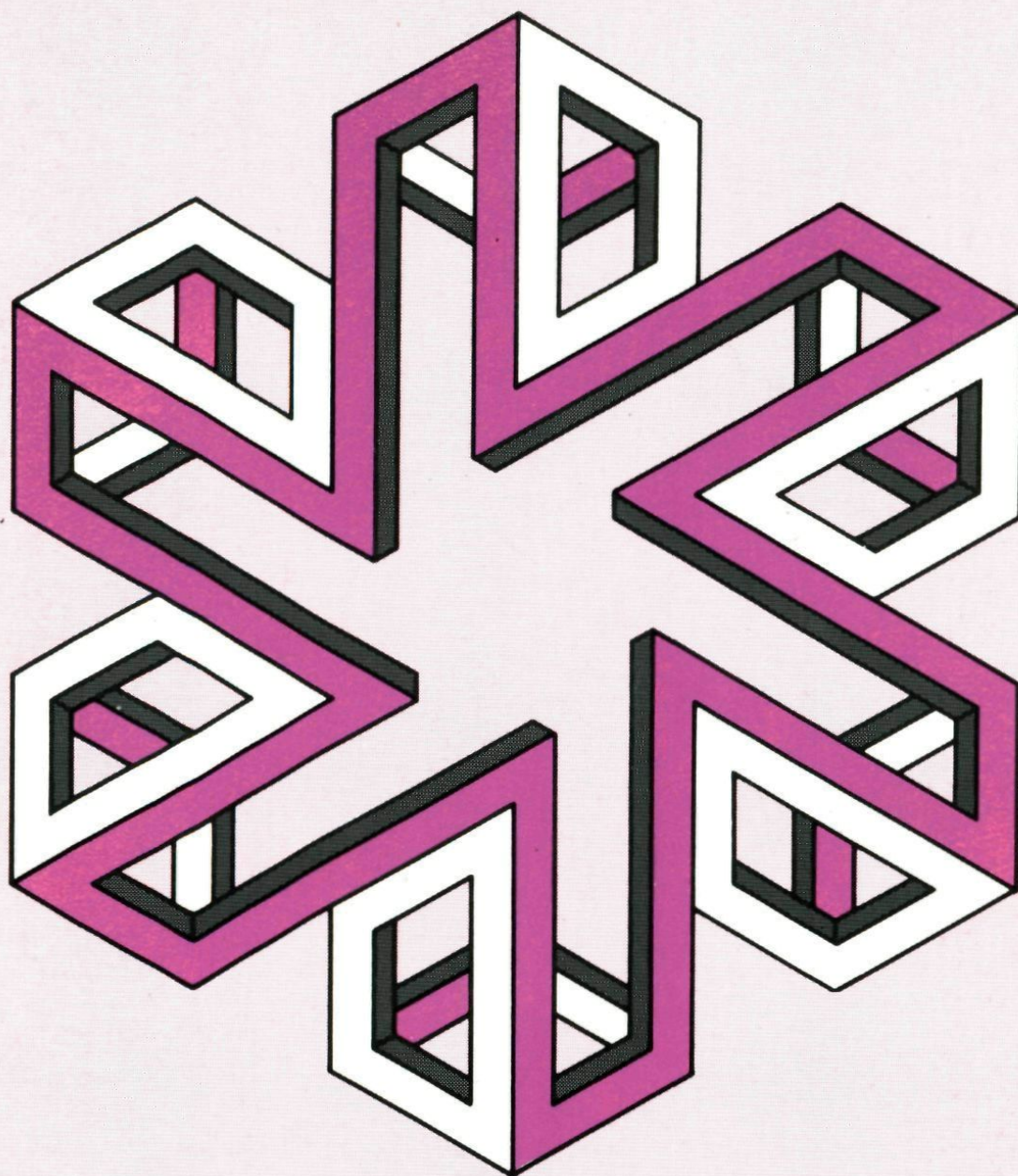
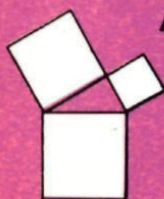




Pythagoras

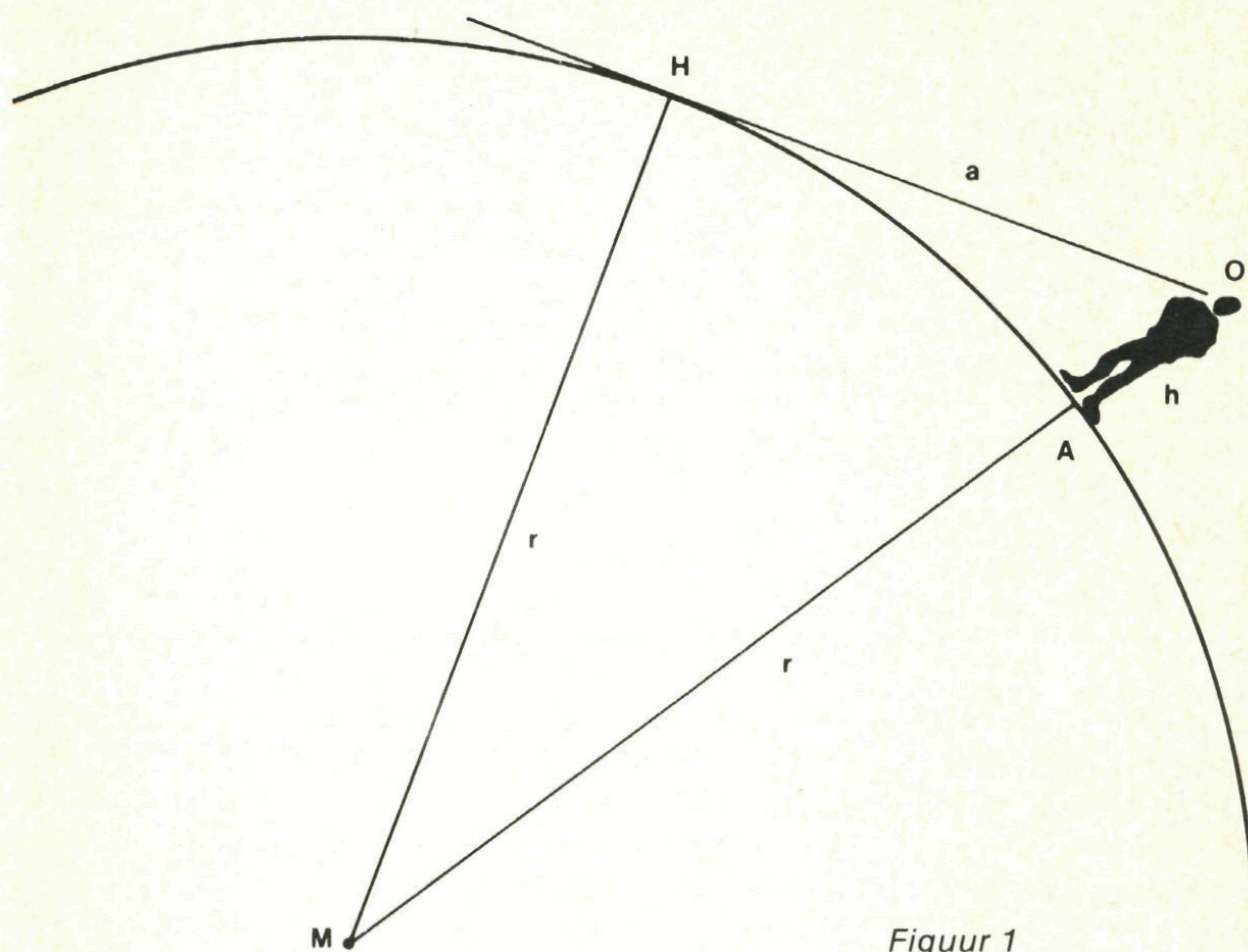


wiskunde tijdschrift voor jongeren

stichting ivio

jaargang 28
nummer 5
juli 1989

Hoe ver is de horizon?



Figuur 1

Kijk van af het strand in de richting van de zee. Door niets wordt het uitzicht belemmerd. Tot aan de horizon zie je water, water en nog eens water. Hoe ver is dat? Het lijkt haast eindeloos ver, maar eenvoudige berekening leert dat het tegenvalt.

Iets vereenvoudigd

In figuur 1 is de situatie vereenvoudigd weergegeven. Stel dat je in A op het strand staat. Je ogen O zitten dan een stukje boven het aardoppervlak. Voor het gemak wordt AO gelijk gesteld aan je lichaamslengte h . De horizon bevindt zich dan in H, waarbij OH een raaklijn is aan het (bolvormige) aardoppervlak. Driehoek HOM (met M het middelpunt van de aarde) is een rechthoekige driehoek.

Jouw afstand a tot H is dan met de stelling van Pythagoras te berekenen. Immers de straal r van de aarde en je lichaamslengte h zijn bekend. Dus

$$a = \sqrt{(r + h)^2 - r^2}.$$

Het kwadraat van $(r + h)$ uitwerken levert

$$a = \sqrt{2rh + h^2}.$$

Bij ons is r ongeveer 6 367 kilo-

meter, of 6 367 000 meter. Neem voor h 1,80 meter, dan volgt uit (1) voor a een waarde van 4 788 meter. Zeg maar bijna 5 kilometer.

3-mijls zone

In vroeger jaren werd op een afstand van 3 mijl uit de kust een denkbeeldige lijn getrokken: de 3-mijls zone. Daarbinnen lagen de territoriale wateren van een land.

Een (Engelse) landmijl is gelijk aan 1 609 meter; een zeemijl 1 852 meter. Dus ruwweg bestonden de territoriale wateren toen uit het stuk zee dat van af strand nog was te overzien.

Vuistregel

Omdat h heel erg klein is in vergelijking tot r , kan (1) worden vervangen door de benadering

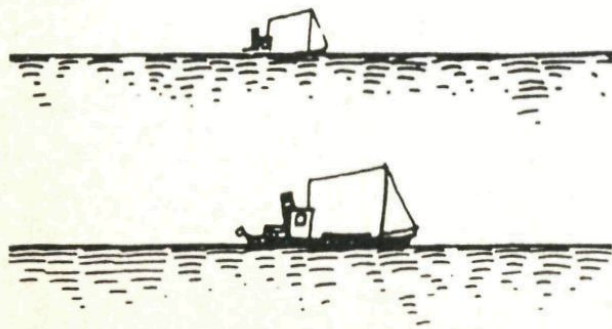
$$a = \sqrt{2rh}.$$

Wordt $2r$ ook nog afgerond op 13×10^6 meter, dan komt er

$$a = \sqrt{13 \times 10^6 \cdot h}$$

of beter

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{13h} \times 10^3 \text{ m} \\ &= \sqrt{13h} \text{ km.} \end{aligned}$$



Figuur 2

Dus de afstand tot de horizon in kilometers is in benadering gelijk aan de wortel uit $13h$, waarbij h in meters moet worden ingevuld.

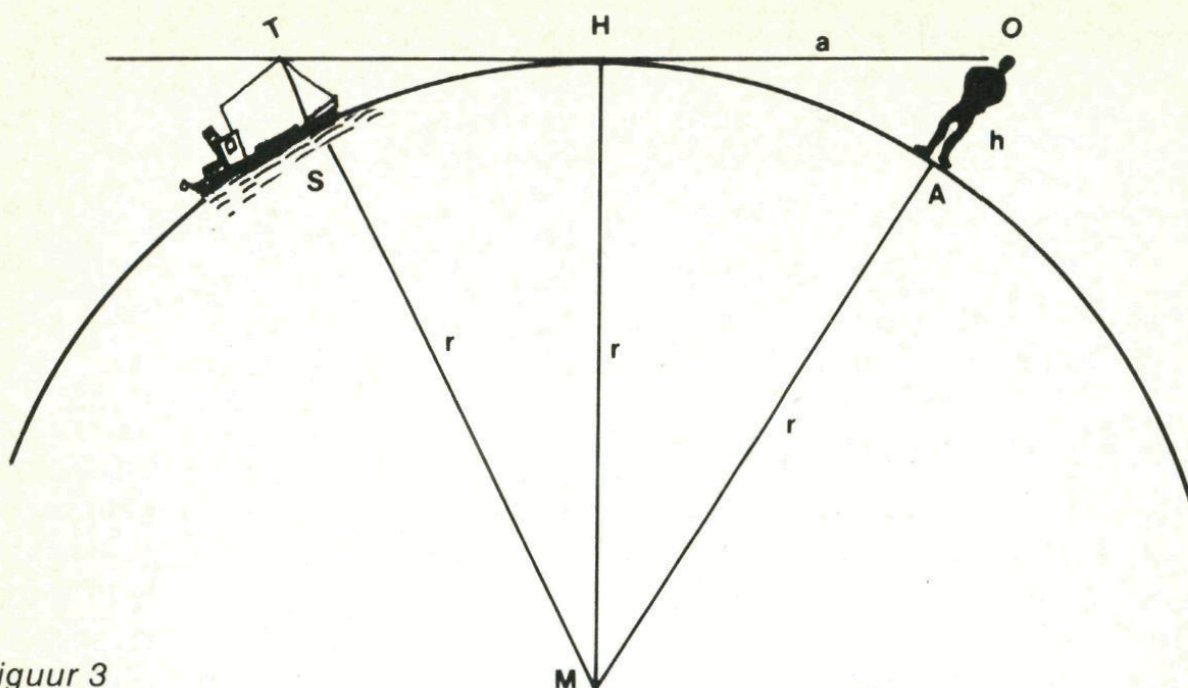
Sta je bij voorbeeld op een toren met een hoogte van 100 meter, dan kun je $\sqrt{1300}$ kilometer ver kijken. Dat is iets meer dan 36 kilometer.

