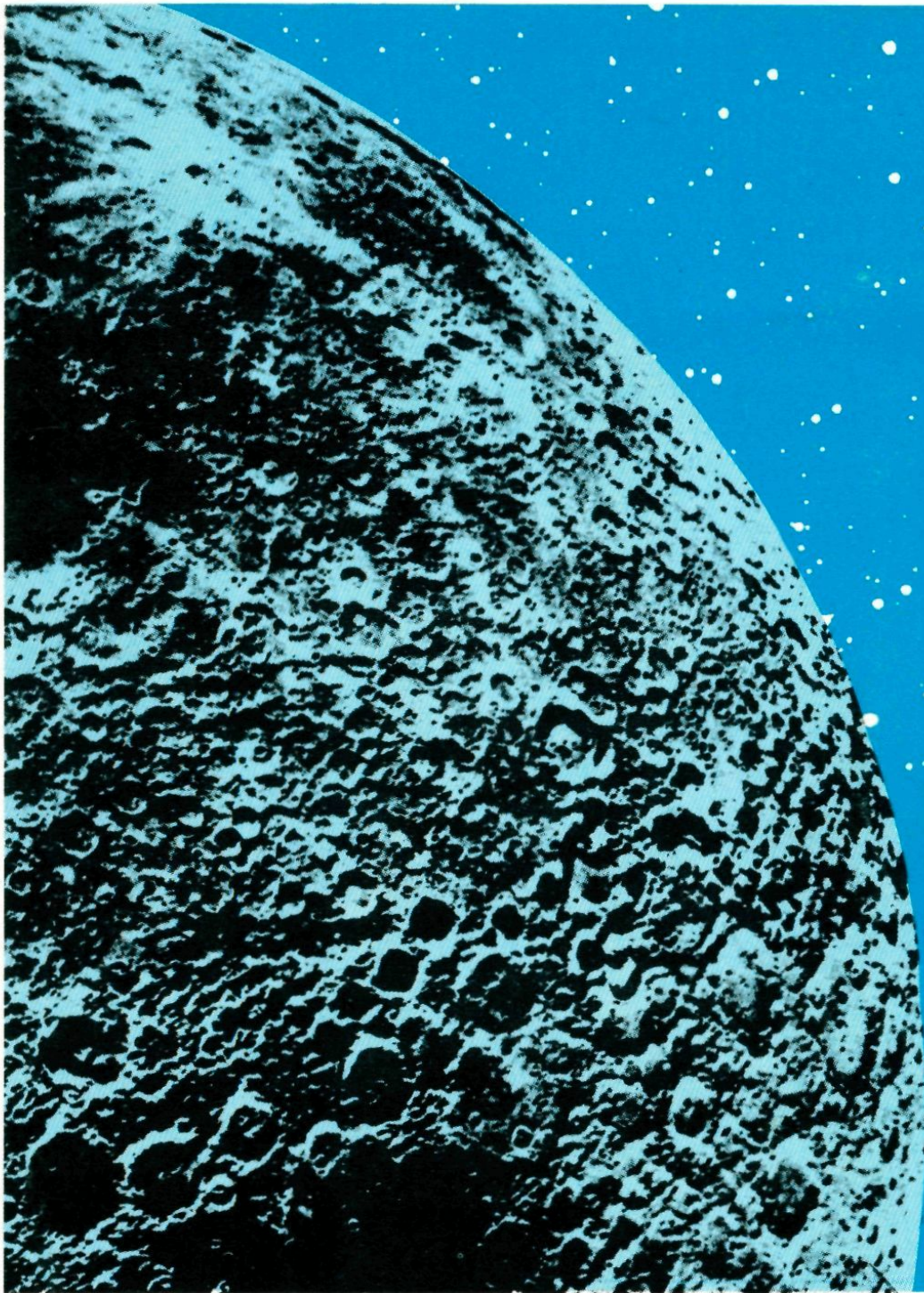




Pythagoras



wiskunde tijdschrift voor jongeren

stichting ivio

jaargang 28
nummer 1
november 1988

Stapelen van buizen en bezemstelen



Buizen, ongeordend.

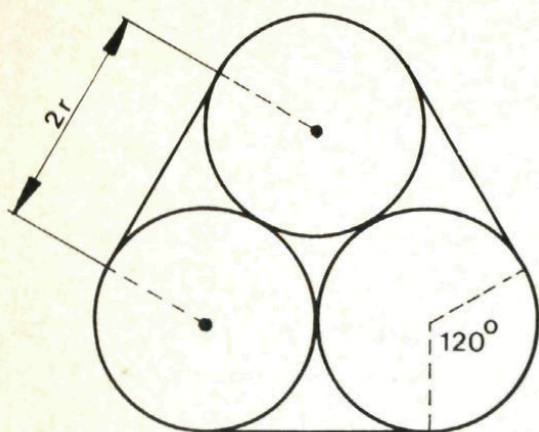
We moeten een aantal losse bezemstelen tot een bundel samenbinden. Daartoe trek je een paar touwtjes strak om de stokken. Ik probeerde dat laatst met een aantal van vijf stuks. Toen het karwei naar beste vermogen geklaard was, bleek het resultaat nogal tegen te vallen. De zaak rammelde. Opnieuw geprobeerd, de touwen flink aantrekken, maar er bleef behoorlijk beweging in de zaak zitten. Misschien waren de stokken niet op de meest ideale manier gestapeld? Hoe zou dat dan moeten? We dienen dié stapeling te nemen die een minimale omtrek heeft! In de volgende tekeningen zijn de stokken telkens vervangen door cirkelvormige doorsneden.

Bij drie en vier stokken

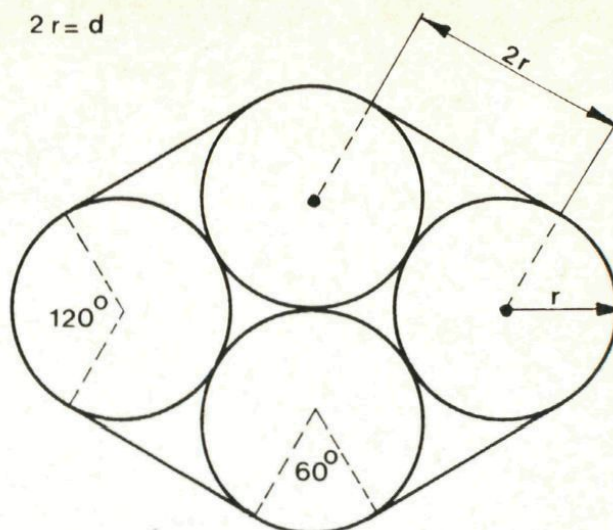
Laten we eens beginnen met drie bezemstelen. Dat lijkt niet moeilijk. We laten de stokken elkaar twee aan twee raken, zodat de centra een gelijkzijdige driehoek vormen. Als we er dan een touw strak omheen trekken, raken we

elke stok over een derde deel van de omtrek (figuur 1). De oversteek van stok tot stok heeft steeds een lengte van twee keer de straal of de diameter ($2r = d$). De totale touwomtrek wordt dan:

$$\pi d + 3d \text{ of } d(\pi + 3).$$



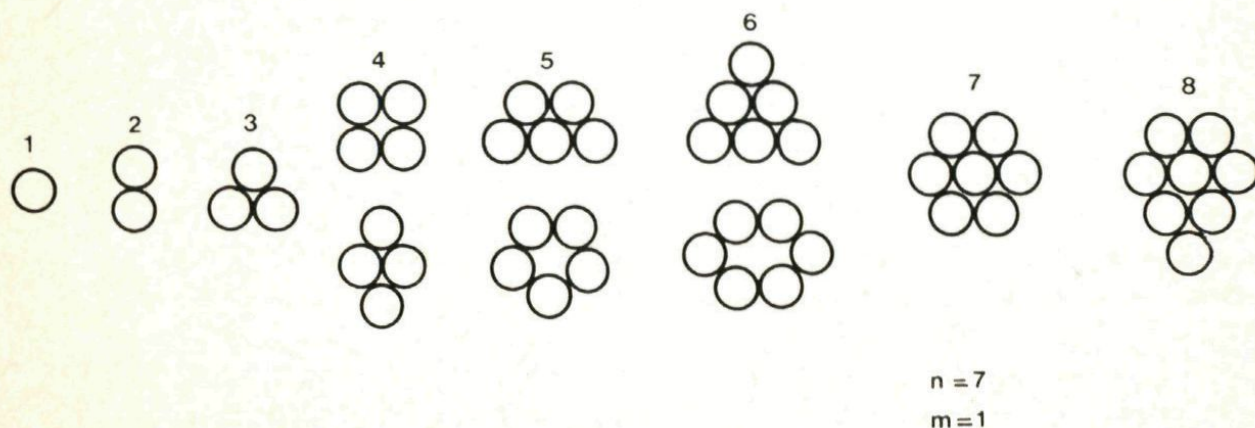
Figuur 1. Een bundel van drie stokken.



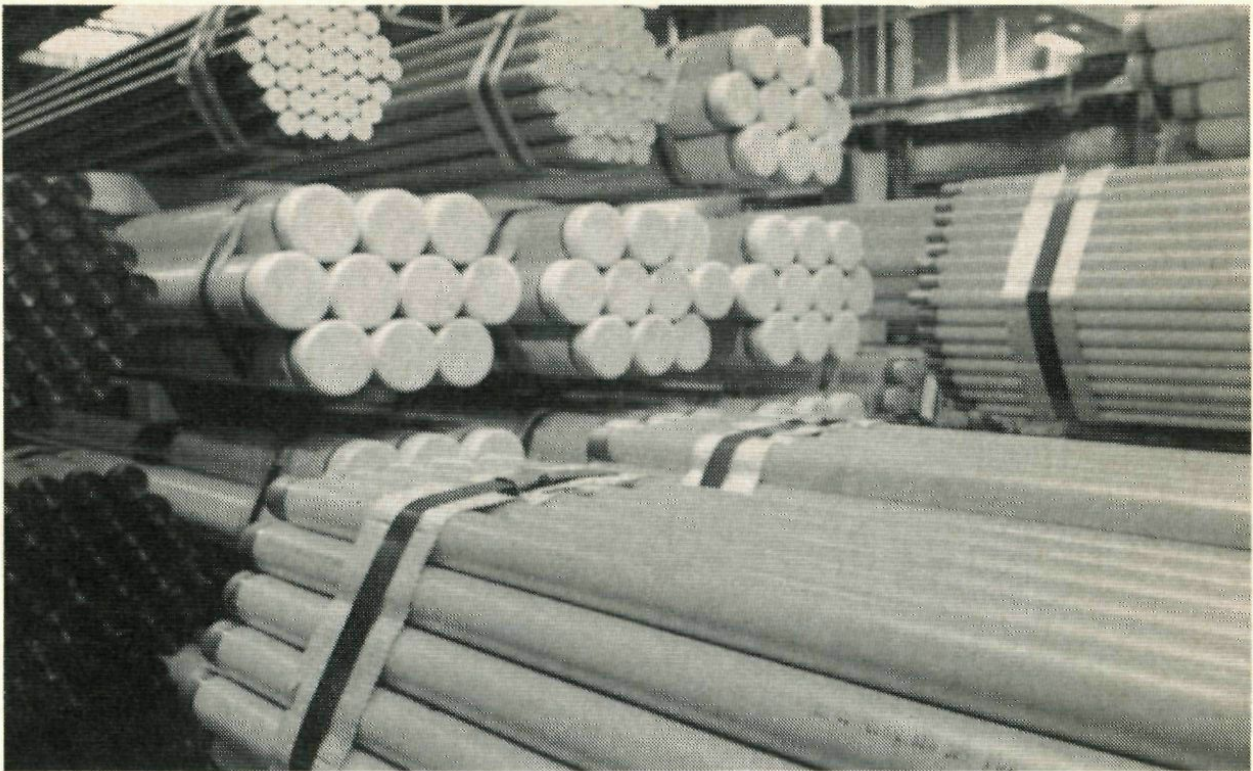
Figuur 2. Een bundel van vier stokken.

Hoe gaat het bij vier stokken? In figuur 2 staat een voorstel. We laten de cirkels elkaar weer twee aan twee raken; de centra vormen de hoekpunten van een ruit met hoeken van 60° en 120° . Lees af voor de touwomtrek: $d(\pi + 4)$. Maar in plaats van de ruitconstructie kunnen we ook voor een vierkant kiezen. In figuur 3 staan beide mogelijkheden. Maar de omtrek van het bindtouw blijft hetzelfde! Ga dat maar na.

Als je nu gaat duwen in de richting van een van de diagonalen van het vierkant, krijg je de ruittoestand, zonder dat de omtrek van het pakket verandert. Dat heeft een heel vervelend gevolg. Ondanks strak aantrekken, blijven de stokken niet behoorlijk op hun plaats. De zaak rammelt. We noemen die situatie labiel. In tegenstelling tot het geval van drie stokken; daar was de situatie stabiel, onvervormbaar.



Figuur 3. Bundels voor $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.



Figuur 4. Zeskantstapeling: bundels van 37, 61 en 169 stuks. Let op de stapelwijze bij een groep van 10.

Onderzoek

We gaan wat systematischer zoeken naar oplossingen. In figuur 3 staan de gevallen met $n = 1, 2, 3, 4$ (n is het aantal samen te binden bezemstelen). Hoe wordt het voor $n = 5$? In figuur 3 staan twee mogelijkheden getekend. In beide gevallen wordt de uitkomst voor de omtrek: $d(\pi + 5)$. Je ziet dat gemakkelijk.

Allereerst is het opvallend dat we steeds de term πd tegenkomen. Dat komt omdat we in alle gevallen precies eenmaal rondgaan. Maar er zijn meer stapelmogelijkheden met dezelfde minimale omtrek. Daarom is bij $n = 5$ de toestand weer labiel.

Bij de getekende situaties met $n = 6$ is de uitkomst $d(\pi + 6)$. Immers de totale lengte is: één cirkelom-

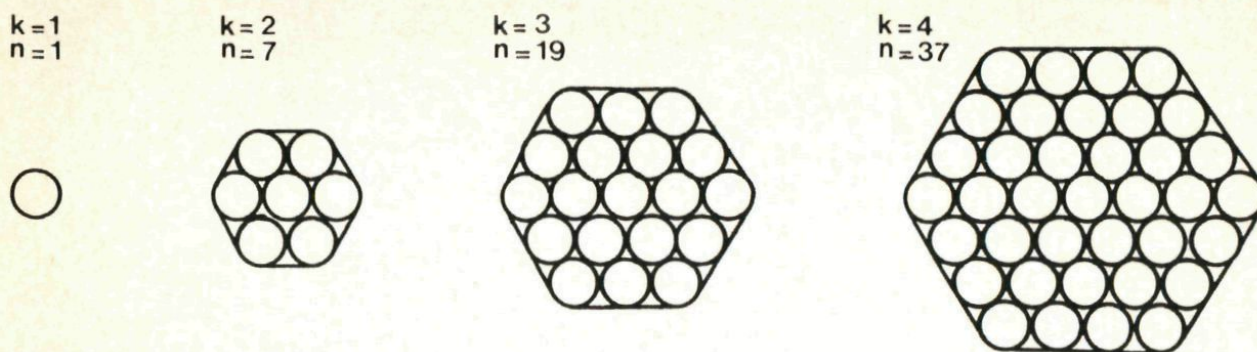
trek plus zes stukken met ieder een lengte van twee keer de straal of zes keer de diameter. Wat denk je, zou dit ook de minimale omtrek zijn?

Bij $n = 7$ krijgen we dezelfde omtrek! En voor $n = 8$ (druiventros) komt er uit: $d(\pi + 7)$.

Zou er een algemene formule te bedenken zijn? In het geval dat de cirkels die door het bindtouw worden geraakt, elkaar twee aan twee raken, n het totale aantal cirkels voorstelt en m het aantal binnenin, komen we uit op:

$$d(\pi + n - m).$$

De fraaiste oplossing die we tot dusver zijn tegengekomen en die bovendien stabiel is, treffen we aan bij zeven stokken. Eén exem-

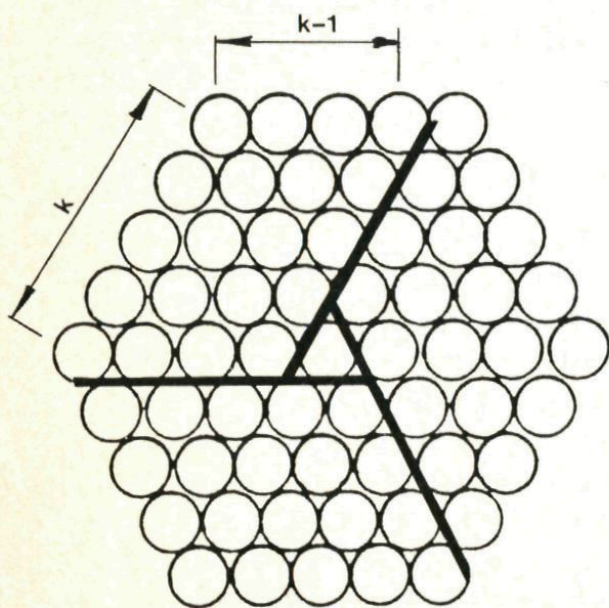


Figuur 5. Zeskantstapelings voor $k = 1, 2, 3$ en 4 .

plaat in het centrum en zes er om heen. Die pakking is stevig en onvervormbaar, als het touw tenminste strak wordt aangetrokken. Stabiele toestanden hebben we tot nu toe ontmoet bij $n = 1, 3$ en 7 .

