze allemaal met hun onderkant op de regel. En de hoogte van die hoofdcijfers is gelijk aan die van de hoofdletters.

Mediaeval-cijfers

Tegenwoordig verreweg in de minderheid is het type *kleine cijfers*. In het verleden is dit echter eeuwenlang het meest gebruikte soort geweest.

De symbolen voor 'nul', 'één' en 'twee' zijn in hoogte even groot als de kleine letters a, c, e, m, n, o, r, De symbolen voor 'drie', 'vier', 'vijf', 'zeven' en 'negen' hebben een staart onder de regel (zoals de staartletters g, j, q, y). En de 'zes' en de 'acht' steken boven de andere uit, net als de stokletters b, d, f, h,

Als je er speciaal op let zul je merken dat je dit oude model best nog wel eens tegenkomt. Drukkers noemen dit type: 'mediaeval' (spreek uit: mee-die-ee-vál op z'n Frans) wat letterlijk 'middel-eeuws' betekent.

Silver Coins.

Troy.	Paris.	Colonia.	Holland.
429 68	523.2	520.2	581.
85.935	104.65	104.	116.2
1718.7	2093.	2080.8	2324.1
1639.38	1996.4	1984.7	2216.
1638.5	1995.3	1983.7	2215.7
1718.7	2093.	2080.8	2324.1
1678.6	2044.2	2032.2	2269.9
81.961	99.8	99.	110.82
1804.6	2197.6	2184.8	2440.3
1720.4	2095.1	2082.8	2326.4

(uit de *Encyclopaedia Britannica*,
1e druk, 1771)

Dit betaalt u voor een Meer Man's kaart

2e klas

2 personen f 74,-	Per persoon f 37,-
3 personen f 93,-	Per persoon f 31,-
4 personen f 104,-	Per persoon f 26,-
5 personen f 115,-	Per persoon f 23,-
6 personen f 126,-	Per persoon f 21,-

(uit de DALUREN-folder van de NS)

Kosten per persoon (2e klas)

2 personen f 37,-	p.p.
3 personen f 31,-	p.p.
4 personen f 26,-	p.p.
5 personen f 23,-	p.p.
6 personen f 21,-	p.p.

(uit de JONGEREN-folder van de NS)

De komende periodes voor Tienertoer zijn:

Paas Tienertoer: 25 maart tot en met 10 april 1988,

Zomer Tienertoer: juni, juli en augustus 1988,

Herfst Tienertoer: 14 tot en met 23 oktober 1988,

Kerst Tienertoer: 16 december 1988 tot en met 1 januari 1989,

Paas Tienertoer 1989: 17 maart tot en met 2 april 1989.

(ook uit de JONGEREN-folder)

Let er eens op wat voor cijfervorm je zelf gebruikt bij het schrijven. In het standaardmodel mogen er geen stokken of staarten uitsteken. Als je toch staarten wilt maken, zou je eigenlijk consequent voor alle cijfers het klassieke model moeten gebruiken.

P.S. Wij kennen de 'romeinse' cijfers bijna alleen als hoofdletters: I, V, X, etc. Maar in engelse taalige boeken worden ook vaak de kleine letters i, v, x, ... gebruikt. □

- (i) $(x + 1)(x + 2)$
- (iii) $(x - 4)(x - 7)$
- (v) $(2x + 3)(3x + 2)$
- (vii) $(x + 4)(3x - 1)$
- (ix) $(3x + 4)(x - 2)$
- (xi) $(5 - 4t)(5 + 4t)$

- (ii) $(x - 2)(x + 3)$
- (iv) $(2x + 1)(x + 2)$
- (vi) $(5x - 7)(6x + 11)$
- (viii) $(-2x + 1)(x - 7)$
- (x) $(2 - 3t)(3t + 1)$
- (xii) $(2 - t)(2t + 5)$

Romeinse kleine cijfers

Spelen met ringen: oplossing

De oppervlakte van het gebied dat door de vijf ringen wordt ingesloten, is ongeveer $0,5558R^2$. □

tournoysveld 67
3443 er woerden
gentsestr 161-a
2587 hn s gravenhage
groenekruisstraat 38
4671 ek dinteloord

van girorekening

450984



van girorekening

2856477

van girorekening

1452258

5°

Min.	log sin	D. 100'	log tg	D.C. 100"	log cot	log cos		
0	8,94030		8,94195		11,05805	9,99834	60	
		240		242				242 240 238
1	8,94174		8,94340		11,05660	9,99833	59	10 24.2 24.0 23.8
2	8,94317	238	8,94485	242	11,05515	9,99832	58	20 48.4 48.0 47.6
3	8,94461	240	8,94630	242	11,05370	9,99831	57	30 72.6 72.0 71.4
4	8,94603	237	8,94773	238	11,05227	9,99830	56	40 96.8 96.0 95.2
5	8,94746	238	8,94917	240	11,05083	9,99829	55	50 121.0 120.0 119.0
		235		238				60 145.2 144.0 142.8
6	8,94887		8,95060		11,04940	9,99828	54	70 169.4 168.0 166.6
7	8,95029	237	8,95202	237	11,04798	9,99827	53	80 193.6 192.0 190.4
8	8,95170	235	8,95344	237	11,04656	9,99825	52	90 217.8 216.0 214.2
9	8,95310	233	8,95486	237	11,04514	9,99824	51	
10	8,95450	233	8,95627	235	11,04373	9,99823	50	237 235 233
		232		233				10 23.7 23.5 23.3
11	8,95589		8,95767		11,04233	9,99822	49	20 47.4 47.0 46.6
12	8,95728	232	8,95908	235	11,04092	9,99821	48	30 71.1 70.5 69.9
13	8,95867	232	8,96047	232	11,03953	9,99820	47	40 94.8 94.0 93.2
14	8,96005	230	8,96187	233	11,03813	9,99819	46	50 118.5 117.5 116.5
15	8,96143	230	8,96325	230	11,03675	9,99817	45	60 142.2 141.0 139.8
								70 165.9 164.5 163.1
								80 189.6 188.0 186.4
								90 213.3 211.5 209.7
								232 230 228
								10 23.2 23.0 22.8
								20 46.4 46.0 45.6
								30 69.6 69.0 68.4
								40 92.8 92.0 91.2
								50 116.0 115.0 114.0
								60 139.2 138.0 136.8
								70 162.4 161.0 159.6
								80 185.6 184.0 182.4
								90 208.8 207.0 205.2

Man en paard noemen

Een taal-kundig of een reken-kundig probleem?