Voorbij de horizon

Aan de horizon doemt een schip op (figuur 2). Eerst is het topje van de mast zichtbaar. Geleidelijk aan volgt de rest. Of omgekeerd, een schip dat zich van de kust verwijderd, zie je langzaam achter de horizon verdwijnen. Het topje van de mast verdwijnt het laatst. Dit is gemakkelijk te verklaren. Je kijkt namelijk verder dan de horizon. Trek in figuur 1 de lijn OH verder door. Op het moment dat het topje van de mast zichtbaar wordt (of verdwijnt), ligt dat topje T precies op het verlengde van OH (figuur 3).

Stel dat bekend is hoeveel meter T boven de waterspiegel uitsteekt. Met de vuistregel is dan ook snel een schatting te maken van de afstand TH . Daarmee weet je dan ongeveer het aantal kilometers dat het schip van jouw horizon (en dus ook van jou!) is verwijderd.

Neem in figuur 3 voor ST bij voorbeeld 9 meter en laat h , zoals eerder gesteld, 1,80 meter zijn. Uit de vuistregel volgt dan $TH = 10,8$ km en $HO = 4,8$ km. Op het moment dat het topje van de mast aan het strand zichtbaar wordt, is het schip dus ongeveer 15,6 km van je verwijderd. □



Figuur 3

Getallen van Armstrong

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = \dots$$

Even rekenen. Op de plaats van de puntjes komt 153. 'Is dat niet mooi?' vroegen we in Pythagoras 27-4. *B. de Jongste* uit Den Haag liet weten dat dit soort getallen in de VS van Amerika bekend staat als de getallen van Armstrong. Hij leverde een complete lijst tot en met de zevende macht.

Derde macht

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$$

$$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$$

$$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$$

$$407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$$

Vierde macht

$$1\ 634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4$$

$$8\ 208 = 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4$$

$$9\ 474 = 9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4$$

Vijfde macht

$$54\ 748 = 5^5 + 4^5 + 7^5 + 4^5 + 8^5$$

Zesde macht

$$548\ 834 = 5^6 + 4^6 + 8^6 + 8^6 + 3^6 + 4^6$$

Zevende macht

$$1\ 741\ 725 = 1^7 + 7^7 + 4^7 + 1^7 + 7^7 + 2^7 + 5^7$$

□

Kegelanamorfosen

Anamorfosen zijn prenten die je op een ongewone manier moet bekijken. Bij *kegelanamorfosen* heb je er een spiegellende kegel voor nodig. Zo'n kegelanamorfose is een tekening die in een ringgebied tussen twee cirkels getekend is. Je moet een spiegellende kegel op zo'n manier op de tekening plaatsen, dat de rand van de kegel precies met de binnencirkel van de ring samenvalt. Als je de kegel dan recht van boven bekijkt, zie je in het kegeloppervlak de onvervormde tekening.

Kegelanamorfosen zijn veel raadselachtiger dan de perspectivische anamorfosen die we in een eerder artikel hebben behandeld, want de vertekening in het ringgebied is heel sterk. Als je geen kegel bij de hand hebt, kun je nauwelijks uitmaken wat de prent moet voorstellen. Dat de wirwar van lijntjes mét een kegel bekeken toch iets leuks oplevert, is daarom des te verrassender.

Het is overigens niet moeilijk om zo'n kegel te maken. Het kan bij voorbeeld van karton dat met een spiegellende laag bekleed is. Hoe je daaruit een kegel van de juiste afmetingen knipt, leggen we in een apart kader uit. Hier beantwoorden we twee andere vragen, namelijk: hoe werken kegelanamorfosen, en hoe kun je ze zelf maken.

Hoe werkt het?

Bekijk je een kegel van boven, dan zie je een cirkel met de top van de kegel als middelpunt. Zou de kegel doorzichtig zijn, dan keek je door het kegeloppervlak heen op tafel.

Denk je eens in dat er op tafel onder de kegel een tekening ligt. We zullen nu in een ring om de kegel heen een andere tekening fabriceren, de kegelanamorfose, die, via een *spiegellende* kegel bekeken, precies hetzelfde beeld geeft als de tekening onder de doorzichtige kegel.

Om de zaak meetkundig te beschrijven, brengen we een kleine vereenvoudiging aan. We nemen aan dat de afstand van het oog-

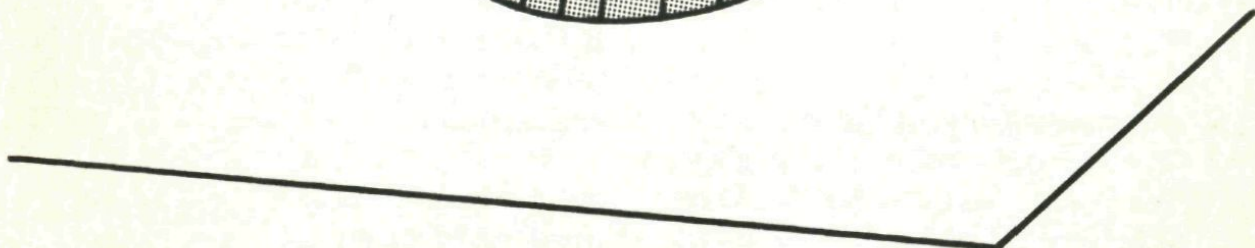
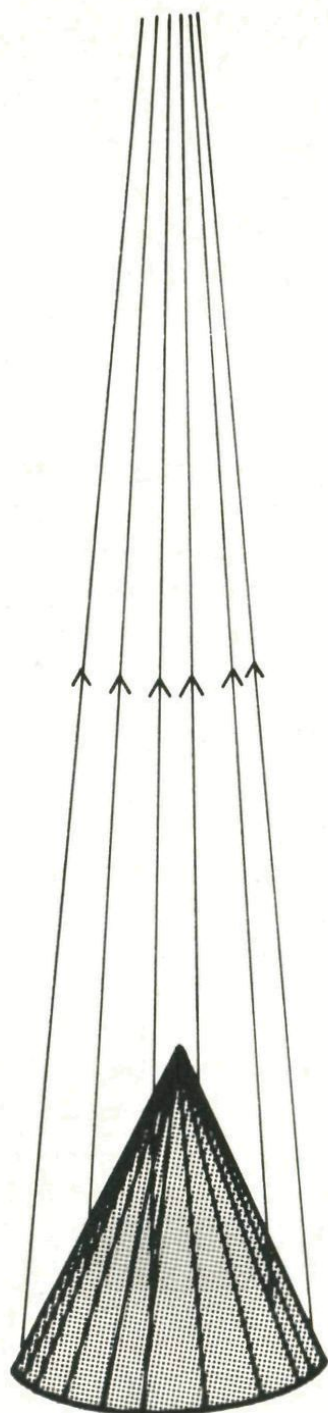
punt tot de kegel groot is in vergelijking met de afmetingen van de kegel. De lichtstralen die vanaf het kegeloppervlak naar het oog lopen, zijn dan bijna evenwijdig (figuur 1).

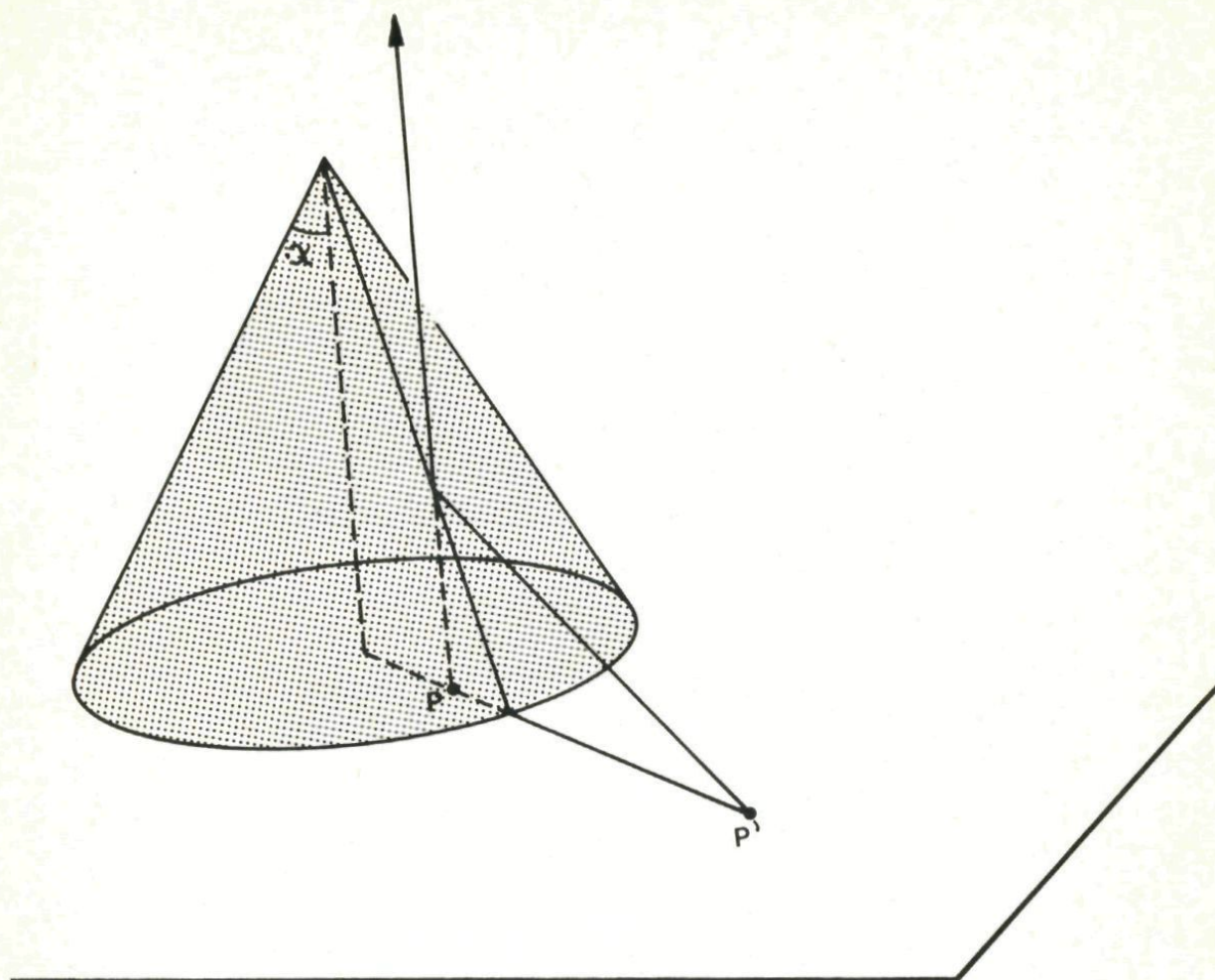
Voor het gemak nemen we aan dat ze *echt* evenwijdig zijn en vertikaal omhoog lopen. Dat beïnvloedt de resultaten nauwelijks, maar het maakt ons verhaal een heel stuk eenvoudiger.

In figuur 2 zie je de gang van een lichtstraal die vertrekt in een punt P' buiten de kegel op tafel, en die via de kegel het oogpunt bereikt. Bij het weerkaatsen geldt de wet 'hoek van inval = hoek van terugkaatsing'.

De halve tophoek van de kegel hebben we α genoemd. Omdat de

Figuur 1





lichtstraal na weerkaatsing recht omhoog naar het oog gaat, lijkt het net of hij afkomstig is van het punt P dat in het verlengde van die straal op tafel ligt. Wat kun je zeggen van de onderlinge ligging van P en P' ?

Vaste verhouding

Kijk naar figuur 3, waarin we nog een paar hulplijntjes getekend hebben. De afstanden van P en P' tot de cirkelrand (de rand van de kegel) hebben we x , respectievelijk x' genoemd.

