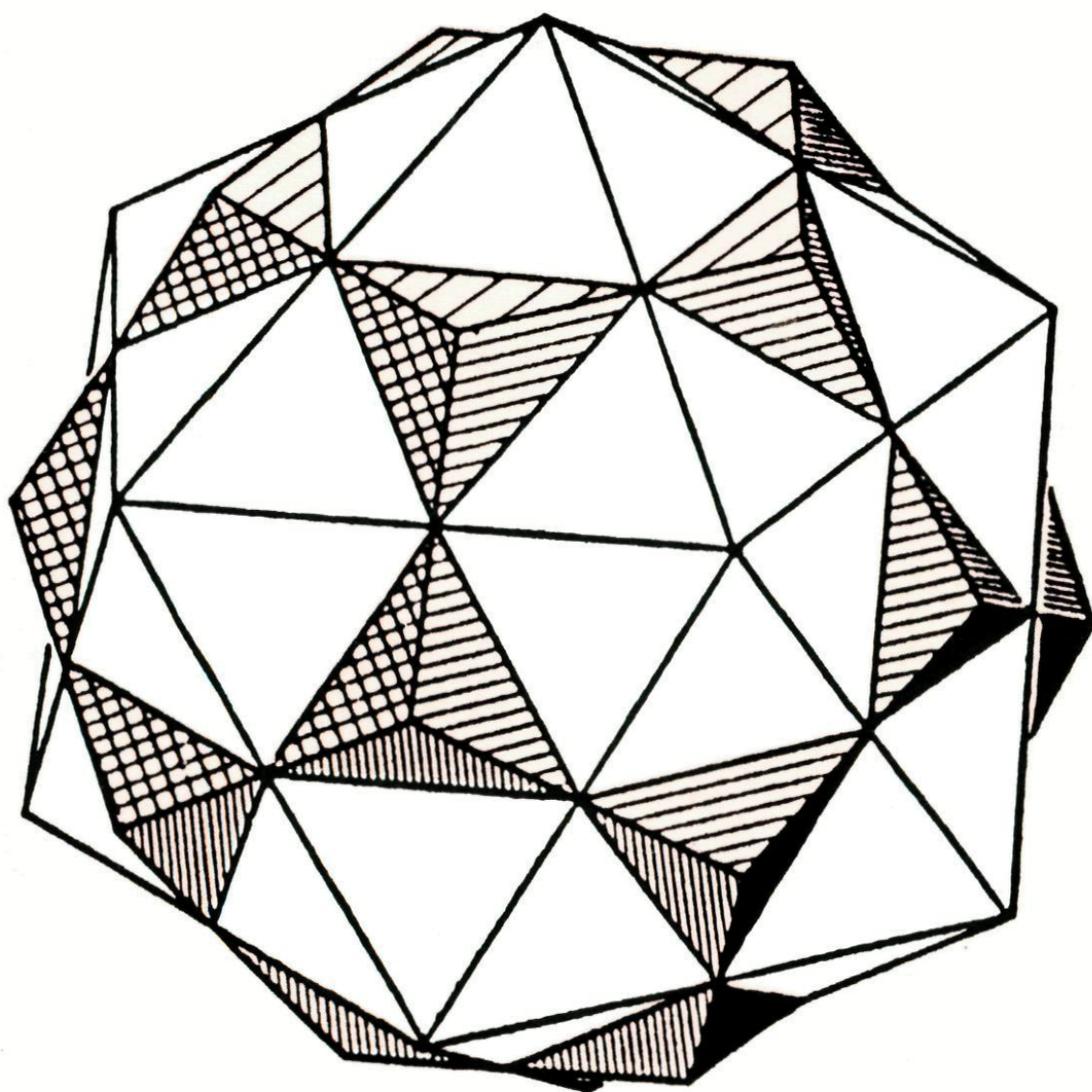
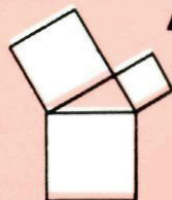




Pythagoras

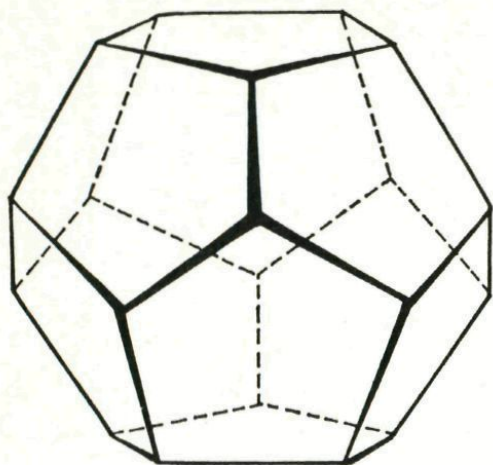


wiskunde tijdschrift voor jongeren

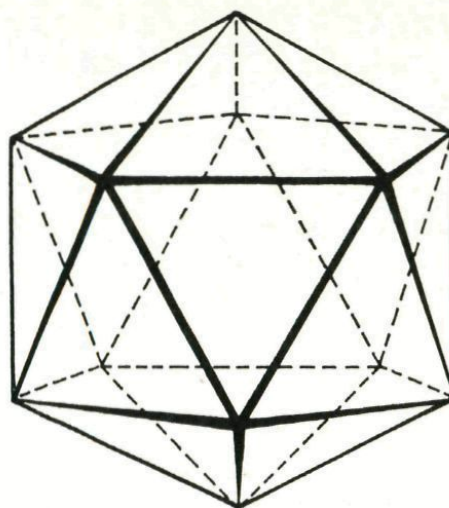
stichting ivio

jaargang 27
nummer 6
augustus 1988

De kip en het ei



Figuur 1. Dodekaëder.



Figuur 2. Icosaëder.

Aan het *regelmatig twaalfvlak* (dodekaëder) is deze jaargang al eerder aandacht besteed (Pythagoras 27-1 en 27-4). Het bezit 12 zijvlakken (allemaal regelmatige vijfhoeken), 20 hoekpunten en 30 ribben. Anders gezegd: $Z=12$, $H=20$ en $R=30$, met Z , H en R achtereenvolgens het aantal zijvlakken, hoekpunten en ribben. Tel alles nog maar eens rustig na in figuur 1.

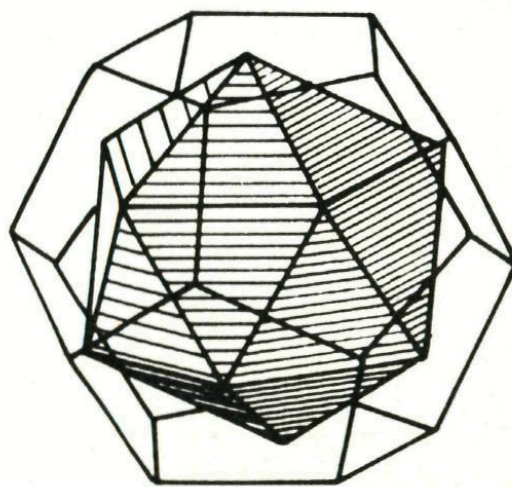
Een broertje (of zusje) van het regelmatig twaalfvlak is het *regelmatig twintigvlak* (icosaëder). Daarvoor geldt $Z=20$, $H=12$ en $R=30$. Tel ook dat maar weer rustig na in figuur 2.

De waarden die Z , H en R in beide veelvlakken aannemen, vertonen veel overeenkomst. In beide gevallen heeft R dezelfde waarde, terwijl de waarden van Z en H zijn verwisseld. Dit laatste is niet alleen een kwestie van waarden verwisselen, maar de hoekpunten en zijvlakken van beide veelvlakken kunnen ook écht worden verwisseld.

Van twaalf- naar twintigvlak

De overgang van een regelmatig twaalfvlak naar een regelmatig twintigvlak is aangegeven in figuur 3. Steeds worden de middelpunten van aangrenzende zijvlakken van het twaalfvlak met elkaar verbonden.

Omdat elk van de 12 vijfhoekige zijvlakken een middelpunt heeft, komen er 12 hoekpunten. Elk vijfhoekig zijvlak van het twaalfvlak gaat zo dus over in een hoekpunt van het regelmatig twintigvlak.



Figuur 3

Bij het twaalfvlak komen in ieder hoekpunt drie vijfhoeken samen. De middelpunten van de drie vijfhoeken die in een hoekpunt samenkomen, vormen een regelmatige driehoek. Het twaalfvlak heeft 20 hoekpunten, dus er zijn ook 20 van die regelmatige driehoeken.

Kortom, elk hoekpunt van het twaalfvlak gaat als het ware over in een zijvlak van het twintigvlak. Het hoekpunt van het twaalfvlak 'zweeft' in de tekening (figuur 3) boven het bijbehorende driehoekig zijvlak van het twintigvlak.

Dat het regelmatig twaalfvlak en het regelmatig twintigvlak even veel ribben hebben, is ook mooi in figuur 3 te zien. Steeds kruist een ribbe van het twaalfvlak over een ribbe van het twintigvlak.

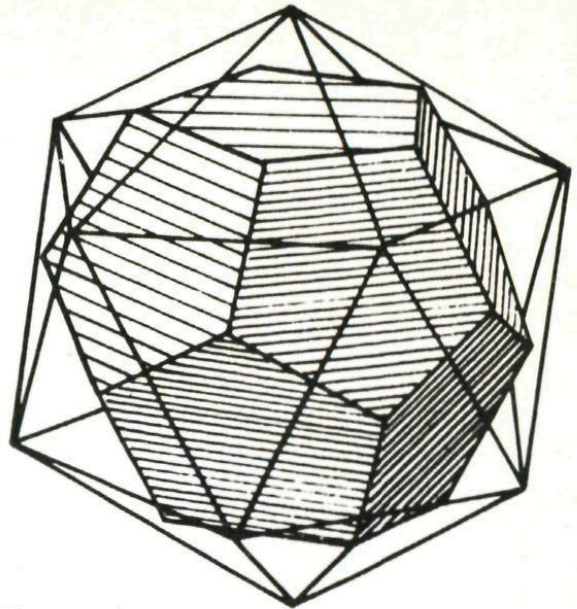
Terug

De overgang van het regelmatig twintigvlak naar het regelmatig twaalfvlak gaat op dezelfde manier. De middelpunten van twee aangrenzende driehoekige zijvlakken van het twintigvlak met elkaar verbinden, enzovoort. In figuur 4 is alles netjes weergegeven. Loop maar na.

Duaal

Het regelmatig twaalfvlak en het regelmatig twintigvlak verhouden zich tot elkaar dus min of meer als de kip en het ei. Uit de een komt de ander voort, en omgekeerd.

Wiskundig wordt dat wat anders gezegd. Men vat dat kip-en-ei-gedoe samen met het woordje *duaal*. Men zegt dan ook: Het regelmatig twaalfvlak en het regelmatig twintigvlak zijn *duaal*.



Figuur 4

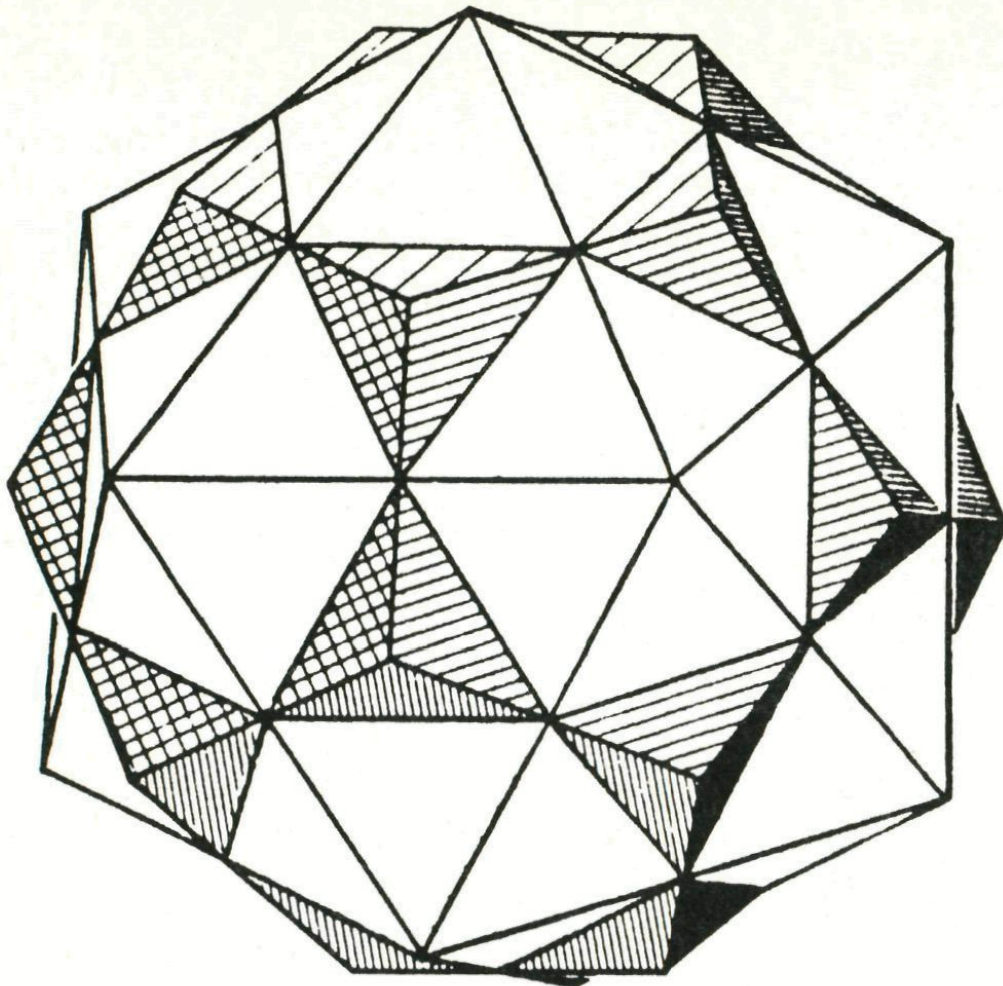
Even blazen

Stel dat ergens aan het regelmatig twintigvlak van figuur 3 een slangetje zit. En stel dat daarmee dat regelmatig twintigvlak wat kan worden opgeblazen. Neem ook aan dat tijdens het blazen het regelmatig twintigvlak overal gelijkmatig uitzet.

Nu maar blazen. Meteen komen bij alle 12 vijfhoekige zijvlakken van het twaalfvlak de hoekpunten van het twintigvlak naar buiten. Nog even blazen. Het twintigvlak wordt groter en groter. Op zeker moment zullen de ribben van het twintigvlak en het twaalfvlak elkaar niet meer kruisen, maar snijden. Dat is het sein om op te houden met blazen.

Nog even blazen

Stel dat met het regelmatig twaalfvlak van figuur 4 hetzelfde kan worden gedaan. Dus blazen maar weer, en stoppen zodra het twaalfvlak zó groot is dat de ribben van het twaalfvlak en het twintigvlak elkaar niet meer kruisen, maar snijden.



Figuur 5

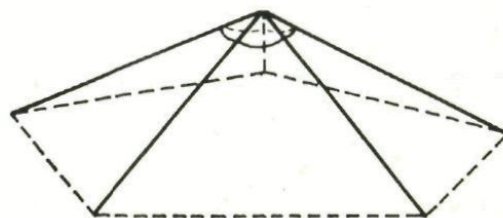
Ineengevlochten

Het resultaat van al dat geblaas is in beide gevallen hetzelfde: figuur 5. Een regelmatig twintigvlak en een regelmatig twaalfvlak keurig netjes ineengevlochten! Bekijk ook figuur 5 maar eens rustig. Alles van het twaalfvlak is gearceerd, geblokt of zwart. Alles van het twintigvlak is wit.