Een boer en zijn paard zijn samen 56 jaar. De boer is nu tweemaal zo oud als het paard was toen de boer zo oud was als het paard nu is.

Hoe oud zijn boer en paard?

□

Rangeer-perikelen 3: oplossing

L1 gaat een klein stukje naar links. *L2* duwt al zijn wagons ver naar rechts. Daar wordt de hele trein volledig ontkoppeld, zodat er dan een losse locomotief en vijf losse wagons staan.

L2 gaat naar links tot iets voorbij de wissel en gaat het zijspoor op. *L1* in z'n geheel naar links, nadat wagon *A2* gekoppeld is. *L1* duwt wagon *A2* het zijspoor op, gaat iets terug en vervolgens helemaal naar rechts. In de tijd dat *L2* wagon *A2* van het zijspoor afhaalt, koppelt *L2* wagon *B2*. *L2* brengt *B2* naar het zijspoor en gaat weer helemaal naar rechts. *L2-A2* haalt *B2* weer van het zijspoor, enzovoort.

Na elkaar krijgen de wagons *C2*, *D2* en *E2* eenzelfde behandeling als *A2* en *B2*. Trein 1 kan volledig intact blijven.

Op dezelfde wijze kunnen twee locomotieven met $n1$ respectievelijk $n2$ wagons elkaar passeren. Het aantal van vijf wagons was dus tamelijk willekeurig.

Door trein 1 volledig te ontkoppelen lukt het niet. Ga maar na. Het aantal wagons $n2$ dat *L2* trekt is dus bepalend voor de duur van het karwei.

Bij het dubbelspoor wordt er in principe net zo gehandeld als bij het zijspoor. Trein 2 gaat dus weer ver genoeg naar rechts en wordt weer geheel ontkoppeld. Daarna gaat *L2* alleen het dubbelspoor op. *L1* kan dan met al zijn wagons naar rechts. *L2* rijdt het dubbelspoor af en blijft ver genoeg aan de linkerkant verder stilstaan. De machinist van *L2* kan dan zitten toekijken hoe *L1* één voor één zijn wagons naar hem toe duwt.

Op dezelfde manier als bij het zijspoor zet *L1* wagon *A2* op het dubbelspoor. *L2* hoeft *A2* daar niet af te halen, want in één beweging kan *L1* wagon *B2* ophalen en op het dubbelspoor plaatsen en *A2* naar *L2* duwen, enzovoort. Ga maar na. Trein 1 blijft weer volledig intact en doet nu zelfs al het werk.

Nu kan ook trein 1 volledig worden ontkoppeld, zodat *L2* al het werk zal moeten opknappen. Het probleem is namelijk volkomen symmetrisch.

De duur van het karwei wordt hier dus bepaald door het kleinste aantal wagons dat één van de locomotieven trekt. De locomotief met het minste aantal wagons moet steeds worden ontkoppeld om het karwei zo snel mogelijk te klaren. □

Slang uitlaten

Een man houdt tegen alle voorschriften in, een slang als huisdier. Hij tart de plaatselijke politie-verordening en laat het dier iedere ochtend uit. Hij neemt dan plaats bij de staart, en samen zetten ze zich in beweging. Na 40 m lopen is de man bij de kop aangeland. Hij draait zich om, wandelt tegen de kruiprichting van de slang in terug, en is na 24 m lopen weer bij het puntje van de staart. Opnieuw keert hij zich om en opgewekt vervolgen ze hun wandeling. *Vraag*: hoe lang is de slang? □

Geen miljonair, geld terug



Onder het motto 'Geen miljonair, geld terug' werd in april opgeroepen om aan de *Vereniging Het Nederlands Kanker Instituut* (NKI) voor een periode van tien jaar geld te lenen. Niet op een normale manier, maar via een zogenaamde renteloze premie-obligatielening. Degenen die geld uitlenen aan het NKI zien af van rente en krijgen na tien jaar gewoon het uitgeleende bedrag terug. In ruil daarvoor krijgen ze de kans om miljonair te worden. Vandaar dus dat motto.

Loterij

Bij een gewone loterij worden tegen een doorgaans gering bedrag een groot aantal loten verkocht. Van de opbrengst worden de te verloten prijzen betaald. Wat overblijft is meestal bestemd voor een goed doel.

Na de trekking zijn degenen die niets hebben gewonnen, hun geld kwijt. Er is geen sprake van dat ze hun lot in kunnen leveren en hun geld terug krijgen.

Obligatielening

Wanneer iemand wat geld over heeft, kan hij daar verschillende dingen mee doen. Hij kan dat bij voorbeeld op de bank zetten. In feite leent hij dat geld dan uit aan de bank. Zolang de bank het geld in leen heeft, betaalt ze daarover rente. In principe kan hij op elk gewenst moment zijn geld bij de bank opvragen.