Zeskantstapeling

In Oosterhout (NB) staat een grote buizenfabriek waar pijpen met staaldraad worden gebundeld. Hoe doen ze dat daar? We zijn ons licht er eens gaan opsteken. De zeskantformatie blijkt voor hen de enig aanvaardbare te zijn. Een uitzondering is er voor $n = 10$ (figuur 4).



Figuur 6

Ze werken daar vaak met grote aantallen buizen. In figuur 5 staan voorbeelden van bundels met aantallen $n = 7, 19, 37, \dots$

Telkens is de zeskantvorm favoriet.

Om de buizen te stapelen worden bakken gebruikt met hoeken van 120° in de vorm van trapeziumvormige goten. Bij dikkere buizen worden er minder tot een pakket samengesteld. Ze streven naar ongeveer gelijke omtrekken per pakket; dat vergemakkelijkt het stapelen, en dus het vervoer en de opslag.

Formule

Welke aantallen zijn te realiseren bij keuze van de zeskant? Na 37 stuks blijkt 61 te volgen, dan 91, vervolgens 127 ... Kun je die aantallen voorspellen?

De algemene formule blijkt te zijn:

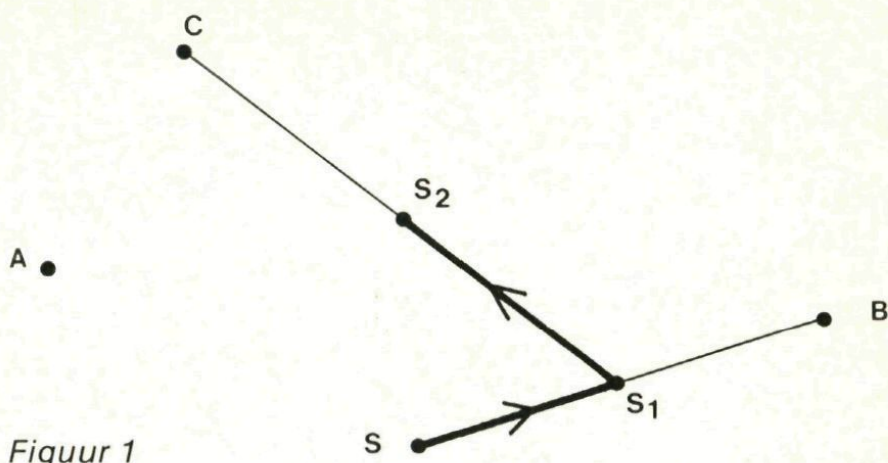
$$n = 3k(k-1) + 1$$

of anders geschreven

$$n = 3k^2 - 3k + 1$$

waarin k het aantal elementen aan één zijde van de zeskant en n het totale aantal buizen in de bundel. In figuur 6 zie je waarom deze formule geldig is. $\square$

Dobbelen met de computer



Zet op een velletje papier willekeurig drie punten (niet op één lijn) en geef ze bij voorbeeld aan met A , B en C . Zet (ook willekeurig) nog ergens een vierde punt S . Dat is het startpunt. Trek van uit dit punt S een hulplijn naar één van de punten A , B of C . Bepaal door loting naar welk punt. Zet precies in het midden van die hulplijn een stip S_1 en gum de hulplijn eventueel weer uit (figuur 1). Ga in S_1 net zo te werk als in S . Bepaal door loting naar welke punt A , B of C een hulplijn moet worden getrokken. Zet precies in het midden van die hulplijn een stip S_2 . Doe in S_2 weer hetzelfde als in S en S_1 , en ga zo maar door.

Hoe komt de verzameling van alle punten S er uit te zien, als dit voorschrift maar vaak genoeg wordt herhaald?

Het resultaat

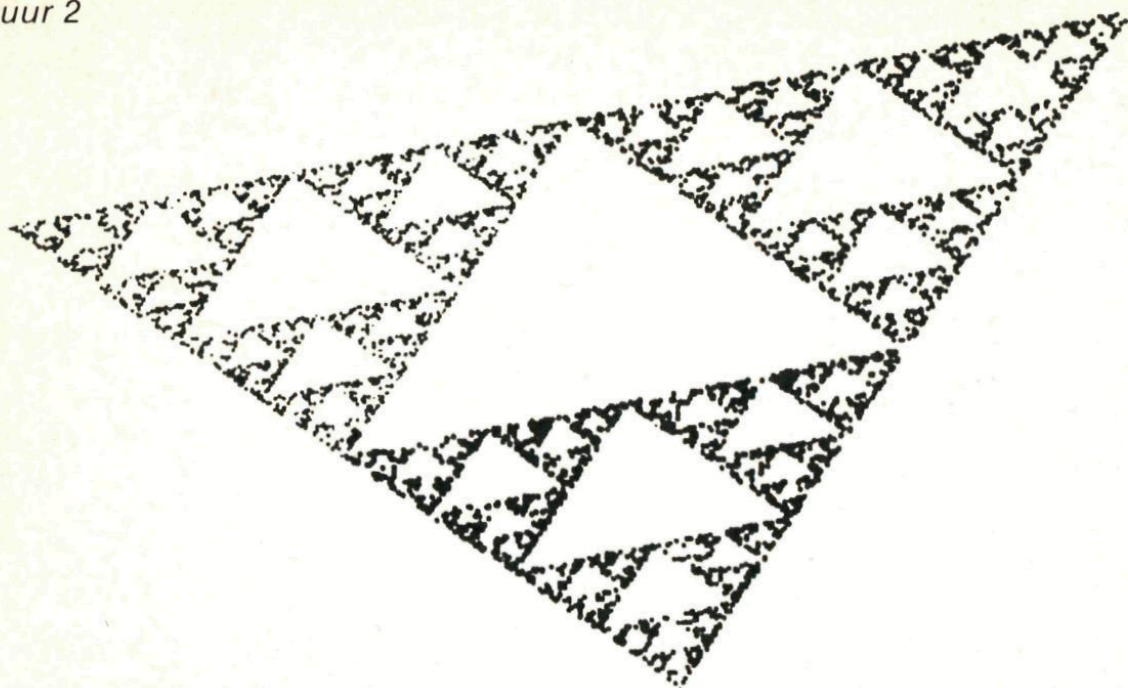
Onder de titel 'Waar gaat dat heen?' werd dit probleem aan de orde gesteld in het eerste nummer van de vorige jaargang (Pythagoras 27-1). Het werd gelanceerd door niemand minder dan de Duitse wiskundige Heinz-Otto Peitgen, een van de schrijvers van het fraaie boek 'The beauty of fractals' (zie het artikel 'Het appelmanne-tje' in Pythagoras 26-6).

Goede oplossingen en fraaie plotter-tekeningen ontvingen we van *Paul Gondrie* uit Best (figuur 2), *Rob Suykerbuyk* uit Tilburg en *N. Kraeima* uit Zwolle. Inderdaad, om een goed beeld van die verzameling te krijgen moet het voor-

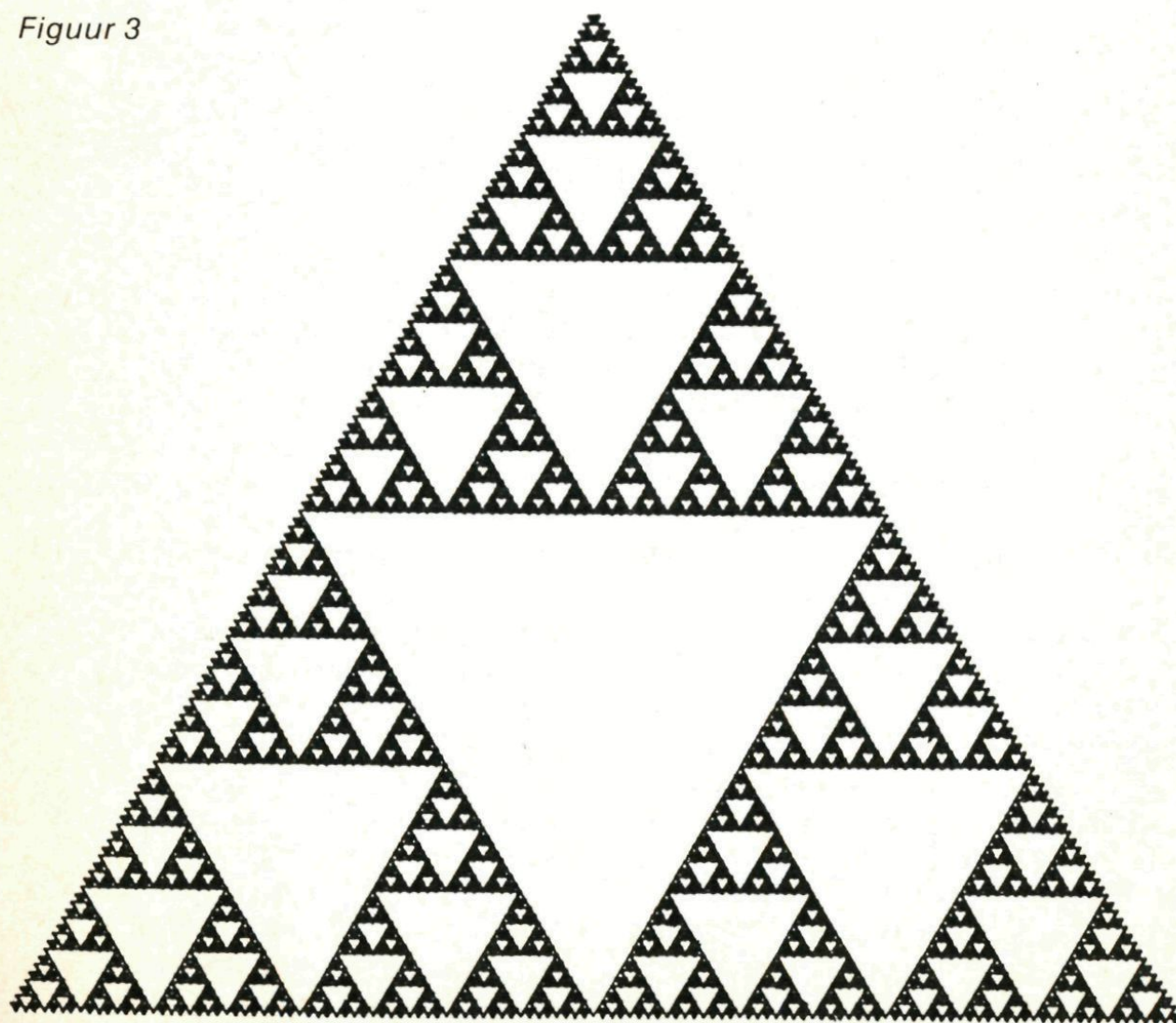
schrift door de computer worden uitgevoerd en zo mogelijk geplot. Met de hand is er geen beginnen aan! En zoals figuur 2 laat zien, is het resultaat voor velen waarschijnlijk heel verrassend.

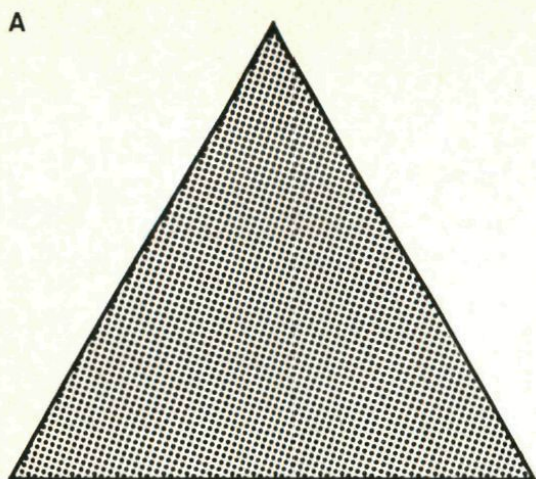
Vooruitlopend op een uitvoerige behandeling van dit probleem, gaven we op het omslag van nummer 5 van de vorige jaargang (Pythagoras 27-5) al een oplossing (figuur 3). Hierbij zijn de punten A , B en C zo gekozen dat ze de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek vormen. Dit resultaat staat bekend als de Zeef van Sierpinski, naar de Poolse wiskundige Waclaw Sierpinski (1882-1962).

Figuur 2

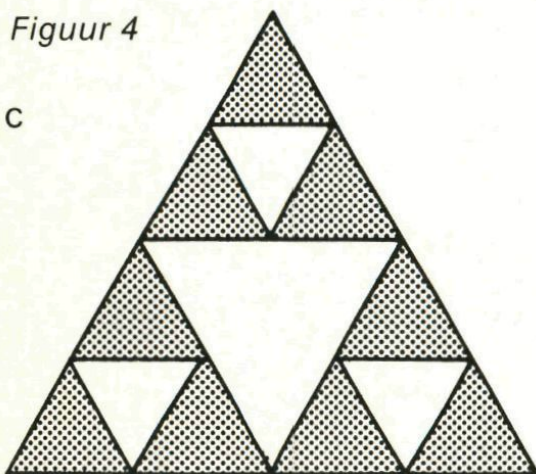


Figuur 3



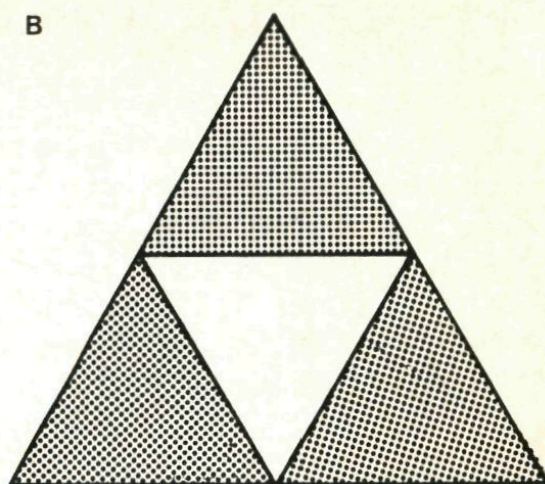


Figuur 4

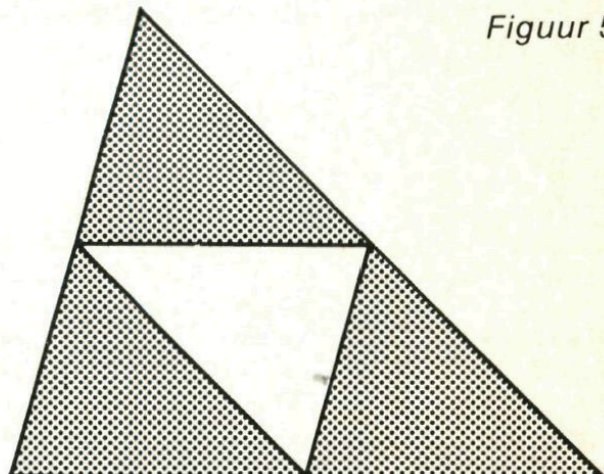


Zeef van Sierpinski

Voor de constructie van zijn zeef gebruikte Sierpinski echter een ander tekenvoorschrift dan dat punten-zetten van Peitgen. Er wordt uitgegaan van een massief gedachte gelijkzijdige driehoek (figuur 4a). Die wordt verdeeld in vier congruente kleinere gelijkzijdige driehoeken, waarvan de middelste wordt verwijderd (figuur 4b). Met elk van de andere drie massieve gelijkzijdige driehoeken wordt weer hetzelfde gedaan. Zo ontstaan nog drie kleinere driehoekige gaten (figuur 4c). Elk van de overgebleven negen massieve gelijkzijdige driehoeken wordt opnieuw verdeeld in vier kleinere gelijkzijdige driehoeken, enzovoort, enzovoort.



Figuur 5

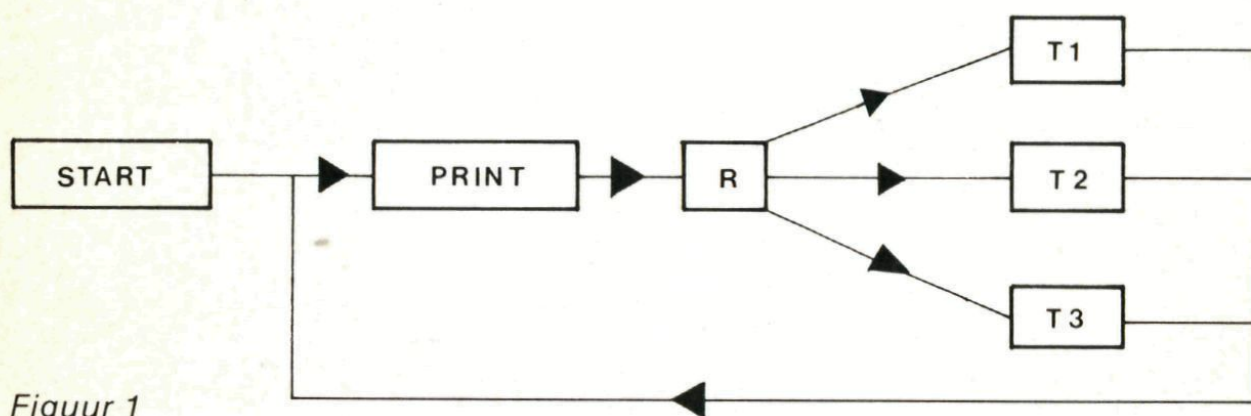


Dit tekenvoorschrift kan natuurlijk op elke massief gedachte driehoek worden toegepast. Nieuwe hoekpunten van de kleinere driehoeken moeten dan op de middens van de zijden van de oorspronkelijke massieve driehoek worden gekozen (figuur 5). Enzovoort.