Piramiden

Wat na even kijken wel op moet vallen, is dat het veelvlak van figuur 5 ook op andere manieren is te verkrijgen. Hoe? Denk maar eens aan de daken en dodekaëders uit nummer 1 van deze jaargang. Ga uit van een regelmatig twintigvlak (figuur 2) en zet op elk zij-

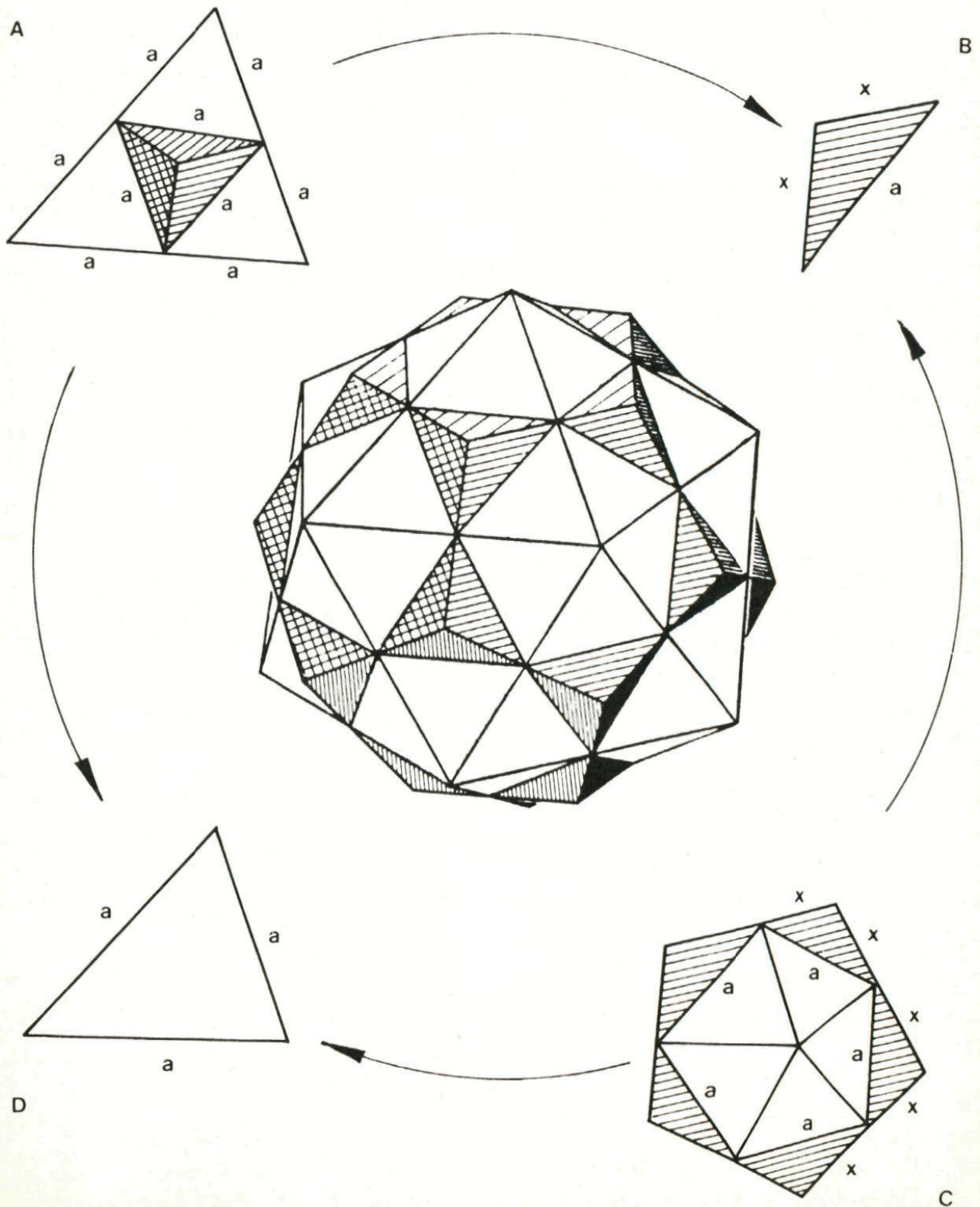
vlak een driezijdige piramide. In figuur 5 is zo'n piramide juist helemaal gearceerd en geblokt. Of... ga uit van een regelmatig twaalfvlak (figuur 1) en zet op elk vijfhoekig zijvlak een vijfzijdige piramide (figuur 6). In figuur 5 is zo'n vijfzijdige piramide helemaal wit. De afmetingen van beide soorten piramiden zijn in een apart stukje te vinden.



Figuur 6

Afmetingen van de piramiden

De afmetingen van de piramiden volgen uit bijgaande figuur. Daarin is nogmaals het ineengevlochten veelvlak opgenomen. Daaruit zijn telkens delen gelicht (A, B, C en D). Door alleen maar te kijken waar die vandaan komen, zijn de meeste afmetingen zo op te schrijven. Voor slechts één afmeting is echt wat rekenwerk nodig.



Driezijdige piramiden

Stel de lengte van de ribben van het regelmatig twintigvlak gelijk aan $2a$.

A is een zijvlak (met piramide) van het twintigvlak. Dat zijvlak is een gelijkzijdige driehoek; lengte van de zijden $2a$. Het grondvlak van een driezijdige piramide is een driehoek die wordt gevormd door de middens van de zijden van zo'n zijvlak. Dat grondvlak is dus ook een gelijkzijdige driehoek. De lengte van de zijden is a .

B is een opstaand zijvlak van een driezijdige piramide. Dit is een gelijkbenige driehoek met basis a en een tophoek van 108° . Immers die tophoek moet gelijk zijn aan de hoek van een zijvlak van het regelmatig twaalfvlak. En zo'n zijvlak is een regelmatige vijfhoek.

De halve tophoek in B is 54° . Er geldt

$$\sin 54^\circ = \frac{\frac{1}{2}a}{x}$$

of na even omwerken

$$x = \frac{\frac{1}{2}a}{\sin 54^\circ} \approx 0,618 a$$

Vijfzijdige piramiden

C is een zijvlak (met vijfzijdige piramide) van het regelmatig twaalfvlak. De lengte van de zijden hiervan volgt uit B. Ze hebben lengte $2x$ dus ongeveer $1,236 a$.

Door A, B en C met elkaar in verband te brengen wordt duidelijk dat het grondvlak van een vijfzijdige piramide een regelmatige vijfhoek is met a als lengte van de zijden.

D is een opstaand zijvlak van een vijfzijdige piramide. Dit is ook terug te vinden in A. Zo'n opstaand zijvlak is dus een gelijkzijdige driehoek met zijden a . □

Weer kip en ei

Ho, maar wacht eens even. Dit geeft een andere mogelijkheid om van een regelmatig twaalfvlak over te gaan naar een regelmatig twintigvlak, en omgekeerd.

Eerst maar weer van twaalf- naar twintigvlak. Zet op elk zijvlak van een regelmatig twaalfvlak (figuur 1) een vijfzijdige piramide, zodat het veelvlak van figuur 5 ontstaat. Snij daar vervolgens 20 keer een driezijdige piramide van af. Resultaat: het volledig 'witte' regelmatig twintigvlak.

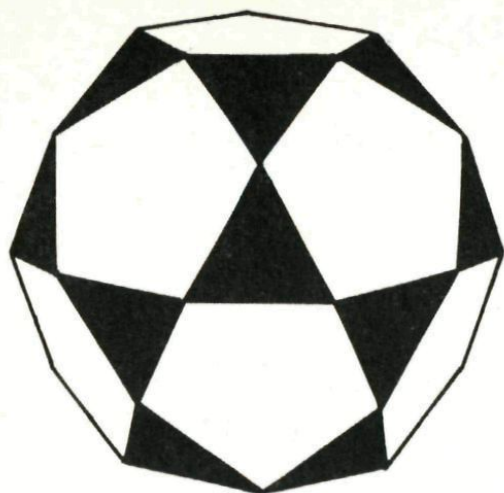
Nu nog van twintig- naar twaalfvlak. Dat gaat op dezelfde manier. Zet eerst op een regelmatig twintigvlak (figuur 2) driezijdige pira-

miden, zodat het veelvlak van figuur 5 wordt verkregen. Snij daar nu 12 vijfzijdige piramiden van af. Resultaat: het volledig 'gearceerde, geblokte en zwarte' regelmatig twaalfvlak.

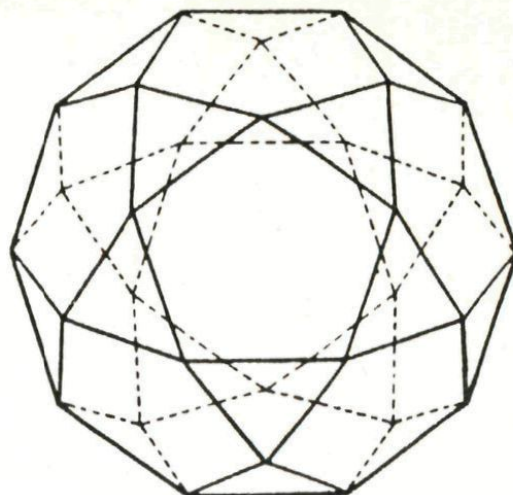
Alle piramiden weg

Het ligt voor de hand om eens te gaan kijken wat er van het veelvlak van figuur 5 overblijft als alle piramiden er af worden gesneden. Dat is een veelvlak opgebouwd uit de grondvlakken van die piramiden (figuur 7). Dat zijn 12 regelmatige vijfhoeken en 20 regelmatige driehoeken.

In elk van de 30 hoekpunten komen steeds twee driehoeken en twee vijfhoeken samen. Alle 60



Figuur 7. Icosidodekaëder.



Figuur 8

ribben zijn even lang. Voor zo ver dat laatste niet meteen duidelijk is, volgt het uit de berekeningen van de afmetingen van de piramiden!

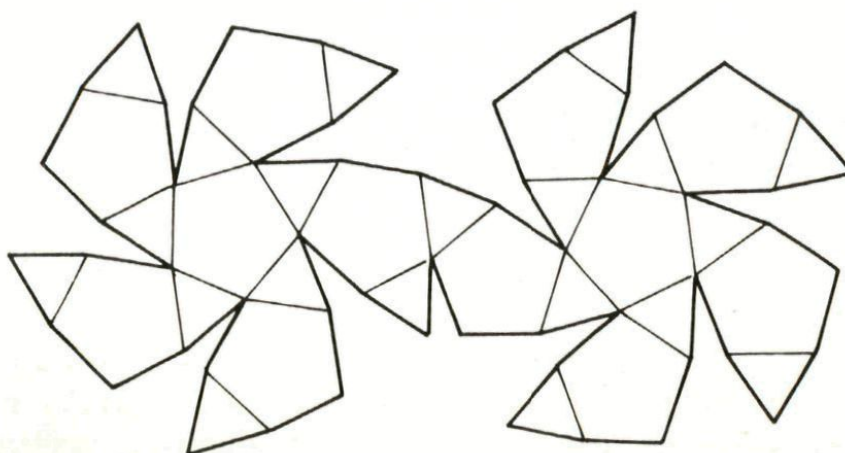
Dit veelvlak is de *icosidodekaëder*. Denk maar aan icoesaëder en dodekaëder! In figuur 8 is de *icosidodekaëder* in 'doorzicht' weergegeven. Dat maakt het mogelijk om alles nog eens rustig na te tellen: $Z=32$ (op te splitsen in $Z_3=20$ en $Z_5=12$), $H=30$ en $R=60$.

Voor de volledigheid ten slotte nog een uitslag of netwerk (figuur 9) dat als uitgangspunt kan dienen om zelf een icosidodekaëder te maken.

Ruiten dertigvlak

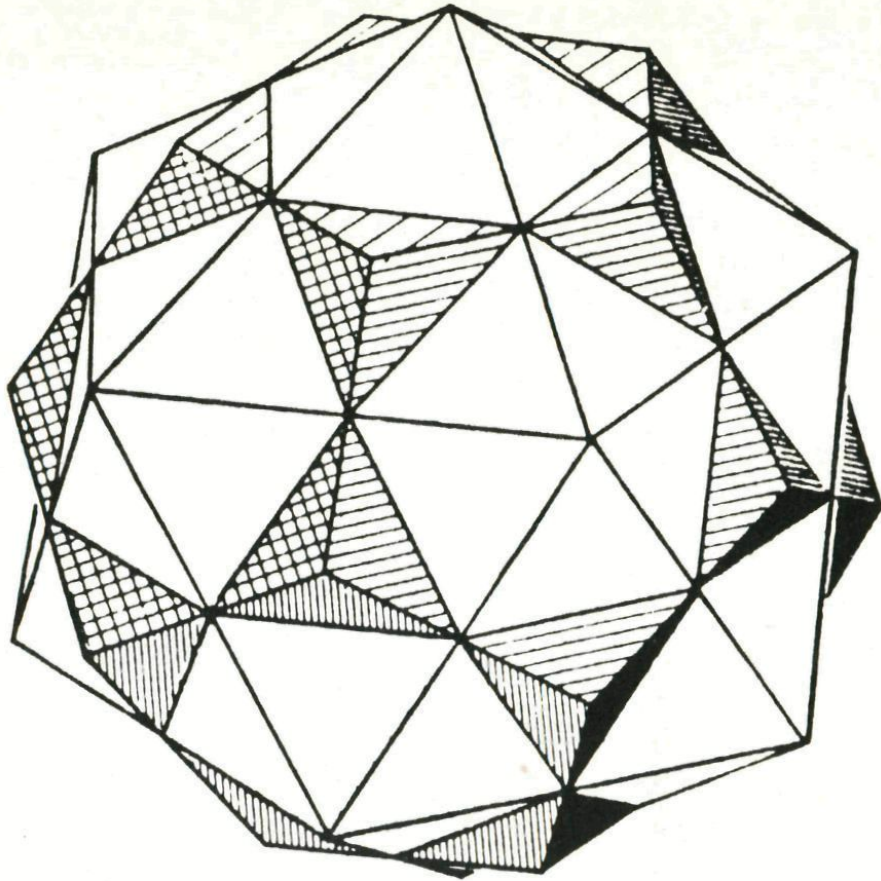
Een broertje (of zusje) van de icosidodekaëder is het *ruiten dertigvlak*. (Wordt al een beetje duidelijk waar dit naar toe gaat?) Het wordt verkregen uit het veelvlak van figuur 5 door de toppen van de vijfzijdige piramiden te verbinden met de toppen van de omliggende driezijdige piramiden. Om dat na te kunnen gaan zijn in figuur 10A en 10B beide veelvlakken even groot in dezelfde stand afgebeeld.

Het ruiten dertigvlak heeft — de naam zegt het al — dertig zijvlakken; allemaal congruente ruiten.

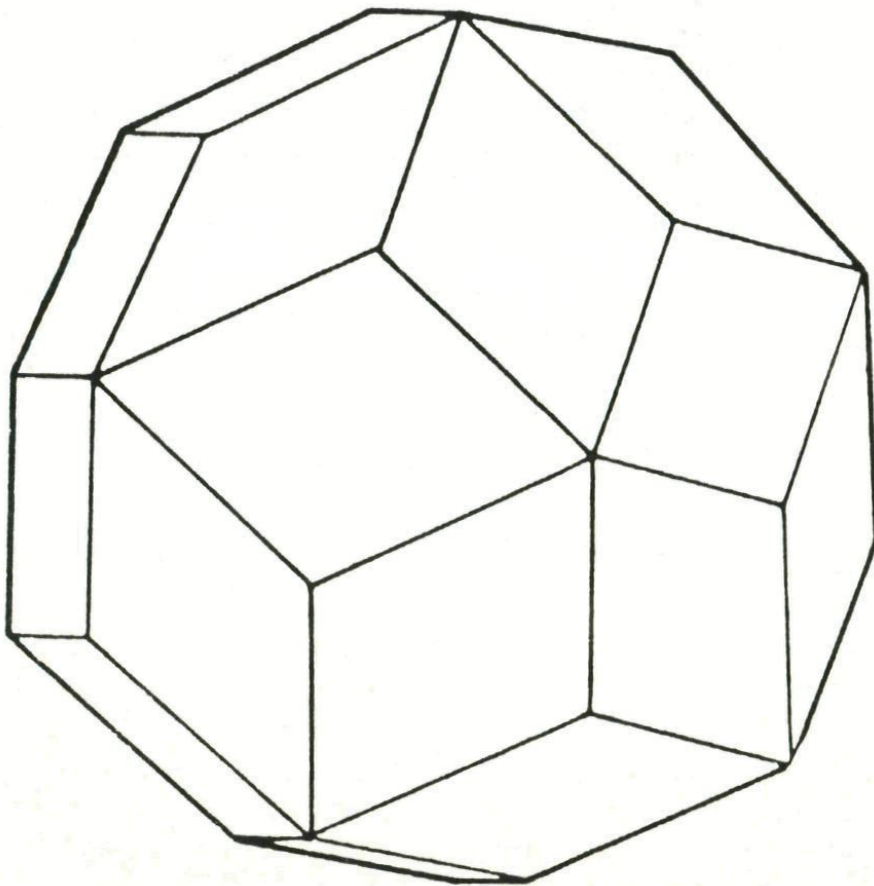


Figuur 9

A



B

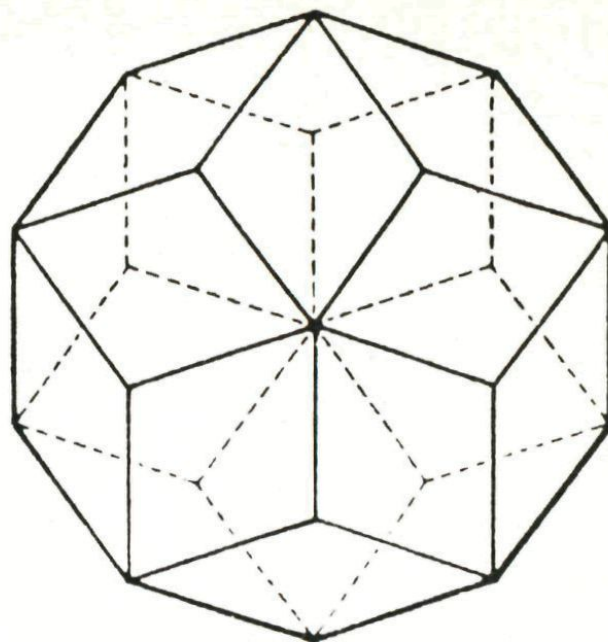


Figuur 10

Daaruit volgt dat ook alle 60 ribben even lang zijn. De twee scherpe hoeken van zo'n ruit zijn $63^{\circ}26'$ en de twee stompe hoeken $116^{\circ}34'$.