Wanneer iemand wat geld over heeft, kan hij dat ook aan een bedrijf of instelling uitlenen. Hij krijgt dan een schuldbekentenis (*obligatie* genaamd) waarop precies is aangegeven tegen welke voorwaarden (o.a. het bedrag, de duur en de rente) het geld is uitgeleend. Als iemand eerder dan op de obligatie is vermeld zijn geld terug wil, kan hij die obligatie op de beurs proberen te verkopen. Iemand anders neemt de lening aan het bedrijf of de instelling dan dus over.

Combinatie

Om de onderzoeksafdeling van het NKI aan geld te helpen besloot een groep banken een lening uit te schrijven. Ieder die geld over had, kon voor een periode van tien jaar duizend gulden aan het NKI lenen. In ruil daarvoor kreeg hij van het NKI een obliga-



tie. Zo probeerde men voor 4 mei
maar liefst 275 duizend obligaties
aan de man te brengen.
Na tien jaar, dus in 1998, krijgt el-

ke bezitter van een obligatie zijn
duizend gulden weer terug. Over
de lening wordt dus geen rente
betaald. In plaats daarvan doen al-

le obligaties mee aan een loterij. Tien jaar lang wordt er elke maand een obligatie uitgeloot. De houder van de uitgelote obligatie ontvangt één miljoen gulden!

Een loterij zonder 'nieten', zoals de aktievoerders stelden. Wie niets heeft gewonnen, krijgt immers na afloop gewoon zijn geld terug. Of anders bekeken: Het NKI leent tien jaar lang 275 miljoen gulden tegen een jaarlijkse rente van 12 miljoen gulden.

Wat kost een 'lot'?

Een loterij zonder 'nieten' is wel wat te veel van het goede. In plaats van duizend gulden aan het NKI te lenen kan men dat bedrag ook tien jaar lang op de bank zetten. Als het een beetje mee zit, betaalt de bank daar dan een rente over van 6% per jaar. Tien jaar lang kan dus elk jaar $f\ 60,-$ aan rente bij de bank worden opgehaald. Zo bekeken kost een 'lot' $10 \times f\ 60,- = f\ 600,-$.

Wanneer de rente-opbrengst niet elk jaar wordt opgehaald, ben je zelfs 'duurder' uit. Want na een jaar staat er dan op de bank

$$1,06 \times f\ 1000,- = f\ 1060,-$$

Na twee jaar

$$1,06 \times (1,06 \times f\ 1000,-) = f\ 1123,60$$

Na drie jaar

...

En na tien jaar

$$(1,06)^{10} \times f\ 1000,- = f\ 1790,85$$

Zo bekeken kost een 'lot' $f\ 790,85$. Kortom meedoen aan de loterij-lening van het NKI 'kost' in die tien jaar $f\ 600,-$ tot $f\ 790,85$. Mits uiteraard de rente die de bank vergoedt, niet verandert.

Eén 'lot'?

Inderdaad, je krijgt — weliswaar in de vorm van een obligatie — slechts één lot. Er is ook maar sprake van één loterij. En er is zelfs ook maar één trekking. Daarbij worden 120 obligaties uitgeloot, waarvan de houders elk 1 miljoen gulden krijgen. (Een trekking *zonder* teruglegging, want wie eenmaal uitgeloot is, doet niet meer mee!) Alleen duurt die trekking wat langer dan gewoonlijk bij een loterij. In principe kunnen die 120 obligaties net zo goed de eerste maand al in één keer worden uitgeloot. Waarom gebeurt dat niet?

Kans

Wat is de kans dat een NKI-obligatie-houder miljonair wordt? Het antwoord is eenvoudig (zeker als je beseft dat er in feite maar één trekking is). De kans is 120 gedeeld door 275 000.

Omdat de trekking zo lang duurt, wil een obligatie-houder natuurlijk ook wel weten hoe groot elke maand opnieuw zijn kans is om miljonair te worden. De eerste maand is dat 1 gedeeld door 275 000. Of anders gezegd, er is een kans van 274 999 gedeeld door 275 000 om het *niet* te worden. Dit speelt de tweede maand een rol. De kans om dan miljonair te worden is

$$\left(\frac{274\ 999}{275\ 000} \right) \times \left(\frac{1}{274\ 999} \right) = \frac{1}{275\ 000}$$

Men moet namelijk behoren tot de 274 999 obligatie-houders die na de eerste maand over zijn geble-

GEEN MILJONAIR, GELD TERUG.

Nederlands Kanker Instituut

PREMIE OBLIGATIES 1988 PER 1998

Inschrijving bij alle banken en commissionairs
tot uiterlijk woensdag 4 mei a.s. 15.00 uur.

*Een advertentie-oproep om mee te doen met de renteloze premie-obligatie-
ning van het NKI. In de maand april waren dergelijke oproepen regelmatig in
de dagbladen te vinden.*

ven, terwijl er daar uit weer één
wordt getrokken.
Zo verder redenerend is de derde
maand de kans

$$\left(\frac{274\,998}{275\,000} \right) \times \left(\frac{1}{274\,998} \right) = \frac{1}{275\,000}$$

enzovoort.

Het totaal van die 120 'afzonderlij-
ke' kansen is uiteraard ook weer
een kans van 120 gedeeld door
275 000.

Miljonair?

Als een obligatie-houder tot de
120 gelukkigen behoort, is het
overigens nog maar de vraag of
hij werkelijk miljonair wordt.
Zo'n gelukkige krijgt namelijk
te maken met het bijzondere ta-
rief van de inkomstenbelasting.
Dat kan in Nederland variëren
tussen de 24 en de 52 procent.
Ga dus maar eens na wat ie-
mand zo ongeveer over kan
houden.

Opbrengst

Wat elke obligatie-houder af-

zonderlijk met zijn duizend gul-
den had kunnen doen, doet het
NKI met al die 275 000 dui-
zendjes tegelijk. Het NKI leent
dat bedrag uit en ontvangt
daarover rente.