Met alleen de oplossing en de constatering dat met een ander tekenvoorschrift hetzelfde resultaat kan worden verkregen, zijn we natuurlijk niet tevreden. Daarom gaan we in een ander artikel uitvoeriger op de zaken in. Want je wilt misschien toch wel weten of van te voren niet was te voorzien wat het resultaat van dat punten-zetten wordt. □

Het geheim van de zeef

In het artikel 'Dobbelen met de computer' zie je het resultaat van een meetkundig 'dobbelspel' met de computer. Het is de zogenaamde Zeef van Sierpinski, die tevoorschijn komt bij een recept waarbij de computer punten op het scherm tekent door telkens een 'willekeurige' keuze te doen uit drie mogelijkheden. Figuur 1 is een schematische weergave van het procédé. Er zijn drie meetkundige *transformaties* T1, T2 en T3 in het spel: elke T is een puntvermenigvuldiging met een factor $1/2$. De drie centra zijn de hoekpunten van een vast gekozen driehoek. Verder heb je een *random-generator* R nodig: een soort computer-dobbelsteen die telkens voor de 'willekeurige' keuze van één van de drie T's zorgt. En ten slotte is er het beeldscherm, waarop elke keer een nieuw punt geprint wordt.



Figuur 1

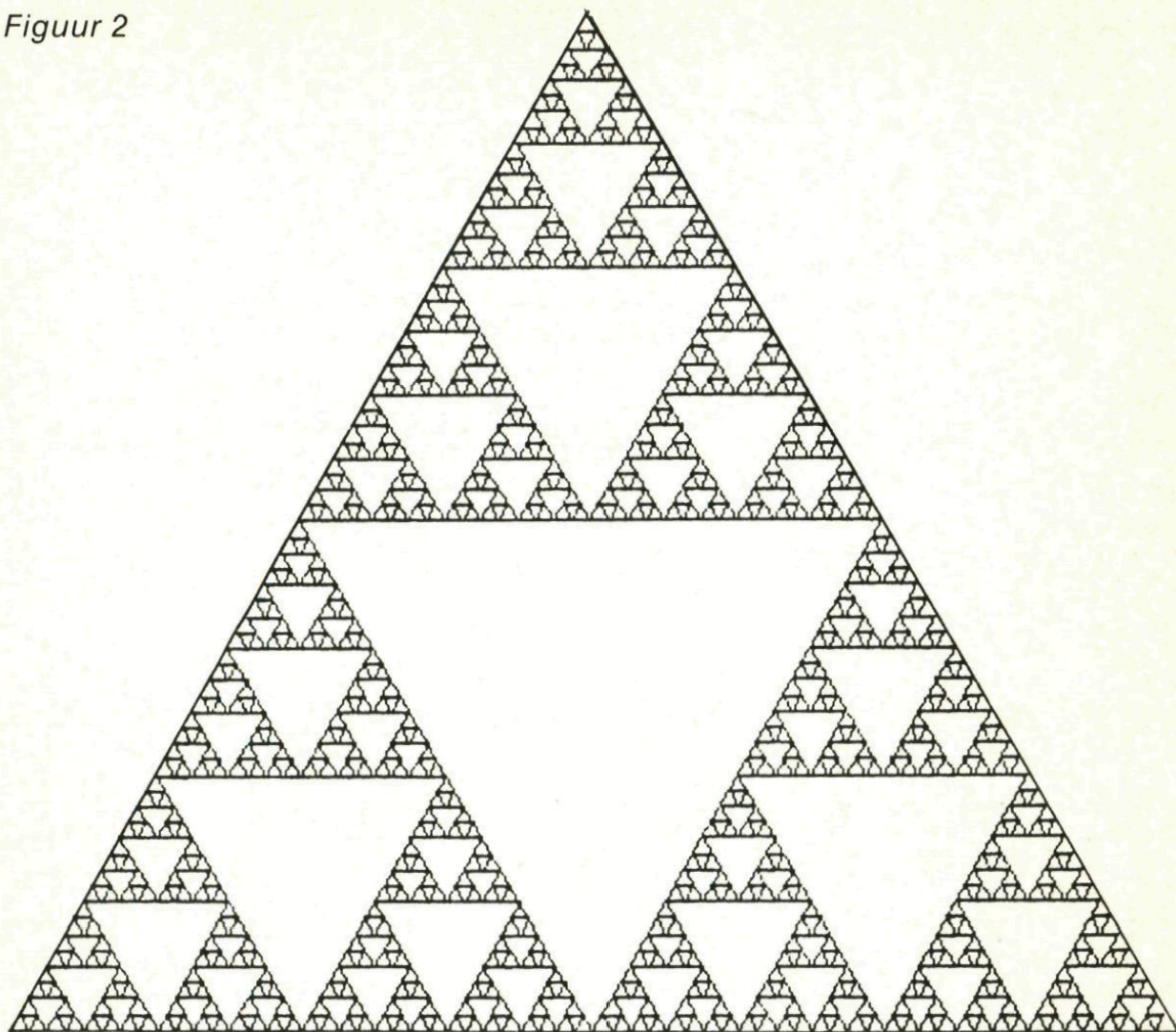
De verrassing komt als je de computer een tijdje voor je laat werken. Je ziet dan geleidelijk een prachtig driehoekspatroon ontstaan: de Zeef van Sierpinski, met als hoekpunten de centra van de drie puntvermenigvuldigingen T1, T2 en T3. We zullen daar nu een verklaring voor geven. Die bestaat uit twee gedeelten. In het eerste deel laten we zien dat de zeef *zelfgelijkvormig* is onder elk van de drie transformaties T1, T2 en T3, en in het tweede deel tonen we aan dat de zeef een *attractor* is van het computerdobbelspel. Natuurlijk leggen we netjes uit wat we onder deze gewichtig klinkende termen verstaan.

Zelfgelijkvormig

Bekijk de Zeef van Sierpinski die in figuur 2 getekend is. Hij is niet ontstaan via ons computer-dobbelspel, maar op een andere manier. Een driehoek is in vier congruente deeldriehoeken verdeeld, en het binnengebied van het mid-

delste deel is verwijderd. Met de overblijvende drie delen is precies hetzelfde gedaan (in vier delen en het middelste deel verwijderen) en zo steeds maar verder. Wat overblijft is de zeef. Let nu eens op wat er gebeurt als je de zeef vanuit een hoekpunt

Figuur 2



vermenigvuldigt met een factor $1/2$. Neem bijvoorbeeld het linkerbenedenhoekpunt. De hele zeef komt dan precies terecht op een deel van zichzelf, namelijk op de driehoek linksonder. Dat is wat we verstaan onder zelfgelijkvormigheid: een deel is gelijkvormig met het geheel.

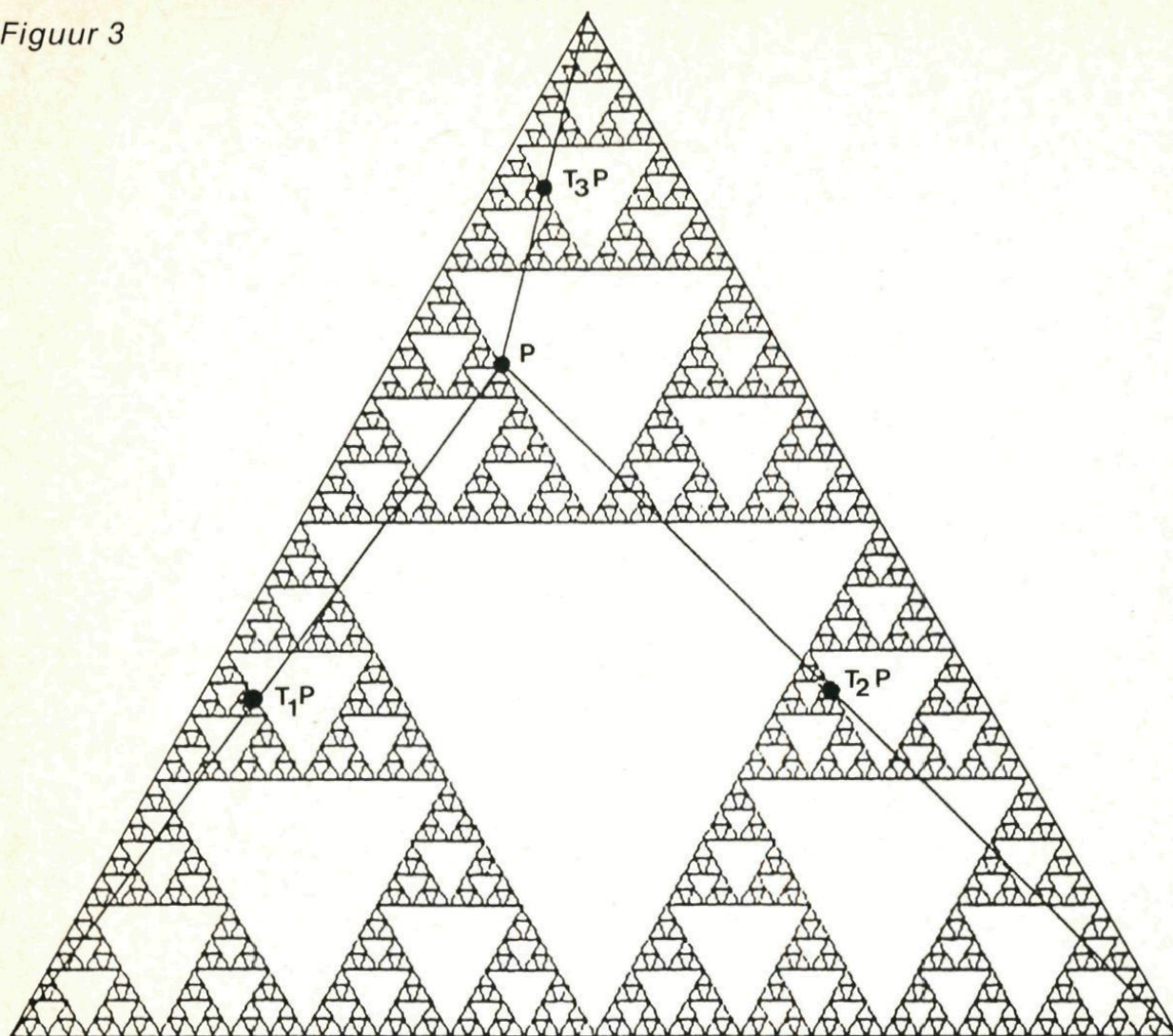
De reis van één punt

Neem nu een willekeurig punt P van de zeef, en kijk wat er gebeurt als je er één van de transformaties T_1 , T_2 of T_3 op toepast (figuur 3). Welke van de drie transformaties je ook kiest, altijd zal het beeld weer op de zeef liggen. Dat volgt uit de zelfgelijkvormigheid.

En als je dus P kiest als startpunt voor het procédé van figuur 1, zullen de beeldpunten steeds over de zeef blijven rondlopen.

Als het dubbelen eerlijk gebeurt, zal het punt P op zijn reis op den duur alle hoeken en gaten van de zeef wel een keer aandoen. Er is geen deeldriehoek die niet bezocht wordt als je maar lang genoeg doorgaat. Dat verklaart waarom het procédé van figuur 1 zo'n mooi patroon oplevert in het geval dat het startpunt P ergens op de zeef gekozen wordt. De zeef komt dan puntje voor puntje op het computerscherm te voorschijn.

Figuur 3



Attractor

Hoe zit het nu als je start met een volkomen willekeurig punt Q in het vlak? Ook dan verschijnt uiteindelijk de Zeef van Sierpinski op het scherm. Wat is daarvoor de verklaring?

Kies in gedachten bij zo'n punt Q een punt P op de zeef als 'reisgeenoot'. Waar je P precies kiest, is onbelangrijk, als P maar wel op de zeef ligt. De punten P en Q onderwerpen we nu beide aan dezelfde transformaties. Die laten we weer door de random-generator R bepalen. Wat er met P gebeurt, weten we al: P doorloopt de zeef, en komt op zijn reis op den duur overal wel eens langs.

En Q ? Let eens op de *onderlinge afstand* van P en Q . Die wordt telkens *gehalveerd*, want elke transformatie T is een puntvermenigvuldiging met een factor $1/2$. P en Q komen dus steeds dichter bij elkaar, en na een tijdje kun je ze op het scherm niet meer van elkaar onderscheiden. Dat gaat heel snel: na tien stappen is hun afstand al $2^{10} = 1024$ maal zo klein geworden.

Hiermee is verklaard waarom ook een willekeurig startpunt Q uiteindelijk het zeefpatroon laat zien: de zeef werkt als een *attractor* voor het dubbelprocédé: de opvolgende punten komen er steeds dichterbij te liggen. De zeef trekt het

```

10 SCREEN 3 : CLS
20 RANDOMIZE TIMER : WINDOW (-90,-75)-(90,75)
30 PI=3.141593
40 PHI=2*PI*RND : A1=75*COS(PHI) : A2=75*SIN(PHI)
50 PHI=2*PI*RND : B1=75*COS(PHI) : B2=75*SIN(PHI)
60 PHI=2*PI*RND : C1=75*COS(PHI) : C2=75*SIN(PHI)
70 S1=180*RND - 90 : S2 = 150*RND -75
80 REM *** de bovengrens van I geeft het aantal iteraties ***
90 FOR I = 1 TO 20000
100 ON INT(RND*3)+1 GOTO 110,120,130
110 X1=A1 : X2=A2 : GOTO 150
120 X1=B1 : X2=B2 : GOTO 150
130 X1=C1 : X2=C2 : GOTO 150
140 REM *** de vermenigvuldigingsfactoren zijn 1/2 ***
150 S1=(S1+X1)/2 : S2=(S2+X2)/2
160 REM *** de eerste 100 punten worden niet getekend ***
170 IF I>100 THEN PSET (S1,S2)
180 NEXT I
190 FOR N=1 TO 5 : BEEP : NEXT N
200 A$=INPUT$(1) : END

```

Figuur 4

bewegende punt naar zich toe. Het punt blijft bewegen, maar het loopt daarbij steeds dichters langs de zeef. Het effect op het scherm wordt nog mooier als je het procedé eerst een tijdje laat lopen zonder punten te printen. Het 'inschakelverschijnsel' dooft dan uit, en als je dan na bijvoorbeeld 100 stappen gaat printen, krijg je op het beeldscherm de zeef zonder storingen te zien.