De diagonalen van de ruiten zijn precies de ribben van het ineengevlochten twaalfvlak en twintigvlak. De korte diagonalen zijn de ribben van het regelmatig twaalfvlak, de lange die van het regelmatig twintigvlak. Dit is ook mooi na te gaan aan de hand van figuur 10.

In een aantal van de 32 hoekpunten komen 5 ruiten samen en in een aantal 3 ruiten. In hoeveel hoekpunten 5 en in hoeveel hoekpunten 3? Tel maar na in figuur 11. Daarin is het ruiten dertigvlak in 'doorzicht' weergegeven. Dat



Figuur 11

maakt het trouwens ook weer mogelijk om alles rustig na te tellen: $Z=30$, $H=32$ en $R=60$.

Kip en ei bij de andere regelmatige veelvlakken

In het artikel is aangetoond dat het regelmatig twaalfvlak en het regelmatig twintigvlak in elkaar over kunnen gaan. Met een kip-en-ei-constructie worden de hoekpunten en zijvlakken als het ware verwisseld. Hoe zit dit bij de andere drie regelmatige veelvlakken, de kubus, het regelmatig achthoekvlak en het regelmatig vierhoekvlak?

Eerst tellen

Om daar achter te komen moeten eerst de waarden voor Z , H en R worden bepaald. Voor de kubus (figuur 1) geldt $Z=6$, $H=8$, $R=12$. Voor het regelmatig achthoekvlak (figuur 2) geldt $Z=8$, $H=6$, $R=12$. En voor het regelmatig vierhoekvlak (figuur 3) geldt ten slotte $Z=4$, $H=4$, $R=6$.

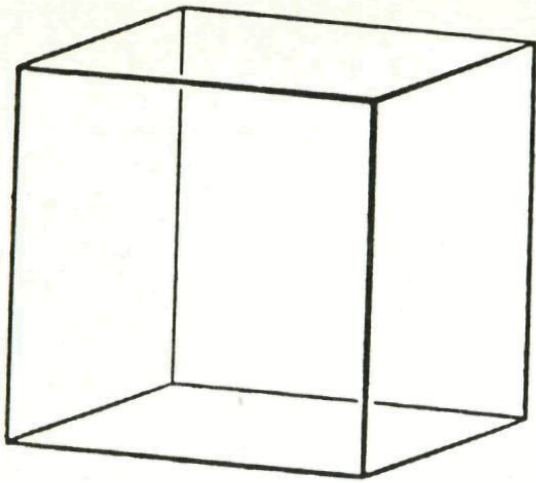
Kubus en achthoekvlak

Uit de waarden voor Z , H en R volgt dat de kip-en-ei-constructie op de kubus en het regelmatig achthoekvlak van toepassing is (figuur 4 en figuur 5).

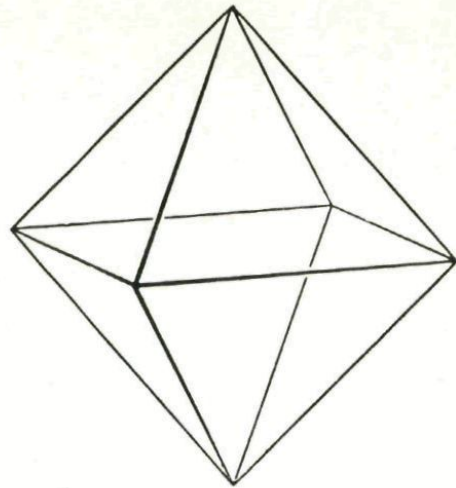
Steeds maar de middelpunten van twee aangrenzende zijvlakken met elkaar verbinden, enzovoort.

Viervlak

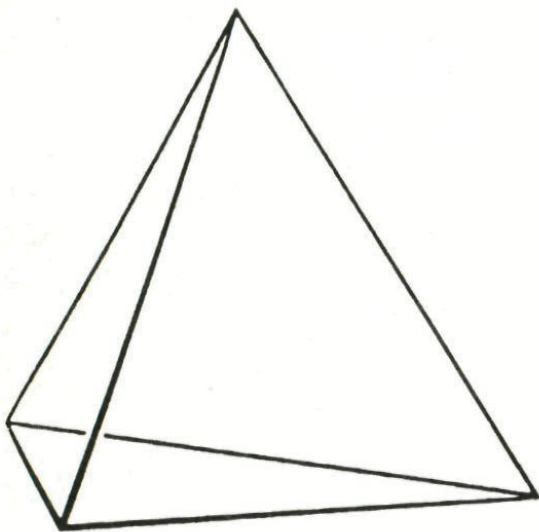
Voor het regelmatig vierhoekvlak blijft niets meer over. Uiteindelijk zijn er maar vijf regelmatige veelvlakken. Gelukkig is er ook geen ander veelvlak nodig. Want wat levert een kip-en-ei-constructie bij het regelmatig vierhoekvlak op (figuur 6)? Een ander (kleiner) regelmatig vierhoekvlak! Was ook meteen op te maken uit de waarden voor Z , H en R . □



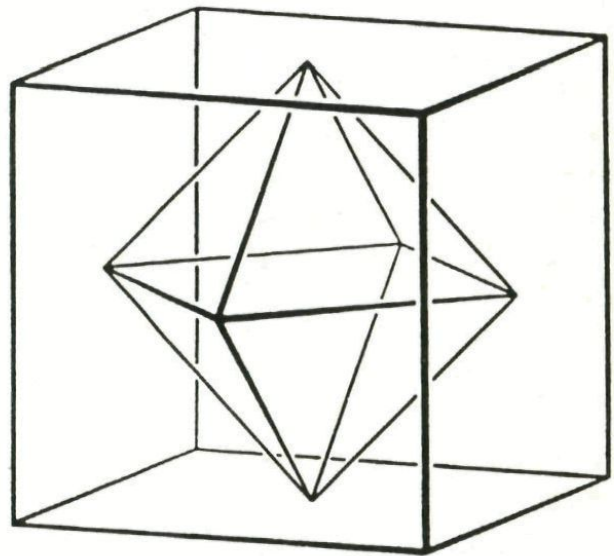
Figuur 1



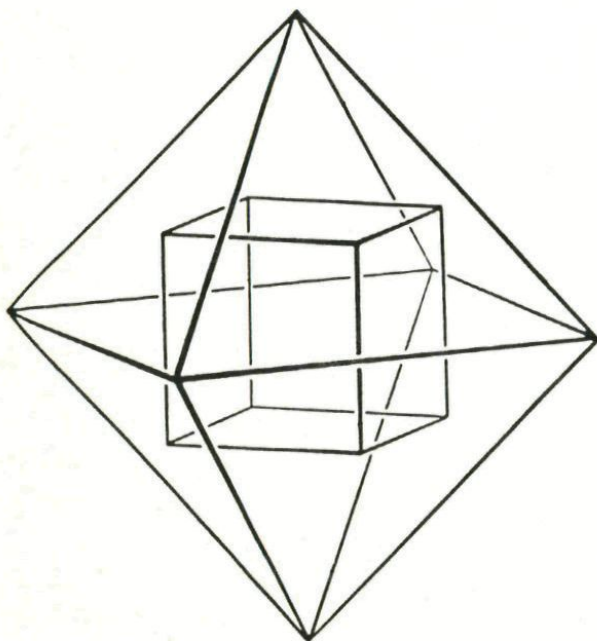
Figuur 2



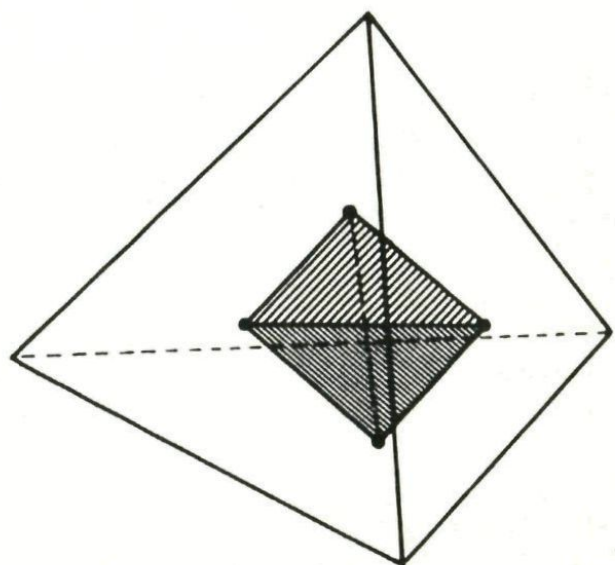
Figuur 3



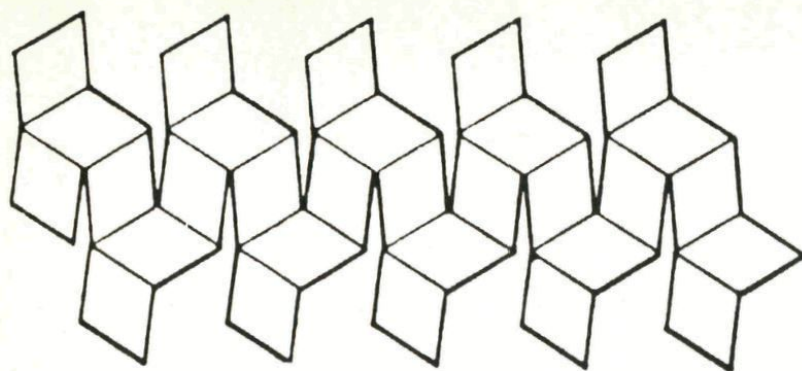
Figuur 4



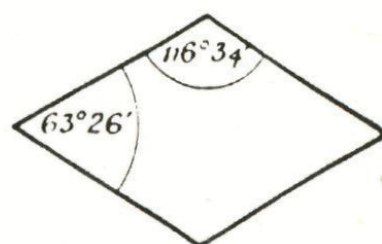
Figuur 5



Figuur 6



Figuur 12



Voor de volledigheid ten slotte ook maar weer een uitslag of netwerk (figuur 12) dat als uitgangspunt kan dienen om zelf een ruiten dertigvlak te maken.

Nogmaals kip en ei

Vergelijk de waarden voor Z , H en R van de icosidodekaëder en het ruiten dertigvlak met elkaar. Icosidodekaëder: $Z=32$, $H=30$ en $R=60$. Ruiten dertigvlak: $Z=30$, $H=32$ en $R=60$. Inderdaad, het kip-en-ei-verhaal is ook op deze twee veelvlakken van toepassing. De overgang van icosidodekaëder

naar ruiten dertigvlak verloopt door in de icosidodekaëder steeds het middelpunt van een driehoek met dat van een aangrenzende vijfhoek te verbinden. Door in het ruiten dertigvlak de middelpunten van twee aangrenzende ruiten met elkaar te verbinden komt de overgang van ruiten dertigvlak naar icosidodekaëder tot stand.

Het vereist misschien wat van je voorstellingsvermogen en ruimtelijk inzicht (of eventueel van je te-kentalenten), maar het klopt echt!

□

Overzicht

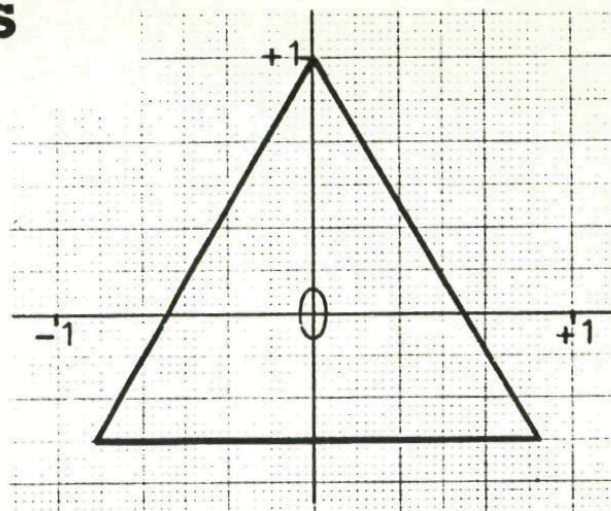
Veelvlak	Z	H	R
Dodekaëder	12	20	30
Icosaëder	20	12	30
Icosidodekaëder	32 (20 + 12)	30	60
Ruiten dertigvlak	30	32	60
Kubus	6	8	12
Regelmatig achthoek	8	6	12
Regelmatig vierhoek	4	4	6

Driehoeksformules

Als winnaars van de boekebonnen bij de prijsvraag uit Pythagoras 27-3 (bladzijde 18) kwamen uit de bus:

Stijn van Langen, Wijchen (5 vwo Dominicus College, Nijmegen)
en
Klaas Naaykens, Zutphen (5 vwo Stedelijk Lyceum).

Proficiat!



Figuur 1

De kortste formule die als grafiek heeft de rand van een gelijkzijdige driehoek met de oorsprong als zwaartepunt en $(0, 1)$ als top, (figuur 1), bleek te zijn:

$$\sqrt{y + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1 - y} - \sqrt{3 \cdot |x|} = 0.$$

We ontvingen verschillende varianten op hetzelfde thema. Ook goed is bij voorbeeld, zonder absoluutstrepen om de x :

$$\sqrt{y + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1 - y} - \sqrt{3 \cdot x} \cdot \sqrt{1 - y + \sqrt{3 \cdot x}} = 0.$$

Deze wat langere formule is misschien wel makkelijker te begrijpen dan de eerste, want hij lijkt meer op de *algemene* formule voor een driehoek met gegeven hoekpunten. Deze algemene formule lichten we toe aan de hand van figuur 2.

Uit de gegeven hoekpunten $(2, 0)$, $(6, 2)$ en $(4, 4)$ zijn vergelijkingen te vinden voor de drie zijlijnen:

$y - \frac{1}{2}x + 1 = 0$, $y - 2x + 4 = 0$ en $y + x - 8 = 0$. De drie zijlijnen samen krijg je door nulstellen van het *produkt* van deze lijnvergelijkingen:

$$(y - \frac{1}{2}x + 1) \cdot (y - 2x + 4) \cdot (y + x - 8) = 0.$$

Om de uitstekende stukken van de lijnen kwijt te raken kunnen we drie-maal de wortelfunctie gebruiken. Punten (x, y) in het halfvlak waar $(y - \frac{1}{2}x + 1)$ *negatief* is, zijn *ontoelaatbaar* in $\sqrt{(y - \frac{1}{2}x + 1)}$.

En met $\sqrt{-(y - \frac{1}{2}x + 1)}$ kunnen we desgewenst het halfvlak aan de andere kant van de lijn $y - \frac{1}{2}x + 1 = 0$ ontoelaatbaar maken.