Het hulppunt T is zo gekozen dat QP en $P'T$ evenwijdig zijn. De hoeken in driehoek QTP' bij Q en T zijn dan gelijk (namelijk allebei α), dus $P'Q = P'T$. Hieruit volgt

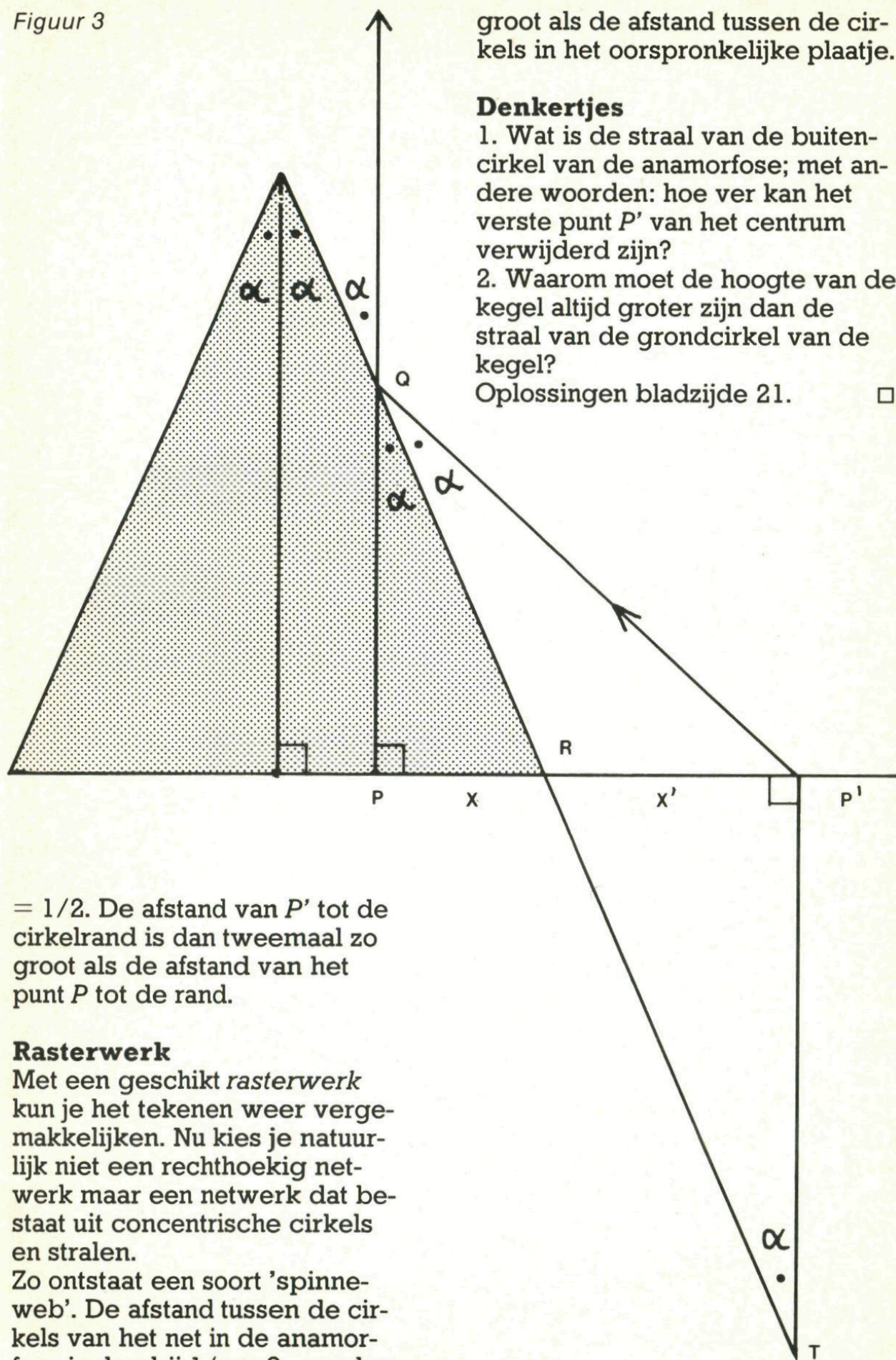
$$x : x' = PR : P'R = PQ : P'T = PQ : P'Q = \cos 2\alpha$$

Recept

De verhouding $x : x'$ is dus *constant*, dat wil zeggen onafhankelijk van de plaats van P en P' . Dat betekent dat je zo'n kegelanamorfose gemakkelijk kunt tekenen, zelfs al heb je geen kegel bij de hand. Leg het plaatje dat je als anamorfose wilt hebben binnen de binnenste cirkel van de ring, en bepaal van alle belangrijke punten van de tekening het beeldpunt via de formule $x : x' = \cos 2\alpha$.

Kies je bij voorbeeld een kegel met een tophoek $2\alpha = 60^\circ$, dan is de verhoudingsfactor $\cos 60^\circ =$

Figuur 3



Denkertjes

1. Wat is de straal van de buiten-cirkel van de anamorfose; met andere woorden: hoe ver kan het verste punt P' van het centrum verwijderd zijn?
2. Waarom moet de hoogte van de kegel altijd groter zijn dan de straal van de grondcirkel van de kegel?

2. Waarom moet de hoogte van de kegel altijd groter zijn dan de straal van de grondcirkel van de kegel?

Oplossingen bladzijde 21.

☐

= $1/2$. De afstand van P' tot de cirkelrand is dan tweemaal zo groot als de afstand van het punt P tot de rand.

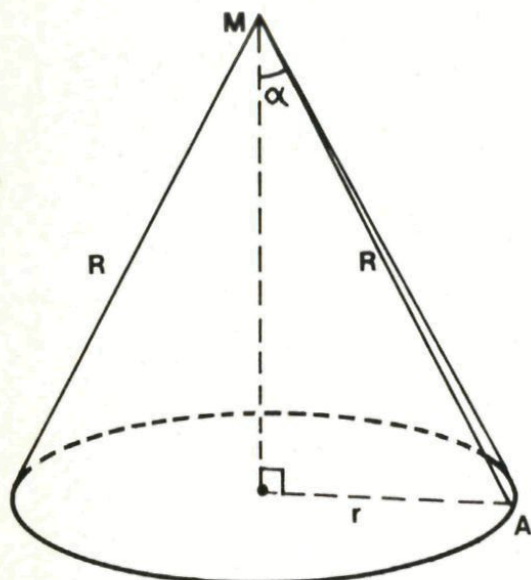
Rasterwerk

Met een geschikt *rasterwerk* kun je het tekenen weer vergemakkelijken. Nu kies je natuurlijk niet een rechthoekig netwerk maar een netwerk dat bestaat uit concentrische cirkels en stralen.

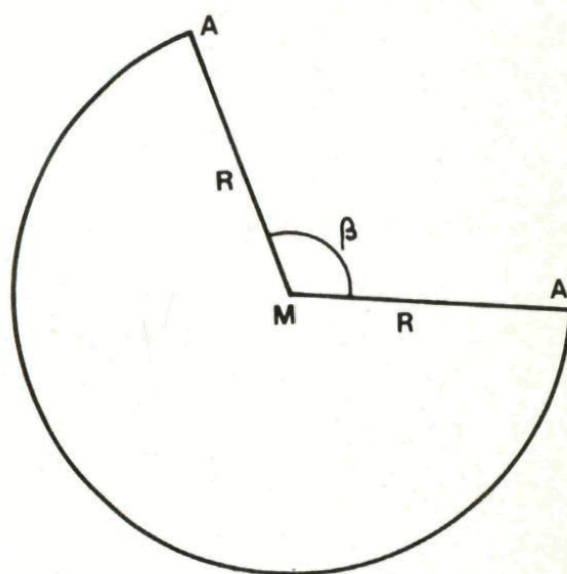
Zo ontstaat een soort 'spinnweb'. De afstand tussen de cirkels van het net in de anamorfose is daarbij $1/\cos 2\alpha$ maal zo

Een kegel van het juiste formaat

Een kegel kun je maken door uit een cirkelschijf een sector te knippen, en de rechte stukken vervolgens tegen elkaar te plakken. Hoe groot moeten de straal van die schijf, en de hoekgrootte van die weggeknipte sector zijn om een kegel te krijgen met een van tevoren vastgelegde tophoek 2α en een basiscirkel met straal r ?



Figuur 4



Figuur 5

In de figuren 4 en 5 staat het antwoord. In de eerste plaats is het duidelijk dat gelden moet

$$\sin \alpha = r/R,$$

of anders geschreven

$$R = r / \sin \alpha.$$

Knip je de kegel van figuur 4 open langs de lijn AM , dan geeft de uitgeholde kegelmantel figuur 5: een cirkel met straal R waar een hap uitgenomen is.

De omtrek van het cirkelgedeelte is $2\pi r$ (de omtrek van de basiscirkel van de kegel).

Maar die omtrek is ook gelijk aan $(2\pi - \beta)R$, waarin β de hoekgrootte is van de ontbrekende cirkelsector.

De vergelijking

$$2\pi r = (2\pi - \beta)R$$

levert je dus de hoekgrootte van het stuk dat weggeknipt moet worden om de juiste kegel te kunnen maken. De twee formules die je nodig hebt, zijn derhalve

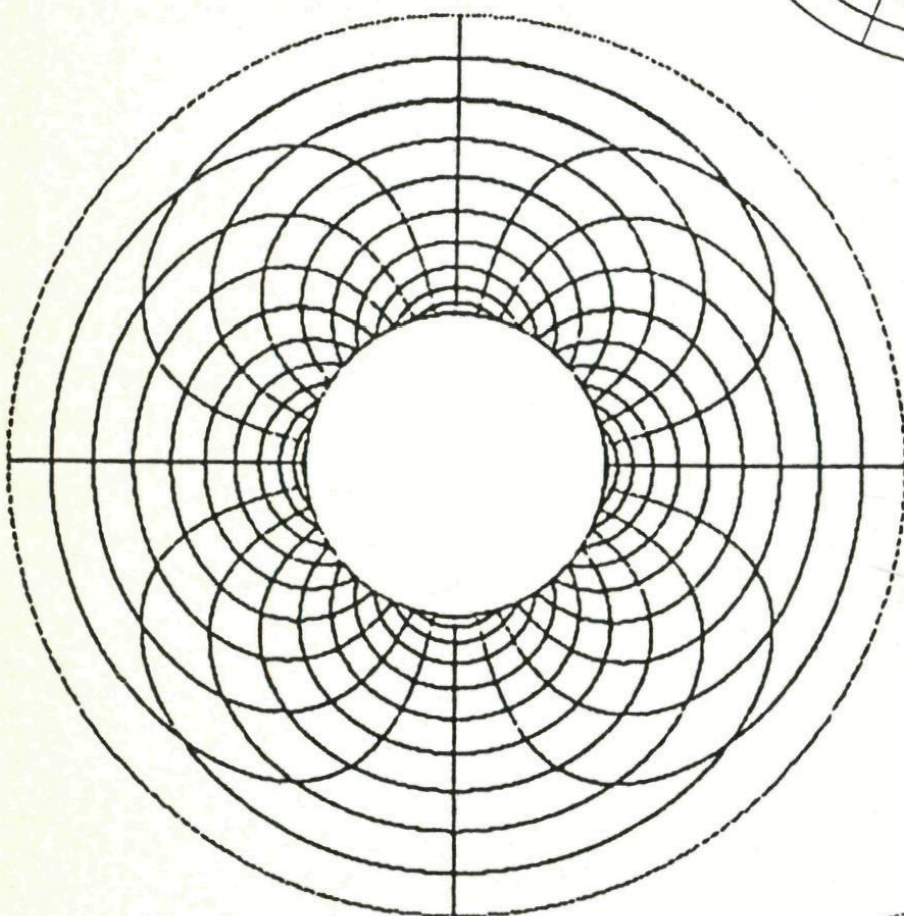
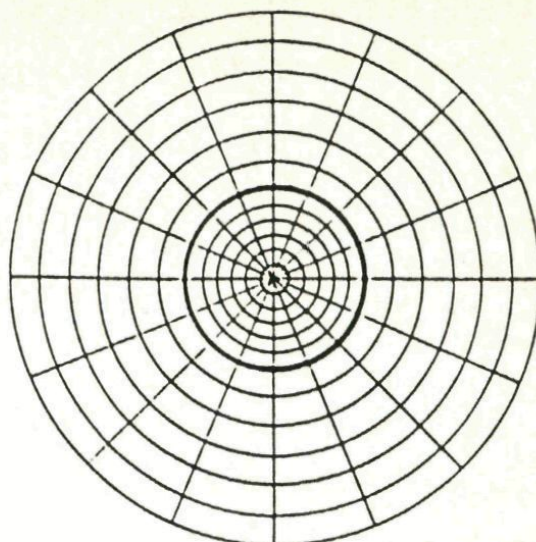
$$R = r / \sin \alpha, \text{ en} \\ = 2\pi (R - r) / r.$$

Geldt bij voorbeeld $r = 1$ en $\alpha = \pi/6$, dan levert dit

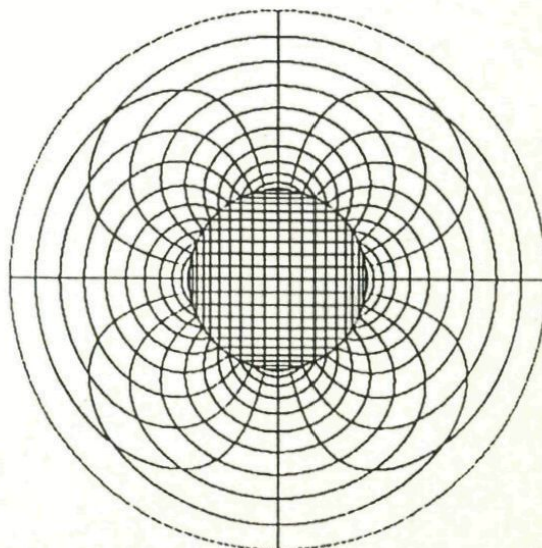
$$R = 2 / \sqrt{3} = 1,1547 \dots \\ \beta = 2\pi (2 / \sqrt{3} - 1) = \\ = 0,9720 \dots \text{ rad} = \\ = (2 / \sqrt{3} - 1) \times 360^\circ = \\ = 55,7^\circ.$$

□

Rasterwerk van stralen en ►
concentrische cirkels om
kegelanamorfoses te maken.
Over het echte plaatje leg
je het netwerk van de dik
getekende binnencirkel; met
behulp van de raster-
verdeling breng je de figuur
dan over naar de buitenring.



