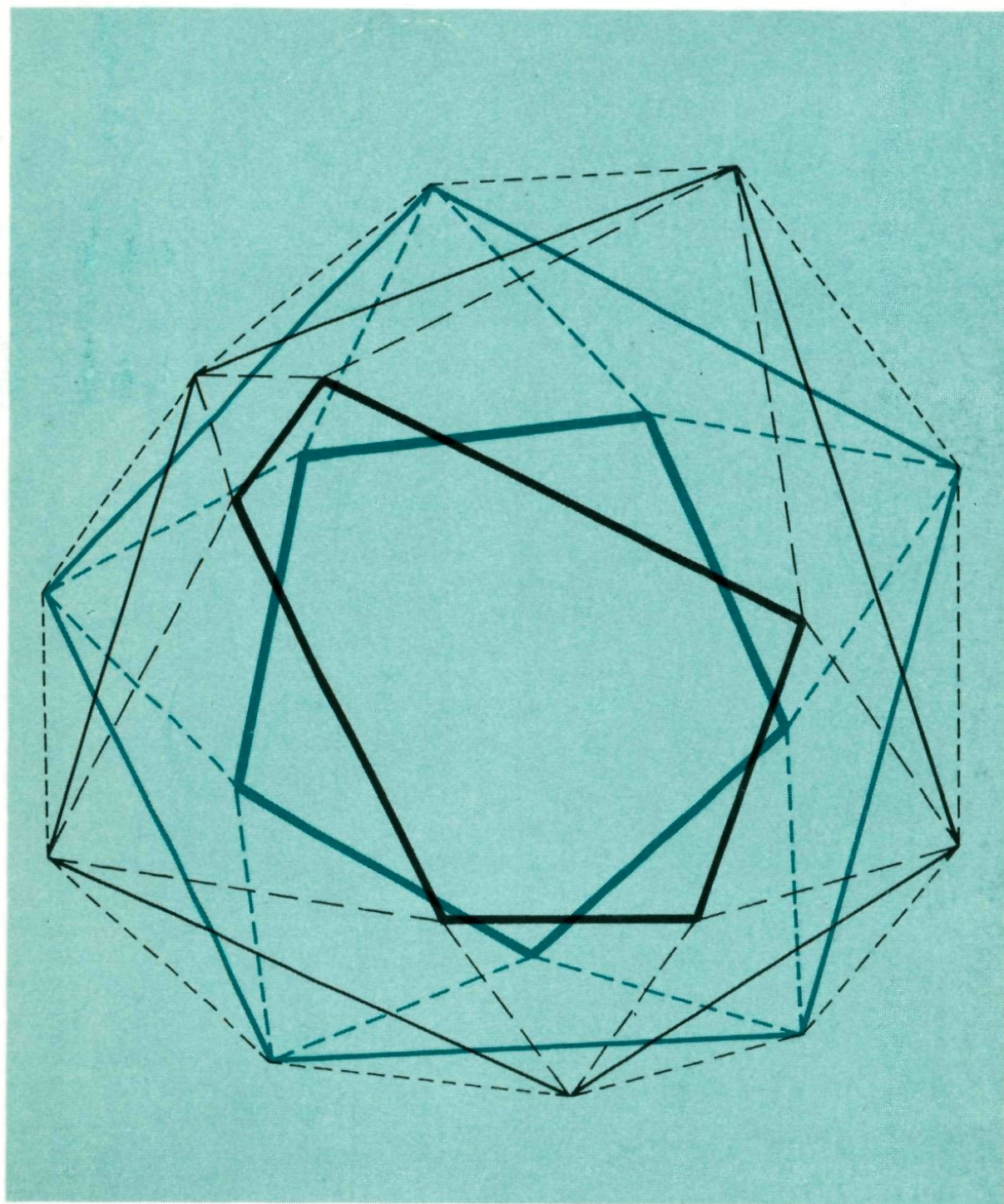




Pythagoras



wiskunde tijdschrift voor jongeren

stichting ivio

jaargang 29
nummer 1
september 1989

Het reguleren van veelhoeken

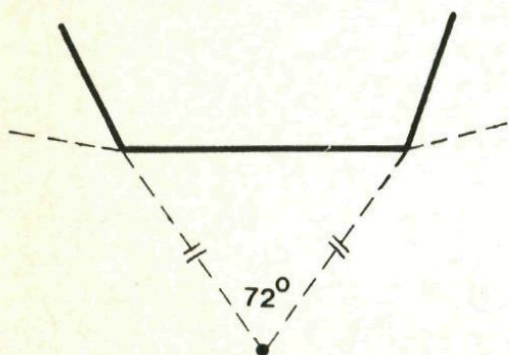
(De stelling van Petr)

We geven hier eerst een beschrijving van de manier waarop de voorplaat van dit nummer is getekend. Probeer het te volgen; moeilijk is het niet en het resultaat is verrassend.

De voorplaat

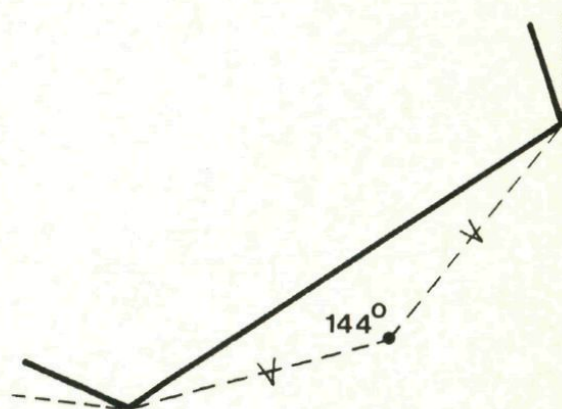
1. Uitgegaan wordt van een *willekeurige* vijfhoek, hier dik zwart getekend.

2. Deze startvijfhoek wordt omgevormd tot een andere; en wel door tegen de zijden ervan als basis, naar buiten toe gelijkbenige driehoeken te plaatsen. Alle vijf gelijkvormig, met een tophoek van $\frac{1}{5} \times 360^\circ = 72^\circ$ (en dus met basishoeken van 54°).