Het héle buitengebied van de driehoek van figuur 2 wordt verboden terrein met de formule:

$$\sqrt{y - \frac{1}{2}x + 1} \cdot \sqrt{-(y - 2x + 4)} \cdot \sqrt{-(y + x - 8)} = 0,$$

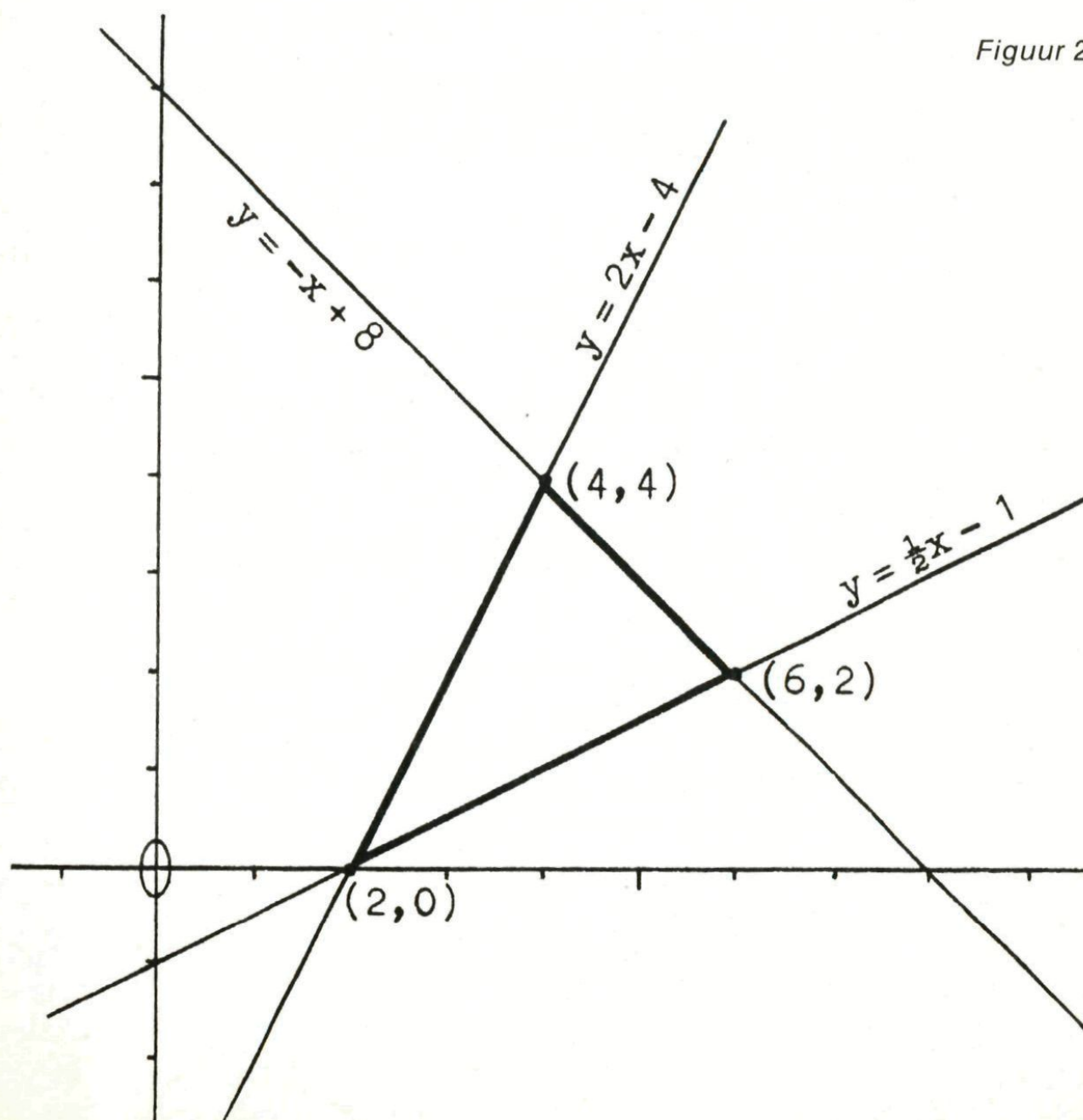
$\uparrow$
 $\uparrow$

klaar!

Op soortgelijke manier kunnen we formules opstellen voor vierhoeken, vijfhoeken, en zelfs elke n -hoek. Tenminste, zolang er g  en inspringende hoeken voorkomen.

Als voorbeeld geven we nog de formule voor een vierkant met horizontale en verticale zijden:

$$\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1-y} \cdot \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1+y} = 0.$$



Figuur 2

Zonder de wortel-truc

We laten tot slot nog zien hoe je ook zónder gebruik te maken van de verbodstruc met de wortelfunctie, een formule voor de prijsvraagdriehoek kunt vinden.

Begin met op te merken dat de grafiek van $|x| + |y| = 1$ juist een op z'n punt staand vierkant oplevert (figuur 3a).

Dit vierkant gaan we vervormen tot een driehoek. We doen dit door alle ónder de X-as gelegen randpunten van het vierkant verticaal omhoog te schuiven tot aan de X-as (figuur 3b). De punten op de bovenrand van het vierkant schuiven tegelijkertijd wat verder omhoog. Het resultaat is figuur 3c. De hier uitgevoerde verschuiving is geen gewone translatie, want de grootte van de verschuiving is niet constant maar een functie van x . En wel gelijk aan $(1 - |x|)$.

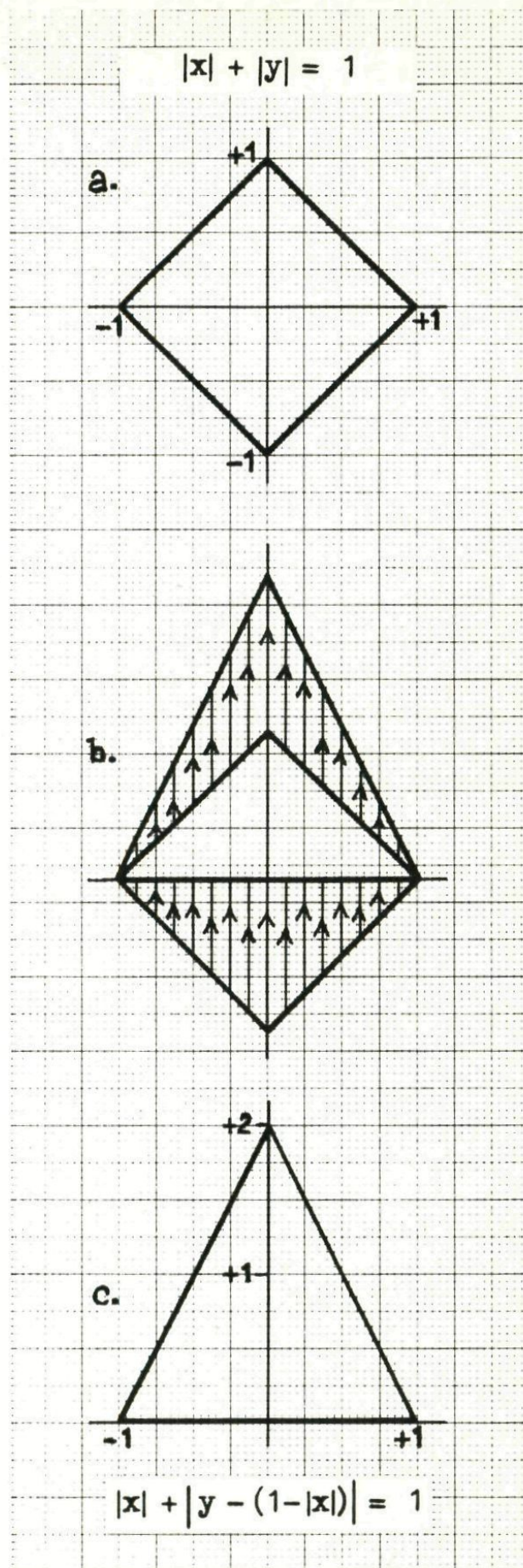
Dit betekent dat de hoogte-coördinaat y in de vierkantvergelijking (onder figuur 3a) moet worden vervangen door $y - (1 - |x|)$ om de driehoek-vergelijking te krijgen (onder figuur 3c).

Om de nu verkregen driehoek te veranderen in de gelijkzijdige driehoek van figuur 1, moet er nog

- verticaal vermenigvuldigd met factor $\frac{3}{4}$ (y vervangen door $\frac{3}{4}y$),
- horizontaal vermenigvuldigd met factor $\sqrt{\frac{3}{4}}$ (x vervangen door $\sqrt{\frac{3}{4}}x$) en
- verticaal verschoven over een constante afstand $\frac{1}{2}$ (y vervangen door $y + \frac{1}{2}$).

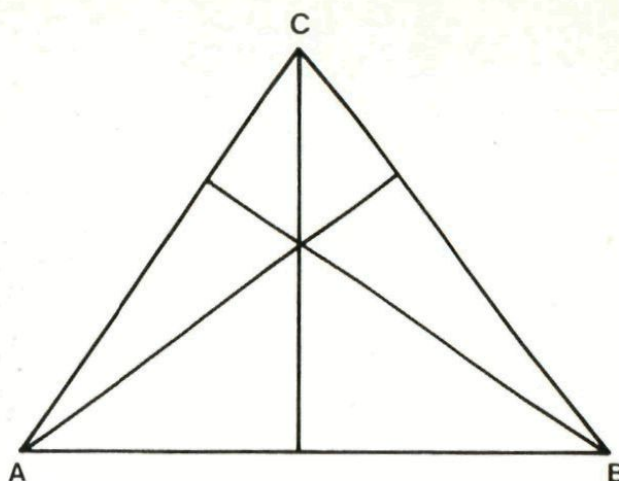
De gezochte formule is dan (na vermenigvuldigen met 3):

$$\sqrt{12} \cdot |x| + \left| \sqrt{12} \cdot |x| + 4y - 1 \right| = 3 \quad \square$$



Figuur 3

Hoogtelijnen door één punt



Figuur 1

Een hoogtelijn in een driehoek is een lijn van uit een hoekpunt loodrecht op de tegenoverliggende zijde. Zowel in het volgende artikel als in 'Drie-koorden-speciaal' (Pythagoras 27-2) is gebruikt dat de drie hoogtelijnen in een driehoek ABC door één punt gaan (figuur 1). Het is misschien goed die stelling nog eens te bewijzen. Een mooi én eenvoudig bewijs is afkomstig van de grote wiskundige Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Trek door de hoekpunten A , B en C de rechten QR , PR en PQ . Doe dat zó dat ze achtereenvolgens evenwijdig zijn aan de zijden BC , AC en AB (figuur 2).

Omdat AB en PQ evenals AC en PR evenwijdig zijn, is $ABPC$ een parallellogram. Dus

$$AB = CP \quad (1)$$

Omdat AB en PQ alsook BC en QR evenwijdig zijn, is $ABCQ$ eveneens een parallellogram.

Dus

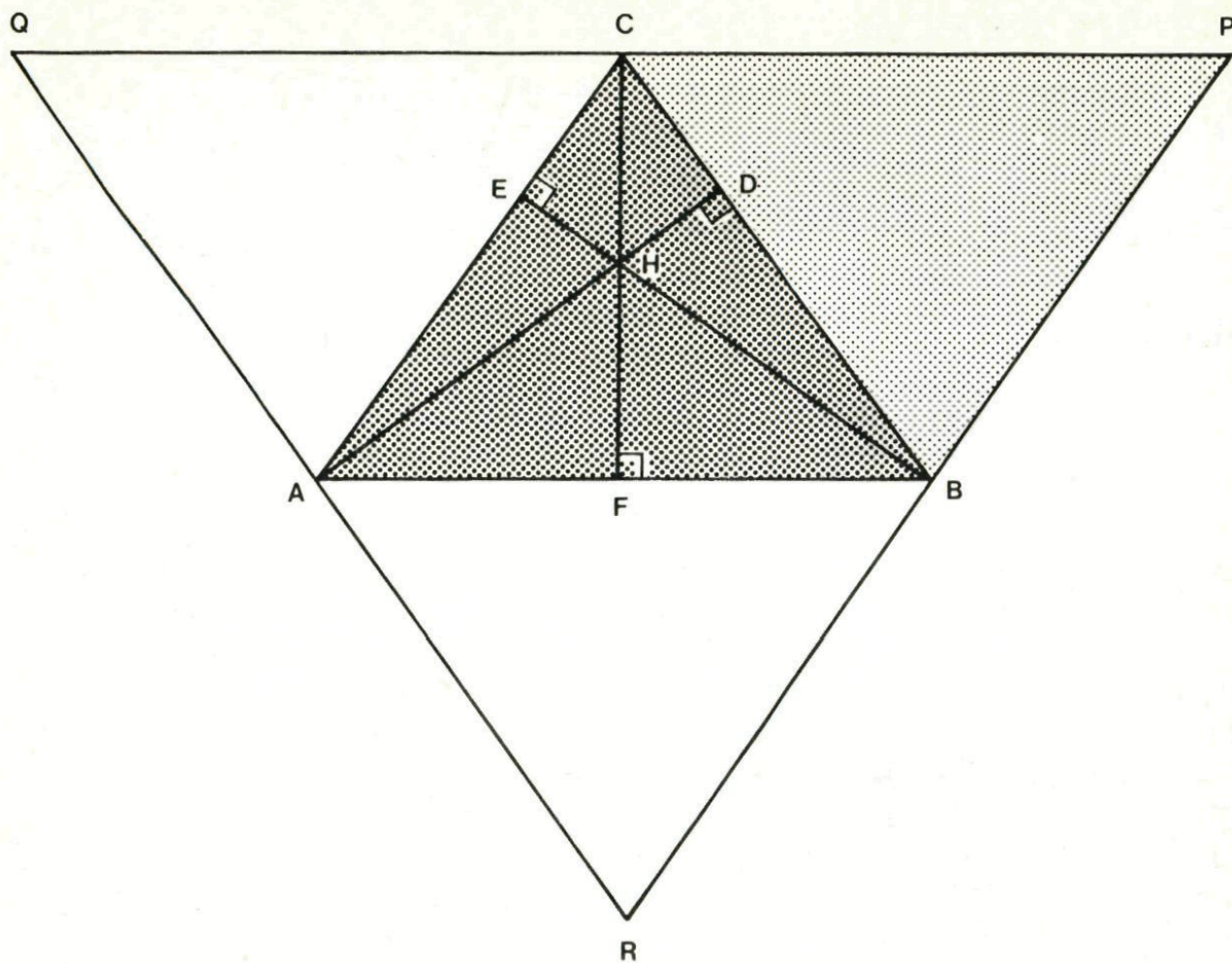
$$AB = QC \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt $PC = CQ$. Hoogtelijn CF staat loodrecht op AB , dus ook loodrecht op PQ (immers PQ evenwijdig AB). En aangezien $PC = CQ$, is CF zelfs een middelloodlijn van PQ .

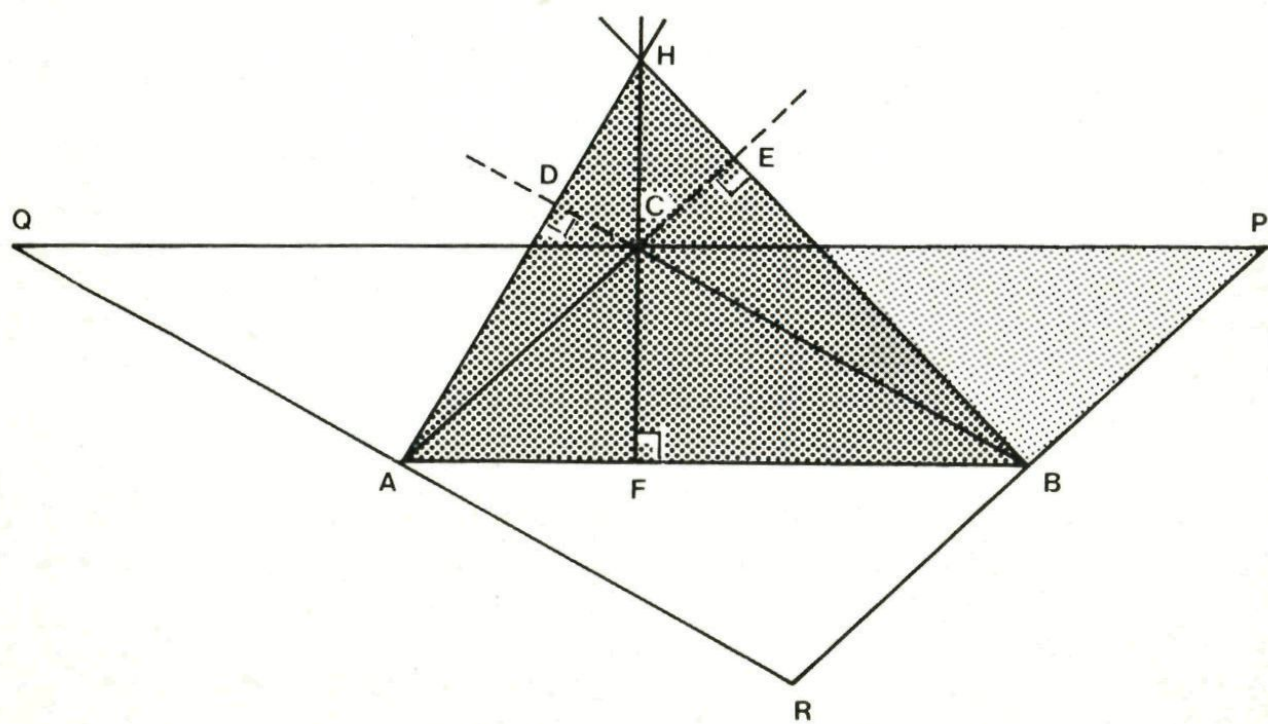
Op dezelfde manier is aan te tonen dat hoogtelijn AD een middelloodlijn is van QR en hoogtelijn BE een middelloodlijn van PR . Kortom de hoogtelijnen van driehoek ABC zijn middelloodlijnen van de zijden van driehoek PQR . Dat die door één punt gaan is eenvoudig aan te tonen. Het volgt bijna vanzelf uit de definitie van een middelloodlijn.