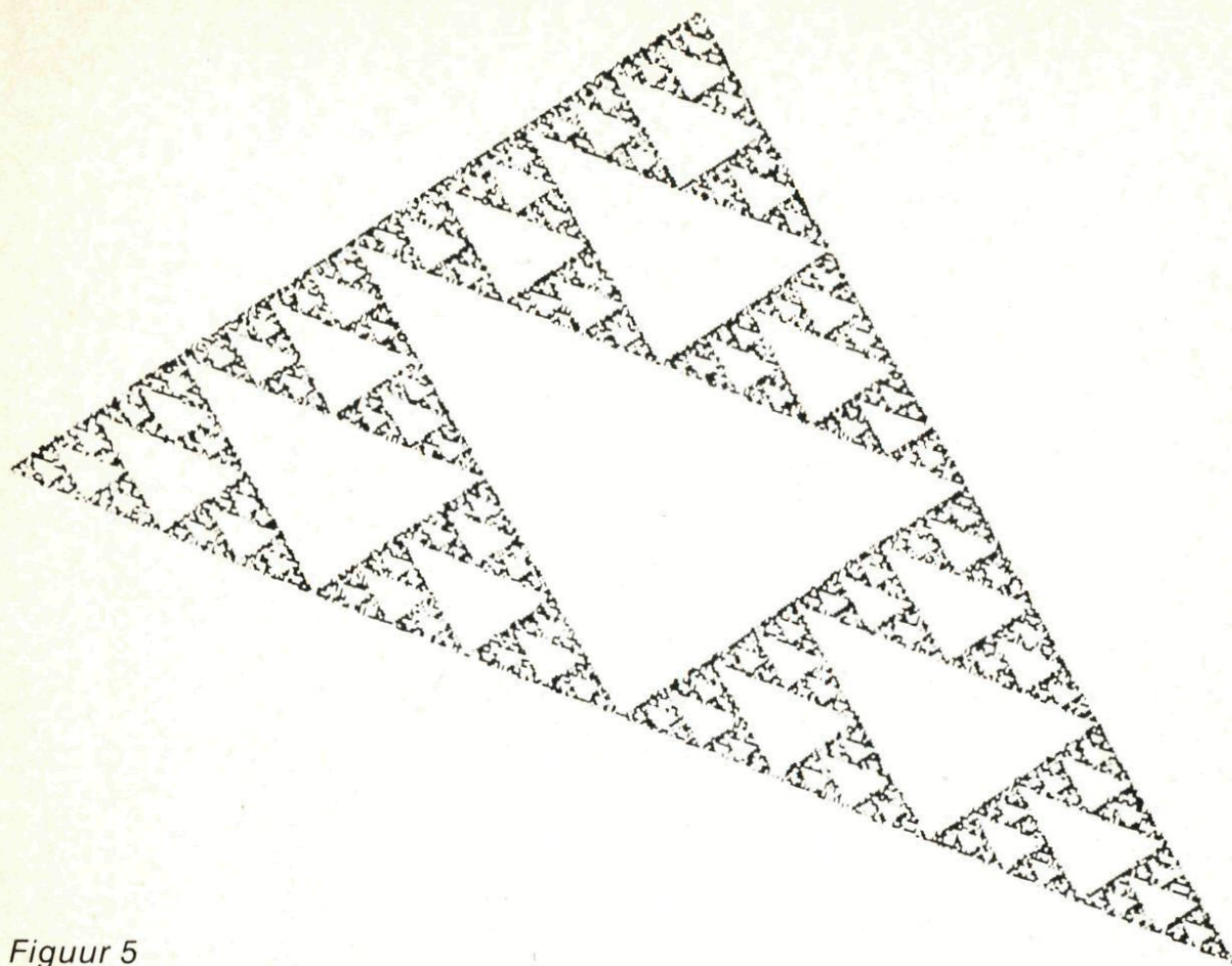
Het programma

We hebben een programma in GW-BASIC geschreven dat de zeef op het scherm brengt (figuur 4). De kern zit in de regels 90-180. In regel 90 zie je dat er 20000 punten geprint worden. In 100 vindt het dobbelen met de random-generator plaats: RND is een 'willekeurig' getal tussen 0 en 1, en in regel 100 wordt hiermee een keuze gemaakt uit de drie volgende regels. De punten (A1,

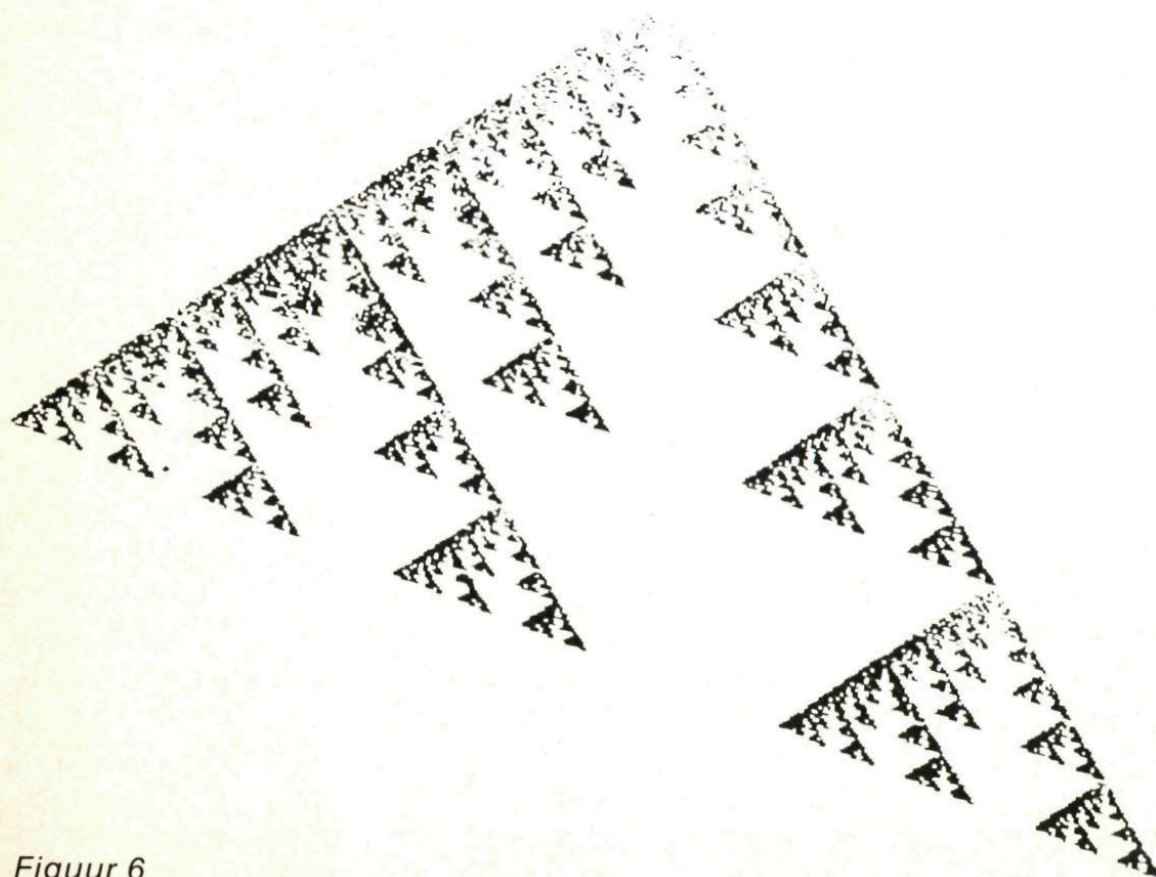
A2), (B1, B2), en (C1, C2) zijn de hoekpunten van de driehoek. In de regels 40, 50 en 60 zijn ze met de random-generator gekozen op de omtrek van een cirkel met straal 75. Ook het startpunt (S1, S2) is met behulp van RND bepaald (regel 70). De rest is bijzaak: regel 190 zorgt voor een piepje als je klaar bent, en regel 200 laat de 'prompt' pas weer verschijnen als je op een willekeurige toets drukt. In figuur 5 zie je het resultaat.

Variaties

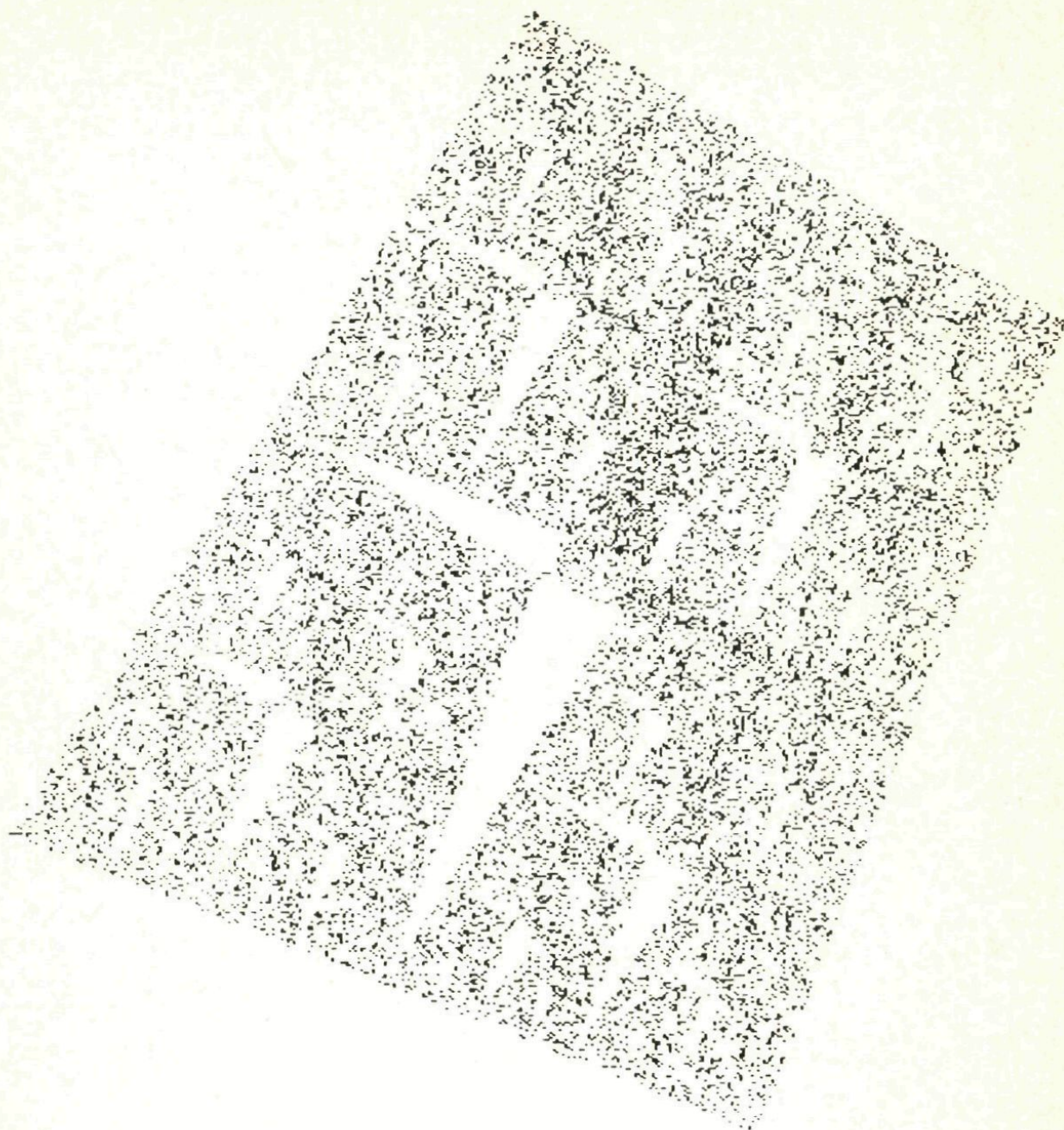
Het is erg leuk om zelf nog wat te experimenteren. Je kunt op allerlei manieren variaties aanbrengen. In figuur 6 hebben we de vermenigvuldigingsfactoren *verschillend* genomen: ze zijn resp. $1/2$, $1/3$ en $2/3$. Kun je zien welke factor bij welk hoekpunt hoort? En zie je ook dat de figuur nog steeds helemaal samenhangend is? Dat laat-



Figuur 5



Figuur 6



Figuur 7

ste zit 'm in het feit dat $1/3 + 2/3 = 1$ is.

De figuren 7 en 8 zijn *vierhoeken*. Daar zijn dus *vier* puntvermenigvuldigingen in het spel. In figuur 7 zijn alle factoren weer $1/2$. Omdat de vierhoek hier toevallig bijna een rechthoek is, zijn de 'tussenruimtes' maar klein. Toch kun je ook hier de 'zelfgelijkvormigheid' heel goed waarnemen. Zou je ech-

ter een zuivere rechthoek nemen, dan gaat het effect verloren: de hele rechthoek wordt dan opgevuld! In figuur 8 zijn alle factoren wat kleiner gemaakt, namelijk allemaal 0,45. Nu zie je dat er losse, elkaar gedeeltelijk overlappende stukken zijn ontstaan. Je moet zelf het computerprogramma maar wat aanpassen, dan kun je naar harte-lust experimenteren. Het is zeer de moeite waard! □

Figuur 8



Wiskunde in het groot

Kennismaking

Om er achter te komen hoe het heelal in elkaar zit moet veel worden gerekend en komt heel wat wiskunde kijken. Dit was al zo in de oudheid. Met voor onze begrippen eenvoudige wiskunde boekten de oude Grieken soms al goede resultaten. Voorbeelden daarvan zijn in een aantal losse stukjes te vinden.

Voor de oude Grieken en lang na hen bestond het heelal uit zon, maan, aarde en andere planeten. Dat alles bij elkaar wordt tegenwoordig het *zonnestelsel* genoemd. In de visie van de Grieken moest daar om heen als een soort schil de sterrenhemel zitten.

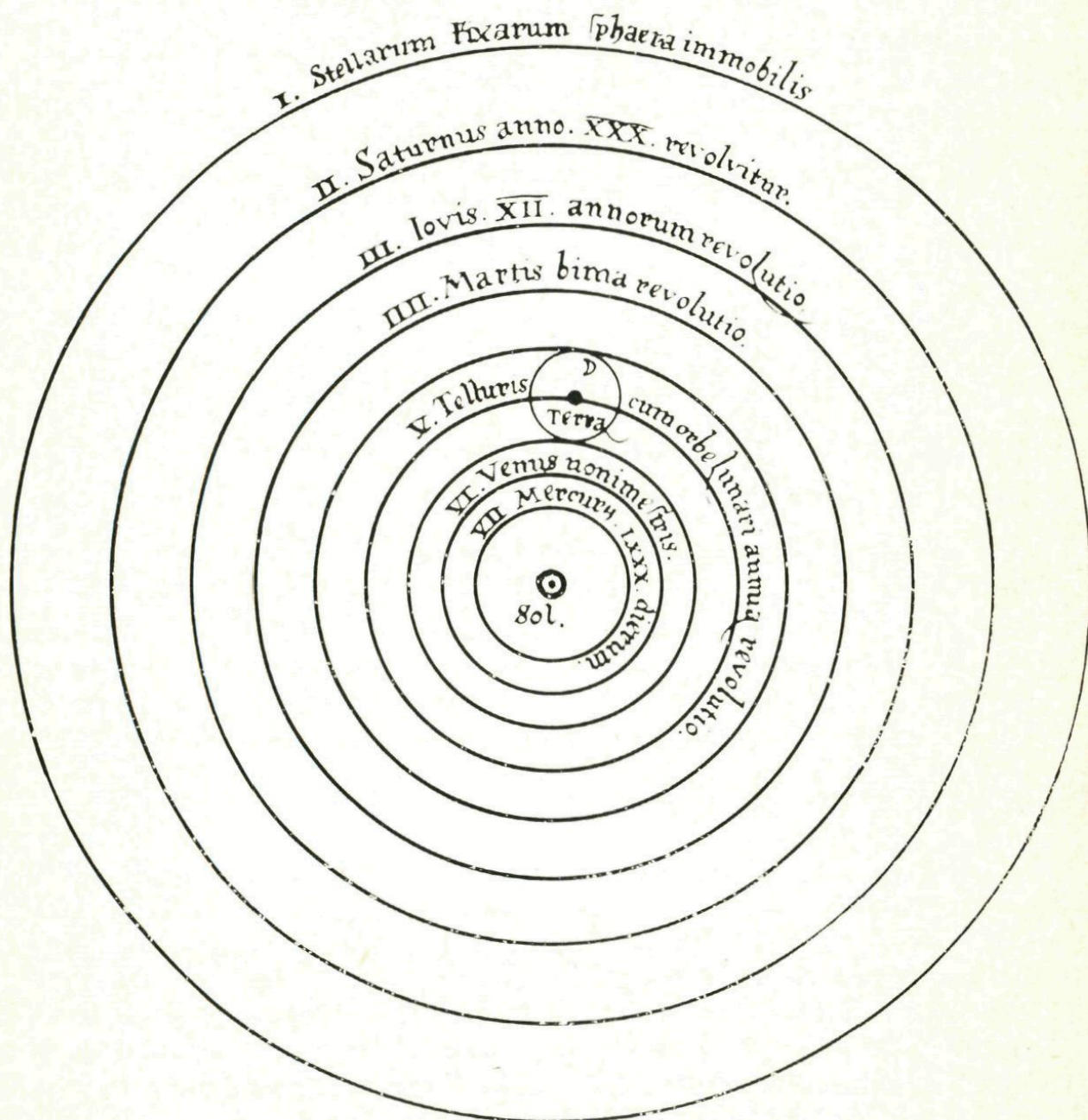
Tegenwoordig wordt over de structuur van het heelal heel anders gedacht. Men is er bij voorbeeld van overtuigd dat het heelal uitdijt (anders gezegd: steeds maar groter wordt) en geen middelpunt heeft.

Zonnestelsel

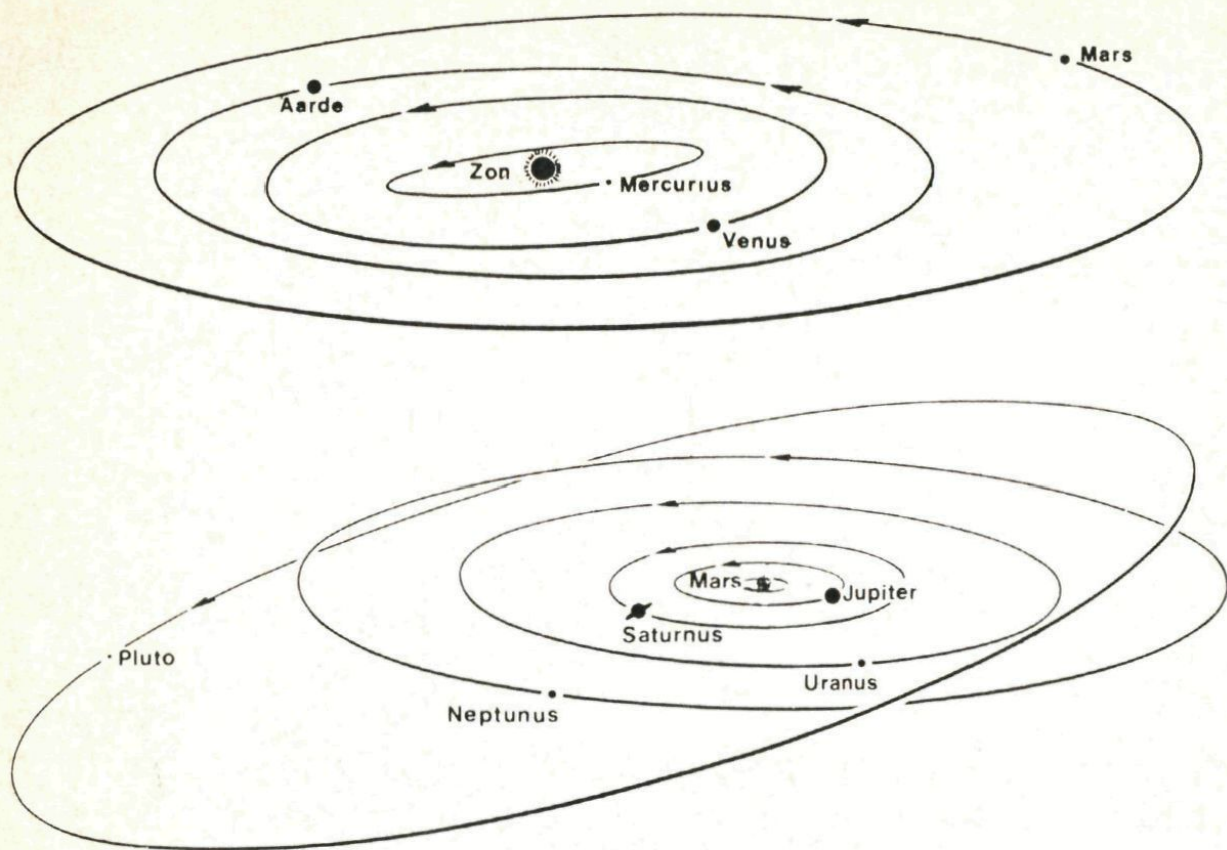
Lange tijd werd aangenomen dat de aarde het middelpunt van het heelal was. De zon en de planeten (dat zijn hemellichamen die net als de aarde zelf geen licht uitzenden) zouden daar in cirkelvormi-

ge banen om heen bewegen.