▲ Bij kegelanamorfosen treden ►
sterke vervormingen op. Als
voorbeeld geven we de
anamorfose van een
rechthoekig netwerk. Zet je
een spiegelende kegel met de
juiste straal en tophoek in
de open cirkel, dan zie je
in de kegel, recht van boven
bekeken, een rechthoekig
netwerk.



Werken met de Enigma

Werken met de Enigma ging niet echt wat je noemt van een leien dakje. Er was nogal wat voor nodig om het apparaat in te stellen, alvorens met vercijferen of ontcijferen kon worden begonnen. En een juiste instelling van de Enigma was heel belangrijk. Vercijferen en ontcijferen gingen namelijk alleen dan op dezelfde manier, als in beide gevallen van dezelfde beginstand werd uitgegaan. Kortom, de beginstand vormde de sleutel van het enigma-geheimschrift.

In dit artikel wordt beschreven hoe een afzender van een enigma-bericht een ontvanger liet weten van uit welke beginstand de cijfertekst kon worden ontcijferd. Of anders gezegd, er wordt uit de doeken gedaan hoe de sleutel in elkaar zat en werd overgebracht.

Twee delen

De sleutel bestond uit twee delen: een *algemeen deel* en een *speciaal deel*. Het algemene deel werd niet in de eigenlijke cijfertekst opgenomen. Een stuk van het speciale deel wel.

Het algemene deel was gelijk voor alle berichten die op dezelfde dag werden verzonden. Het werd door hoger hand voorgescreven. Het speciale deel was voor elk bericht anders. Het werd volledig bepaald door de afzender.

Algemeen deel

Voor de duur van telkens één etmaal werd met het algemene deel van de sleutel vastgelegd:

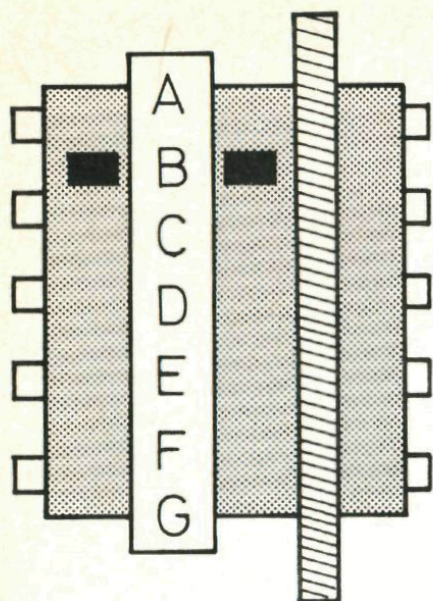
- 1 De volgorde (en daarmee de keuze) van de rotors, Bijvoorbeeld: 423. Links kwam rotor nummer 4, in het midden nummer 2 en rechts nummer 3.
- 2 In dezelfde volgorde de letters van de instellingen die bij het markeringspunt kwamen. Bij voorbeeld: AXP. Was de rotorvolgorde 423, dan kwam bij rotor 4 de A van de instelling bij de vaste stip, bij rotor 2 de X en bij rotor 3 de P (figuur 1).

- 3 De instelling van het stekkerbord. Daarbij werden 22 letters paarsgewijs verwisseld en vier letters met zichzelf doorverbonden. Bij voorbeeld: K/Y, Z/L, B/U, C/X, T/O, I/J, G/A, P/H, W/D, N/R en F/M. Letters die niet werden genoemd (in dit voorbeeld E, Q, S en V) moesten met zichzelf worden doorverbonden.

Opmerking Toen er nog geen stekkerbord werd gebruikt, was uiteraard punt 3 niet nodig. Bovendien waren er toen ook nog maar 3 verschillende rotors in omloop. Met punt 1 hoefde daarvoor dus alleen de volgorde worden aangegeven.

Sleutelboek

Het algemene deel kon in, zeg maar een soort sleutelboek worden opgezocht. Dit boek werd vooraf centraal door de legerleiding samengesteld. Elke maand werden aanvullingen daarop aan elke gebruiker rondgestuurd. Moest iemand op zekere dag een bericht vercijferen, dan stelde hij vast wat de datum was. Die zocht



Figuur 1. Rotor met langs de rand de instelring en de kartels. Hier staat de letter B van de instelring bij het markeringspunt.

<i>Algemeen deel</i>	A L G		
<i>Speciaal deel</i>	S P E		
<i>Cijfertekst</i>			
W Q S E U	P M P I Z	T L J J U	
L R B I D	W E F B O	J I E P O	
T B J R O	N G K L W	N G Y D A	
G L S V G	B N P Q		

Figuur 3. Voorbeeld van een enigma-bericht. De letters van de cijfertekst staan (zoals bij elk geheimschrift) in groepjes van vijf bij elkaar. De eerste zes letters van de cijfertekst horen tot het speciale deel van de sleutel.

hij op in de datumlijst aan het begin van het sleutelboek. Bij de betreffende datum vond hij dan drie letters, bij voorbeeld ALG. Deze drie letters werden alvast op het papier geschreven dat voor de cijfertekst was bestemd (figuur 3). Vervolgens werd in het sleutelboek het paragraafje opgezocht dat met ALG was aangegeven. Daar stonden de richtlijnen voor de volgorde van de rotors, de stand van de instelringen en de instelling van het stekkerbord. Nadat de verzender volgens die richtlijnen zijn Enigma had ingesteld, kon hij aan het speciale deel van de sleutel beginnen.

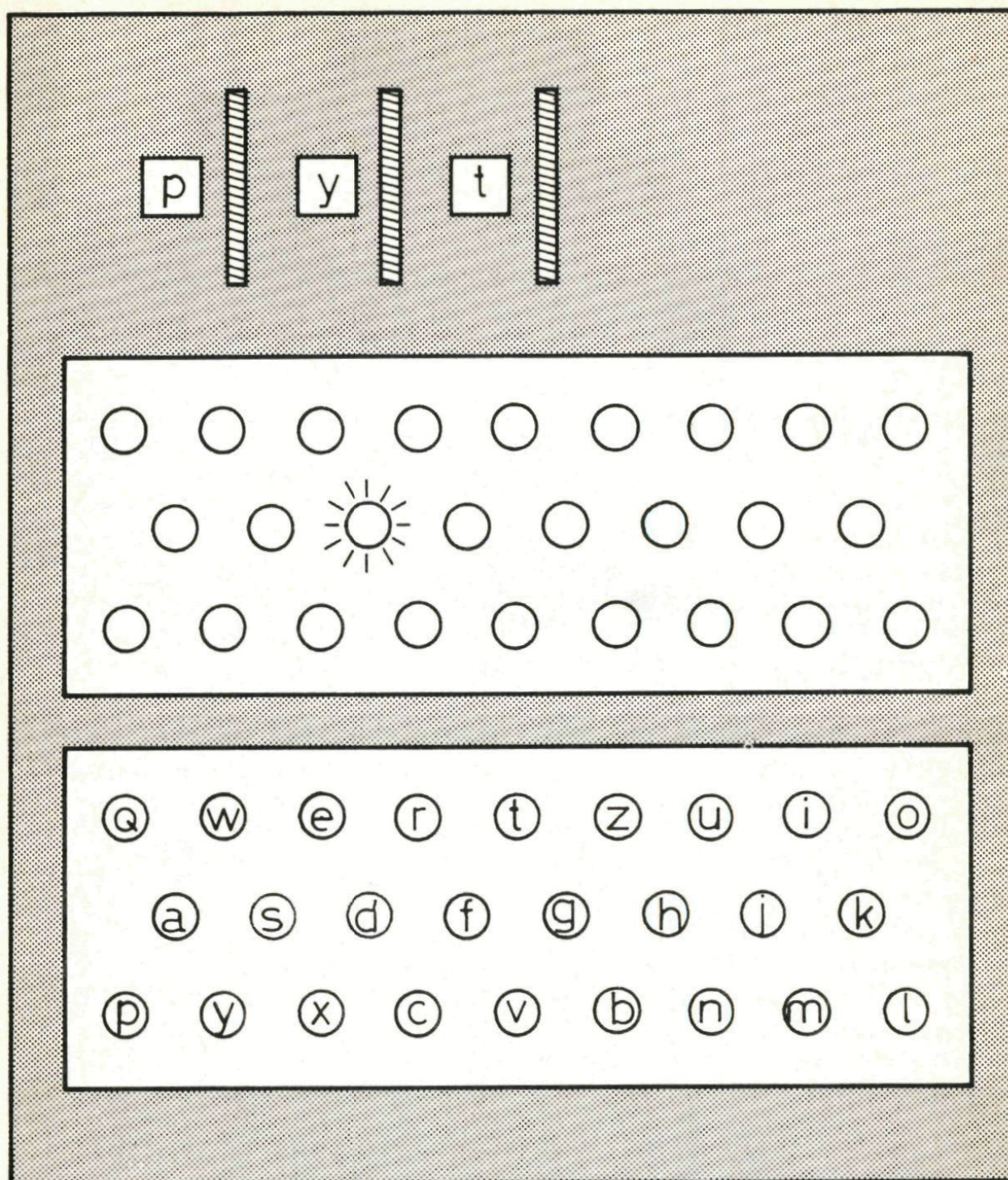
Speciaal deel

Met het speciale deel van de sleutel werd de beginstand van de rotors vastgelegd.

Aan de bovenkant van de Enigma zaten drie venstertjes (figuur 2). Door elk venstertje was van elke

rotor slechts één letter te zien. Elke mogelijke beginstand van de rotors kon dus worden aangegeven met drie letters. Met behulp van de kartels aan de rand van de rotors kon die positie met de hand worden ingesteld.

Stel dat de afzender als beginstand ROT wilde hebben (R voor de linker rotor, O voor de rotor in het midden en T voor de rechter rotor). Dan stelde hij zijn rotors daar nog *niet* op in. In plaats daarvan zette hij ze in een willekeurige positie, laten we zeggen SPE. Deze drie letters vormden het stukje van het speciale deel dat niet in de eigenlijke cijfertekst werd opgenomen. Ze werden onder de drie letters van het algemene deel geschreven (figuur 3). Met zijn rotors in stand SPE typte de verzender tweemaal na elkaar de keuze van zijn beginstand in. Dus ROTROT. Deze zes letters werden dus vercijferd. Laten we



Figuur 2. Boven aanzicht van de Enigma. De rotors staan in de stand PYT (zie vensters bovenaan).

aannemen als WQSEUP. Deze vertaalde letters werden opgeschreven en vormden het begin van de cijfertekst (figuur 3). WQSEUP was dus het stuk van het speciale deel dat in de cijfertekst was opgenomen.

Als dat gebeurd was, zette de afzender zijn rotors met de hand in stand ROT en kon beginnen met de vertaling van het bericht. Letter intoetsen, kijken welk lampje oplicht, vertaalde letter opschrijven, enzovoort.



Figuur 4. De praktijk. Een kijkje in een commandowagen van het Duitse leger. Vooraan de Enigma, daar achter de zend-installatie. Let op de papieren die de bedieners van Enigma en zend-installatie in hun handen hebben.

Luistervinken

Tijdens het overzenden kon ieder die dat maar wilde, de morse-signalen opvangen. De Polen, de Engelsen en noem maar op. Er hoefde alleen maar uitgezocht te worden welke radio-frequentie(s) gebruikt werd(en).

De Duitsers begrepen dat uiteraard wel. Ze hadden echter het volste vertrouwen dat buitenstaanders zo die al over een Enigma beschikten, de sleutel onmogelijk konden achterhalen. Daarin zouden ze zich behoorlijk vergissen, want uiteindelijk slaagden de Engelsen er in.

Het meeste gevaar dachten de Duitsers echter uit eigen gelederen. Om te verhinderen dat verschillende onderdelen van het leger bij elkaar luistervinkje konden spelen, brachten ze verschillende sleutelboeken in omloop. Als de hogere officieren bij voorbeeld iets onderling te bekonkelen hadden, gebruikten ze het daarvoor bestemde sleutelboek. De algemene delen van de sleutel die daarin stonden, waren niet in andere sleutelboeken te vinden. Lagergeplaatsten konden zo'n bericht dus wel opvangen, maar niet ontcijferen. □

Het toetsenbord bevatte geen cijfers (figuur 2). Getallen moesten dan ook voluit in woorden worden geschreven.

(Merk nog op dat in ROTROT drie letters twee keer voorkomen, maar dat daar in WQSEUP geen sprake is. Dezelfde letters worden dus niet door dezelfde letters vertaald. Dit komt doordat de rotors bij elke toets-aanslag een stapje doordraaien.)