Het grootste deel, 240 miljoen
gulden, wordt uitgeleend aan de
Nederlandse Staat. Die betaalt
daar 5 procent rente per jaar
over. Dat wil zeggen twaalf mil-
joen gulden per jaar. Precies het
bedrag dat jaarlijks aan de
twaalf uitgelote obligatie-hou-
ders moet worden betaald.
24 miljoen gulden zet het NKI
op de bank. Zeg tegen een rente
van 6 procent per jaar. Dat
brengt jaarlijks dus 1,44 mil-
joen gulden aan rente op. Die
rente-opbrengst wordt jaarlijks
gebruikt om het onderzoek van
het NKI te bekostigen.
Van de rente-opbrengst van de
overige 11 miljoen gulden wor-
den de kosten betaald, zoals de
advertenties, notarissen, druk-
ken van de obligaties, enzo-
voort.



Uiteraard kost het onderzoek van het NKI véél meer dan 1,44 miljoen gulden per jaar. En wel 80 miljoen gulden per jaar. Dat wordt betaald door de Nederlandse Staat. Maar door de bezuinigingen van de regering is dat 1,4 miljoen gulden minder geworden. En dat tekort probeert het NKI nu dus aan te vullen via een loterij-lening.

Niet nieuw

Op zich is zo'n loterij-lening niet

nieuw. In de jaren vijftig was het nog vrij gebruikelijk om er een uit te schrijven. Aan het einde van de jaren vijftig werd de loterij-lening echter onder de wet op kansspelen gebracht. Wie er een uit wil schrijven moet toestemming hebben van de ministeries van Justitie en Financiën. Die geven alleen maar — zij het moeizaam — vergunning als de opbrengst is bestemd voor een goed doel. En dat het onderzoek van het NKI een goed doel is, staat natuurlijk buiten kijf!

Bovendien pikt de Nederlandse Staat in dit geval nog een (niet te verwaarlozen) graantje mee. Die leent immers tien jaar lang een bedrag van 240 miljoen gulden tegen 5 procent per jaar. In andere gevallen zou de Nederlandse Staat daar toch al gauw een rente van 6 procent over moeten betalen. □

Kruis-tal-puzzels: oplossingen

Kruis-tal-puzzel II

Pythagoras 27-3 bladzijde 8

¹ 5	² 2	0		³ 1	⁴ 8
⁵ 5	3		⁶ 7	3	5
	⁷ 1	⁸ 2	1		8
⁹ 7		¹⁰ 8	3	¹¹ 4	
¹² 9	¹³ 6	6		¹⁴ 1	¹⁵ 1
¹⁶ 2	6		¹⁷ 5	8	3

Kruis-tal-puzzel III

Pythagoras 27-4 bladzijde 7

¹ 2	² 8		³ 1
	⁴ 5	⁵ 5	9
⁶ 7	8	4	
6		⁷ 4	7

Een juiste strategie?

1913-1988



N.K.I.
75 JAAR

Heb je het artikel 'Geen miljonair, geld terug' al gelezen? Ja? Dan volgen hier nog enkele bespiegelingen.

Ongeveer halverwege het artikel werd gevraagd waarom niet de eerste maand al de 120 obligaties worden uitgeloot waarvan de houders elk 1 miljoen gulden ontvangen. Het antwoord daarop wordt min of meer gegeven in de tweede helft van het artikel.

De 120 obligaties direct in de eerste maand uitloten betekent ook de eerste maand al 120 miljoen gulden betalen. En dat geld heeft men dan nog niet.

Ja, er is wel 275 miljoen gulden geleend, maar het is niet verstandig om het daar van te doen. Het zou net aan kunnen, als de overgebleven 155 miljoen gulden tegen 6 procent per jaar kan worden uitgeleend en de rente niet tussentijds wordt opgenomen. (Zal de Nederlandse Staat daarmee accoord gaan?) Na tien jaar is die 155 miljoen gulden dan uitgegroeid tot ongeveer 277,6 miljoen gulden (Ga na). Na terugbetaling van de obligaties blijft er dan nog ongeveer 2,6 miljoen gulden over. En men mag blij zijn als daar de kosten van kunnen worden betaald.

Kortom, het NKI had zich in dat geval de moeite kunnen besparen.

Bovendien is bij volledige uitloting in de eerste maand de spanning al snel weg. En dat is natuurlijk niet leuk. Nu kan ieder die meedoet, tot het laatst toe nog hopen dat hij of zij tot die 120 gelukkigen behoort.

Niet op het laatst

Deze laatste overweging verklaart waarschijnlijk ook waarom er niet tot de allerlaatste maand wordt gewacht met uitloten. Er gebeurt te lang niets. Ook niet erg opwekkend. Afgezien nog van het feit dat elke obligatiehouder vermoedelijk zal denken: Als ik al miljonair word, dan hoe eerder, hoe liever.

Maar voor het NKI zou wachten tot de allerlaatste maand wel zo voordelig zijn.

Wat zou wachten tot de laatste maand met uitloten het NKI extra opleveren? Ga nog maar even na wat er met die geleende 275 miljoen gulden wordt gedaan.

Goedgeefse gokkers gezocht

Van onze verslaggeefster
AMSTERDAM — Vorige week leek het Nederlandse televisievolk vol van liefdadigheid: Herman van Veen deed een beroep op de goedgevigheid ten behoeve van leukemiepatiëntjes; Ivo Niehe vroeg in een gala-uitzending aandacht en geld voor hartpatiëntjes; in de Ster-reclame riep een verpleegster op loten te kopen ten behoeve van het Emma Ziekenhuis; in krantenadvertenties een rebus om het autistische kind te steunen.

Misschien was het allemaal wat teveel en is daarom de opbrengst van een premie-obligatielening waarmee het Nederlands Kanker Instituut (NKI) wordt gesteund, tegengevallen. Slechts 75 procent van de obligaties is aan de man gebracht.