In 1543 publiceerde de Poolse sterrenkundige Nicolaus Copernicus (1473-1543) zijn boek 'De revolutionibus' (Over de omloopbewegingen). Hij verkondigde daarin dat de zon stilstaat in het mid-



Figuur 1. Het heelal volgens Copernicus. Het zonnestelsel wordt omgeven door de sfeer van de vaste sterren (I). Daarbinnen zitten de banen van Saturnus (II), Jupiter (III), Mars (IV), de aarde met de maan (V), Venus (VI) en Mercurius (VII). Pluto, Neptunus en Uranus ontbreken. Die waren ten tijde van Copernicus nog niet ontdekt. Achter de namen van de planeten is hun omlooptijd vermeld, achtereenvolgens 30 jaar, 12 jaar, 2 jaar, 1 jaar, 7 maanden en 80 dagen.



Figuur 2. De banen van de planeten Mercurius tot en met Mars (boven) en op een kleinere schaal die van Mars tot en met Pluto (onder).

delpunt van het heelal en dat de aarde en de andere planeten er in cirkelvormige banen om heen draaien (figuur 1).

Dat beeld werd door de Duitse sterrenkundige Johannes Kepler (1571-1630) verbeterd. Hij toonde aan dat de baan van een planeet geen cirkel is, maar een ellips met de zon in één van de twee brandpunten (figuur 2). De grootte van de afplatting van die ellipsbanen zijn voor iedere planeet verschillend. De baan van Venus bij voorbeeld is bijna cirkelvormig. De ellipsbaan van Pluto is niet alleen veel groter, maar ook veel afgeplatter.

Snelheid van de aarde

Van de aarde af gezien is de zon altijd even groot. Daaruit is af te

leiden dat de aarde steeds ongeveer dezelfde afstand tot de zon heeft. Dus de baan van de aarde om de zon wijkt net als die van Venus niet veel af van een cirkel.

Als wordt aangenomen dat de aarde precies een cirkelbaan om de zon beschrijft, is haar snelheid eenvoudig te berekenen. De straal R van die cirkelbaan is de (gemiddelde) afstand van de aarde tot de zon. Deze bedraagt ongeveer 150 miljoen kilometer.

De afstand die de aarde in één jaar aflegt, is dan de omtrek van die cirkelbaan. Dat is $2 \pi R$. Omdat een jaar $365,25 \times 24$ uur telt, wordt de snelheid van de aarde $2 \pi \times 150\,000\,000$ kilometer gedeeld door $365,25 \times 24$ uur.

Afgerond is dat 108 000 kilome-



Figuur 3. 'De aarde wordt met ene duizelingwekkende snelheid voortgedreven naar een verwijderd doel', aldus de tekst bij deze gravure in het boek 'De wonderen des hemels' van Camille Flammarion (eind vorige eeuw). Over de aard van het 'verwijderde doel' wordt niets gezegd.

ter per uur of 30 meter per seconde (figuur 3). Een duizelingwek-

kende snelheid waar op aarde niets van is te merken!

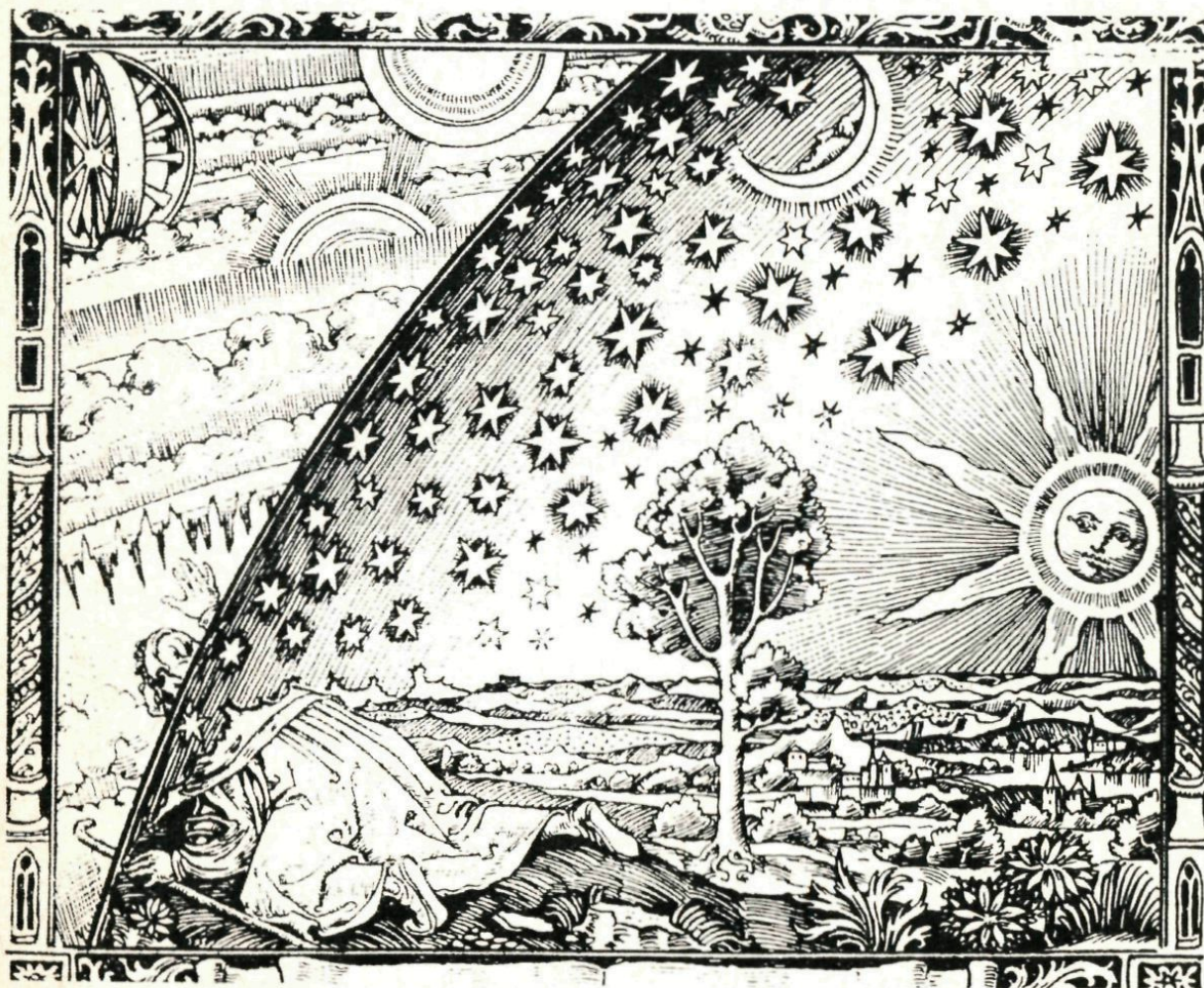
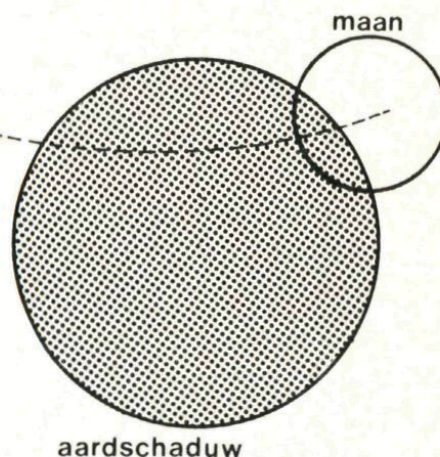
Vorm van de aarde

Van opnamen uit ruimteschepen is overduidelijk dat de aarde bolvormig is. De aarde is overigens niet precies een bol. Zij is aan de polen enigszins afgeplat.

Het idee dat de aarde bolvormig is, kwam voor het eerst op bij Pythagoras (569-500 v.C.).

De Griek Aristoteles (384-322 v.C.) bevestigde dit. Hij stelde namelijk vast dat bij een gedeeltelijke maansverduistering (aarde tussen zon en maan) de grenslijn van de schaduw van de aarde een stuk van een cirkel is (figuur 1). En alleen een bol geeft een cirkelvormige schaduw.

Figuur 1



Figuur 2. Houtsnede uit de vorige eeuw die de middeleeuwse kijk op het heelal voorstelt.

Een andere Griek, Aristarchus van Samos (310-250 v.C.), leidde uit waarnemingen bij maansverduisteringen zelfs af dat de middellijn van de aardschaduw ongeveer driemaal zo groot is als die van de maan. En omdat de zon heel ver weg staat, concludeerde hij daaruit dat de middellijn van de aarde driemaal zo groot is als die van de maan.

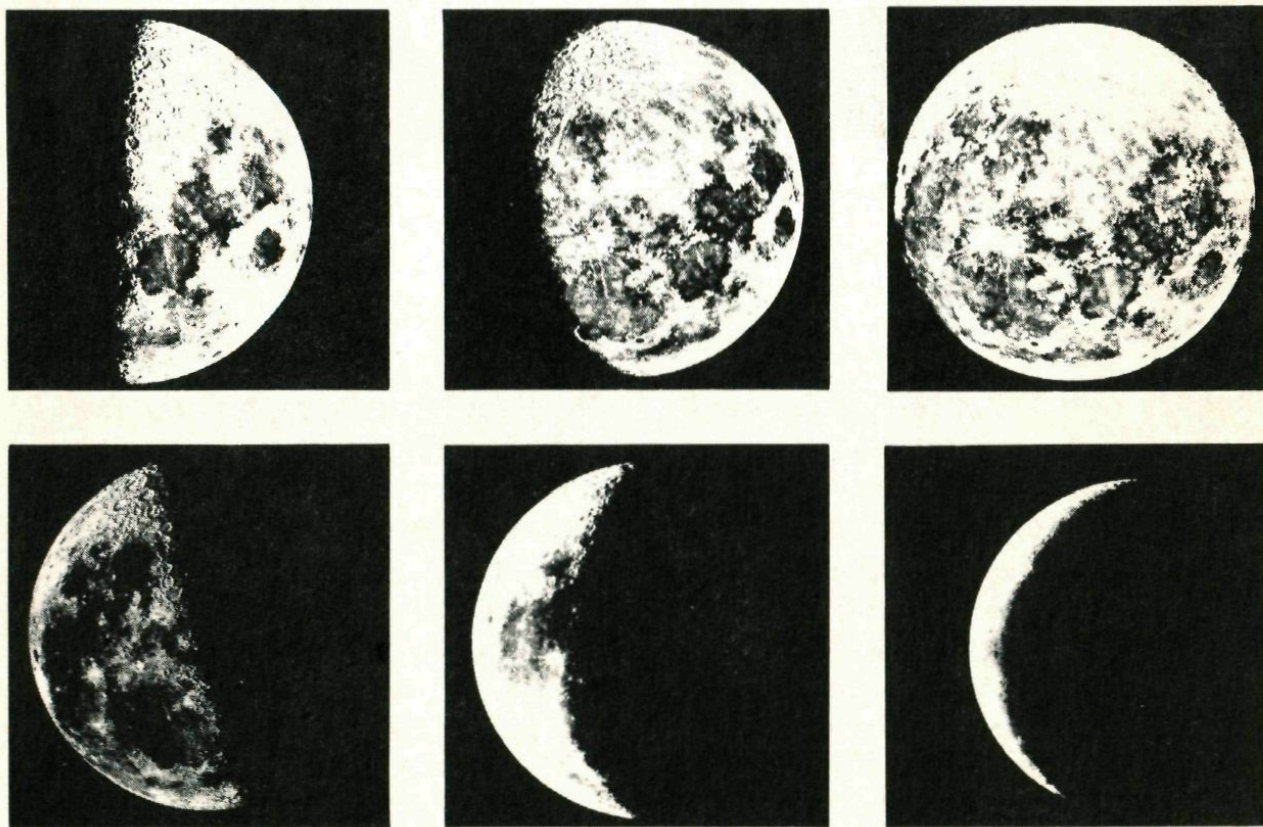
Ondanks Pythagoras, Aristoteles en Aristarchus werd de bolvorm van de aarde niet algemeen aanvaard. Tot in de Middeleeuwen bleef men van mening dat de aarde een platte schijf was (figuur 2). Pas na de zeereizen om de wereld (met name die van de Portugees Magalhães van 1519-1522) werd de bolvorm van de aarde definitief aanvaard. □

Maan

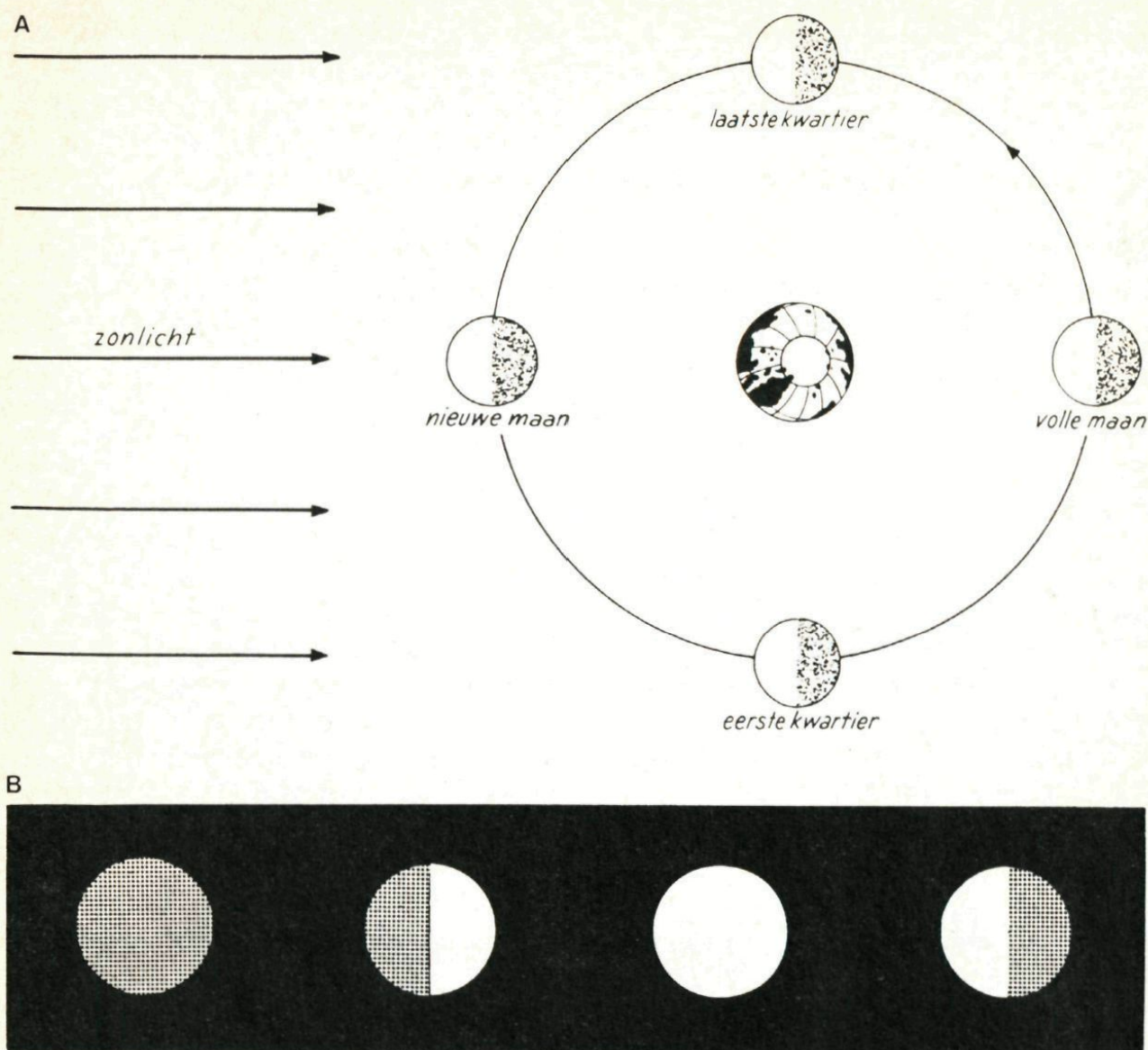
De maan draait om de aarde. Een omloop duurt ongeveer een maand. Haar baan heeft de vorm van een ellips die niet veel van een cirkel afwijkt.