Door het in volgorde verbinden van de vijf toppen van deze driehoeken ontstaat een tweede vijfhoek (in de figuur wat dunner zwart).

3. Deze nieuwe vijfhoek voorzien we weer buitenwaarts van gelijkbenige driehoeken, maar nu allemaal met stompe tophoeken van $\frac{2}{5} \times 360^\circ = 144^\circ$ (en dus basishoeken van 18°).

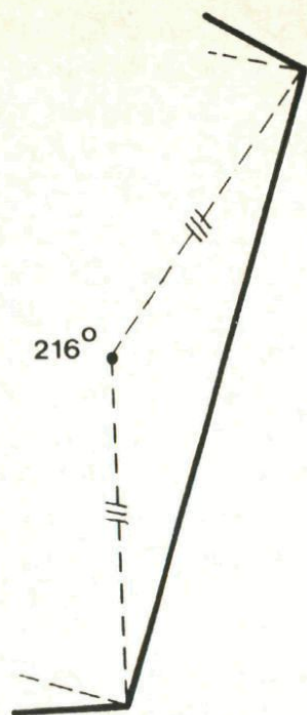


De door de toppen gevormde derde vijfhoek is op de voorplaat dun gekleurd getekend.

4. Met behulp van gelijkbenige driehoeken met een tophoek van $\frac{3}{5} \times 360^\circ = 216^\circ$ gaan we naar de vierde vijfhoek (dik in kleur getekend). Zeg niet dat een tophoek van meer dan 180° niet kan, want bij een aangroeiende tophoek passeren we gewoon de 'platte' toestand (met een tophoek van precies 180°) en laten de top naar *binnen* toe instulpen.