Omdat AD een middelloodlijn is van QR , ligt elk punt van AD even ver van Q als van R . Zo ligt ook elk punt van BE even ver van R als van P . Het snijpunt H van AD en BE ligt dus even ver van P , Q en R . Daar H even ver van P als van Q ligt, moet H ook op de middelloodlijn van PQ liggen. En dat is CF .

Ga na dat bij een stomphoekige driehoek ABC het bewijs op dezelfde manier verloopt (figuur 3). $\square$



Figuur 2



Figuur 3

Bijna zonder passer

• p

Figuur 1

1

Deze jaargang is er nogal wat aandacht besteed aan passer-en-liniaalconstructies. Het kon dan ook niet uitblijven dat daar reacties op kwamen. Zo ontvingen we de volgende leuke opgave.

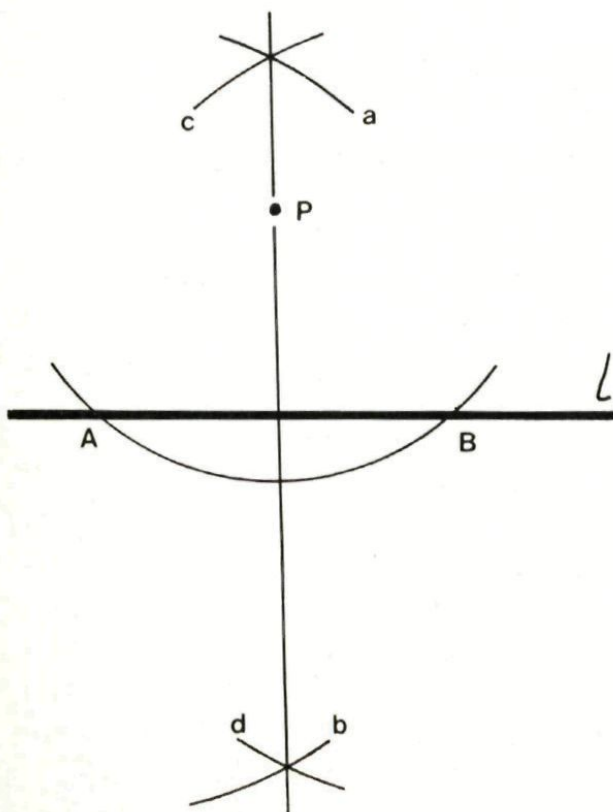
Gegeven een lijn l en een punt P , niet op l (figuur 1).

Construeer met passer en liniaal (zonder schaalverdeling) de loodlijn door P op l , maar gebruik de passer zo weinig mogelijk.

Traditioneel

In (oude) meetkunde-leerboeken gaat zo'n constructie als volgt (figuur 2).

Zet de passerpunt in P en trek een boog die l in twee punten A en B snijdt. Trek daarna vier cirkel-



Figuur 2

boogjes met gelijke straal. De boogjes a en b met de passerpunt in A en de boogjes c en d met de passerpunt in B . Verbind met de liniaal de snijpunten van de boogjes.

De liniaal wordt hierbij één keer gebruikt. De passer drie keer. De boogjes a en b kunnen immers net als de boogjes c en d in één keer worden getrokken!

Eenmaal

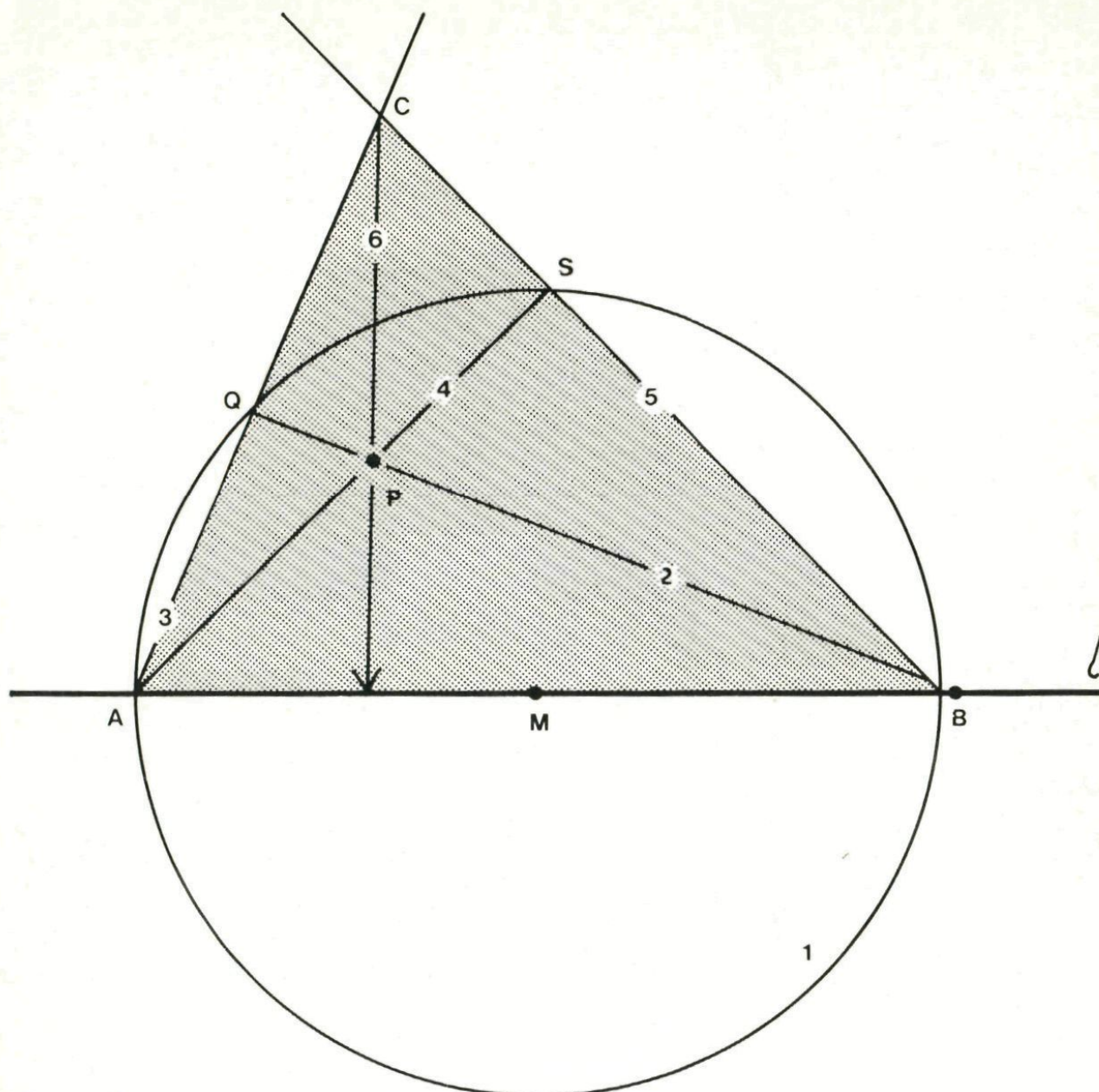
Nu de oplossing met zo weinig mogelijk gebruik van de passer (figuur 3). Die gaat in zes stappen, in figuur 3 genummerd van 1 tot en met 6.

Zet de passerpunt ergens op l . Trek een cirkel, zodat P binnen die cirkel ligt (1). Leg de passer nu maar weg, want die is niet meer nodig.

Noem de snijpunten van l met de cirkel A en B . Trek PB (2). Het snijpunt van PB met de cirkel is Q . Trek AQ (3).

Trek AP (4). AP snijdt de cirkel in S . Trek BS (5). AQ en BS snijden elkaar in C .

CP (6) is de gevraagde loodlijn.



Figuur 3

Bewijs

Hoek ASB is een *omtrekshoek* op een halve cirkelboog. (Volledige informatie over omtrekshoeken in een cirkel is te vinden in het stukje 'Verder de oude doos in', Pythagoras 27-2 bladzijde 6.) Hoek ASB is dus 90° . Hetzelfde geldt voor hoek AQB . Ook die hoek is 90° .

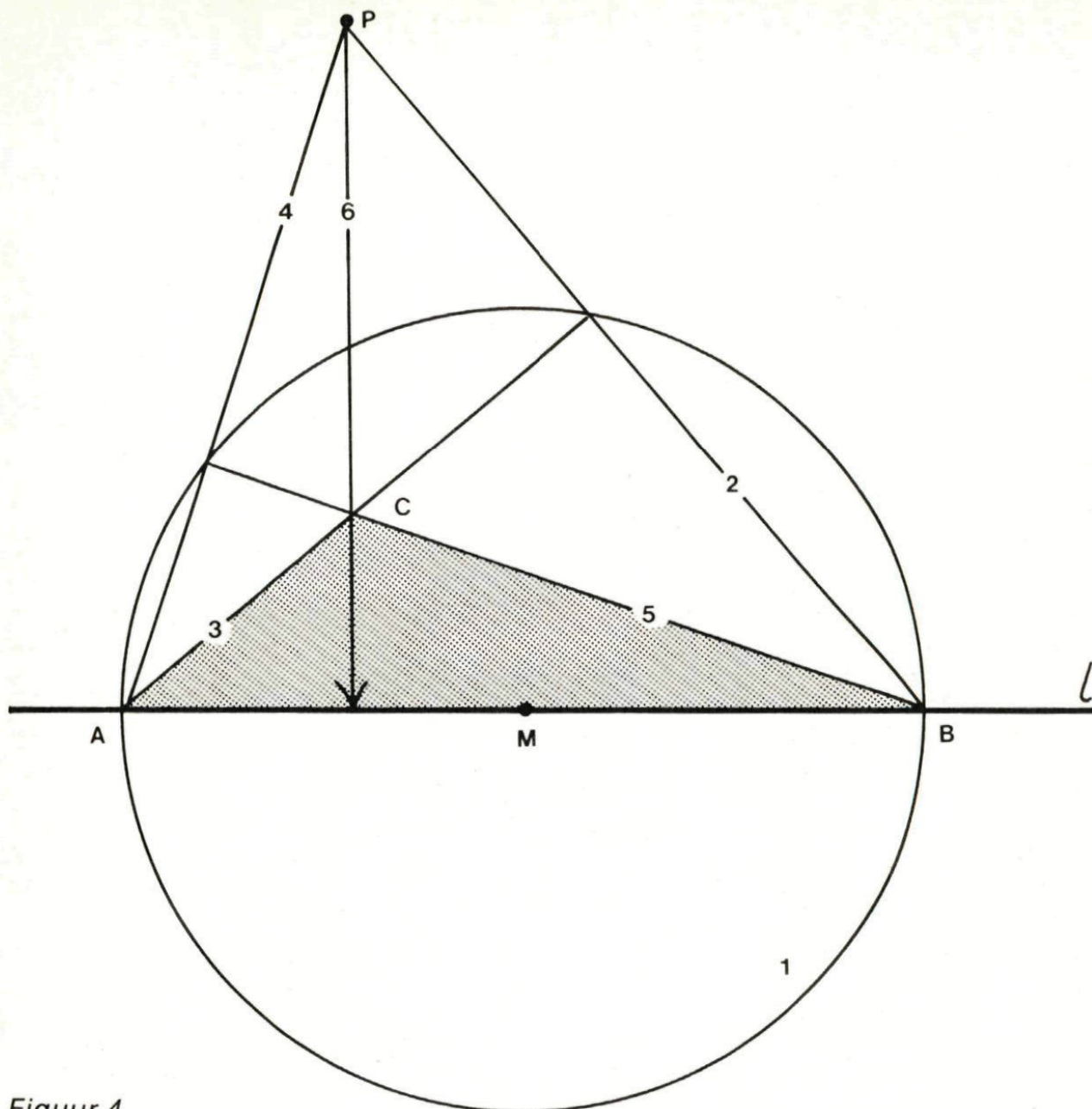
AS en BQ zijn dus twee hoogtelijnen in driehoek ABC . Ze snijden elkaar in P .

In een driehoek gaan de drie

hoogtelijnen door één punt (het *hoogtepunt*). CP moet dus de derde hoogtelijn in driehoek ABC zijn. CP staat dan ook loodrecht op l .

Andermaal

Punt P hoeft niet per se binnen de te trekken cirkel te liggen. P mag best buiten de cirkel blijven die in de eerste stap van de constructie wordt getrokken. Loop de constructie van figuur 4 maar eens stap voor stap na.



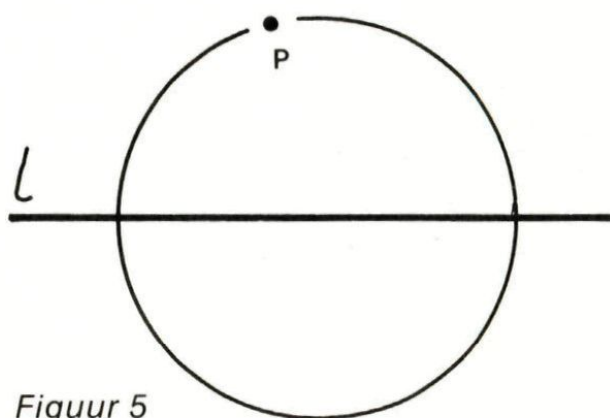
Figuur 4

Als twee druppels water

Figuur 3 en figuur 4 lijken erg op elkaar.

Je zou kunnen zeggen dat in figuur 4 driehoek ABC stomphoekig is. Het hoogtepunt P ligt dan buiten de driehoek.

Voor hetzelfde geld kan echter worden gesteld dat in figuur 4 punt C het hoogtepunt is van driehoek ABP . Zo bekeken lijken figuur 3 en figuur 4 echt als twee druppels water op elkaar.

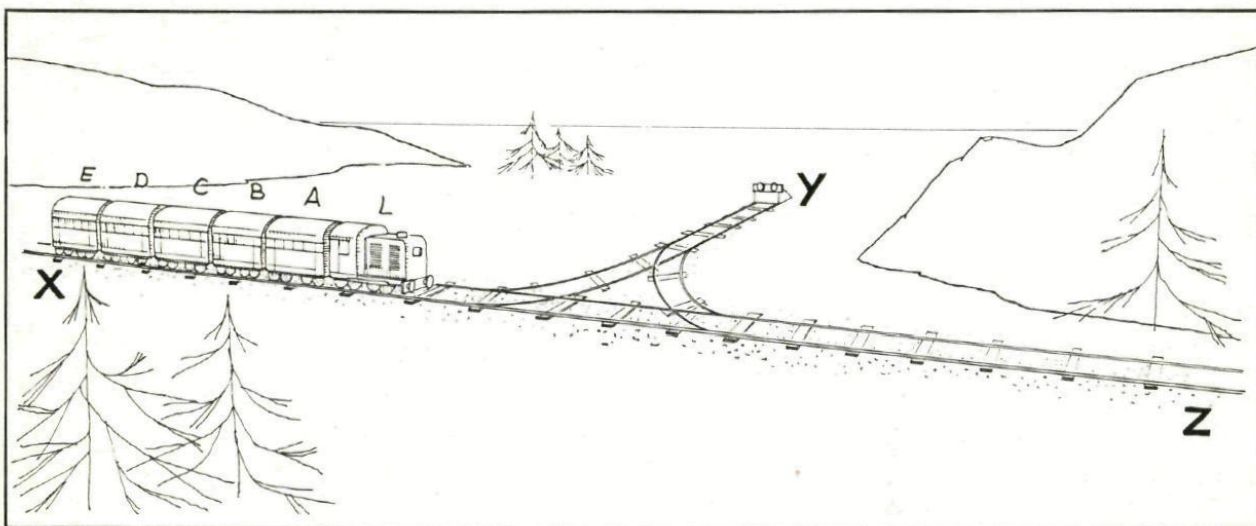


Figuur 5

Mag de te trekken cirkel ook door punt P gaan (figuur 5)? $\square$

Rangeer-perikelen 4: oplossing

Op het zijspoor is plaats voor één wagon of de locomotief. Hoe kan de trein in z'n geheel worden omgekeerd, zodat de volgorde *LABCDE* wordt én elke wagon en de locomotief afzonderlijk zijn omgedraaid?



Er zijn twee oplossingen die naar onze mening niet voor elkaar onderdoen.

We geven ze in de vorm van een algoritme. Met de letters *X*, *Y* en *Z* worden de uiteinden en het zijspoor bedoeld (figuur). Bij de ene oplossing wordt begonnen met *L* om te keren.

ontkoppel L en A
L vooruit naar Y
L achteruit naar Z

Nu wordt wagon *A* omgekeerd en achter de locomotief vastgemaakt.