De maan zendt zelf geen licht uit. Zij is te zien omdat het licht van de zon door haar oppervlak wordt teruggekaatst.

Net als de aarde is de maan ook bolvormig. Toch is niet altijd de volledige maan-bol zichtbaar (figuur 4). De maan vertoont namelijk zogenaamde *schijngestalten*. Hoe die ontstaan wordt duidelijk aan de hand van figuur 5. Omdat de zon zo ontzettend ver weg staat, zijn in figuur 5A de lichtstralen van de zon voor het gemak evenwijdig getekend.



Figuur 4. Schijngestalten van de maan.



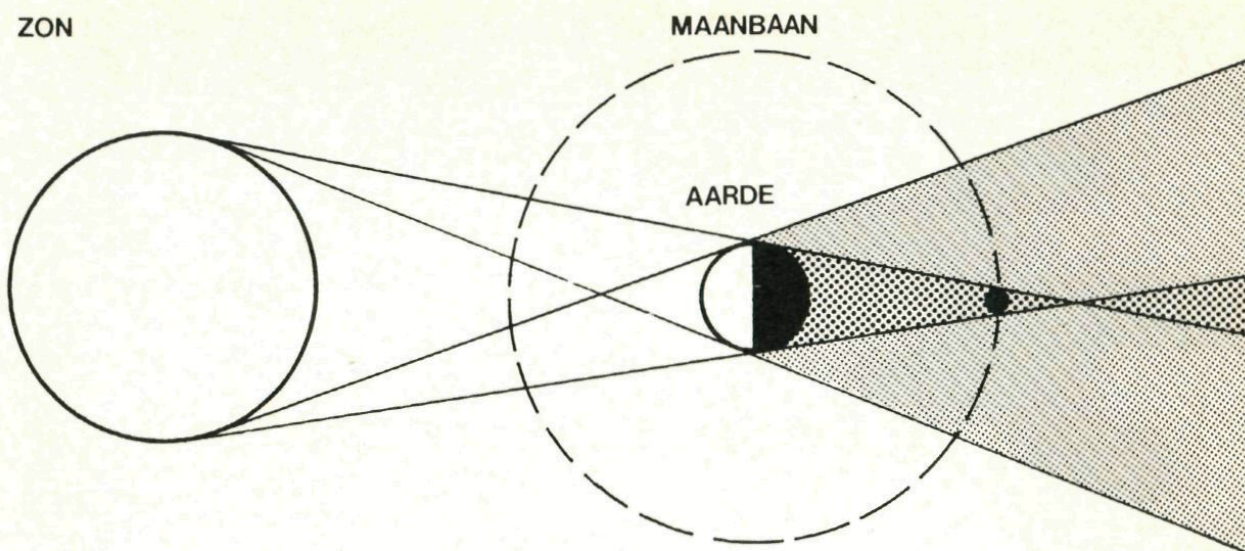
Figuur 5. Het ontstaan van de schijngestalten van de maan (boven). Vier schijngestalten (onder). Van links naar rechts: nieuwe maan, eerste kwartier, volle maan en laatste kwartier.

Soms ligt de (denkbeeldige) verbindingslijn tussen de aarde en de zon even in het vlak van de maanbaan. Wanneer de maan dan ten opzichte van de zon achter de aarde langs gaat, treedt er een *maansverduistering* op. De maan moet dan namelijk — soms gedeeltelijk — de schaduwkegel van de aarde passeren (figuur 6).

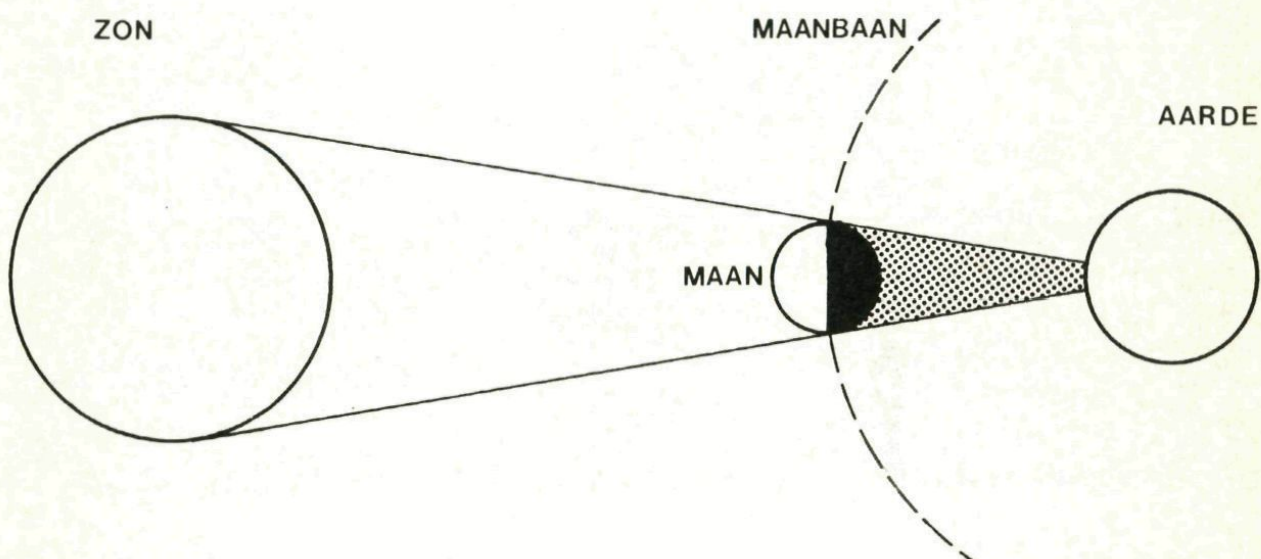
Als de maan in dat geval ten opzichte van de zon vóór de aarde

langs zou gaan, treedt er op een gedeelte van de aarde een *zonsverduistering* op (figuur 7). Vanaf het betreffende deel van de aarde is de zon of een gedeelte er van even niet zichtbaar, omdat de maan er voor staat (figuur 8).

Niet alleen de planeet aarde bezit een maan. Ook om enkele andere planeten draait een maan. Om sommige zelfs meer dan één (figuur 9).



Figuur 6. Ontstaan van een maansverduistering.



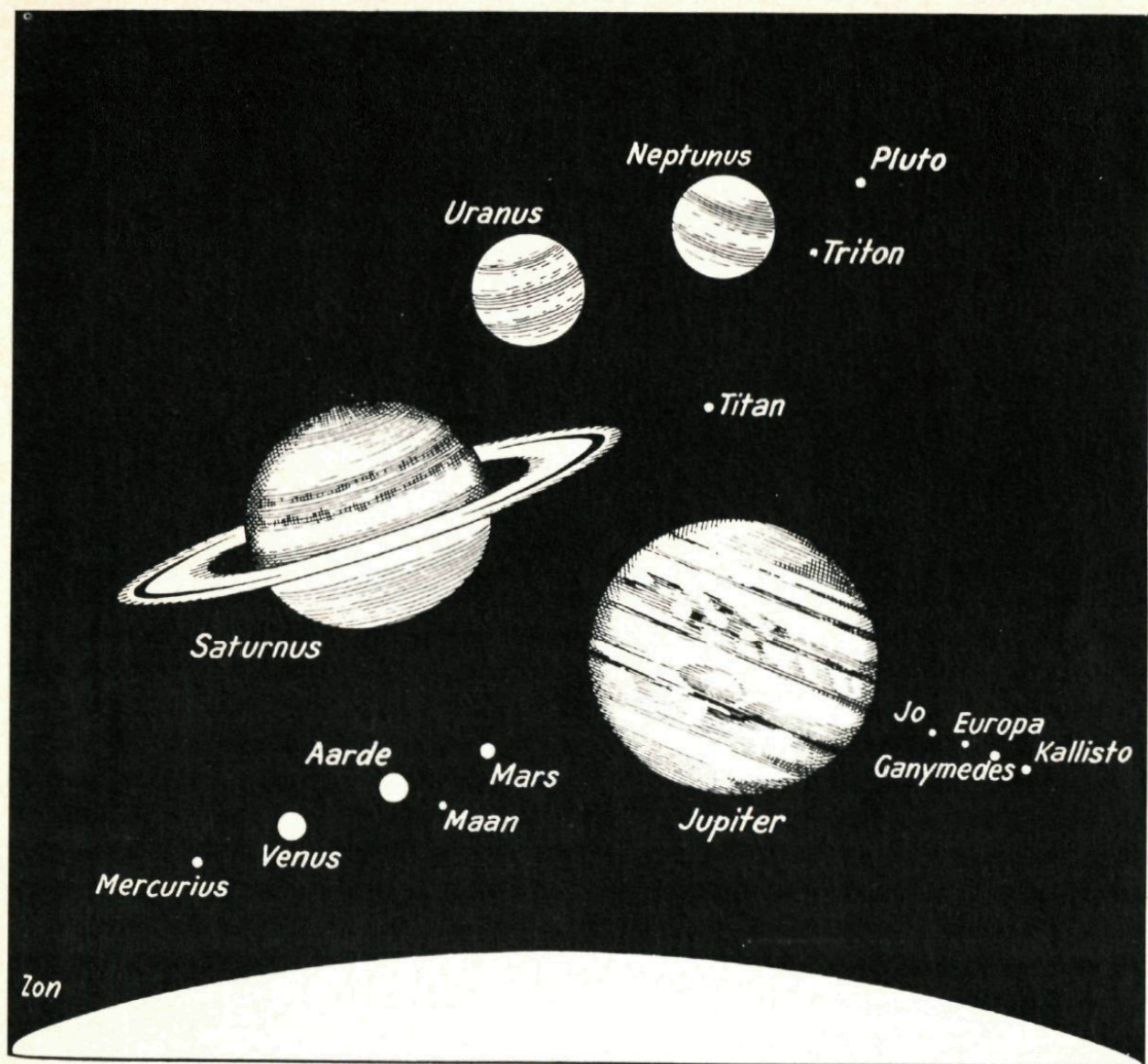
Figuur 7. Ontstaan van een zonsverduistering.



◁ Figuur 8. Totale zonsverduistering.

Sterren en sterrenstelsels

Sterren zenden licht uit. Planeten niet. Net als de sterren zendt de zon wel licht uit. Zij is dan ook een ster die zich niet onderscheidt van andere sterren. De zon is ook niet groter dan andere sterren. Zij lijkt alleen maar groter, omdat ze dicht bij de aarde is dan elke andere ster.



Figuur 9. De afmetingen van de negen planeten en hun grootste manen in verhouding tot die van de zon.

Sterren komen in grote groepen voor. Zo'n groep heet een *sterrenstelsel*. Een sterrenstelsel bevat tussen de 1 miljard en 1 biljoen sterren. Naar schatting zijn er in het heelal miljarden sterrenstelsels. Vele zijn te ver weg om daar in zelfs met de sterkste sterrenkijker nog afzonderlijke sterren te kunnen onderscheiden.

Het sterrenstelsel waartoe de zon met haar planeten behoort heet het *Melkwegstelsel*.

Het Melkwegstelsel bevat ongeveer 100 miljard sterren. Alle sterren die 's nachts met het blote oog zijn te zien, maken er deel van uit.

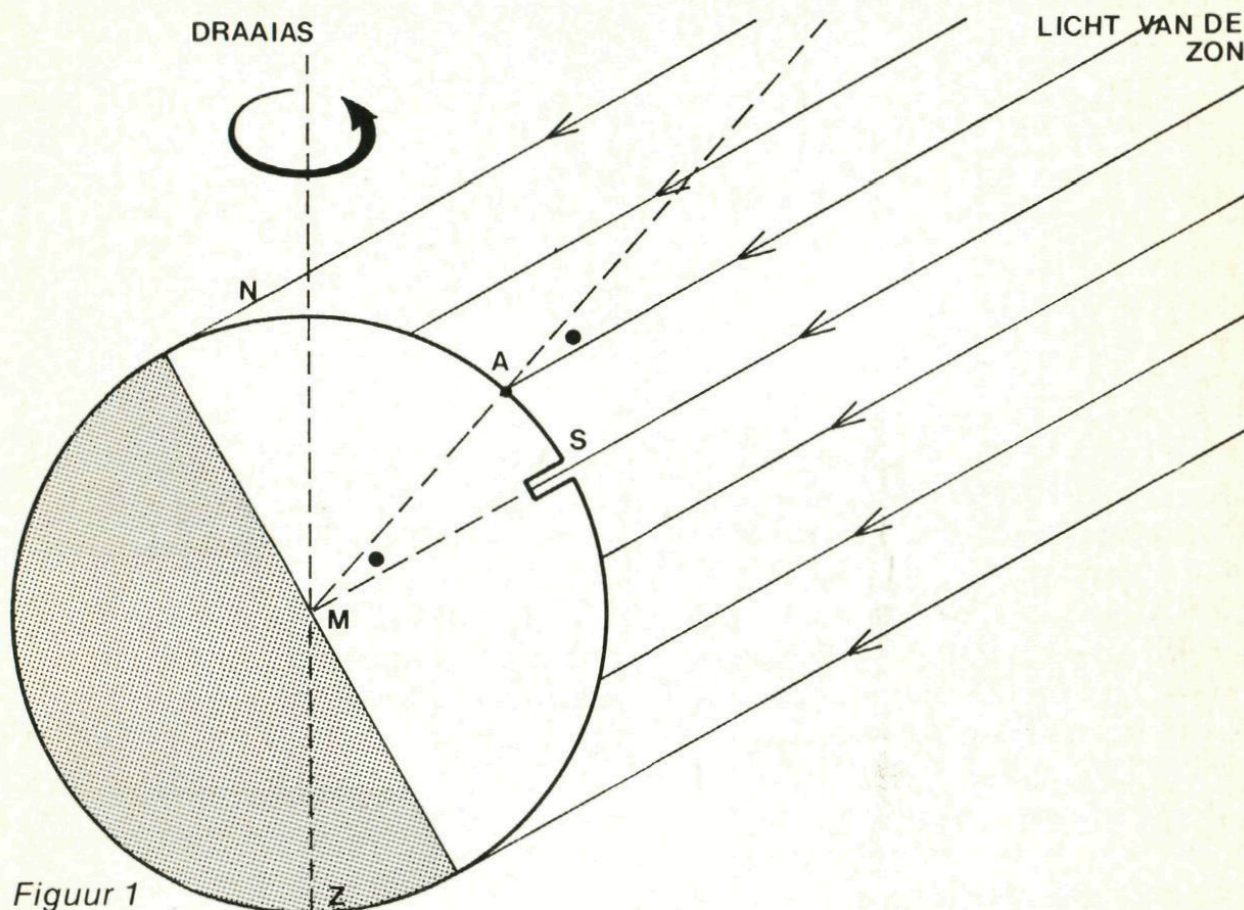
Vorm van het Melkwegstelsel

Van 'opzij' gezien heeft het Melkwegstelsel de vorm van een schijf die in de buurt van het middelpunt wat opbult (figuur 10).

Net als elk ander sterrenstelsel draait het Melkwegstelsel om een denkbeeldige as door het cen-

Omtrek van de aarde

De omtrek van de aarde werd voor het eerst bepaald door de Griek Eratosthenes (275-194 v.C.). Zijn waarde kwam al aardig in de buurt van de goede waarde van 40 075 kilometer aan de evenaar.



Figuur 1

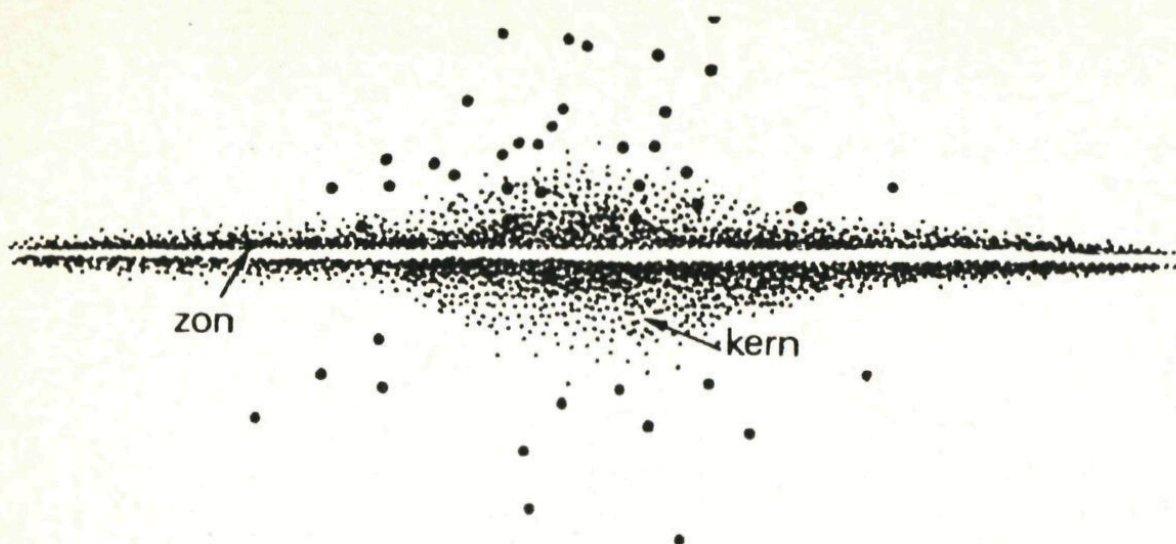
Eratosthenes wist dat de zon op 21 juni (de langste dag) rond het middaguur in Syene (S, het tegenwoordige Assoean in Zuid-Egypte) precies de bodem van een diepe put bescheen (figuur 1). Het zonlicht maakte daar dus op dat moment een hoek van 0° met de verticaal.