Als we dan ook de grootte van de basishoeken van de gelijkbenige driehoek negatief rekenen (omdat ze naar binnen in plaats van naar buiten gericht zijn), dan blijft de hoekensom keurig

$$216 + (-18) + (-18) = 180^\circ.$$



Merk op: Deze vierde vijfhoek blijkt zuiver regelmatig te zijn! Terwijl toch de startvijfhoek geheel willekeurig was. Mensen met een wiskundige inslag vinden dit iets om van te wuertanden.

5. In een streven naar nóg meer en nóg mooier, zou het kunnen zijn dat je nog één stap verder wilt gaan: met driehoeken met een tophoek van $\frac{4}{5} \times 360^\circ = 288^\circ$ (ofwel $360 - 288 = 72^\circ$ *binnen*waarts gericht).

Je hoopt misschien een nóg mooiere vijfhoek te vinden dan de zuiver regelmatige. Maar (denk aan het verhaal van *Mannetje Pigelmee*, die eerst rijk, toen koning, toen keizer, en toen óók God zelf wilde zijn) het tekenen van verbindingslijnen tussen de vijf toppen blijkt onmogelijk, omdat ze alle vijf in één punt samenvallen! De goddelijke vijfhoek blijkt niets anders dan slechts één nietig *punt*.



Karel Petr

De hierboven beschreven mooie eigenschap is door de Tsjechisch (-Oostenrijkse) wiskundige *Karel Petr* (1868-1950) in 1905 in Praag gepubliceerd. De volledige stelling van Petr zegt in twee opzichten nog meer:

a. Voor elke n

Je mag in plaats van met een vijfhoek, ook beginnen met een willekeurig scheve 13-hoek. En daaruit nieuwe 13-hoeken maken via tophoeken van $\frac{1}{13} \times 360^\circ$, dan $\frac{2}{13} \times 360^\circ$, dan $\frac{3}{13} \times 360^\circ$, dan ... dan $\frac{11}{13} \times 360^\circ$ (wel een paar keer nieuwe potloden kopen!). Het resultaat is nu weer een *regelmatige* 13-hoek. En na de laatste vervorming, met een tophoek van $\frac{12}{13} \times 360^\circ$, houd je weer alleen een enkel punt over. Je snapt wel dat Petr deze eigenschap meteen maar bewees voor een willekeurige, en willekeurig onregelmatige, n -hoek (met omvormings-tophoeken van $\frac{i}{n} \times 360^\circ$,

$$i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Het tekenwerk blijft beperkt als je begint met een scheve vierhoek. Buitenwaarts gelijkbenige driehoeken met een tophoek van $\frac{1}{4} \times 360^\circ = 90^\circ$. Dan $\frac{2}{4} \times 360^\circ =$

180°, wat betekent dat je alleen de *middens* van de vierhoeks zijden hoeft op te zoeken. Die middens zullen nu een zuiver vierkant vormen, driehoeken binnenwaarts met tophoek 90° geven alleen nog het centrumpunt van dat vierkant. Dit vierhoeksgeval komt gedeeltelijk overeen met wat eerder in Pythagoras (jaargang 25 nummers 1, 2 en 5) de stelling van *Van Aubel* genoemd werd.

Als je begint met een willekeurige scheve *driehoek*, hoef je maar één omvorming uit te voeren: met gelijkbenige driehoeken met een tophoek van $\frac{1}{3} \times 360^\circ = 120^\circ$. Je hebt dan direct een gelijkzijdige driehoek. (Ook als je *binnen* in plaats van *buitenwaarts* tekent.) Dit resultaat heet wel de *Napoleontische driehoek*, omdat Napoleon deze eigenschap gekend schijnt te hebben.