Figuur 1. Berichtgeving in de Volkskrant enkele dagen na het aflopen van de gestelde verkoop-termijn.

Met de rente-opbrengst van 24 miljoen gulden moet jaarlijks het tekort voor het onderzoek worden aangevuld. Daar valt niet aan te tornen.

Met de rente-opbrengst van 11 miljoen gulden moeten de kosten worden betaald. Valt ook al nauwelijks aan te tornen.

Resteert die 240 miljoen gulden die aan de Staat wordt uitgeleend.

Nederlanders kopen volgens Kooijman iedere zes weken voor 25 miljoen staatsloten. Verder geven ze jaarlijks zeker 600 miljoen, wellicht zelfs 800 miljoen, uit aan buitenlandse loten. Die geldstroom naar het buitenland bracht Kooijman op het idee. In Duitsland bijvoorbeeld zijn fiks hogere prijzen te verdienen dan in de nederlandse lotto, toto en staatsloterij. Dat trekt kennelijk.

Met die gegevens in zijn achterhoofd voorzag Kooijman een grote belangstelling van particulieren voor een premielening met een maandelijksse prijs van een miljoen. En dan steunen de mensen met zo'n premieobligatie ook nog eens het onderzoek naar kanker, dat kon dus niet missen in zijn optiek.

Figuur 2. Een ander gedeelte uit het bericht van figuur 1.

Niet uitlenen aan de Staat betekent waarschijnlijk geen toestemming voor de loterij-lening. Dus daar kan het NKI niet onderuit.

Maar... met die 12 miljoen gulden die deze lening jaarlijks opbrengt, kan wel iets worden gedaan. Die kan jaarlijks op de bank worden gezet. Zeg maar weer tegen een rente van 6 procent per jaar.

De 12 miljoen gulden die de Staat na het eerste jaar betaalt, kan zo nog negen jaar rente over rente opleveren. Dit groeit dus uit tot... De 12 miljoen gulden die de Staat na het tweede jaar betaalt, kan nog acht jaar rente over rente opleveren. Dit groeit uit tot... Enzovoort.

Extra opbrengsten voor het NKI... Reken maar uit!

De grootste gok

Zo'n actie als de loterij-lening van het NKI slaagt natuurlijk alleen maar als die 275 000 obligaties aan de man worden gebracht. Het starten van zo'n actie is dus op zich al een gok. Alles kan nog zo mooi worden uitgedacht en door-gerekend, je kunt het nodige ver-maak inbouwen, enzovoort. Maar uiteindelijk blijf je afhankelijk van de goedgevigheid en de goklust van het publiek. En... het tijdstip waarop de actie wordt gevoerd (figuur 1). Dat zijn factoren die zich moeilijk precies laten bere-kenen.

Natuurlijk is men niet over één nacht ijs gegaan. Er is echt wel gekeken of er een markt was voor

Waarom blijven er voorlopig dan toch nog voor 65 miljoen gulden obli-gaties op de plank liggen bij de banken die de emissie ondersteunden? Kooij-man: „Het heeft mij ook zeer verbaasd. De lening leek overtekend te worden. Misschien dat beleggers zich er daar-door van hebben laten weerhouden om in te schrijven.”

De banken en Kooijman hopen de stukken alsnog te kunnen verkopen

Figuur 3. Nog een gedeelte uit het bericht van figuur 1.

die obligaties (figuur 2). En als het achteraf helaas tegenvalt, is het moeilijk om daar steekhouden-de argumenten voor aan te geven (figuur 3). □

Slang uitlaten: oplossing

In de tijd tussen twee momenten dat de man juist bij het staartpuntje van z'n slang is, loopt de man heen en weer $40 + 24 = 64$ m en kruipt de slang $40 - 24 = 16$ m. De man loopt dus vier keer zo hard als de slang.

Tijdens de eerste 40 meter van de man, is de slang maar 10 m vooruit gekomen. En dus is de slang zelf 30 m lang. □

Man en paard noemen: oplossing

Met behulp van het leeftijden-schema (hieronder) zijn de taal/kundige gegevens uit de opgave, te schrijven als een drietal wiskundige vergelijkingen:

	nu	toen
boer	b	$b-x$
paard	p	$p-x$

'samen nu' : $b + p = 56$

'boer nu' : $b = 2 \times (p - x)$

'boer toen' : $b - x = p$

Oplossing : de boer is nu 32 en z'n paard 24 jaar. □

Pythagoras Olympiade



Nieuwe opgaven

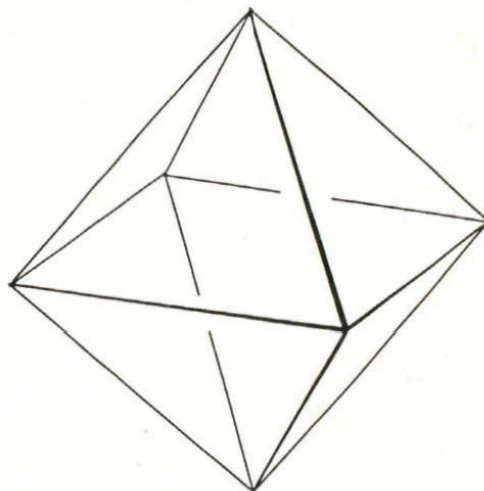
Oplossingen vóór 30 augustus insturen naar: *Pythagoras Olympiade*, Marinus de Jongstraat 12, 4904 PL OOSTERHOUT (NB). Vermeld op elk (éénzijdig beschreven) vel je naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas. Verder moet elke oplossing op een nieuw vel beginnen, want we corrigeren ze afzonderlijk. We bekijken alleen goed leesbare oplossingen die volledig zijn uitgewerkt, met verklarende tekst in goed lopende zinnen. Verdere informatie over de wedstrijd vind je in nummer 1 van deze jaargang op bladzijde 24.