Verzenden

Eenmaal vertaalt, kon het bericht worden verzonden. De geschreven vertaalkode werd overhandigd aan iemand die de zendapparatuur bediende. Die zette de vertaalkode om in morse-code.

Daarna riep hij degene op voor wie het bericht was bestemd, en zond de tekst over.

Op de bestemming werd het ontvangen morse-sigitaal teruggezet in de vertaalkode. En die ging naar degene die de Enigma bediende, om te worden vertaald.

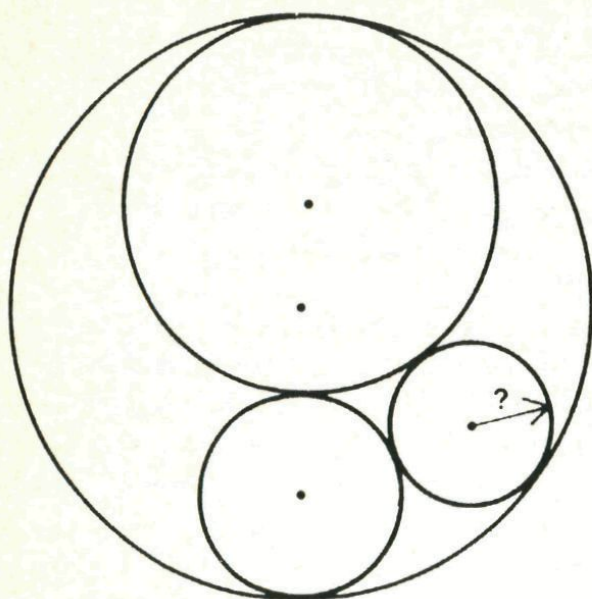
Ontcijferen

Bij het ontcijferen werd dezelfde procedure gevolgd als bij het vertaalen.

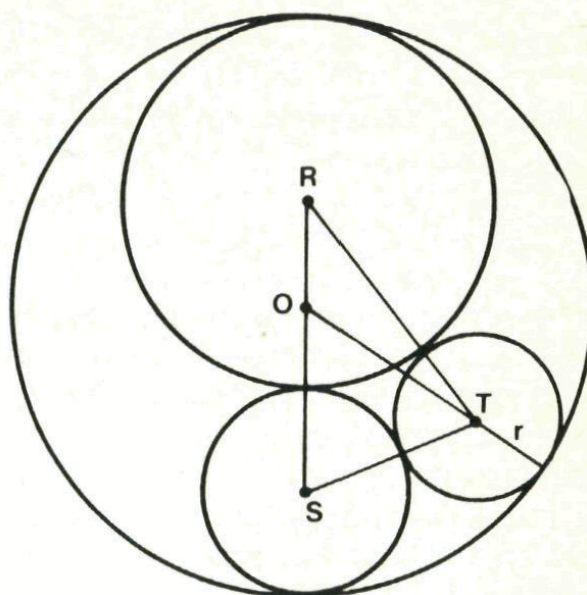
Eerst werden de drie letters van het algemene deel van de sleutel (in ons voorbeeld ALG) in het sleutelboek onderzocht. De daar vermelde richtlijnen voor de volgorde van de rotors, voor de instellingen en voor het stekkerbord werden uitgevoerd.

Vervolgens werden de rotors met de hand rondgedraaid, totdat in de vensters het speciale deel van de sleutel was te zien. In ons voorbeeld SPE. De eerste zes letters van de vertaalkode, WQSEUP, werden ingetoetst. Dat zou in ons geval ROTROT opleveren, waaruit dan was op te maken dat de eigenlijke beginstand van de rotors ROT was. Nadat die was ingesteld, kon het ontcijferen beginnen. De zevende letter van de vertaalkode intoetsen, kijken welk lampje oplicht, vertaalde letter opschrijven, enzovoort. □

Zo past de derde in de pan



Figuur 1



Figuur 2

Een cirkel met straal 2 raakt een andere cirkel met straal 1. Beide cirkels worden omschreven door een cirkel met straal 3. Bereken de straal r van de cirkel die binnen de cirkel met straal 3 ligt, en alle drie cirkels raakt (figuur 1).

Vooraf

Geef de middelpunten van de cirkels aan met O , R , S en T (figuur 2). De punten O , R en S liggen op een rechte (Waarom?). Trek RS , RT , OT en ST . Er geldt dan:

$$\begin{aligned} ST &= 1 + r \\ OT &= 3 - r \\ RT &= 2 + r \\ SR &= 3 \\ SO &= 2 \\ OR &= 1. \end{aligned}$$

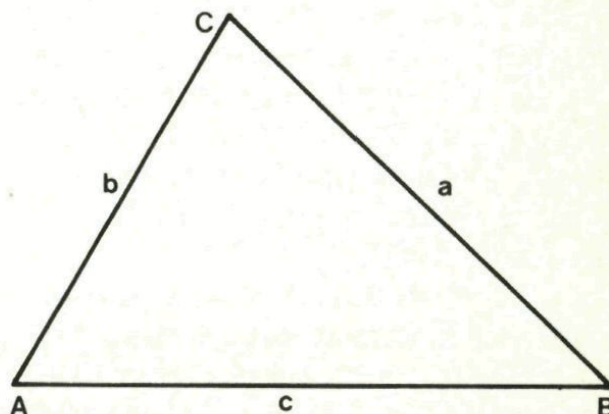
Verder is de oppervlakte van driehoek STO tweemaal de oppervlakte van driehoek OTR . Beide driehoeken hebben immers dezelfde hoogte (hoogtelijn uit T op RS), terwijl $OS = 2RO$.

Nu kunnen de oppervlakten van

de driehoeken STO en OTR met de formule van Heron in r worden uitgedrukt. Daarna kan r worden berekend.

Formule van Heron

Als in een driehoek ABC (figuur 3) de zijden a , b en c bekend zijn,



Figuur 3

kan de oppervlakte worden berekend met

$$\text{Opp} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Hierin is s de halve omtrek van de driehoek. Dus

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Het bewijs voor deze oppervlakte-formule is niet moeilijk, maar wel heel uitvoerig. We laten het hier achterwege. Zoals gezegd bij de aankondiging van het probleem (Pythagoras 28-4), is het in elk wat ouder meetkunde-boek wel te vinden.

De formule is genoemd naar Heron van Alexandrië die omstreeks 80 v. C. leefde. Maar waarschijnlijk is hij afkomstig van Archimedes (287-212 v. C.).

Halve omtrek

Een aardige bijkomstigheid is dat zowel voor driehoek *STO* als voor driehoek *OTR* de omtrek gelijk is aan 6. Voor beide driehoeken is de halve omtrek dus 3 ofwel $s = 3$. Dit is met de eerder gegeven waarden voor de zijden van beide driehoeken gemakkelijk na te gaan. Gewoon een kwestie van optellen.

De formule toegepast

De formule van Heron levert na wat vereenvoudigingen voor de oppervlakte van driehoek *STO*

$$\sqrt{3 \cdot (2-r) \cdot r \cdot 1}.$$

Deze uitdrukking wat verder vereenvoudigen en kwadrateren levert voor het kwadraat van de oppervlakte van driehoek *STO*

$$6r - 3r^2. \quad (1)$$

Voor de oppervlakte van driehoek *OTR* levert de formule van Heron na wat vereenvoudigen de uitdrukking

$$\sqrt{3 \cdot 2 \cdot (1-r) \cdot r}.$$

Verder vereenvoudigen en kwadrateren geeft voor het kwadraat van de oppervlakte van driehoek *OTR*

$$6r - 6r^2. \quad (2)$$

De oplossing

Omdat de oppervlakte van driehoek *STO* tweemaal de oppervlakte van driehoek *OTR* is, is het kwadraat van de oppervlakte van *STO* viermaal dat van *OTR*. Met (1) en (2) leidt dit tot

$$6r - 3r^2 = 4(6r - 6r^2).$$

Verder uitwerken van deze vergelijking levert

$$21r^2 - 18r = 0.$$

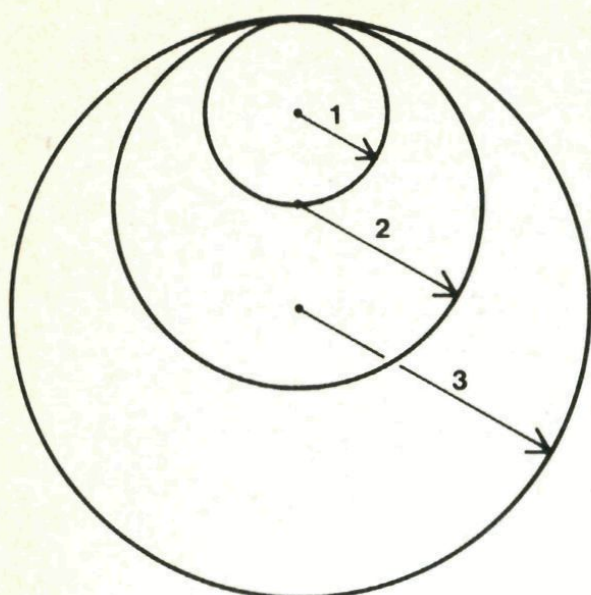
Via

$$3r(7r - 6) = 0$$

worden dan voor r de waarden 0 en $6/7$ gevonden. De waarde 0 voldoet niet, tenzij de cirkels met straal 1 en straal 2 elkaar *inwendig* raken (figuur 4). Blijft dus over $r = 6/7$.

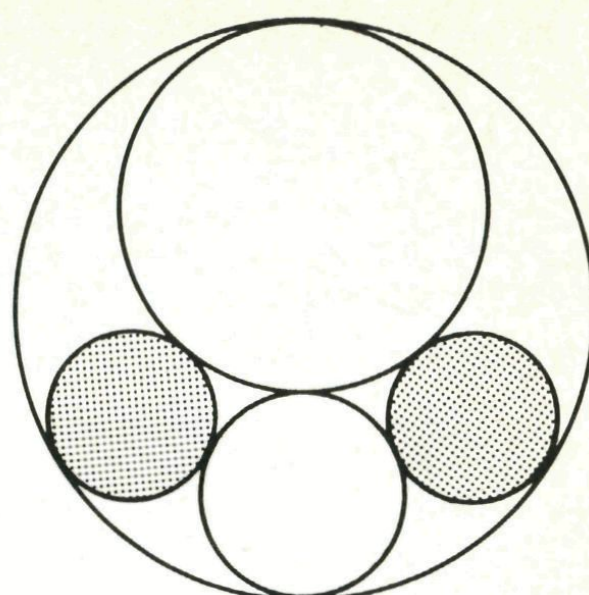
Ook een vierde in de pan

Waarschijnlijk heb je al gezien dat er naast de steeds besproken mogelijkheid voor de cirkel met straal r nog een tweede is (figuur 5). Daarmee liggen er dan vier



Figuur 4

cirkels in de pan. En moeten we concluderen dat de titel van dit



Figuur 5

stukje de lading niet helemaal dekt. □

Zo kan het ook!

Zonder oppervlakte-berekeningen is de straal r van de derde in de pan ook te bepalen. Er moet dan gebruik worden gemaakt van de cosinus-regel in een driehoek.

De gegevens

Eerst zetten we alle gegevens van driehoek RTS (figuur 1) nog eens op een rijtje. Bovendien wordt de naamgeving van de lijnstukken wat aangepast om veel schrijfwerk te vermijden.

Dus

$$ST = a = 1 + r$$

$$OT = x = 3 - r$$

$$RT = b = 2 + r$$

$$RS = c = 3$$

$$OS = q = 2$$

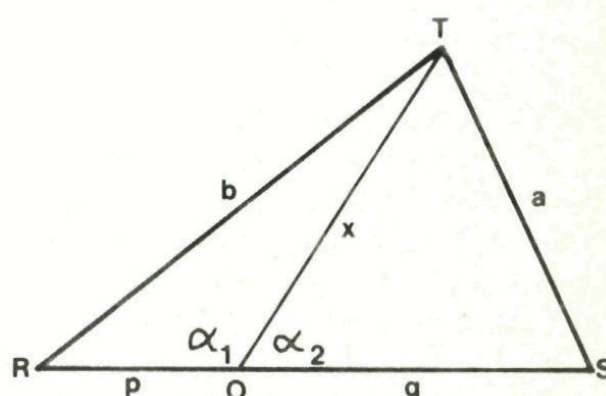
$$OR = p = 1$$

Verder worden de hoeken bij O aangegeven met α_1 en α_2 .