Bovendien wist Eratosthenes dat op hetzelfde tijdstip het zonlicht in Alexandrië (A, Noord-Egypte) een hoek van $7,2^\circ$ met de verticaal maakte. Nadat de afstand Alexandrië-Syene (boog AS) was bepaald op 5 000 stadiën, was de omtrek van de aarde eenvoudig te berekenen.

Uit figuur 1 volgt dat hoek AMS gelijk is aan de hoek die het zonlicht met de verticaal in Alexandrië maakte. Omdat de hele hoek bij M (middenpunt van de aarde) 360° is, geldt er dus

$$\frac{\text{omtrek aarde}}{\text{boog AS}} = \frac{360^\circ}{7,2^\circ} = 50$$

Dus de omtrek van de aarde is 50 maal boog AS. Dat is gelijk aan $50 \times 5\,000 = 250\,000$ stadiën. Een stadie komt overeen met 157 meter. Daarmee wordt de omtrek volgens Eratosthenes dan $250\,000 \times 157 = 39\,250\,000$ meter of 39 250 kilometer. $\square$



Figuur 10. Melkwegstelsel van 'opzij' gezien.

trum. Dit is te merken aan de beweging van de sterren in het Melkwegstelsel. De buitenste sterren kunnen echter niet in de pas blijven met de binnenste. Hoe verder sterren van het centrum zijn verwijderd, hoe meer ze achterop raken. Daardoor vertoont het Melkwegstelsel van 'bovenaf' gezien twee spiraalarmen (figuur 11). Andere sterrenstelsels hebben in grote trekken eenzelfde structuur als het Melkwegstelsel.

Beweging van de zon

De zon bevindt zich *niet* in het centrum van het Melkwegstelsel. En dus ook niet in het middelpunt van het heelal. Met de haar omringende planeten bevindt de zon zich in een van de spiraalarmen. Zo beschrijft de zon met een snelheid van zo'n 250 kilometer per seconde een baan rond het centrum van het Melkwegstelsel. Ondanks deze gigantisch hoge snelheid doet de zon over een rondgang 230 miljoen jaar!

Hubble-relatie

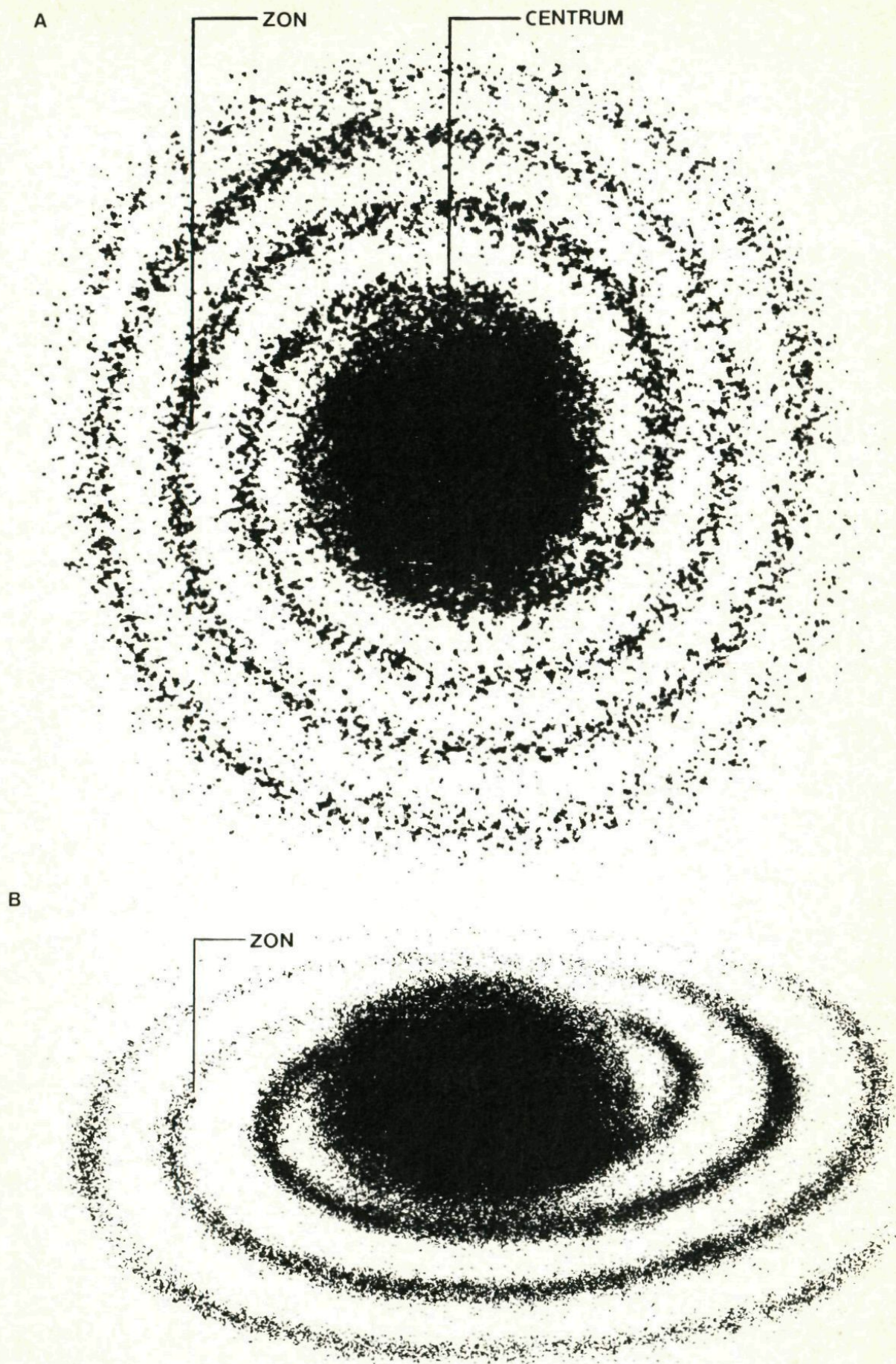
In 1929 publiceerde de Ameri-

kaanse sterrenkundige Edwin Powell Hubble (1889-1953) enkele ontdekkingen die belangrijk zijn voor het inzicht in de structuur van het heelal. Op een enkele uitzondering na verwijderen sterrenstelsels zich van de aarde (of beter: van het Melkwegstelsel). De snelheid waarmee dat gebeurt is groter naarmate een sterrenstelsel verder weg is.

Volgens Hubble is de snelheid v waarmee een sterrenstelsel zich verwijderd, zelfs recht evenredig met zijn afstand r . In formule

$$v = H \cdot r$$

waarin de evenredigheidsconstante H de *hubble-constante* wordt genoemd. Het verband $v = H \cdot r$ heet de *hubble-relatie*. Nauwkeuriger beschouwing van de hubble-relatie leert dat het heelal uitdijt en hoe die uitdijning ongeveer verloopt. Verder ondersteunt de hubble-relatie de stelling dat het heelal geen middelpunt heeft. Hoe vreemd dat op het eerste gezicht ook lijkt. $\square$



Figuur 11. Het Melkwegstelsel recht van 'bovenaf' gezien (A) en schuin van 'bovenaf' gezien (B).

Afstand aarde-maan

De Grieken kenden verschillende methoden om de afstand aarde-maan te bepalen. De meest nauwkeurige is afkomstig van Aristarchus van Samos. Aan de hand van waarnemingen bij maansverduisteringen vond hij voor de afstand aarde-maan ongeveer 60 maal de straal van de aarde.

Eenvoudiger

Veel eenvoudiger maar minder nauwkeurig was de volgende methode.

Toen Eratosthenes de omtrek A van de aarde had bepaald op 39 250 km, was ook de middellijn D van de aarde te berekenen. Daarvoor werd gevonden

$$D = \frac{A}{\Pi} = \frac{39\,250 \text{ km}}{\Pi} = 12\,494 \text{ km}$$

Van Aristarchus wisten ze dat de middellijn van de aarde ongeveer drie-maal zo groot is als die van de maan. Dus de middellijn d van de maan werd

$$d = \frac{D}{3} = \frac{12\,494 \text{ km}}{3} = 4\,165 \text{ km}$$

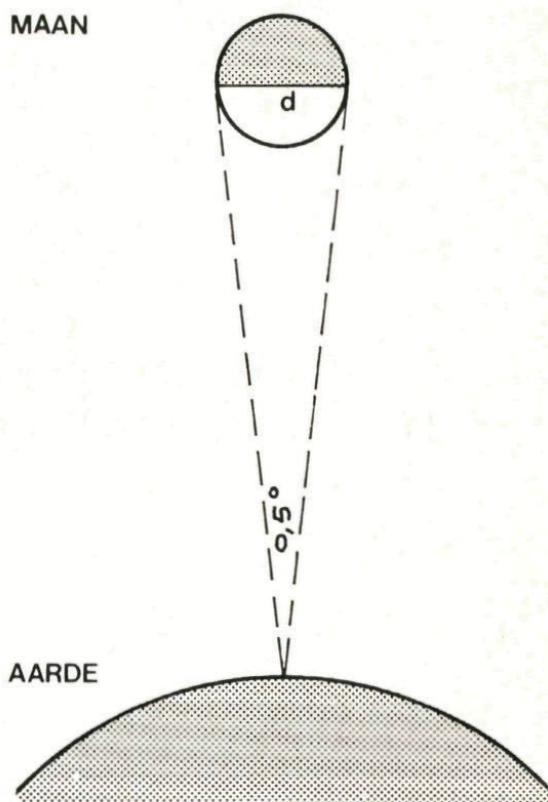
De hoek waaronder de middellijn van de maan van af de aarde wordt gezien, bepaalden de Grieken op ongeveer $0,5^\circ$ (figuur 1).

Uit figuur 2 volgde dan de afstand a van de maan tot de aarde. Daar geldt namelijk

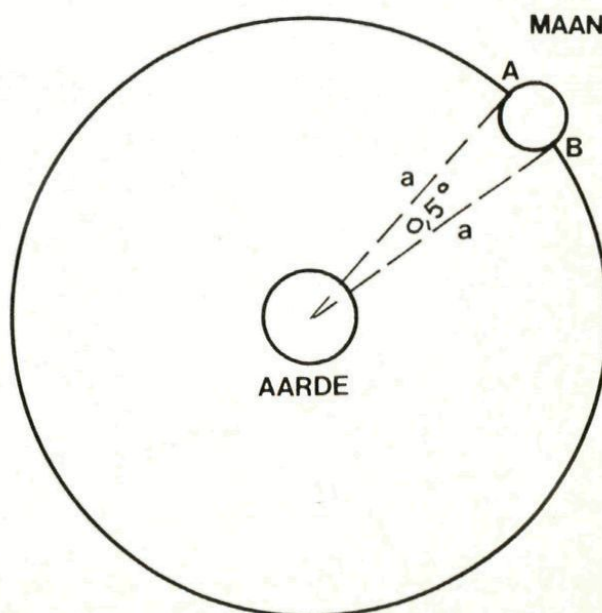
$$\frac{2 \Pi a}{\text{boog } AB} = \frac{360^\circ}{0,5^\circ} \quad (1)$$

Omdat $360^\circ/0,5^\circ$ gelijk is aan 720 en boog AB ongeveer gelijk is aan de middellijn d van de maan volgt uit (1)

$$a = \frac{720 \times d}{2 \Pi} \quad (2)$$



Figuur 1



Figuur 2

Met $d = 4\,165\text{ km}$ geeft (2) voor de afstand aarde-maan globaal $480\,000\text{ km}$.

Tegenwoordige waarde

De werkelijke afstand van de aarde tot de maan (bepaald met radarsignalen) is $384\,400\text{ km}$. Dus het eenvoudig bepaalde resultaat van de Grieken wijkt daar wel wat van af. Het resultaat van Aristarchus ($a = 60 \times R$) was veel beter. Uit de metingen van Erastosthenes volgt namelijk voor de straal

R van de aarde

$$R = \frac{D}{2} = \frac{12\,494\text{ km}}{2} = 6\,247\text{ km}$$

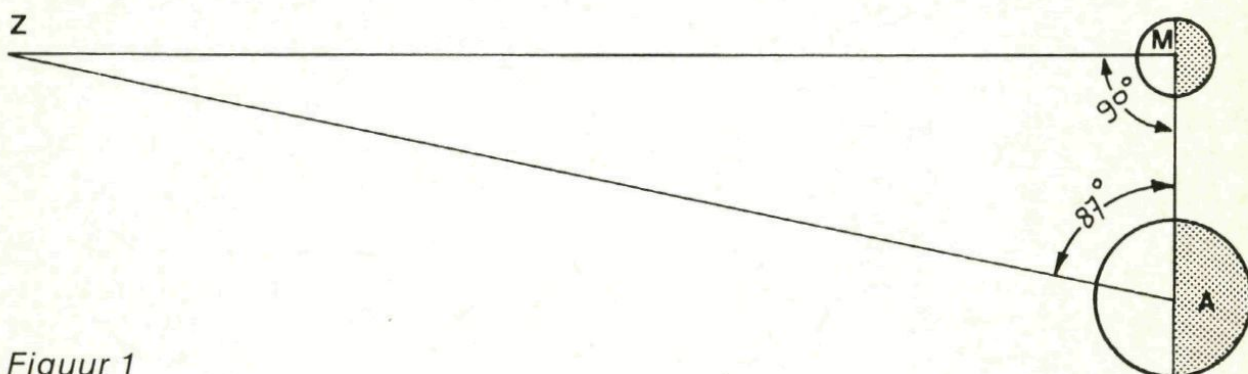
Daarmee wordt de afstand aarde-maan

$$a = 60 \times R = 374\,820\text{ km}$$

Hoe goed het resultaat van Aristarchus was, blijkt ook uit het feit dat de tegenwoordige afstand aarde-maan gelijk is aan $60,3 \times R$. $\square$

Afstand aarde-zon

De afstand aarde-zon werd voor het eerst bepaald door Aristarchus van Samos. Dat wil zeggen: Hij bepaalde de verhouding tussen de afstanden van de aarde tot de zon en tot de maan.



Figuur 1

Wanneer het precies halve maan is, zo redeneerde Aristarchus, wordt de maan M van 'opzij' door de zon Z verlicht (figuur 1). Hoek AMZ is dan 90° . Omdat de zon heel ver weg is, zal hoek MAZ bijna 90° zijn. Aristarchus schatte hoek MAZ op 87° . In driehoek AMZ geldt dan

$$\cos 87^\circ = \frac{AM}{AZ}$$

Met $\cos 87^\circ \approx 0,052$ levert dit

$$AZ = \frac{AM}{0,052} = 19 \times AM$$

Dus de afstand aarde-zon (AZ) was volgens Aristarchus 19 maal die van de aarde tot de maan (AM).

Dit resultaat werd pas 1800 jaar later verbeterd. Om precies te zijn in 1672. Toen kwam vast te staan dat de afstand aarde-zon bijna 400 maal de afstand aarde-maan is, dus $AZ \approx 400 \times AM$. Het resultaat van Aristarchus was dus wel heel onnauwkeurig. Dat lag echter niet aan zijn methode, maar aan de onnauwkeurigheid waarmee hij hoek MAZ bepaalde. Hoe groot is hoek MAZ als $AZ = 400 \times AM$? $\square$

Pythagoras Olympiade



Ook deze jaargang gaan we weer door met de *Pythagoras Olympiade*. Dat is een wedstrijd voor slimmerikken die al enige jaren in Pythagoras draait. In elk nummer komen twee opgaven. Je zult er nauwelijks wiskundige voorkennis voor nodig hebben, maar wel een flinke dosis gezond verstand! Tot ruim een maand na de verschijningsdatum kun je oplossingen insturen.

Prijzen

Iedere opgave is een wedstrijd op zichzelf. Je hoeft niet aan alles mee te doen, je kunt van elke som afzonderlijk een oplossing inzenden. Bij elke opgave verloten we onder de goede inzenders twee prijzen van f 10,—/BEF 150.