PO 112

Voor $n \geq 6$ definiëren we $P(n)$ als de kans om met n dobbelstenen precies 6 zessen te gooien en $n-6$ vijven. Voor elke n is $P(n)$ maximaal?

PO 113

Een kist bevat massieve regelmatige achthoeken met een gewicht van 100 g per stuk. Elk zijvlak van elk achthoek is gekleurd met een van de acht kleuren rood, wit, blauw, oranje, geel, groen, paars en zwart, en bij elk achthoek zijn alle kleuren gebruikt. De kist bevat precies één exemplaar van elke mogelijke kleuring.



Hoeveel weegt de inhoud van de kist? (De figuur toont een 'draadmodel-tekening' van een regelmatig achthoek.)

Oplossingen en prijswinnaars van de opgaven PO 106 en 107

PO 106

In vierhoek $ABCD$ is driehoek BCD gelijkzijdig, terwijl hoek ADB een rechte hoek is. Verder is gegeven dat hoek BAC twee maal zo groot is als hoek CAD . Bereken hoek CAD .

Oplossing van Peter Deleu, klas 6, Kuurne (België) (iets vereenvoudigd): Noem de gevraagde hoek x . Er geldt $0 < x < 30^\circ$. De sinusregel toegepast

in de driehoeken ADC en ABC geeft $DC / \sin x = AC / \sin 150^\circ$ en $BC / \sin 2x = AC / \sin (150^\circ - 3x)$. Aangezien $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin (150^\circ - 3x) = \cos (60^\circ - 3x)$ volgt hieruit $\sin x \cos (60^\circ - 3x) = \frac{1}{2} \sin 2x = \sin x \cos x$ dus $\cos (60^\circ - 3x) = \cos x$. Dit geeft $60^\circ - 3x = x + k \cdot 360^\circ$ of $60^\circ - 3x = -x + k \cdot 360^\circ$. Wegens $0 < x < 30^\circ$ voldoet hieraan alleen $x = 15^\circ$.

Er waren 11 inzendingen, waarvan slechts 4 correct. De andere goede oplossingen kwamen van *Paul van Kampen*, 5 vwo, Terneuzen, *Raimondo Eggink*, 4 vwo, Wijchen en *Pieter Rijken*, 6 vwo, Nijmegen. Prijswinnaars: *Peter Deleu* en *Paul van Kampen*.

PO 107

Bepaal een natuurlijk getal dat in decimale schrijfwijze eindigt op precies zes nullen, en dat precies 1988 delers bezit, of bewijs dat zo'n getal niet bestaat.

(Een natuurlijk getal a heet een *deler* van het natuurlijke getal b indien b/a een natuurlijk getal is. Voorbeeld: de delers van 12 zijn 1, 2, 3, 4, 6, 12.)

Oplossing van *Gerton Lunter*, 5 vwo, Sneek:

Het getal $2^{70} \cdot 3 \cdot 5^6 \cdot 7$ eindigt op 6 nullen, want er zit precies 6 keer een factor 10 in. Elke deler van dit getal ontstaat door een paar factoren te schrappen. Er zijn 70 factoren 2, dus er zijn 71 manieren om factoren 2 te schrappen.

Zo zijn er ook 2 manieren om een 3 te schrappen, 7 manieren om een 5 te schrappen en 2 manieren om een 7 te schrappen (let op: 'niet schrappen' en 'alles schrappen' tellen we telkens ook mee!). Het totale aantal mogelijkheden om factoren te schrappen is dus $71 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 = 1988$, dus het getal heeft 1988 delers. Daarmee voldoet het aan de gestelde eisen.

Opmerking: *Bart Kindt* uit Zwalm (België) liet zien dat alle getallen die voldoen, van de vorm zijn: $2^a 5^b p^c q^d$, waarbij p en q willekeurige priemgetallen zijn ongelijk aan 2 en 5, en waarbij het viertal (a, b, c, d) gelijk moet zijn aan $(283, 6, 0, 0)$, $(6, 283, 0, 0)$, $(141, 6, 1, 0)$, $(6, 141, 1, 0)$, $(70, 6, 3, 0)$, $(6, 70, 3, 0)$, $(70, 6, 1, 1)$ of $(6, 70, 1, 1)$.

Het getal uit de oplossing van Gerton is het kleinste getal dat voldoet.

Er waren 13 inzendingen, waarvan 12 correct. Prijswinnaars: *Jasper Scholten*, 4 vwo, Heemskerk en *Marten Gerssen*, 5 vwo, Jisp. $\square$

Oplossing PO 103 Fout!

In nummer 2 van deze jaargang hebben we op de bladzijden 27 en 28 een oplossing gepubliceerd van opgave 103 van de Pythagoras Olympiade. Als reactie daarop stuurde *Herman Sallé* uit Bussum ons een uitgebreide brief met de mededeling dat die oplossing fout is! Hij blijkt volkomen gelijk te hebben. We trekken het boetekleed aan en biechten onze zonden eerlijk op, want ook in de wiskunde kun je van fouten leren.

Eerst nogmaals de opgave:

PO 103

Een functie f voldoet aan

$$f(x+y)f(x-y) = (f(x))^2(f(y))^2 \quad (1)$$

voor alle x en y . Verder is gegeven dat $f(-1) = 2$.

Bepaal $f\left(\frac{1987}{1988}\right)$.