Cosinusregel

De cosinusregel toegepast in driehoek ROT levert:

Figuur 1



$$b^2 + x^2 + p^2 - 2px \cos \alpha_1.$$

Of anders geschreven

$$\cos \alpha_1 = \frac{x^2 + p^2 - b^2}{2px}. \quad (1)$$

Op dezelfde manier geldt in driehoek *OST*:

$$\cos \alpha_2 = \frac{x^2 + q^2 - a^2}{2qx} \quad (2)$$

Deze twee cosinussen zijn elkaars tegengestelde. Immers $\alpha_1 + \alpha_2 = 180^\circ$; anders gezegd: α_1 en α_2 zijn elkaars supplement. Dus uit (1) en (2) volgt

$$\frac{x^2 + p^2 - b^2}{2px} = \frac{-x^2 - q^2 + a^2}{2qx}$$

Uitwerken

Kruislings vermenigvuldigen en vereenvoudigen (bedenk dat $c = p + q$) geeft in enkele stappen

$$x^2c = -qpc + qb^2 + pa^2.$$

Hierin de gegevens invullen leidt na verder uitwerken tot

$$-28r = -24,$$

waaruit volgt $r = 6/7$. □

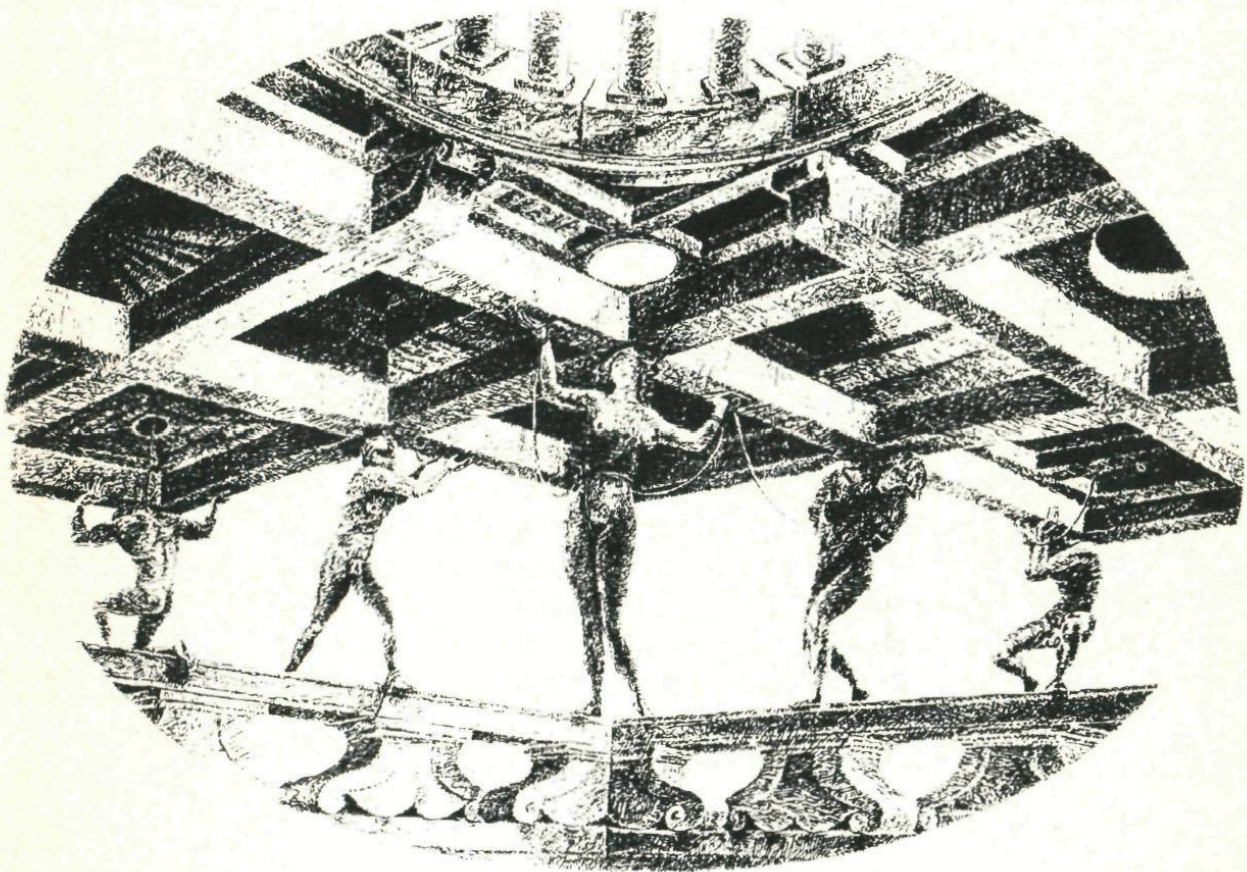
De Vijf Draagonders

Onmogelijke figuren blijven kunstenaars boeien. De graficus M. C. Escher heeft een aantal beroemde onmogelijke prenten gemaakt, en vele zijn hem op dit pad gevolgd. Het aardigst zijn die figuren als de 'onmogelijkheid' ervan er niet te dik bovenop ligt. Als je op het eerste gezicht helemaal niet in de gaten hebt dat er iets vreemds aan de hand is. Na een tijdje begin je te zien dat er iets niet klopt, en het leukst is het dan om er achter te komen wat er nu precies mis is, en hoe de kunstenaar je met behulp van de wetten van het perspectieftekenen en met tekenoefjes op het verkeerde been heeft gezet.

Een mooi voorbeeld is de hierbij afgebeelde pentekening 'De Vijf Draagonders' uit 1985 van de Belgische kunstenaar Fons De Vogelaere. In een elliptische omlijsting zijn vijf gestalten getekend die, staande op een ballustrade, een plafond ondersteunen.

Als je er wat langer naar kijkt, zie je allerlei vreemde dingen. Vergelijk bij voorbeeld de bovenkant, het plafond, met de ballustrade. Zie je dat het niet klopt? De vrouwenfiguur in het midden lijkt het meest naar voren te staan. Ze is ook het grootst getekend. En de

twee balken in de zoldering die door de vijf dragers ondersteund worden, lopen links en rechts naar achteren weg. Maar dat klopt niet met de ballustrade waar de dragers op staan, want die loopt links en rechts juist naar ons toe. In de ballustrade zelf is trouwens ook iets gek te zien: kijk maar naar de krullen! En dan is er in het plafond nog een lichtkoepel die door zuilen gesteund wordt. Je ziet er maar een klein deel van, maar dat stuk zit ook weer op een onmogelijke manier in het geheel opgesloten. Het zal duidelijk zijn dat je alleen

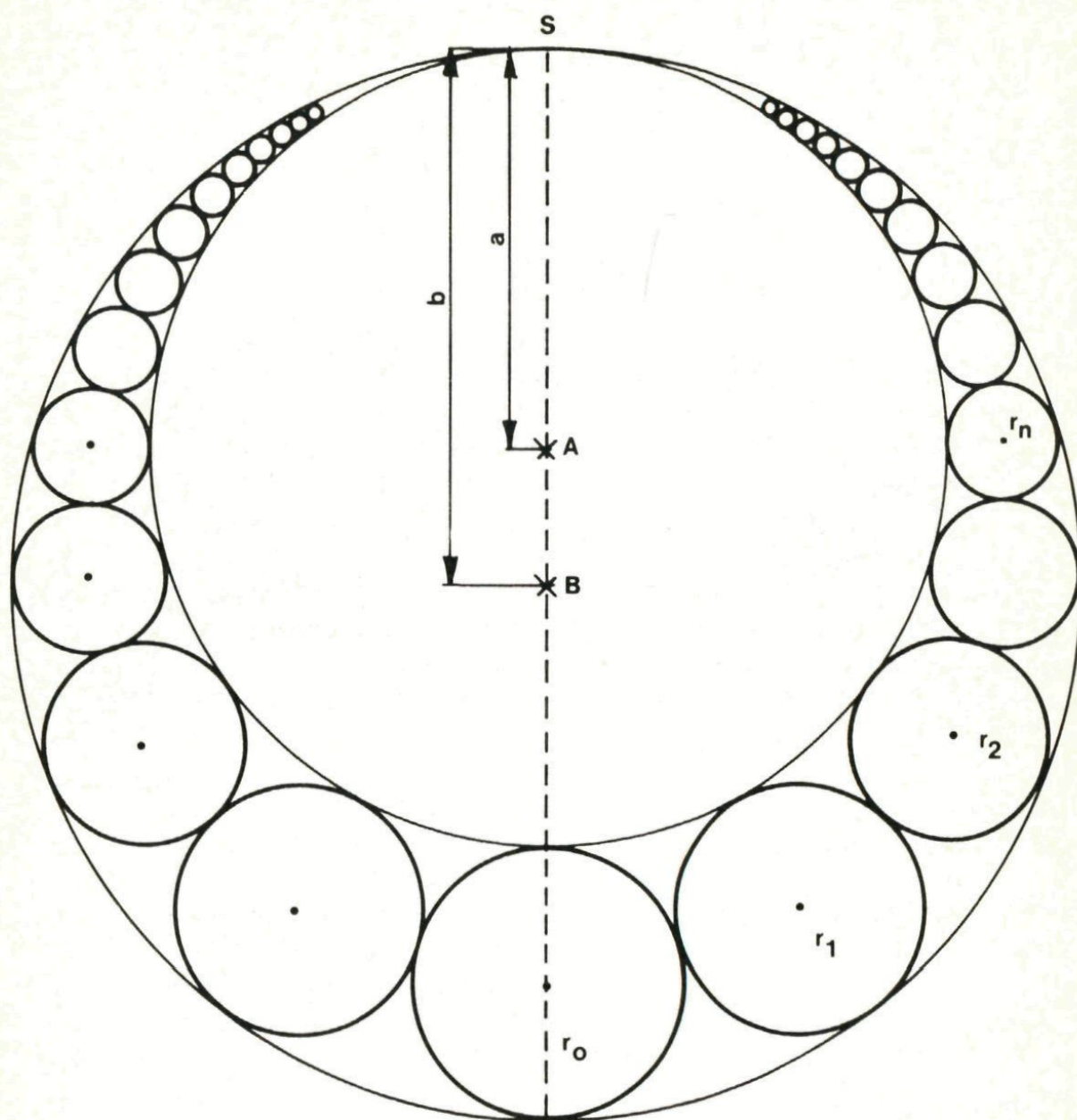


'De Vijf Draagonders', pentekening op papier (1985), Fons De Vogelaere.

maar zo'n prent kunt maken als je de 'gewone' wetten van het perspectieftekenen goed beheerst. Het is de moeite waard om de

verschillende verdwijnpunten op te zoeken, en te zien op welke manier de tekenaar zijn publiek voor raadsels weet te stellen. □

De parelsnoerformule



$$r_n^{-1} = n^2 (a^{-1} - b^{-1}) - (a - b)^{-1}$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$

Bovenstaande formule is een veralgemening van 'De derde in een pan' (Pythagoras 28-4 én bladzijde 15).

Op het eerste gezicht is er aan die formule voor de straal van de opvolgende 'parels', ingesloten tussen rakende cirkels met stralen a en b , misschien weinig bijzonder te zien. Maar omdat het ons zeker vijftien volgeschreven vellen met herleidingen van gigantische lettervormen

kostte om dit resultaat te bereiken, verrastte het ons zeer dat de formule zo simpel en kort is.

Verder valt op dat de formule bij rationaal gekozen getallen a en b , ook *rationale* uitkomsten geeft voor de stralen van alle parels. Dit is bijzonder, omdat bij de berekening van lengten met de stelling van Pythagoras er bijna altijd wortels in de formules blijven staan.

Kies bijvoorbeeld $a=2$ en $b=3$, dan worden de stralen van de parels (te beginnen bij de grootste in het midden):

$$1, \frac{6}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{11}, \frac{6}{31}, \frac{1}{7}, \dots$$

Bij herleiding van deze breuken tot een vaste teller 6, ontstaat in de noemers een regelmatig patroon.

Door in de voorgetekende figuur de cirkelstralen op te meten en in te vullen in de formule, kun je je ervan overtuigen dat die in ieder geval bij benadering juist is.

Achteraf hebben we wel een mooie korte afleiding van de formule gevonden. Daarbij wordt een meetkundige afbeelding toegepast die *inversie* heet. Dat is zoiets als een lijnspiegeling, maar dan met een *cirkelvormig* gebogen in plaats van een rechte spiegel.

Een volledige uitleg hiervan zou wat ver voeren. Voor wie er iets van weet, merken we op dat je een inversie-cirkel met middelpunt S moet kiezen die de cirkel met straal r_n loodrecht snijdt. Deze laatste cirkel blijft bij de transformatie op z'n plaats, en het gebogen parelsnoer wordt getransformeerd in een rechte keten van allemaal even grote cirkels, ingesloten tussen de rechte (parallelle) beeldlijnen van de cirkels A en B .

Ten slotte nog een opmerking over de ligging van de onderlinge raakpunten van de parels, en over de middelpunten ervan. De onderlinge raakpunten liggen allemaal op één cirkel (want in het inversiebeeld liggen die raakpunten op een rechte) met straal $2(a^{-1} + b^{-1})^{-1}$.