L vooruit naar X
koppel L en A
ontkoppel A en B
AL achteruit naar Z
AL naar Y
ontkoppel L en A
L achteruit naar Z
L vooruit naar X
L achteruit naar Y

koppel L en A

Vervolgens kan met de overige wagons één voor één net zo worden gehandeld.

Er kan ook worden begonnen met *E* om te keren. Dus

EDCBAL naar Z
EDCBAL achteruit naar Y
ontkoppel E en D
DCBAL naar Z
DCBAL naar X
DCBAL naar Y
koppel E en L
DCBALE naar X
DCBALE naar Z
ontkoppel E en L

Nu kunnen op dezelfde manier de andere wagons één voor één worden omgekeerd en bij *E* op *Z* worden gezet. Ten slotte kan *L* worden omgekeerd. □

Wiskunde op de fiets, hoe vind je zo iets?



Op 24 mei 1988 maakte de *Volkskrant* melding van het indoor-uurrecord van de Italiaanse wielrenner *Francesco Moser* (figuur 1). Het betreffende bericht is hieronder weergegeven. Of je belangstelling nu uitgaat naar wielrennen of niet, het is zonder meer aardig dat bericht even door te nemen. En ... probeer eens te achterhalen waar iets mis is. (Al zal dat niet meevallen.)

Moser beëindigt carrière met indoor-uurrecord

Van onze sportredactie
AMSTERDAM — In de nadagen van zijn carrière heeft Francesco Moser zich een derde werelduurrecord toegeëigend. De 36-jarige Italiaan verbeterde zaterdag in de Schleyer-hal van Stuttgart het indoor-werelduurrecord van de Sovjet-amateur Ekimov. Moser kwam op het houten ovaal uit op 50 kilometer, 644 meter en 65 centimeter. Het oude record bedroeg 49.672 meter en werd op 27 oktober 1986 in Moskou gevestigd.

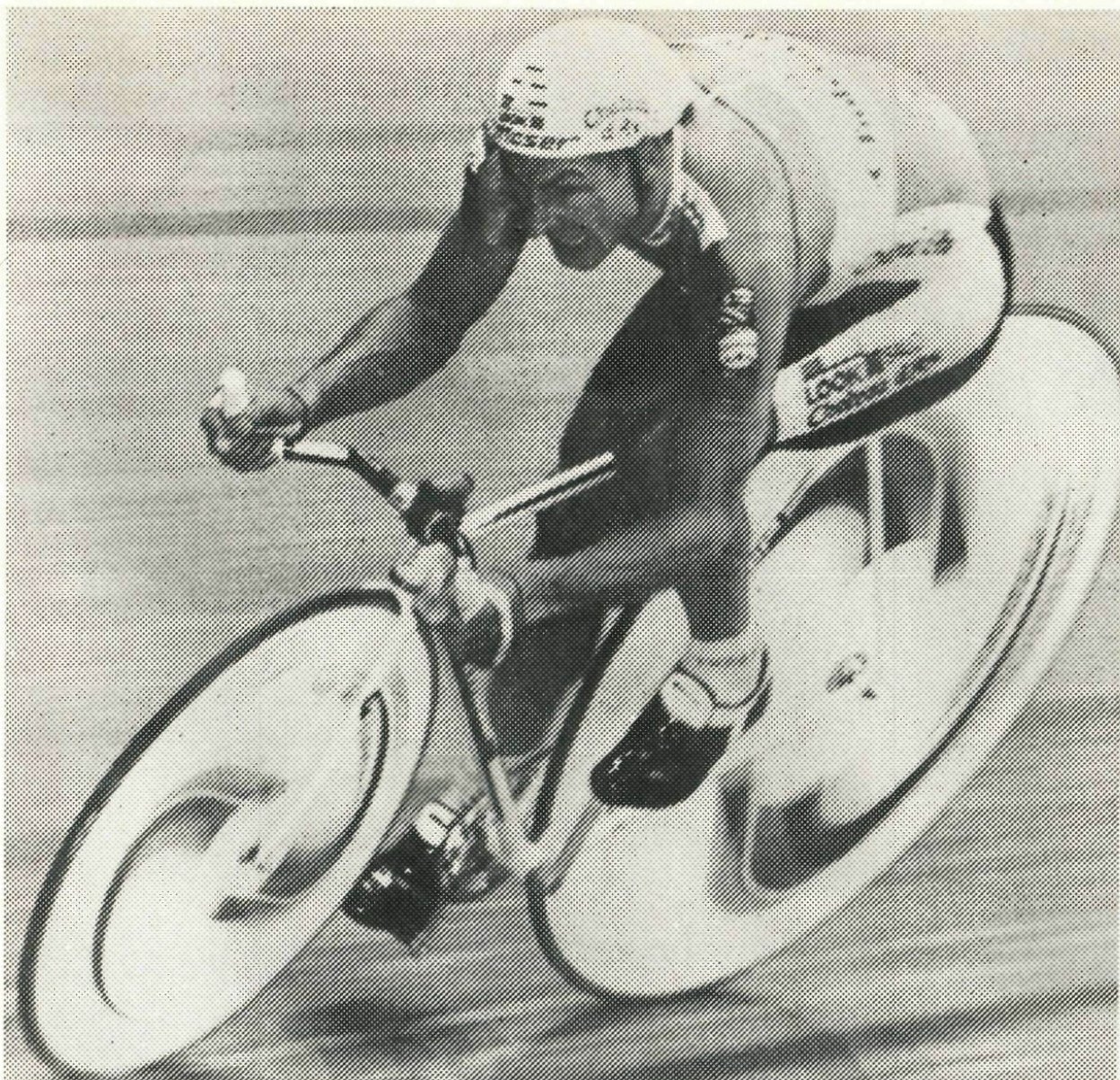
Eerder deed Moser twee vergeefse pogingen om Ekimov te overtreffen. De Italiaanse prof is ook houder van de twee werelduurrecords op buitenbanen. De grootste afstand op zeeniveau reed hij op 3 oktober 1986 in Milaan: 49,801 kilometer. Op 23 januari 1984 kwam hij in Mexico-Stad tot het uurrecord voor hooglandbanen: 51,151 kilometer.

Voor vijfduizend toeschouwers reed Moser in Stuttgart op een zeer speciale fiets. Voor had hij een extra klein wiel met een doorsnee van 58,5 centimeter. Het dichte achterwiel was bijna twee keer zo groot: 103 centimeter, en woog 3,2 kilogram. Verder maakte hij gebruik van aerodynamische voorzienin-

gen als druppelhelm en ossekopstuur. Per pedaalslag legde hij met zijn versnelling (47x17) 8 meter en 20 centimeter af. In het tweede deel van zijn race kwam hij tot de snelste ronde. Hij bereikte toen een snelheid van 54,278 kilometer per uur.

Moser, die zich via een hoogtestage in Colombia onder begeleiding van professor Conconi had voorbereid, was niet te stuiten in de jacht op het wereldrecord, dat hij vorig jaar in Moskou en Wenen had gemist. De coureur pakte Ekimov onderweg ook het wereldrecord op de 20 kilometer af. Hij passeerde dat punt in 23.41,71. De oude recordtijd was 23.52,98.

Moser verbeterde zijn wereldrecord op de 10 kilometer van tien dagen geleden (11.50,35) net niet: 11.53,79. Na afloop toonde hij zich uiterst tevreden: „Ik wilde mijn loopbaan beëindigen met dit indoor-record. Dat is nu gelukt. Ik wist het vooraf. Alleen een val had me kunnen stuiten. Ik kom niet terug in de competitie. Ik zal hier en daar nog wat kleine wedstrijden rijden, maar het serieuze werk is voorbij”, aldus Moser voor de Italiaanse tv, die de recordpoging rechtstreeks uitzond.



Figuur 1. Francesco Moser op zijn extravagante fiets met buitensporig groot achterwiel tijdens het vestigen van het indoor-uurrecord.

Schaam je niet

Waarschijnlijk is je niets merkwaardigs opgevallen in het bericht. Waaruit dan is op te maken dat je geen wieler-kenner bent.

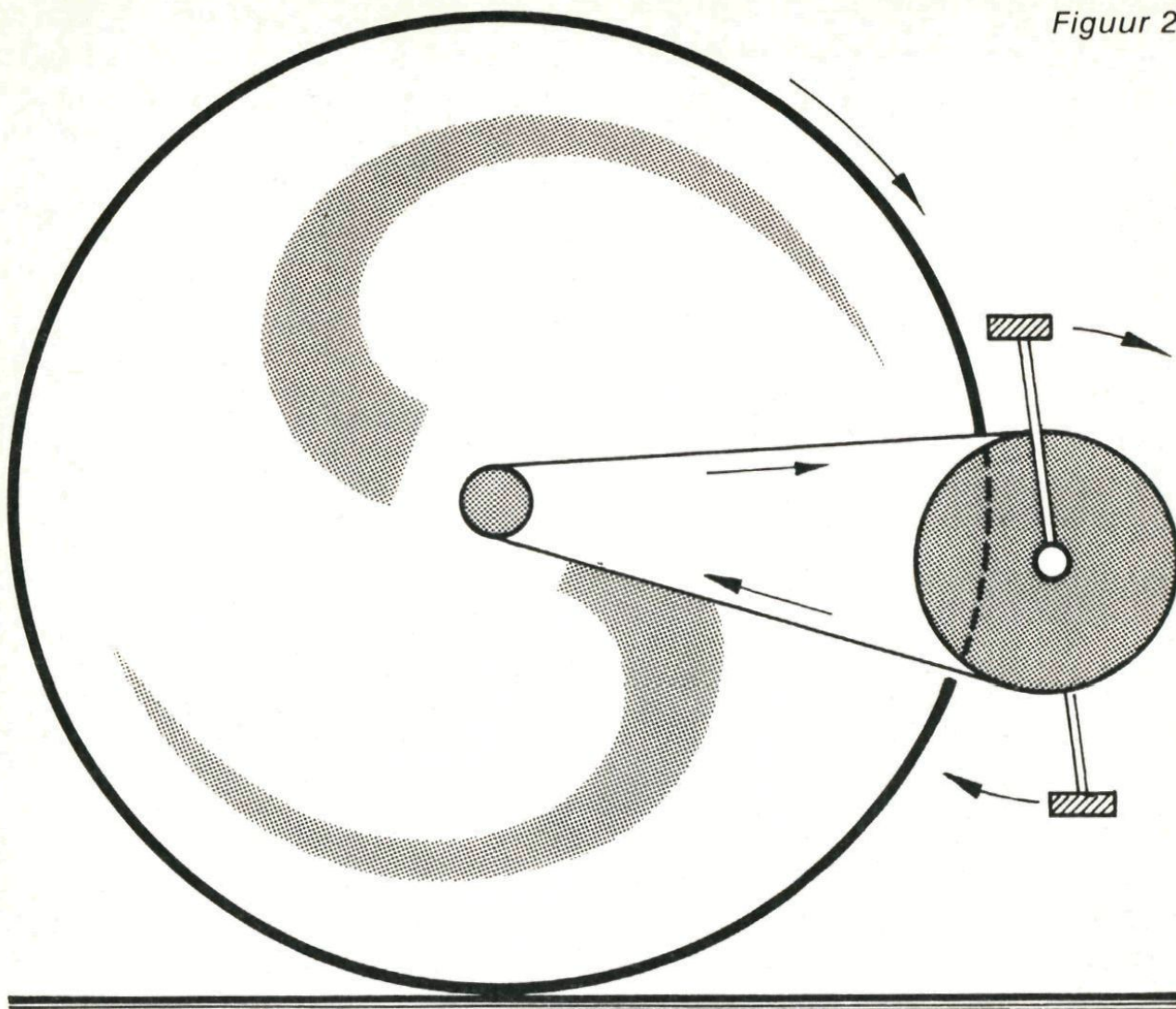
Want kenners (en zeker wielrenners) letten altijd meteen op de 'versnelling' die wordt gebruikt. Bij de record-fiets van Moser is dat wel een heel bijzondere. Met name vanwege dat enorme achterwiel.

De aandacht van een beetje kenner gaat dus al snel uit naar de zin die begint op de tweede regel van de rechter kolom.

Per pedaalslag legde hij met zijn versnelling (47×17) 8 meter en 20 centimeter af.

Wat daarin niet klopt is die 8 meter en 20 centimeter die per pedaalslag worden afgelegd. Ook voor niet-kenners die daar

Figuur 2



eenmaal op gewezen zijn, is dat eenvoudig na te gaan.

Wat betekent 47×17 ?

Met 47 wordt het aantal tanden bedoeld van het grote kettingblad dat aan de trappers vastzit. Het getal 17 slaat op het aantal tanden van het (kleine) achterkettingwiel dat aan het achterwiel vastzit (figuur 2).

Overbrenging

Een *pedaalslag* is één rondgang van elke trapper. Met één pedaalslag gaat het kettingblad ook precies één keer rond. Als het kettingblad 47 tanden heeft, moet de

ketting daarbij 47 tanden opschuiven (figuur 2). Ook langs het achterkettingwiel moet de ketting dan 47 tanden opschuiven. Daarvoor moet het achterkettingwiel 47 gedeeld door 17 keer rond. Dat is afgerond 2,76 keer.

In het algemeen heet het aantal tanden van het kettingblad gedeeld door die van het achterkettingwiel de *overbrenging*. Met een rondgang van het achterkettingwiel gaat ook het achterwiel precies één keer rond. De overbrenging geeft dus aan hoe vaak het achterwiel rond gaat bij één pedaalslag.

Verzet

Als het achterwiel één omwenteling maakt, wordt de omtrek ervan precies één keer langs de weg afgewikkeld. Indien het wiel niet slipt, gaat de fiets dan even veel meters vooruit als het aantal meters dat de omtrek van het achterwiel bedraagt. Voor een achterwiel met middellijn (diameter) d is dat $\Pi \cdot d$ meter.

De afstand die een fiets per pedaalslag vooruit gaat, heet *verzet*. Bij een overbrenging B gaat het achterwiel B keer rond. Het verzet V wordt dan

$$V = B \cdot (\Pi \cdot d) \quad (1)$$

Doorgaans spreekt men van een hoge of zware versnelling als het verzet groot is, van een lage of lichte versnelling als het verzet klein is.

Eén pedaalslag van Moser

Voor de record-fiets van Moser gold $B = 2,76$ en $d = 1,03$ m. Deze waarden ingevuld in (1) leveren een verzet V van 8,93 m. Kortom, per pedaalslag legde Moser 8 meter en 93 centimeter af! Dat is 73 centimeter meer dan in het kran-tebericht is vermeld.

Vergelijk dat eens met een normale fiets. Die heeft doorgaans een versnelling van 48×20 en wielen met een diameter van 27 of 28 inch (1 inch = 2,54 cm = 0,0254 m). De waarde van B is dan 2,4. B en d invullen in (1) levert voor 27 inch wielen een verzet van 5,17 m en voor 28 inch wielen 5,36 m.

Geen record-fiets

Niemand zal het in zijn hoofd ha-

len om met een normale fiets een uurrecord te willen vestigen. Zelfs al zou die fiets van het lichtste materiaal zijn gemaakt, dichte wielen hebben, voorzien zijn van een os-sekopstuur, enzovoort. Maar waarom eigenlijk niet?

In principe hoeft het niet aan de fiets te liggen. Per pedaalslag van Moser zou er op een normale fiets iets meer dan anderhalve pedaalslag moeten worden gedaan. Maar dat is nu juist gemakkelijker gezegd dan gedaan!