Verder vormen de 12 opgaven van deze jaargang samen een *ladderwedstrijd*. Iedere goede oplossing geeft 1 punt. Voor de besten van de ladderwedstrijd zijn drie prijzen van f 25,—/BEF 400 beschikbaar. Bovendien ontvangen de beste tien van de ladderwedstrijd een uitnodiging voor de Tweede Ronde van de *Nederlandse Wiskunde Olympiade*, zelfs al hebben ze niet aan de Eerste Ronde meegedaan of daarbij niet genoeg punten behaald (ze moeten natuurlijk op het moment van de Tweede Ronde nog wel op school zitten; de huidige eindexamensklassers vallen dus uit de boot, want de Tweede Ronde vindt in het najaar van 1989 plaats).

Oplossingen

De uitwerkingen komen weer in Pythagoras. Bij elke opgave zal de oplossing van één van de deelnemers worden gepubliceerd. Je kunt de uitslag en de uitgekozen oplossingen eerder krijgen, als je een aan jezelf geadresseerde en gefrankeerde enveloppe meestuurt.

Inzendingen

Leerlingen van het voortgezet/secundair onderwijs kunnen hun oplossingen sturen aan:

Pythagoras Olympiade,
Marinus de Jongstraat 12,
4904 PL Oosterhout (NB).

Vermeld op elk (éénzijdig beschreven) vel: naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas. Verder moet elke oplossing op een nieuw vel beginnen, want we kijken ze afzonderlijk na. We bekijken alleen goed leesbare oplossingen die volledig uitgewerkt zijn, met verklarende tekst in goed lopende zinnen.



Nieuwe opgaven

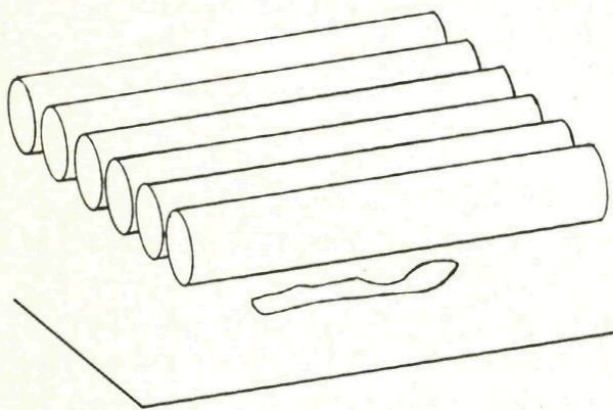
Oplossingen inzenden vóór 31 december.

PO 116

Wat is de minimale lengte van een gesloten koord waarmee je zes buizen met een diameter van 1 dm kunt samenbinden? (De dikte van het koord mag je verwaarlozen.)

Bewijs de juistheid van je antwoord!

$$\pi + \sqrt{3} + 4 \text{ dm}$$

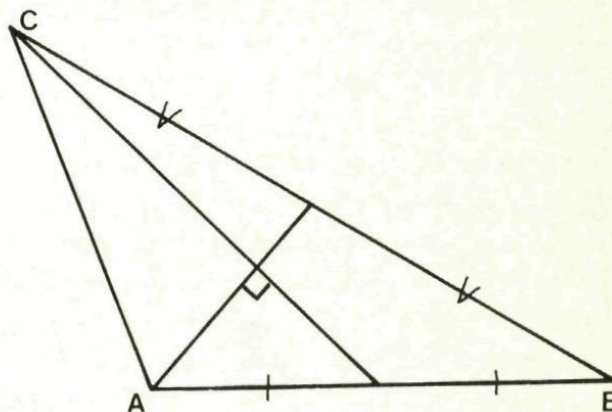


Figuur 1

PO 117

Driehoek ABC heeft de eigenschap dat de zwaartelijnen vanuit A en C elkaar loodrecht snijden (figuur 2). Wat is de maximale oppervlakte van de driehoek, als verder gegeven is dat $AB = 1$?

$$\frac{3}{8}$$



Figuur 2

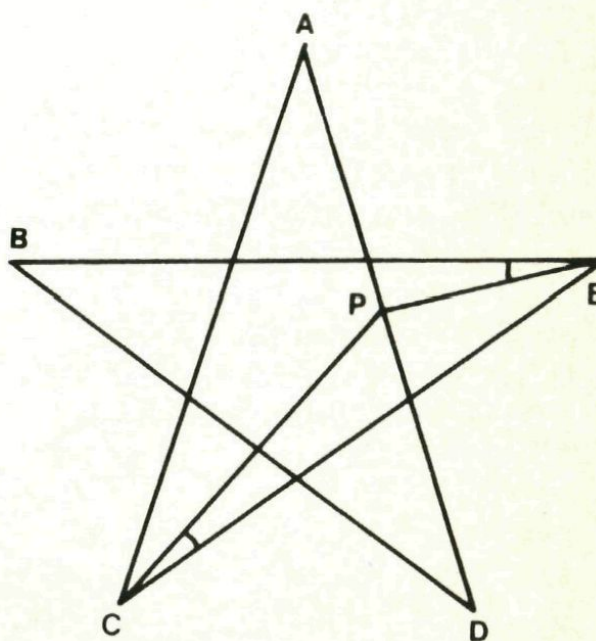
Oplossingen en prijswinnaars van de opgaven PO 104 en 105

PO 104

$ABCDE$ is een regelmatige ster-vijfhoek. Het punt P ligt op AD zo, dat de hoeken BEP en ECP gelijk zijn (zie figuur 1).

Bereken de verhouding $AP:PD$.

Voor deze moeilijke opgave ontvingen we slechts drie inzendingen. Eén oplossing was incorrect, de beide anderen, *Jasper Scholten* (4 vwo, Heemskerk) en *Peter Deleu* (klas 6, Kuurne, België) kwamen tot hun antwoord via ingewikkelde berekeningen met sinusregels en goniiformules. We geven hier een andere, meer meetkundige oplossing. De twee prijzen gingen natuurlijk naar Jasper en Peter.



Figuur 1

Oplossing: Verleng EP tot het snijpunt R met AC . De clou is nu dat je opmerkt dat $CR : RA = AP : PD$ wegens de symmetrie van de ster-vijfhoek. Maar dan kun je hetzelfde nog een paar keer herhalen, en zo ontstaat figuur 2, waarin je een kleinere regelmatige ster-vijfhoek $PQRST$ binnen de grote vijfhoek aantreft.

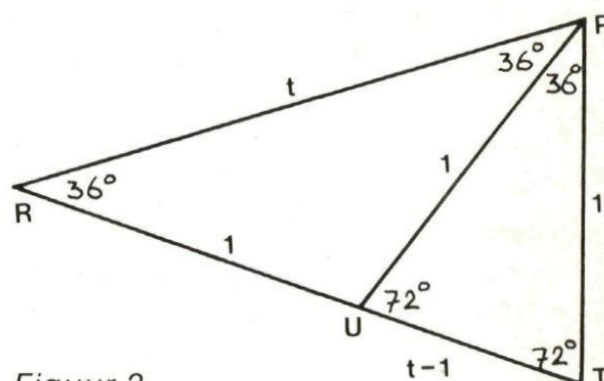
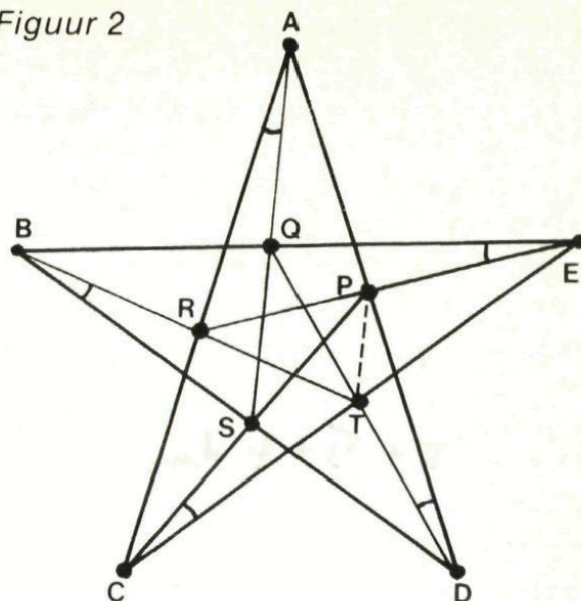
We trekken nog één hulplijn, namelijk PT , en we stellen de lengte van PT op 1. In een regelmatige vijfhoek is de verhouding tussen een diagonaal en een zijde gelijk aan de zogenaamde *gulden snede verhouding* $t : 1$, waarbij $t = (\sqrt{5} + 1)/2$. Je ziet dat bij voorbeeld in figuur 3 (een deel van figuur 2), waar uit de gelijkvormigheid van de driehoeken UPT en TPR volgt dat $(t-1) : 1 = 1 : t$, en dit leidt tot $t^2 - t - 1 = 0$, met $t = (\sqrt{5} + 1)/2$ als positieve oplossing.

Aangezien we gesteld hadden dat $PT = 1$, geldt dat $QT (= RT) = t$. Verder volgt uit $PT \parallel QS$, met andere woorden $PT \parallel AQ$, dat $AP : PD = QT : TD$, zodat we alleen nog maar de lengte van TD behoeven uit te rekenen. Noem die lengte a , dan geldt $PT : AQ = TD : RD$, dus wegens $TD = AQ = a$ en $QT = t$ geldt $1 : a = a : (a + t)$, zodat $a^2 - a - t = 0$. Dit levert $a = (1 + \sqrt{1+4t})/2$ en $AP : PD = QT : TD = t : a = 2t/(1 + \sqrt{1+4t}) = 0.86676 \dots$

PO 105

- Bestaat er een deelverzameling M van het vlak met de eigenschap dat elke doorsnede van M en een rechte in het vlak uit eindig veel punten bestaat en niet leeg is?
- Bestaat er een deelverzameling N van de ruimte met de eigenschap dat elke doorsnede van N en een vlak in de ruimte uit eindig veel punten bestaat en niet leeg is?

Figuur 2



Figuur 3

Ook dit was een moeilijke opgave: 6 inzendingen, waarvan slechts 3 correct, namelijk, die van Joris van der Hoeven, 6 vwo, Amsterdam, Arthur Bakker, 5 vwo, Bergen (NH) en Gerton Lunter, 5 vwo, Sneek. De prijswinnaars zijn Gerton en Arthur.

We geven een oplossing die samengesteld is uit de oplossingen van Arthur en Joris.

Oplossing

- Voor M nemen we de grafiek van de functie $y = x^3$. Elke lijn in het vlak kan worden voorgesteld door een vergelijking van de vorm $ax + by = c$, waarbij a en b niet beide tegelijk nul mogen zijn. Snijden met M geeft de vergelijking $ax + bx^3 = c$, en die vergelijking heeft minstens één, en hoogstens drie

oplossingen, dus er zijn ook 1, 2 of 3 snijpunten.

b. Voor N nemen we de verzameling van alle punten (x, y, z) in de ruimte die voldoen aan $y = x^3$ en $z = x^5$. Een willekeurig vlak kan worden voorgesteld door $ax + by + cz = d$, waarbij a, b en c niet alle drie tegelijk nul mogen zijn. Invullen geeft de vergelijking $ax + bx^3 + cx^5 = d$, en deze vergelijking heeft minstens één, en hoogstens vijf oplossingen. Er zijn dus ook altijd 1, 2, 3, 4 of 5 snijpunten.

Let er op dat we door *oneven* machten te nemen er voor gezorgd hebben dat er telkens inderdaad minstens één snijpunt is, want elke vergelijking van een oneven graad heeft minstens één oplossing.

Joris van der Hoeven merkte nog op dat je de opgave kunt generaliseren: in $\mathbb{R}^n$ snijdt de 'ruimtekromme'.

$(x, x^3, x^5, \dots, x^{2n-1})$ elk $(n-1)$ -dimensionaal 'hypervlak'

$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$ in minstens 1, en hoogstens $2n-1$ punten. $\square$

Vlaamse Wiskunde Olympiade

Op woensdag 20 april 1988 werd de Derde Ronde (tevens Finale) van de Derde Vlaamse Wiskunde Olympiade gehouden. De deelnemers daaraan waren geselecteerd via twee voorronden die elk uit dertig meer-keuze vragen bestonden. De Derde Ronde bestond uit vier open vragen waar de deelnemers drie uur de tijd voor hadden.

- 1 Toon aan dat $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 9x + 12$ niet kan worden ontbonden als produkt van twee veeltermen van de tweede graad met gehele coëfficiënten.
- 2 Een driedimensionaal kruis bestaande uit zeven congruente kubussen is ingeschreven in een sfeer met straal R .
Bepaal de inhoud van dit driedimensionaal kruis.
- 3 *Gegeven*
Een n -tal is een opeenvolging van n getallen gekozen uit $\{0, 1, 2\}$.
Een 'goed' n -tal is een n -tal waarin noch 1, noch 2 onmiddellijk worden herhaald.
Voorbeeld van een 'slecht' 7-tal 0111212.
Voorbeeld van een 'goed' 7-tal 1210012.
Gevraagd
Bepaal het aantal 'goede' 10-tallen.
- 4 Zij R een strikt positief getal en beschouw een driehoek met zijden $R + \frac{1}{2}$, 1 en R .
Zij Θ de grootte — in radialen — van de hoek tegenover de zijde met lengte 1.
Bewijs dat

$2\Theta > 1$
 $2\Theta < \pi$

(1)
 $(2) \square$

Redactioneel

Met dit eerste nummer van de nieuwe jaargang wordt een eerder gedane belofte ingelost. In de artikelen 'Dobbelen met de computer' en 'Het geheim van de zeef' geven we uitgebreid antwoord op de vraag 'Waar gaat dat heen?'. Die vraag werd gesteld in het eerste nummer van de vorige jaargang (Pythagoras 27-1).

Het artikel 'Wiskunde in het groot: Kennismaking' bestaat eigenlijk uit twee delen: het hoofdartikel met daar door heen een aantal losse, wat moeilijkere stukjes. Deze losse stukjes vormen in de geplaatste volgorde een apart verhaal. In het volgende nummer komen we uitgebreid terug op de hubble-relatie die aan het einde van het hoofdartikel even ter sprake komt.

Voor de nieuwe lezers

Tenzij in een artikel anders vermeld, kun je je voor reacties op artikelen en problemen die in Pythagoras aan de orde komen, wenden tot het redactiesecretariaat (het adres staat op de achterzijde van de omslag). Uiteraard zijn ook nieuwe artikelen welkom!

Verwijzing Soms wordt verwezen naar artikelen uit voorgaande nummers, bij voorbeeld: Pythagoras 24-2. Hierbij geeft het eerste getal de jaargang aan en het tweede het nummer uit die jaargang. Overigens zorgen we er wel voor dat je die verwijzingen niet per se hoeft te raadplegen om de artikelen waar ze in voor komen te kunnen lezen. □

Uitgave onder toezicht van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Lay-out: Klaas Lakeman, Amsterdam.

Tekenwerk: Hans van Kuyk, Amsterdam.

Foto's en andere illustraties: Henk Mulder, Ulvenhout (blz. 1, 2, 3, 4); Jan van de Craats, Oosterhout (NB) (blz. 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 29, 30); Paul Gondrie, Best (blz. 6); Hans Lauwerier, Amsterdam (blz. 6); Klaas Lakeman, Amsterdam (blz. 5, 7, 18, 21, 23, 26, 27); Sterrenkunde, Dr. P.J. Gathier, Groningen 1964 (blz. 20, 22).

© 1988 Redactie Pythagoras - ALLE RECHTEN VOORBEHOUDEN, NADruk OF WEERGAVE, GEHEEL OF GEDEELTELIJK, IN WELKE VORM DAN OOK, ZONDER TOESTEMMING VAN DE REDACTIE VERBODEN.

Pythagoras wiskunde tijdschrift voor jongeren

Redactie: Jan van de Craats, Klaas Lakeman, Hans de Rijk.

Medewerkers: Popke Bakker, Gerard Bäuerle, F. van der Blij,
Niels M. Buizert, Hans Lauwerier, Hessel Pot.

Redactiesecretariaat: Klaas Lakeman, Cornelis Krusemanstraat 60^{II},
1075 NS Amsterdam (NL).

Inhoud jaargang 28, nummer 1

Stapelen van buizen en bezemstelen / 1

Henk Mulder

Dobbelen met de computer / 5

Klaas Lakeman

Het geheim van de zeef / 8

Jan van de Craats

Wiskunde in het groot: Kennismaking / 14

Klaas Lakeman

Vorm van de aarde / 18

Omtrek van de aarde / 23

Afstand aarde-maan / 26

Afstand aarde-zon / 27

Pythagoras Olympiade / 28

Jan van de Craats

Vlaamse Wiskunde Olympiade / 31

Redactioneel / 32

Pythagoras verschijnt zesmaal per schooljaar; opgave van abonnementen bij de uitgever (zie onder).

Abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 september schriftelijk bij de uitgever is opgezegd.

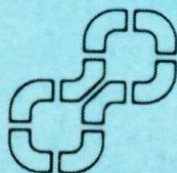
Bij tussentijdse abonnering ontvangt

men ook de reeds verschenen nummers. Betaling per acceptgirokaart.

Tarieven*

	NLG/BEF
Abonnement Pythagoras	20,—/365
Inclusief Archimedes	36,—/660
Losse nummers	5,—/ 90

* Luchtpost-toeslag 15%



stichting ivio

Postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL).

Tel. 03200-76411

educatieve uitgeverij - instituut voor buitenschools

onderwijs - wereldschool - AO-reeks - leerprojecten

Postgiro Nederland: 287934

Postcheck België: 000-0130850-94