Meer dan één oplossing

Het is niet zo moeilijk om te controleren dat de functie $f(x) = 2 \uparrow (x^2)$ (twee tot-de-macht x^2) aan alle eisen voldoet. Dus, zeiden veel inzenders, geldt dat $f(1987/1988) = 2 \uparrow (1987/1988)^2$. Maar bij de gepubliceerde oplossing hebben we opgemerkt dat het niet voldoende is om te constateren dat deze ene functie voldoet, want er zijn méér functies die aan alle eisen voldoen. Als voorbeeld gaven we de functie die nul is in alle irrationale punten, en gelijk is aan $2 \uparrow (x^2)$ voor alle rationale x . Je bent dus pas klaar, schreven we, als je bewezen hebt dat $f(1987/1988) = 2 \uparrow (1987/1988)^2$ voor *alle* functies geldt die aan de eisen voldoen.

Een tegenvoorbeeld

Welnu, Herman Sallé geeft een tegenvoorbeeld waaruit blijkt dat zo'n bewijs niet geleverd kan worden. Dat voorbeeld laat namelijk zien dat $f(1987/1988)$ door de voorwaarden van de opgave niet volledig vastligt! Hij definieert een functie die aan alle voorwaarden voldoet, maar waarvoor geldt dat $f(1987/1988) = 0$.

Hier is het functievoorschrift:

$f(x) = 2 \uparrow (x^2)$ als x geschreven kan worden in de vorm

$$x = \frac{n}{2^m} \text{ met } n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}.$$

$f(x) = 0$ voor alle andere x .

Omdat 1988 geen macht van twee is, geldt $f(1987/1988) = 0$. Verder geldt dat $f(-1) = 2$. En hoe zit het met formule (1) uit de opgave? Als minstens twee van de getallen $x, y, x+y, x-y$ van de vorm $n/2^m$ zijn, dan zijn de andere het ook, en dan klopt de formule. Is hoogstens één van de vier getallen van die vorm, dan staat er $0 = 0$, en dat klopt ook. Aan alle voorwaarden is dus voldaan.

Delen door nul

Maar hoe zit het dan met het 'bewijs' dat we geplaatst hebben? Dat moet ergens een fout bevatten. Waar? Het begin, waarin we lieten zien dat $f(0) = 1$ en $f(1) = 2$, is goed. Dan volgt een gedeelte waarin we met volledige inductie aantonen dat

$$f(n \cdot x) = f(x) \uparrow (n^2) \tag{2}$$

voor alle x en voor alle $n \in \mathbb{N}$. In dat bewijs zit de fout. Want de inductiestap berustte op de formule

$$f((k+1)x) = f(kx + x) = \frac{(f(kx))^2 (f(x))^2}{f(kx - x)}$$

en om die te mogen toepassen moet je veronderstellen dat *de noemer ongelijk aan nul is!* Dat hebben we achterwege gelaten.

In het begin van het bewijs kennen we alleen maar de functiewaarden $f(-1) = 2$, $f(0) = 1$ en $f(1) = 2$.

Die waarden zijn ongelijk aan nul, en met het gegeven inductiebewijs kun je dan aantonen dat formule (2) geldig is voor alle $n \in \mathbb{N}$ en voor $x = 1$ en $x = -1$. Dat betekent dat je bewezen hebt dat $f(n) = 2 \uparrow (n^2)$ voor alle *gehele* getallen n . Herman Sallé liet zien hoe je nu verder komt.

Kies in (1) $x = y$ en gebruik $f(0) = 1$, dan krijg je de formule

$$f(2x) = (f(x))^4.$$

Hierdoor ligt de waarde van f ook vast in alle punten die door (herhaald) halveren verkregen kunnen worden uit gehele x -waarden. Dat zijn precies de getallen van de vorm $x = n/2^m$. Voor deze x geldt dan weer

$$f(x) = 2 \uparrow (x^2).$$

De functie uit het tegenvoorbeeld toont aan dat voor *alle* andere x -waarden minstens twee verschillende functiewaarden kunnen optreden, namelijk

$$f(x) = 0 \text{ en } f(x) = 2 \uparrow (x^2).$$

Herman Sallé meldt nog dat voor *rationale* x dit de enige mogelijkheden zijn, en dat voor *irrationale* x *elke* niet negatieve waarde aangenomen kan worden. We laten het aan de lezer over om dit alles te verifiëren.

Prijzen

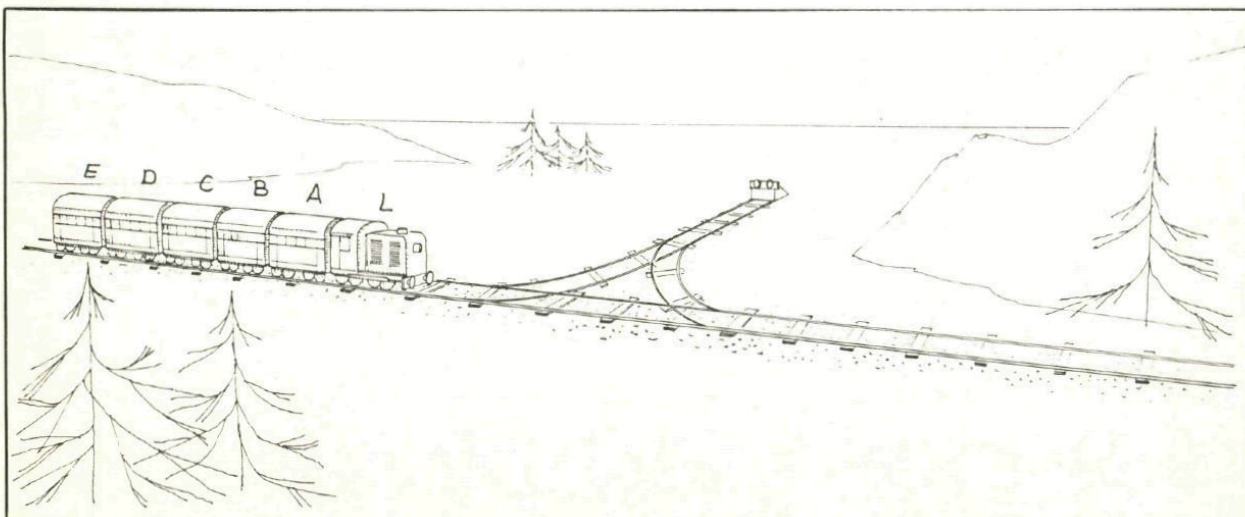
Tsja, en dan zitten we natuurlijk met de prijzen en de punten voor de Pythagoras Olympiade. Onze twee prijswinnaars, die overigens oplossingen instuurden die in grote lijnen gelijk waren, hoeven zich niet ongerust te maken: eens gegeven blijft gegeven. De grootste fout zit tenslotte bij de redactie, die een opgave opstelde die moeilijker was dan ze dacht, en oplossingen goedkeurde die niet vlekkeloos waren! □