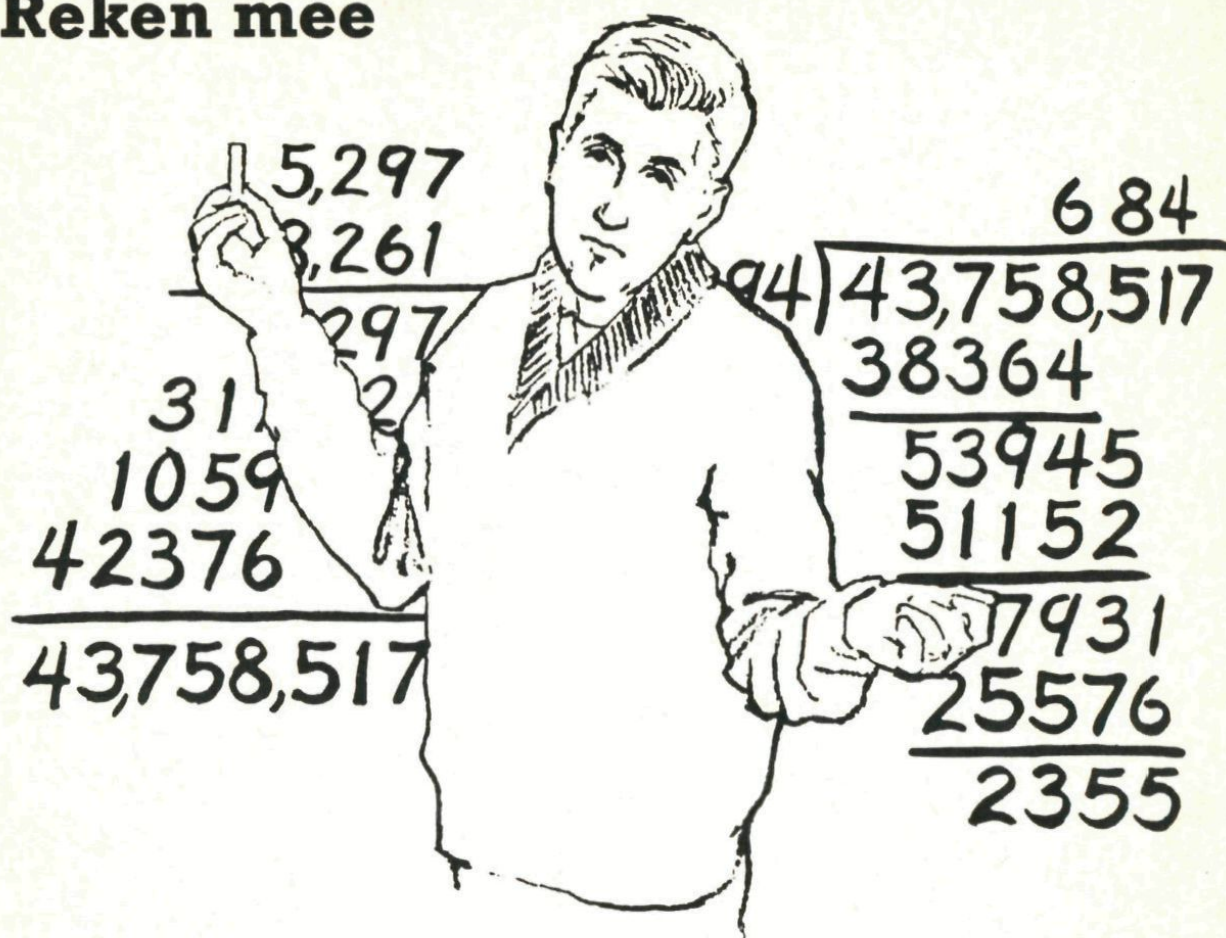
De parelmiddelpunten liggen daarentegen niet op een cirkel maar op een ellips! (Want de som van de afstanden van een parelmiddelpunt tot A en tot B is voor elke parel gelijk aan $a + b$.)

Ook als de parels ingesloten liggen tussen twee *niet*-rakende cirkels, blijkt te gelden dat de raakpunten op een cirkel liggen, en de middelpunten op een ellips. $\square$

Kegelanamorfofen: oplossingen denkertjes

- 1 De maximale afstand krijg je als je $x = r$ neemt. Dan is dus $x' = r/\cos 2\alpha$ en $x + x' = r(1 + 1/\cos 2\alpha)$.
- 2 De hoogte van de kegel moet groter zijn dan de straal, omdat er anders geen lichtstralen van de tafel via de kegel naar het oog kunnen lopen. $\square$

Reken mee



De wiskundige Carl Friedrich Gauss (1777—1855) bleek op de lagere school al heel goed te kunnen rekenen. Om hem een tijdje aan het werk te houden, zei de meester op een keer tegen hem: 'Tel jij de getallen van 1 tot en met 100 maar eens bij elkaar op.' De kleine Carl gaf echter dadelijk het antwoord: '5050.' Vol trots legde Gauss ook uit hoe hij daar zo snel aan was gekomen. '1 plus 99 is 100, 2 plus 98 is 100, enzovoort. Dat komt 49 keer voor, dat is dus 4900. Daar moeten dan 100 en 50 nog bij worden opgeteld.'

In Pythagoras 28-4 werd onder de titel '123456789 + ... + ...' het volgende gevraagd:

Wat is de som van alle negencijferige getallen waarin elk van de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9 slechts één keer voorkomt?

Natuurlijk was het niet de bedoeling om je eens domweg een tijd aan het werk te zetten. In tegenstelling tot Gauss mag je dan wel een rekenmachine hebben, maar geen van die getallen past daarin. Probeer maar. Bovendien zijn het er zoveel dat er zonder meer geen beginnen aan is. De bedoelde getallen bestaan namelijk uit alle mogelijke volgorden van het rijtje cijfers 123456789. Dat zijn er

$$9! = 9 \times 8 \times 7 \times \dots \times 2 \times 1 \times = 362\,880.$$

Reken maar na met de $x!$ -toets op je rekenmachine.

Zelfs een computer ontkomt in dit geval niet aan langdurig en omslachtig rekenwerk, omdat er weinig regelmaat in die getallen zit. Bovendien is de kans groot dat hij gaat afronden.

En toch... Net als in het voorbeeld van Gauss is die som snel en exact te bepalen.

Eerst de eenheden

Het laatste cijfer in een getal geeft de eenheden aan. Onder de beschouwde getallen zijn er die eindigen op een 1, op een 2, enzovoort. Kortom, alle negen cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9 treden een aantal malen als laatste op.

Bekijk het getal dat eindigt op een 1 (figuur 1). Op de acht voorgaande plaatsen kan dan een mogelijke volgorde van het rijtje cijfers 23456789 worden gezet. Er zijn

$$8! = 8 \times 7 \times \dots \times 2 \times 1 \times = 40\,320$$

van die rijtjes mogelijk. Dus er zijn ook 40 320 getallen die op een 1 eindigen.

Op dezelfde manier is te beredeneren dat er 40 320 getallen zijn die op een 2 eindigen, 40 320 die op een 3 eindigen, enzovoort (figuur 1).

Dat zo inderdaad alle beschouwde negencijferige getallen een keer aan bod zijn geweest, volgt uit

$$9 \times 40\,320 = 9 \times 8! = 9!$$

De som van alle eenheden is gemakkelijk te bepalen:

$$40\,320 (1 + 2 + \dots + 9) = 40\,320 \times 45 = 1\,814\,400.$$

								1
--	--	--	--	--	--	--	--	---

$8! = 40\,320$ mogelijkheden

								2
--	--	--	--	--	--	--	--	---

$8! = 40\,320$ mogelijkheden

								3
--	--	--	--	--	--	--	--	---

$8! = 40\,320$ mogelijkheden

...

								9
--	--	--	--	--	--	--	--	---

$8! = 40\,320$ mogelijkheden

Figuur 1

							1	
--	--	--	--	--	--	--	---	--

$8! = 40\,320$ mogelijkheden

							2	
--	--	--	--	--	--	--	---	--

$8! = 40\,320$ mogelijkheden

							3	
--	--	--	--	--	--	--	---	--

$8! = 40\,320$ mogelijkheden

...

							9	
--	--	--	--	--	--	--	---	--

$8! = 40\,320$ mogelijkheden

Figuur 2

Tientallen, enzovoort

Het op één na laatste cijfer in een getal geeft de tientallen aan. Op dezelfde manier als bij de eenheden, is aan te tonen dat er 1 814 400 tientallen zijn (figuur 2).

Evenzo zijn er 1 814 400 honderdtallen, enzovoort.

De totale som van alle beschouwde negencijferige getallen wordt dus

$$1\,814\,400 (100\,000\,000 + \dots + 100 + 10 + 1) =$$

$$1\,814\,400 \times 111\,111\,111 = \dots$$

En dat moet echt 'met de hand' worden uitgerekend.

Het gaat wel met een rekenmachine, maar die geeft geen exact antwoord. Die gaat over op machten van tien en rond daarbij af (Probeer maar). Veel werk is het echter niet met de hand. Of wel? Het exacte antwoord wordt

201 599 999 798

□

Faculteitensom

De notatie $n!$ wordt uitgesproken als n -faculteit. Het is een korte schrijfwijze voor $n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$, met n een natuurlijk getal. Verder is per definitie $0!$ gelijk aan 1.

Er zijn slechts vier getallen waarvan de som van de faculteiten van de cijfers gelijk is aan het getal zelf. Het zijn:

$$1 = 1!$$

$$2 = 2!$$

$$145 = 1! + 4! + 5!$$

$$40\,585 = 4! + 0! + 5! + 8! + 5!$$

□

Pythagoras Olympiade



Nieuwe opgaven

Oplossingen vóór 1 september insturen naar: *Pythagoras Olympiade*, Marinus de Jongstraat 12, 4904 PL OOSTERHOUT (NB). Vermeld op elk (éénzijdig beschreven) vel je naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas. Verder moet elke oplossing op een nieuw vel beginnen, want we corrigeren ze afzonderlijk. We bekijken alleen goed leesbare oplossingen die volledig zijn uitgewerkt, met verklarende tekst in goed lopende zinnen. Verdere informatie over de wedstrijd vind je in nummer 1 van deze jaargang op bladzijde 28.

PO 124

In een vaas bevinden zich 1 witte en 10 rode ballen. Er is verder een onbeperkte voorraad rode ballen beschikbaar. Je voert de volgende stappen uit:

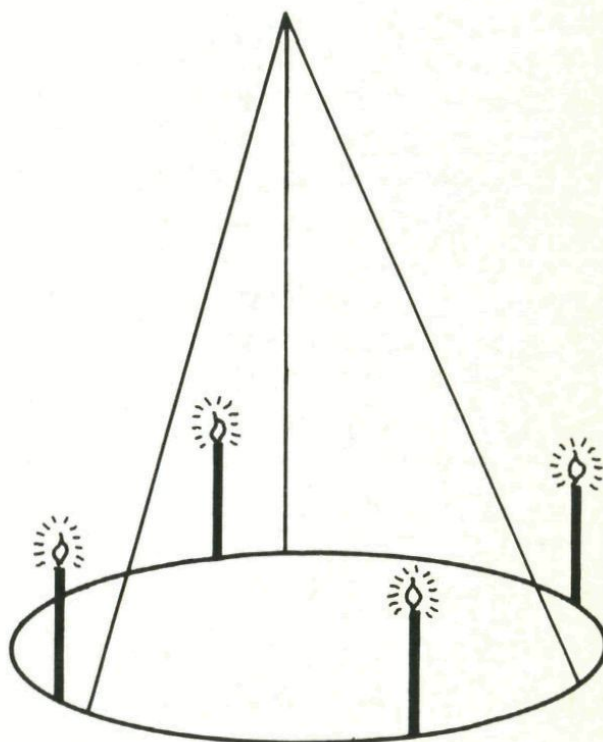
1. Schud de vaas.
2. Trek (willekeurig) een bal.
3. Is de getrokken bal rood, leg hem dan terug, en doe een extra rode bal in de vaas. Ga vervolgens terug naar stap 1.
4. Is de getrokken bal wit, dan stop je.

Hoe groot is de kans dat je na hoogstens 100 trekkingen stopt?

PO 125

Op een krans met een straal van 1 meter bevinden zich n kaarsen, die geplaatst zijn op de hoekpunten van een regelmatige n -hoek. De krans is opgehangen aan m koorden, die bevestigd zijn aan ophangpunten op de krans die de hoekpunten vormen van een regelmatige m -hoek. De kaarsen en de ophangpunten zijn verder zo gekozen dat de *minimale* afstand tussen een kaars en een ophangpunt *maximaal* is (dit met het oog op brandgevaar!). Bepaal die minimale afstand. (De fi-

guur toont het geval $n = 4$, $m = 3$. De dikte van de krans is verwaarloosbaar.)