De soepele tred

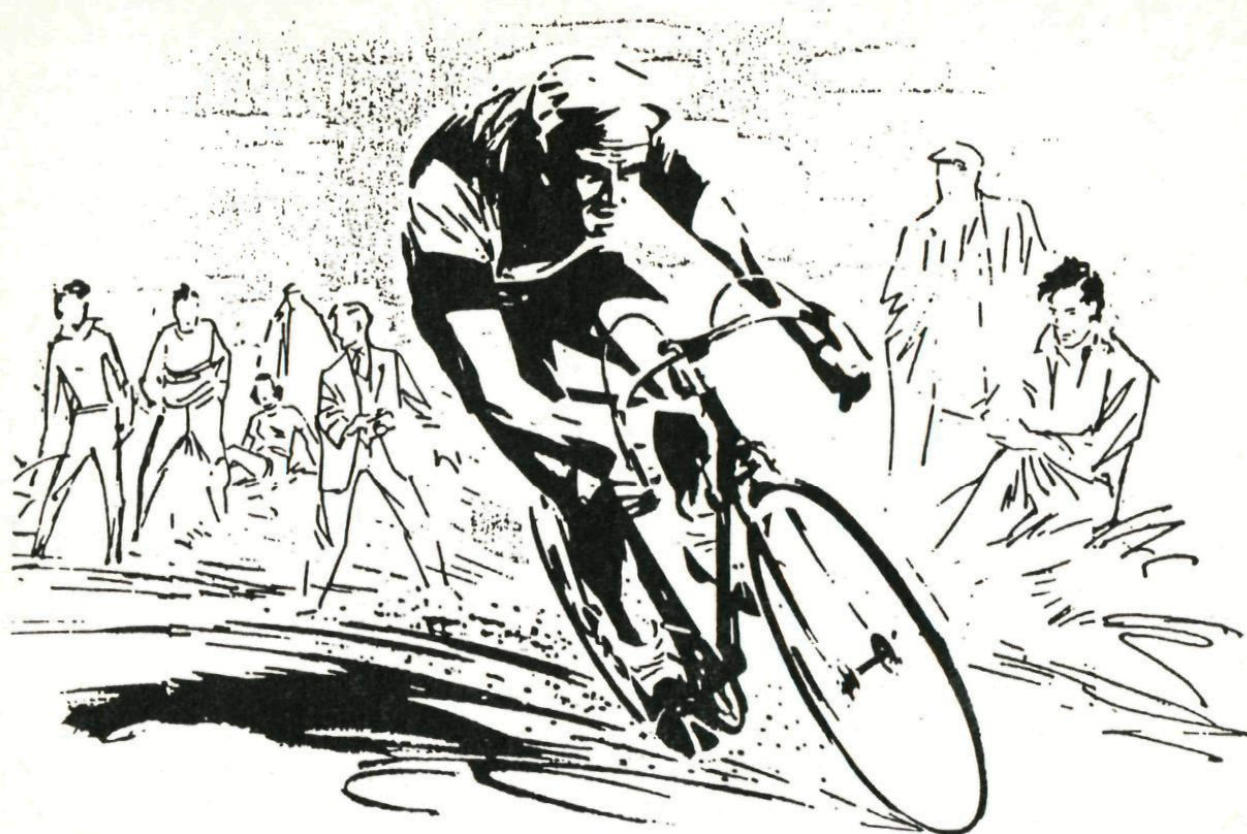
Regelmatig herhaalde bewegingen zoals lopen, zwemmen, roeien of fietsen gaan bij een bepaald ritme of cadans het gemakkelijkst en efficiëntst. Voor de cirkelvormige beenbeweging van het fietsen is dat 80 tot 90 (voor wielrenners) pedaalslagen per minuut.

Laten we die *optimale cadans* of *soepele tred* maar houden op 90 pedaalslagen per minuut.

Met hoge snelheid fietsen — zeker langdurig — is dus niet een kwestie van maar zoveel mogelijk pedaalslagen per minuut maken. Het komt er op neer om ongeveer 90 pedaalslagen per minuut te maken met een zo zwaar mogelijke versnelling ('De grote molen zien rond te krijgen' zou Mart Smeets zeggen). En hoe gunstiger de omstandigheden (lichte fiets, zo weinig mogelijk wrijving, geen helling, enzovoort), des te zwaarder de versnelling kan zijn.

De tred van Moser

Moser legde in 1 uur een afstand af van 50 kilometer 644 meter en 65 centimeter (50 644,65 m). Hoeveel pedaalslagen deed hij gemiddeld per minuut?



Daartoe moet die 50 644,65 m eerst worden gedeeld door 60 (het aantal minuten in een uur) en daarna door 8,93 m (het verzet van Moser). Dat levert afgerond 94,5 pedaalslagen per minuut. Komt inderdaad aardig in de buurt van de 90. Niet zo verwonderlijk, want na heel wat uitproberen zal zijn verzet daar ongetwijfeld min of meer op zijn afgestemd.

Hoeveel pedaalslagen heeft Moser maximaal per minuut gemaakt?

Zijn maximale snelheid was 54 278 meter per uur (54,278 kilometer per uur). Deze afstand delen door 60 én het verzet van 8,93 m levert afgerond 101,3 pedaalslagen per minuut. Al te veel boven zijn optimale cadans om lang vol te kunnen houden. Was dat wel zo (en dat had hij tijdens de training kunnen merken), dan had

hij een zwaardere versnelling moeten kiezen. Bij voorbeeld 47×16 . Die had hem een verzet geleverd van 9,51 m (reken maar na met formule (1)). Met 95,1 pedaalslagen per minuut had hij dan iets gemakkelijker gereden en 54 278 m in een uur hebben afgelegd.

Maar Moser zal tijdens de training wel gemerkt hebben dat die versnelling te zwaar voor hem was om in zijn optimale cadans te komen.

Op een normale fiets

Welke afstand zou Moser met die gemiddelde cadans van 94,5 pedaalslagen per minuut op een normale fiets hebben afgelegd?

Met 27-inch-wielen (verzet 5,17 m) 29 kilometer 313 meter en 90 centimeter. Met 28-inch-wielen (verzet 5,36 m) 30 kilometer 391 meter en 20 centimeter. Niet te

vergelijken met zijn record-afstand.

Hoeveel pedaalslagen per minuut zou hij op een normale fiets hebben moeten doen om zijn record-afstand te halen?

Met 27-inch-wielen (verzet 5,17

m) 163,3 en met 28-inch-wielen (verzet 5,36 m) 157,5.

In beide gevallen veel te veel boven zijn optimale cadans. Moser zou zich letterlijk rot hebben getrapt en waarschijnlijk doodop ver vóór het verstrijken van het uur zijn afgestapt. □

Niet in fase

Moser's recordpoging werd rechtstreeks uitgezonden door de Italiaanse tv. Of dat een erg boeiende uitzending is geweest, laten we maar in het midden.

Toch moet het voor de kijkers in het begin wel even wennen zijn geweest om Moser zo te zien rijden. Want door het grote verschil in afmetingen van de wielen draaiden deze niet gelijk op ('niet in fase' zo gezegd), zoals bij een normale fiets. Het voorwiel maakte veel meer omwentelingen. Dit zal des te opvallender zijn geweest, omdat de wielen dicht waren, zodat ze beschilderd konden worden (figuur 1).

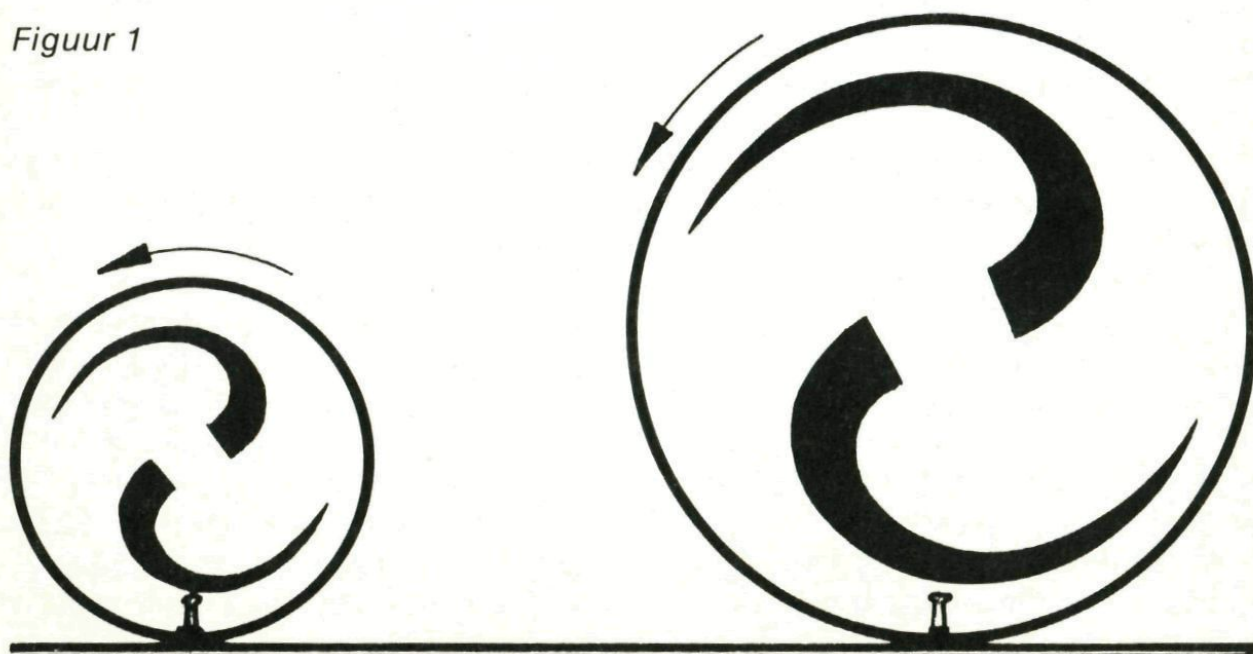
Neem eens aan dat bij de start de ventielen van beide wielen in de laagste

stand, vlak boven de grond, stonden (figuur 1). Ga er bovendien van uit dat de opgegeven maten van de wielen kloppen (diameter voorwiel 58,5 centimeter en diameter achterwiel 103 centimeter). Na hoeveel omwentelingen van beide wielen zou die stand opnieuw zijn bereikt?

Hoeveel keer komt de stand die de wielen bij de start innamen (figuur 1), nog voor op het hele traject van 50 644,65 meter?

Oplossingen op bladzijde 32. □

Figuur 1





De cirkelvormige beenbeweging van het fietsen gaat het efficiëntst en gemakkelijkst bij zeg maar 90 pedaalslagen per minuut. Om dat wat nader te verklaren is een uitstapje naar de natuurkunde nodig.

Net als voor elke andere inspanning is voor fietsen energie nodig, en wel *lichaamsenergie*. Er moet immers arbeid worden verricht.

Is de fiets eenmaal op gang en wordt er met constante snelheid gereden, dan moet er arbeid worden verricht om de wrijving van de wielen met de weg en de weerstand van de lucht te overwinnen. De energie die daarvoor nodig is, wordt hier voor het gemak de *aan de fiets afgeleverde energie* genoemd.

Nu zou het mooi zijn als van elke gebruikte kilojoule lichaamsenergie er ook precies één kilojoule aan de fiets wordt afgeleverd. Maar zo is het niet. In de regel is de aan de fiets afgeleverde energie slechts een gedeelte van de gebruikte lichaamsenergie.

Welk gedeelte? Dat hangt af van het aantal pedaalslagen per minuut. Dat gedeelte blijkt het grootst te zijn bij ongeveer 90 pedaalslagen per minuut, de *optimale cadans*. Bij meer of minder pedaalslagen per minuut neemt dat gedeelte af. Van persoon tot persoon kan die optimale cadans iets verschillen, maar niet veel.

Wil iemand dus zo efficiënt mogelijk omgaan met zijn lichaamsenergie, dan zal hij hoe dan ook moeten zorgen dat hij ongeveer 90 pedaalslagen per minuut maakt.

Met het gegeven dat er ongeveer 90 pedaalslagen per minuut gedaan moeten worden, blijft er niets anders over dan dat met een zo groot mogelijk verzet te doen. Hoe groter het verzet, des te groter is zo de afstand die per minuut wordt afgelegd (en dus ook de snelheid).

Omdat bij een groter verzet de afstand die per minuut wordt afgelegd, groter is, moet ook de aan de fiets afgeleverde energie groter zijn. Door die grotere afstand is er immers ook meer wrijving van de wielen met de weg en meer luchtweerstand. En dat maakt weer dat de gebruikte lichaamsenergie groter wordt. Vandaar dat men bij een groot verzet ook wel spreekt van een zware versnelling.

Kortom, hoe meer lichaamsenergie iemand per minuut weet te gebruiken, hoe groter verzet hij 'rond' kan krijgen en hoe sneller hij gaat. En de lichaamsenergie die iemand per minuut weet te gebruiken, hangt natuurlijk af van de 'vorm van de dag'.

Nu zal ook duidelijk zijn waarom Moser zo'n 'gestroomlijnde' fiets gebruikte. Het vermindert zijn luchtweerstand. Zo kan hij met gebruik van dezelfde lichaamsenergie per minuut nog met een nét iets groter verzet rijden. Want uiteindelijk is er een grens aan de lichaamsenergie die iemand per minuut kan gebruiken. □



Donderdag 9 juni werd in de *Giro d'Italia* (Ronde van Italië) een twaalf kilometer lange tijdrit tegen een berg op gehouden. Deze tijdrit zou naar ieders mening van doorslaggevende betekenis zijn voor de eindoverwinning van de Giro. Daarvoor kwamen toen het meest de Amerikaan *Andrew Hampsten* en het opkomende Nederlandse talent *Erik Breukink* in aanmerking. Zij stonden met gering tijdsverschil respectievelijk nummer 1 en nummer 2 in het klassement. Hampsten bleek in deze tijdrit stukken sneller te zijn en vergrootte daarmee zijn voorsprong in het klassement op Breukink.

In de krant stond de volgende dag een verslag van deze tijdrit. Daarin waren onder andere enkele verklarende woorden van Erik Breukink opgenomen. Uit dit verslag hieronder twee fragmenten.

De stijging bleek te zwaar voor machtklimmer Breukink. Hij had voortdurend problemen met zijn versnelling en kwam daardoor niet in het gewenste ritme. De keus van de verzetten was verkeerd geweest, wat enerzijds op een gebrek aan ervaring en anderzijds op vermoeidheid na een zware ronde kan duiden. Opmerkelijk was in elk geval dat Hampsten een zwaarder verzet reed dan Breukink, terwijl dat normaal andersom is.

Ik heb in de tijdrit op mijn lichtste verzet moeten rijden, maar om verschillen te maken had ik zwaarder, 40x19, moeten draaien", verklaarde Breukink. „En dat lukte niet. Ik heb te veel op de 40x20 moeten rijden.”

Een opvallend verschil met Hampsten die soms 42x20, maar meestal 42x19 gebruikte, een verschil van een halve meter per pedaalomwenteling.

De wielen van een racefiets hebben standaard een diameter van 27 inch (1 inch = 2,54 cm). Reken de verzetten die bij de genoemde versnellingen horen, maar eens na en vergelijk ze met elkaar.

Antwoorden op bladzijde 32.

□

Waarom dat enorme achterwiel?



Voor een groot verzet is dat buitensporig grote achterwiel van Moser niet nodig. De wielen van een 'gewone' racefiets hebben standaard een diameter van 27 inch (1 inch = 2,54 cm). Toch zijn versnellingen met verzetten die in de buurt liggen van dat van Moser (8,93 meter) daarop geen uitzondering. Vergelijk maar met de tabel.

De 'grote molen'

Met 54×14 (de 'grote molen') of 54×13 wordt gereden als een peloton 'op drift' is. De snelheden liggen dan ruwweg tussen de 45 en 50 kilometer per uur (zie tabel). In zo'n geval rijdt telkens één renner een klein tijdje op kop en houdt de achter hem rijdende renners 'uit de wind'. Die ondervinden dan minder luchtweerstand en kunnen dus wat meer op het gemak volgen. Iets wat natuurlijk niet gaat als je alleen rijdt, zoals Moser.