Rangeer-perikelen 4

Op het zijspoor is plaats voor één wagon of de locomotief. Hoe kan de trein in z'n geheel worden omgekeerd, zodat de volgorde *LABCDE* wordt én elke wagon en de locomotief afzonderlijk zijn omgedraaid?

Na de voorgaande rangeer-problemen moet het niet moeilijk zijn om een oplossing te vinden. Probeer echter eens te kijken of dat écht de handigste oplossing is. Als je even bezig bent blijkt al snel dat het handiger kan, dan je zo op het eerste gezicht dacht.

Een oplossing komt in het volgende nummer. Of dat ook echt de handigste oplossing is horen we dan wel. □



Redactioneel

De figuur op de omslag is ontleend aan het boek 'FRACTALS, meetkundige figuren in eindeloze herhaling' van Hans Lauwerier. Daarmee wordt een antwoord gegeven op de vraag 'Waar gaat dat heen?' uit Pythagoras 27-1, bladzijde 22. Wij hopen daar in het volgende nummer meer aandacht aan te kunnen besteden. (Lukt dat niet, dan zeker in het eerste nummer van de volgende jaargang!)

In het volgende nummer ook een reactie op de passer-en-liniaal-constructies uit Pythagoras 27-3. Verder zullen we in het volgende nummer een regelmatig twaalfvlak en een regelmatig twintigvlak in elkaar proberen te vlechten. Daarmee doen we, zoals al vaker deze jaargang, een (speels) beroep op je ruimtelijk inzicht.

Oplossingen en de uitslag van de lang niet eenvoudige prijsvraag 'Gevraagd: een driehoeks-formule' (Pythagoras 27-3, bladzijde 18) kun je ook in het volgende nummer tegemoet zien. □

Uitgave onder toezicht van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Lay-out: Klaas Lakeman, Amsterdam.

Tekenwerk: Hans van Kuyk, Amsterdam.

Foto's en andere illustraties: Hans Lauwerier, Amsterdam (omslag);

Klaas Lakeman, Amsterdam (blz. 1, 2, 3, 4, 5); Jan van de Craats,

Oosterhout (NB) (blz. 6, 7, 8, 24); Peter Bata (blz. 10, 17, 27);

W. F. Kroeze, Den Haag (blz. 20).

© 1988 Redactie Pythagoras - ALLE RECHTEN VOORBEHOUDEN, NADruk OF WEERGAVE, GEHEEL OF GEDEELTELIJK, IN WELKE VORM DAN OOK, ZONDER TOESTEMMING VAN DE REDACTIE VERBODEN.

Pythagoras wiskunde tijdschrift voor jongeren

Redactie: Jan van de Craats, Klaas Lakeman, Hans de Rijk.

Medewerkers: Popke Bakker, Gerard Bäuerle, F. van der Blij,
Niels M. Buizert, Hans Lauwerier, Hessel Pot.

Redactiesecretariaat: Klaas Lakeman, Cornelis Krusemanstraat 60^{II},
1075 NS Amsterdam (NL).

Inhoud jaargang 27, nummer 5

Spelen met ringen / 1

Klaas Lakeman

Opnieuw de vlinderstelling / 5

Jan van de Craats

Zo ver de woestijn in / 9

Klaas Lakeman

Rangeer-perikelen 3 / 10, 15

Klaas Lakeman

Nieuw wereldrecord ontbinden
van grote getallen / 11

Hoofdcijfers en kleine
cijfers / 12

Hessel Pot

Man en paard noemen / 14, 23

Niels M. Buizert

Slang uitlaten / 15, 23

Niels M. Buizert

Geen miljonair, geld terug / 16

Klaas Lakeman

Kruis-tal-puzzels / 20

W.F. Kroeze

Een juiste strategie? / 21

Klaas Lakeman

Pythagoras Olympiade / 24

Jan van de Craats

Rangeer-perikelen 4 / 27

Klaas Lakeman

Redactioneel / 28

Pythagoras verschijnt zesmaal per
schooljaar; opgave van abonnementen
bij de uitgever (zie onder).

Abonnementen zijn doorlopend, tenzij
voor 1 september schriftelijk bij de uit-
gever is opgezegd.

Bij tussentijdse abonnering ontvangt

men ook de reeds verschenen num-
mers. Betaling per acceptgirokaart.

Tarieven*

Abonnement Pythagoras

Inclusief Archimedes

Losse nummers

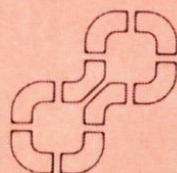
* Luchtpost-toeslag 15%

NLG/BEF

20,—/365

36,—/660

5,—/ 90



stichting ivio

Postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL).

educatieve uitgeverij - instituut voor buitenschools

onderwijs - wereldschool - AO-reeks - leerprojecten

Postgiro Nederland: 287934

Postcheck België: 000-0130850-94

Tel. 03200-76411