Verlengde inzendtermijn en extra prijs voor PO 118

Na verstrijken van de inzendtermijn voor PO 118 bleek dat geen van de inzenders een correcte oplossing had ingestuurd. We verlengen daarom de inzendtermijn voor deze opgave tot 1

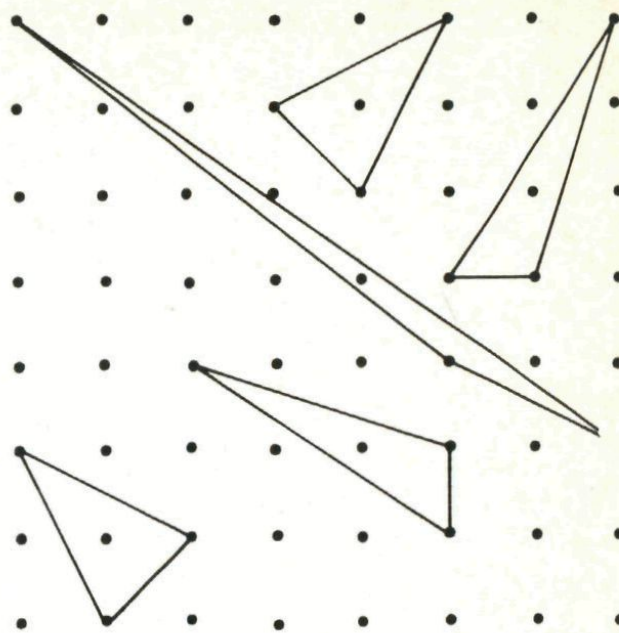
september, en stellen als extra stimulans nog een derde prijs van f 10,— / BEF 150 beschikbaar. Laat dit voor onze lezers een uitdaging zijn!

PO 118

Onder een *roosterpunt* in het vlak verstaan we een punt met gehele coördinaten.

Gegeven zijn een roosterpunten-driehoek ABC en een roosterpunt Z binnen ABC . Verder is gegeven dat er geen andere roosterpunten liggen binnen ABC of op de rand ervan.

Bewijs dat Z dan het zwaartepunt is van driehoek ABC (figuur 1 geeft enkele voorbeelden van zulke driehoeken).



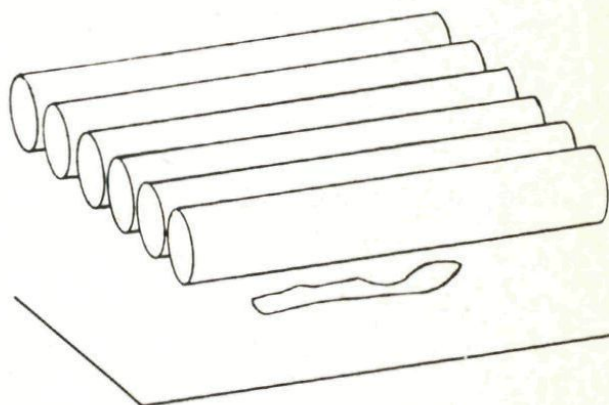
Figuur 1

Oplossing en prijswinnaars van de opgave PO 116

PO 116

Wat is de minimale lengte van een gesloten koord waarmee je zes buizen met een diameter van 1 dm kunt samenbinden (figuur 1)? (De dikte van het koord mag je verwaarlozen.)

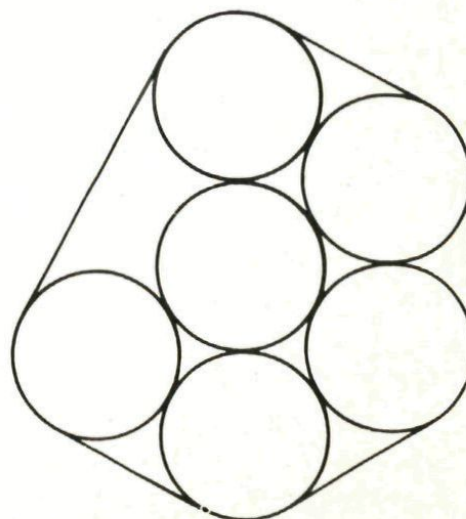
Bewijs de juistheid van je antwoord!



Figuur 1

Oplossing, samengesteld uit de oplossingen van *Arthur Bakker*, 6 vwo, Bergen (NH) en *Nguyen Hoang Viet*, 6 vwo, Nijmegen:

De minimale lengte van het koord is gelijk aan $4 + \sqrt{3} + \pi \approx 8,87$ dm. De bundel ziet er dan uit als in figuur 2. Voor het bewijs merken we eerst op dat deze lengte kleiner is dan hetgeen je krijgt als het koord aan alle zes de buizen raakt, want dan is de lengte $6 + \pi$. In de minimale situatie is er dus één centrale buis waar de andere vijf aan raken. In onze figuren stellen we de buizen voor door cirkels met diameter 1. Het middelpunt van de centrale cirkel noemen we M , de middelpunten van de andere cirkels noemen we opvolgend $A, B, \dots, E$



Figuur 2

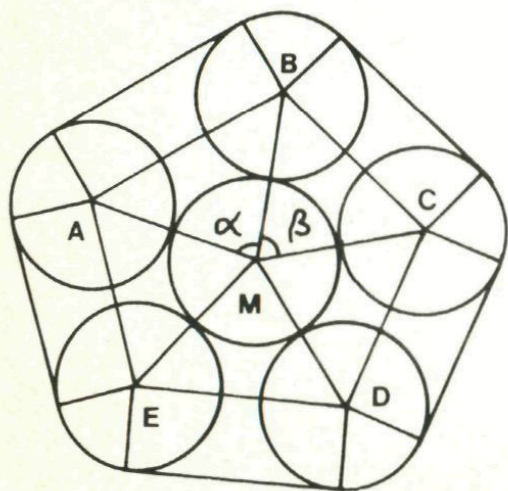
(figuur 3). De totale lengte van de stukken koord die gekromd zijn, is weer π . De rechte stukken hebben dezelfde lengte als de verbindingslijnen van de middelpunten van de cirkels. Het gaat er dus om de *omtrek* van vijfhoek $ABCDE$ zo klein mogelijk te maken onder de voorwaarden dat elke zijde minstens 1 is, en dat $MA = MB = \dots = ME = 1$.

Houd nu A en C vast, en varieer B . We beweren dat $AB + BC$ dan minimaal is, wanneer de cirkel met middelpunt B raakt aan een van de twee andere cirkels. Met de notatie $\alpha = \angle AMB$ en $\beta = \angle BMC$ zien we dat $60^\circ \leq \alpha, \beta \leq 120^\circ$, $AB = 2 \sin(\alpha/2)$, $BC = 2 \sin(\beta/2)$. We mogen verder aannemen dat $\alpha \geq \beta$ is. Er geldt dan

$$AB + BC = 2(\sin(\alpha/2) + \sin(\beta/2)) = 4 \sin((\alpha + \beta)/4) \cos((\alpha - \beta)/4).$$

Omdat A en C vastgehouden worden, is $\alpha + \beta$ constant, dus bovenstaande uitdrukking is minimaal wanneer $\alpha - \beta$ maximaal is, dat wil zeggen als twee cirkels elkaar raken.

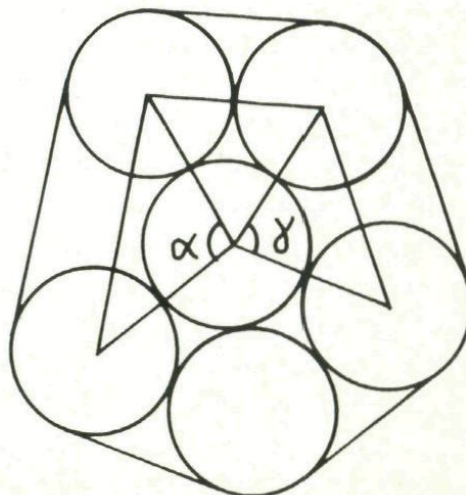
We zien dus dat in de situatie waarin het koord het kortst is, van elk drietal opvolgende cirkels er twee elkaar moeten raken. Dat leidt òf tot figuur 2, òf tot figuur 4.



Figuur 3

Dezelfde redenering als boven, maar nu toegepast op de hoeken α en γ in figuur 4, toont aan dat het koord daar minimale lengte heeft als $\alpha - \gamma$ maximaal is, dat wil zeggen als figuur 4 en figuur 2 overeen komen. Een simpele berekening leert dat in dat geval de lengte van het koord inderdaad de waarde heeft die we in het begin genoemd hebben. Daarmee is het bewijs voltooid.

Er waren 9 inzendingen voor deze opgave. Drie van de inzenders vonden niet de correcte lengte, maar $6 + \pi$. *Raimondo Eggink*, 5 vwo, Wijchen, vond wel de goede configuratie en de goede lengte, maar hij gaf geen enkele motivering waarom deze lengte minimaal is. We rekenden zijn oplossing daarom half goed. De vijf anderen, dat wil zeggen de bovengenoemde *Arthur Bakker*, *Nguyen Hoang Viet*, en verder *Segher Boessenkool*, 4 vwo, Den Helder, *Erjen Lefeber*, 5 gymnasium, Zoetermeer, en *Martijn Wubs*, 5 vwo, Hoogeveen, gaven wel goede argumenten. Op elke redenering was nog wel iets aan te merken, maar toch hebben we ze alle vijf een heel punt voor de ladderwedstrijd toegekend. Na loting gingen de twee prijzen naar *Erjen Lefeber* en *Nguyen Hoang Viet*. $\square$



Figuur 4

Redactioneel

Omdat in dit nummer wat nader wordt ingegaan op een onmogelijke figuur (het artikel 'De Vijf Draagonders'), is de gelegenheid aangepakt om het omslag ook met een fraai exemplaar te sieren. Dat exemplaar hoeft volgens ons geen nadere uitleg. Of wel?

De artikelen 'Zo past de derde in de pan' en 'Zo kan het ook!' bevatten het antwoord op 'De derde in een pan' uit het vorige nummer. Een uitbreiding daarvan is te vinden in 'De parelsnoerformule'. Het artikel 'Reken mee' bevat de oplossing van ' $123456789 + \dots + \dots$ ' uit het vorige nummer. Met 'Werken met de Enigma' pakken we de draad van de artikelen over de Enigma weer op.

Kunst met een omweg

Onlangs verscheen een boekje dat aardig aansluit bij onze serie artikelen over anamorfosen. Onze artikelen-reeks bevat vooral technische informatie. Het boekje gaat voornamelijk in op het kunsthistorische aspect en wat minder op de techniek van het maken van een anamorfose. Er wordt aan de hand van veel illustratieve voorbeelden verteld waarom anamorfosen omstreeks de 16e Eeuw in de mode raakten, weer verdwenen en de laatste jaren weer af en toe de kop op steken. Als aanvulling op onze artikelen-reeks warm aanbevolen!

'Anamorfosen, Kunst met een omweg' door Jos de Meyere en Hette Weijma is verschenen bij Aramith Uitgevers, Bloemendaal (ISBN 90 6834 048 4; prijs f 32,50 / BEF 650).

□

Uitgave onder toezicht van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Lay-out: Klaas Lakeman, Amsterdam.

Tekenwerk: Hans van Kuyk, Amsterdam.

Foto's en andere illustraties: Klaas Lakeman, Amsterdam (blz. 1, 3, 10, 11, 12, 15, 17, 23, 24); Jan van de Craats, Oosterhout (NB) (blz. 5, 6, 7, 8, 9, 25, 26, 27); Fons De Vogelaere, Gent (België) (blz. 19); Hessel Pot, Woerden (blz. 20); Invitation to Mathematics, William H. Glenn en Donovan A. Johnson, New York (blz. 22).

© 1989 Redactie Pythagoras - ALLE RECHTEN VOORBEHOUDEN, NADruk OF WEERGAVE, GEHEEL OF GEDEELTELIJK, IN WELKE VORM DAN OOK, ZONDER TOESTEMMING VAN DE REDACTIE VERBODEN.

Pythagoras wiskunde tijdschrift voor jongeren

Redactie: Jan van de Craats, Klaas Lakeman, Hans de Rijk.

Medewerkers: Popke Bakker, Gerard Bäuerle, F. van der Blij,
Niels M. Buizert, Hans Lauwerier, Hessel Pot.

Redactiesecretariaat: Klaas Lakeman, Cornelis Krusemanstraat 60^{II},
1075 NS Amsterdam (NL).

Inhoud jaargang 28, nummer 5

Hoe ver is de horizon / 1

Klaas Lakeman

Getallen van Armstrong / 13

Kegelanamorfosen / 4, 21

Jan van de Craats

Werken met de Enigma / 10

Klaas Lakeman

Zo past de derde in de pan / 15

Klaas Lakeman

Zo kan het ook! / 17

Klaas Lakeman

De Vijf Draagonders / 18

Jan van de Craats

De parelsnoerformule / 20

Hessel Pot

Reken mee / 22

Klaas Lakeman

Faculteitensom / 24

Pythagoras Olympiade / 25

Jan van de Craats

Redactioneel / 28

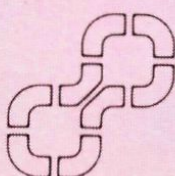
Pythagoras verschijnt zesmaal per schooljaar; opgave van abonnementen bij de uitgever (zie onder).

Abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 september schriftelijk bij de uitgever is opgezegd.

Bij tussentijdse abonnering ontvangt

men ook de reeds verschenen nummers. Betaling per acceptgirokaart.

Tarieven*	NLG/BEF
Abonnement Pythagoras	20,—/365
Inclusief Archimedes	36,—/660
Losse nummers	5,—/ 90
* Luchtpost-toeslag 15%	



stichting ivio

Postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL).

Tel. 03200-76411

educatieve uitgeverij - instituut voor buitenschools

onderwijs - wereldschool - AO-reeks - leerprojecten

Postgiro Nederland: 287934

Postcheck België: 000-0130850-94