De sprint

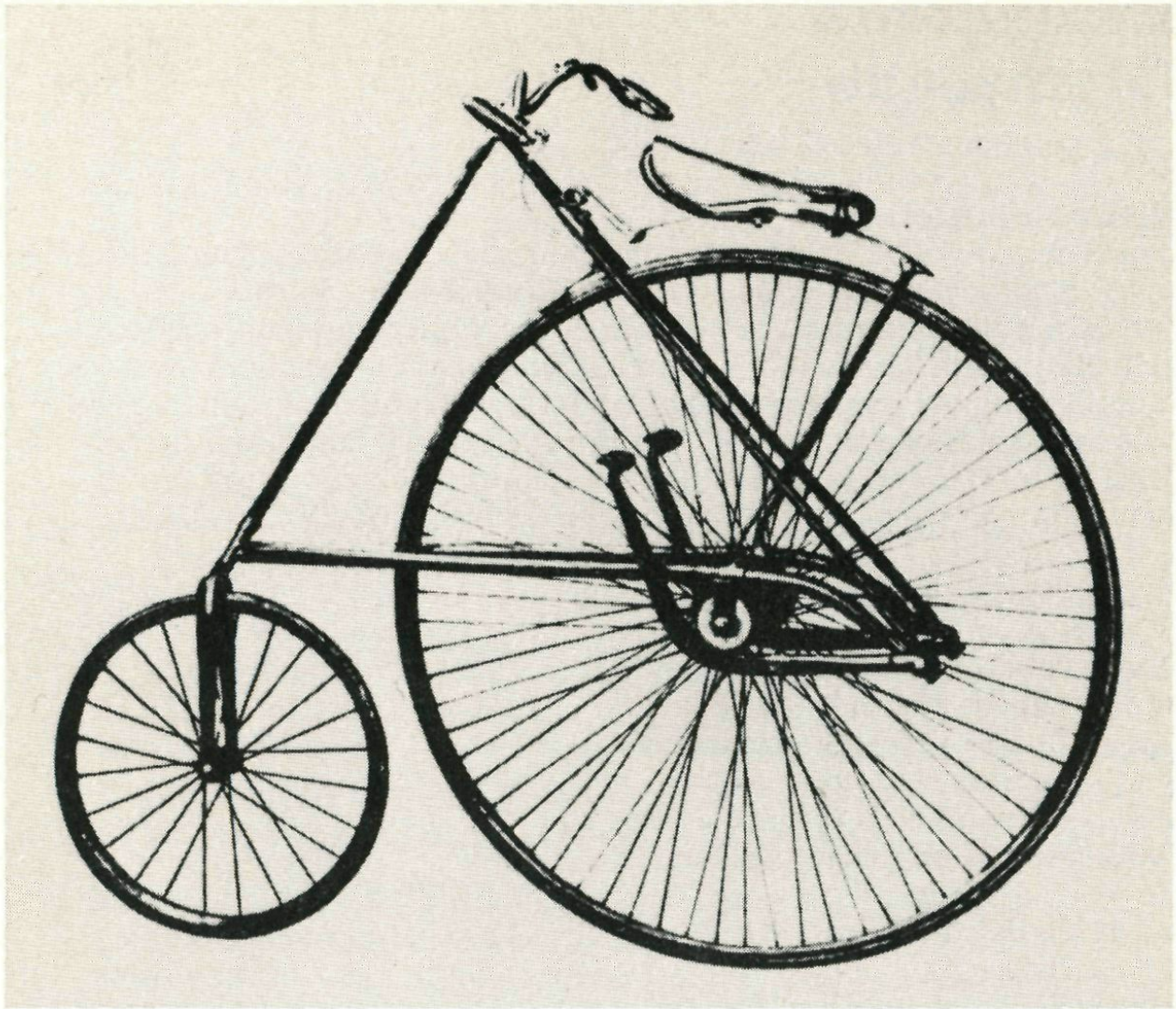
De 54×12 wordt gebruikt bij de eindsprint. Het komt er dan op aan om die kortstondig met zoveel mogelijk pedaalslagen per minuut rond te draaien. Gemak en efficiën-

tie spelen daarbij een ondergeschikte rol. De snelheden die worden bereikt, komen een heel eind in de buurt van de 60 kilometer per uur (zie tabel). Houdt absoluut niemand op een gewone vlakke weg langdurig vol.

Waarom gebruikte Moser dan geen gestroomlijnde gewone racefiets? Om het verzet hoefde hij het niet te laten. Vermoedelijk is de totale luchtweerstand van fietser plus fiets bij gebruik van zo'n groot achterwiel kleiner. Wat dat betreft helpen alle kleine beetjes, want het verzet van Moser is niet gering. Zeker als je dat vergelijkt met de omstandigheden waarbij overeenkomstige verzetten worden gebruikt bij wegwedstrijden. □

Hoge versnellingen van een gewone racefiets

Versnelling	Verzet	Snelheid bij 90 pedaalslagen	Snelheid bij 100 pedaalslagen
54×14	8,31 m	44,874 km per uur	49,9 km per uur
54×13	8,95 m	48,330 km per uur	53,7 km per uur
54×12	9,70 m	52,380 km per uur	58,2 km per uur



Fiets uit 1881. Ook al met een enorm groot achterwiel (maar met een zeer ongebruikelijk trapstel).

Ook mooi!

Naar aanleiding van 'Is dat niet mooi?' uit Pythagoras 27-4 bladzijde 3 stuurde *D. Boonstra* uit Amstelveen ons onder andere de volgende fraaie vondsten:

$$(3 + 4)^3 = 343$$

$$243 : 324 = 324 : 432$$

Uit de tweede vondst is ook nog af te leiden:

$$486 : 648 = 648 : 864$$

Wie weet nog meer?

□



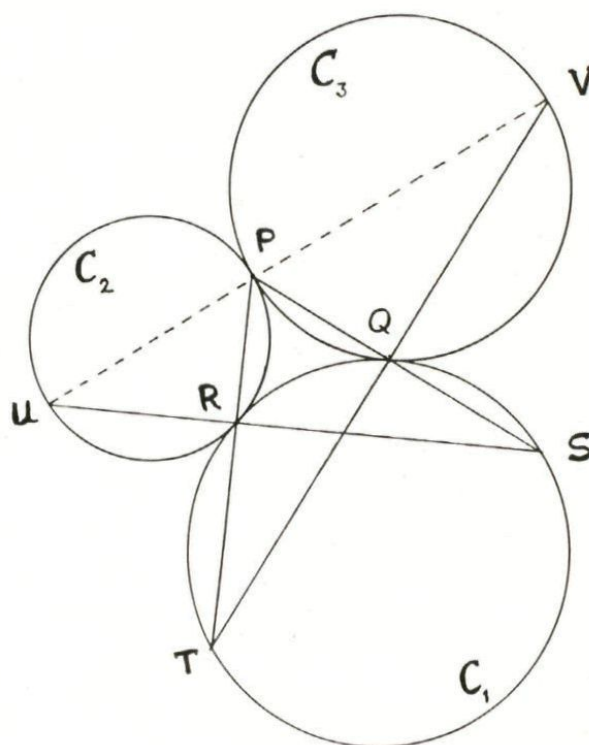
Nieuwe opgaven

Oplossingen vóór 15 oktober insturen naar: *Pythagoras Olympiade, Marinus de Jongstraat 12, 4904 PL OOSTERHOUT (NB)*. Vermeld op elk (éénzijdig beschreven) vel je naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas. Verder moet elke oplossing op een nieuw vel beginnen, want we corrigeren ze afzonderlijk. We bekijken alleen goed leesbare oplossingen die volledig zijn uitgewerkt, met verklarende tekst in goed lopende zinnen. Verdere informatie over de wedstrijd vind je in nummer 1 van deze jaargang op bladzijde 24.

PO 114

Drie cirkels C_1 , C_2 en C_3 raken elkaar uitwendig in de punten P , Q en R (zie figuur). De lijnen PQ en PR snijden cirkel C_1 nogmaals in respectievelijk S en T , de lijnen SR en TQ snijden C_2 en C_3 nogmaals in respectievelijk U en V .

- Bewijs dat de punten U , P en V op één lijn liggen.
- Bewijs dat $PS \perp TV$ en $PT \perp US$



PO 115

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = 3^x$.

Verder zijn gegeven twintig getallen $a_1, \dots, a_{10}, b_1, \dots, b_{10}$ met $a_1 = b_1 = 1$ en

$a_{n+1} = f(a_n)$, $b_{n+1} = g(b_n)$ als n even,

$a_{n+1} = g(a_n)$, $b_{n+1} = f(b_n)$ als n oneven.

Welk van de beide getallen a_{10} en b_{10} is het grootste?
Motiveer je antwoord!

Oplossing en prijswinnaars van de opgaven PO 108 en 109

PO 108

Bewijs dat

$$3^{1988} + 6^{1988}$$

deelbaar is door 17.

Oplossing van Bart Kindt, Zwalm, België:

$(2^4 + 1)(2^{1984} - 2^{1980} + 2^{1976} - 2^{1972} + \dots + 2^8 - 2^4 + 1) = 2^{1988} + 1$
dus $2^{1988} + 1$ is een 17-voud
($17 = 2^4 + 1$).

Bijgevolg is ook

$$6^{1988} + 3^{1988} = 3^{1988}(2^{1988} + 1)$$

een 17-voud.

Opmerking: *Arthur Bakker* (5 vwo, Bergen, NH) en *David Diepbrink* (5 vwo, Koog a/d Zaan) merkten op dat in het algemeen $6^{8n+4} + 3^{8n+4}$ deelbaar is door 17 voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Er waren 15 inzendingen, allemaal correct.

Prijswinnaars: *David Diepbrink*, en *Viet Nguyen Hoang*, 5 vwo, Nijmegen.

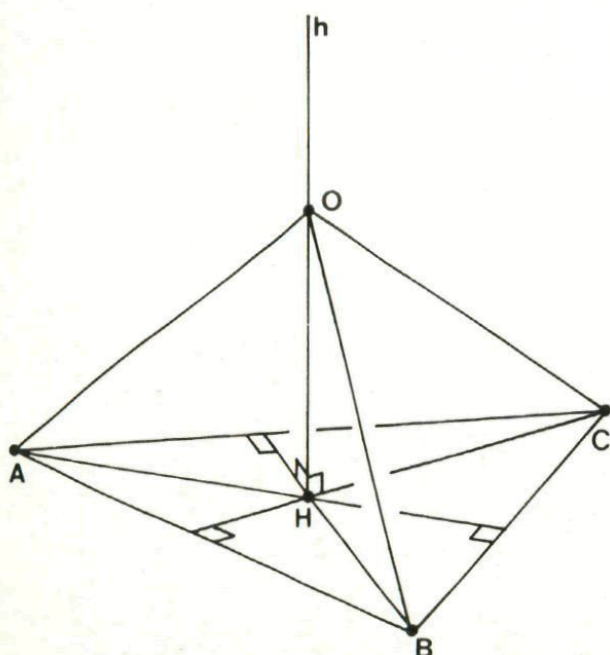
PO 109

Gegeven is een scherphoekige driehoek ABC . In het hoogtepunt H van de driehoek richt men een halfrechte h op, loodrecht op het vlak van de driehoek.

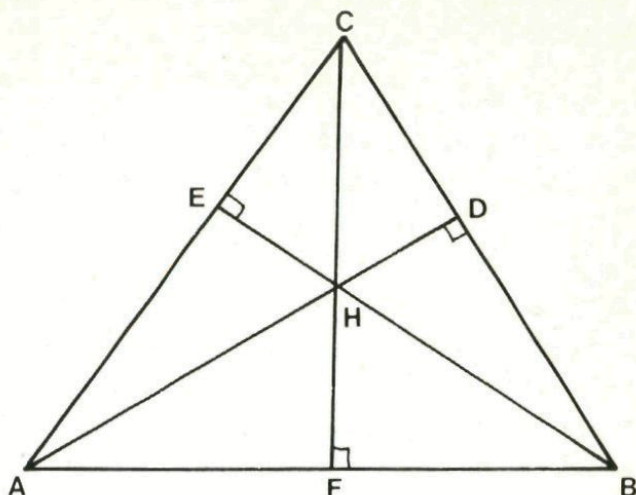
Bewijs dat er een punt O op h is zo, dat de lijnen OA , OB en OC elkaar in O loodrecht snijden.

Oplossing van *Arthur Bakker*, 5 vwo, Bergen (NH):

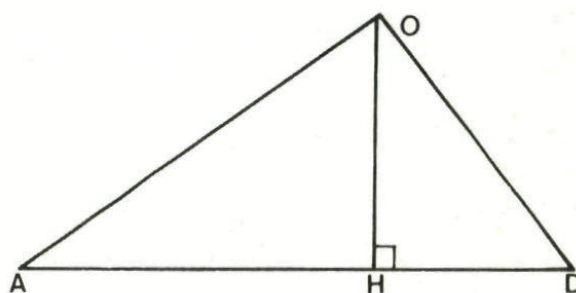
In figuur 2 zijn de driehoeken AHF en CHD gelijkvormig, dus $AH:CH =$



Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3

$FH:DH$, dat wil zeggen $AH \cdot DH = CH \cdot FH$. Kies O op h zo, dat $OH^2 = AH \cdot DH = CH \cdot FH$. Dan geldt (figuur 3) $OH:DH = AH:OH$, dus de driehoeken AHO en OHD zijn gelijkvormig. Bijgevolg geldt $\angle A + \angle B = \angle HOD + \angle B = 90^\circ$ dus $\angle AOD = 90^\circ$. Maar ook geldt dat BC loodrecht staat op vlak AOD , dus BC staat loodrecht op AO . Hieruit volgt dat AO loodrecht op vlak OBC staat, dus $\angle AOB = \angle AOC = 90^\circ$. Op dezelfde wijze kun je bewijzen dat uit $OH^2 = CH \cdot FH$ volgt dat $\angle COB = 90^\circ$ (en $\angle COA = 90^\circ$, maar dat wisten we al), waarmee het bewijs is voltooid.

Er waren 9 inzendingen, waarvan 8 correct.

Prijswinnaars: *Bart Kindt*, 6e klas, Zwalm, België, en *Segher Boessenkool*, 3 vwo, Den Helder. $\square$

Redactioneel

De voorplaat bevat de figuur waar alles om draait in het artikel 'De kip en het ei'. Net als 'Wiskunde op de fiets' is dat artikel wat langer dan je gewend bent. Beide artikelen zijn voorzien van enkele kleinere kaderstukjes.

Met dit nummer zijn we dan helaas gekomen aan het einde van de 27e jaargang. Helaas, want we hadden nog zo veel meer in petto. Zo hadden we bij voorbeeld nog aandacht willen besteden aan moiré, aan de drakekromme, aan symmetrie en aan computertoepassingen. We hadden nog wat meer willen vertellen over de conchoïde, de kromme die even ter sprake kwam in Pythagoras 27-3, en over de rotators die in Pythagoras 27-4 aan bod kwamen. En, niet te vergeten, het artikel 'Waar gaat dat heen?' uit Pythagoras 27-1!

Dat alles kun je dus in de volgende jaargang verwachten. □

Wiskunde op de fiets: oplossingen

Niet in fase

Denk erom dat beide wielen een geheel aantal omwentelingen moeten maken. De aangenomen stand bij de start (ventielen van beide wielen in de laagste stand) wordt voor het eerst weer bereikt na 117 omwentelingen van het achterwiel en 206 van het voorwiel.

Op het hele traject komt die stand in totaal 133 keer voor.

Uit de praktijk

De verzetten bij wieldiameters van 27 inch zijn

Hampsten: $42 \times 19 \rightarrow 4,76$ meter en $42 \times 20 \rightarrow 4,52$ meter

Breukink: $40 \times 19 \rightarrow 4,53$ meter en $40 \times 20 \rightarrow 4,30$ meter □

Uitgave onder toezicht van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Lay-out: Klaas Lakeman, Amsterdam.

Tekenwerk: Hans van Kuyk, Amsterdam.

Foto's en andere illustraties: Mathematical Models, H. Martyn Cundy & A.P. Rollett, Londen (omslag, blz. 3, 6, 7, 8, 10); Klaas Lakeman, Amsterdam (blz. 4, 14, 15, 16, 17, 18, 22, 25); Geometry and the imagination, Hilbert-Cohn Vassen, Chelsea, 1952 (blz. 9); Hessel Pot, Woerden (blz. 11, 12, 13); Peter Bata (blz. 19); ANP-foto, Amsterdam (blz. 21); Presto Cycle Sport, Amsterdam (blz. 24); Jan van de Craats, Oosterhout (NB) (blz. 30, 31).

© 1988 Redactie Pythagoras - ALLE RECHTEN VOORBEHOUDEN, NADRUUK OF WEERGAVE, GEHEEL OF GEDEELTELIJK, IN WELKE VORM DAN OOK, ZONDER TOESTEMMING VAN DE REDACTIE VERBODEN.

Pythagoras wiskunde tijdschrift voor jongeren

Redactie: Jan van de Craats, Klaas Lakeman, Hans de Rijk.

Medewerkers: Popke Bakker, Gerard Bäuerle, F. van der Blij,
Niels M. Buizert, Hans Lauwerier, Hessel Pot.

Redactiesecretariaat: Klaas Lakeman, Cornelis Krusemanstraat 60^{II},
1075 NS Amsterdam (NL).

Inhoud jaargang 27, nummer 6

De kip en het ei / 1

Klaas Lakeman

Driehoeksformules / 11

Niels M. Buizert/Hessel Pot

Hoogtelijnen door één punt / 14

Klaas Lakeman

Bijna zonder passer / 16

Klaas Lakeman

Rangeer-perikelen 4: oplossing / 19

Klaas Lakeman

Wiskunde op de fiets, hoe vind je zo iets / 20

Klaas Lakeman

Ook mooi! / 29

Klaas Lakeman

Pythagoras Olympiade / 30

Jan van de Craats

Redactioneel / 32

Pythagoras verschijnt zesmaal per schooljaar; opgave van abonnementen bij de uitgever (zie onder).

men ook de reeds verschenen nummers. Betaling per acceptgirokaart.

Abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 september schriftelijk bij de uitgever is opgezegd.

Bij tussentijdse abonnering ontvangt

Tarieven*

Abonnement Pythagoras

Inclusief Archimedes

Losse nummers

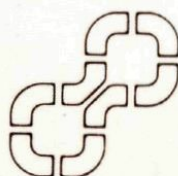
* Luchtpost-toeslag 15%

NLG/BEF

20,—/365

36,—/660

5,—/ 90



stichting ivio

Postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL).

Tel. 03200-76411

educatieve uitgeverij - instituut voor buitenschools

onderwijs - wereldschool - AO-reeks - leerprojecten

Postgiro Nederland: 287934

Postcheck België: 000-0130850-94