Nu nog de tweede veralgemeening:

b. Volgorde-onafhankelijk

In het begin beschreven we vier vervormingen van een gegeven scheve vijfhoek, door *achtereenvolgens* de tophoeken 72°, 144°, 216° (= 144° naar binnen) en 288° (= 72° naar binnen) te gebruiken.

Je kunt echter net zo goed deze vier tophoekwaarden in een willekeurige andere volgorde toepassen op de gegeven vijfhoek. *Steeds* zal het *laatste* resultaat letterlijk een eindpunt zijn. En het *voorlaatste* een regelmatige vijfhoek.

Voor alle andere *n*-hoeken mag dit wijzigen van de vervormingsvolgorde natuurlijk óók.

Als je dit in tekeningen probeert te controleren, moet je niet schrikken van veelhoeken die een *stervorm* hebben. En evenmin van *n*-hoeken die veel minder dan *n* hoekpunten hebben, maar die twee of meer keer langs dezelfde punten rondlopen.

Bij de stervormen is het idee van een binnengebied en een buitengebied niet langer te handhaven. In plaats daarvan moet je uitgaan van een 'rondgangsrichting' langs hoekpunten met toenemend rangnummer. Er is dan een eenduidig onderscheid tussen 'rechts van de weg' en 'links van de weg'.

Wie?

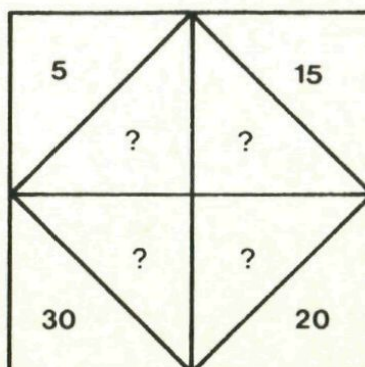
Wie durft ons zelfgemaakte tekeningen van de Petr-stelling op te sturen?

Of wie programmeert deze zaak voor z'n (school-)computer en ziet kans om de veelhoeken op het scherm te krijgen? □

Vierkant met gemiddelden

In de driehoeken met een vraagteken moeten getallen komen. De getallen in elk van die driehoeken, moeten het gemiddelde zijn van de getallen in de driehoeken die er een zijde mee gemeen hebben.

Uit: Tangente, Frankrijk. □



Fout ...

$$(5 + 3)5 = 5 + 35$$

$$3(6 + 9) = 36 + 9$$

... of toch goed?

In de brugklas leerde je 'haakjes wegwerken'. Bij voorbeeld

$$(x + y)z = xz + yz \text{ of } x(y + z) = xy + xz.$$

Waarschijnlijk ging dat niet meteen vlekkeloos en heb je je ook wel schuldig gemaakt aan fouten van het type

$$(x + y)z = x + yz \text{ of } x(y + z) = xy + z.$$

Misschien heb je het korte tijd zelfs wel zó bont gemaakt, dat je yz of xy niet opvatte als een korte schrijfwijze voor y vermenigvuldigd met z of x vermenigvuldigd met y . Maar zag je ze elk als één getal bestaande uit de cijfers y en z of x en y , te noteren als YZ of XY . 'Haakjes wegwerken' kwam dan neer op

$$(x + y)z = x + YZ \text{ of } x(y + z) = XY + z.$$

Dat het niet altijd 'hardstikke' fout hoeft te zijn, tonen de getallenvoorbeelden in de titel van dit stukje wel aan.

Zijn er meer van dergelijke getallenvoorbeelden? Maarten van den Hoek uit Eindhoven schreef een computerprogramma waarmee ze allemaal opgespoord kunnen worden. Zijn wiskundeleraar vond dat de moeite waard om naar ons te zenden.

Wanneer x , y en z ééncijferige getallen zijn, dan zijn volgens Maarten dit alle mogelijkheden:

$$(2+1)6 = 2+16 = 18$$

$$(2+3)8 = 2+38 = 40$$

$$(2+7)9 = 2+79 = 81$$

$$3(6+9) = 36+9 = 45$$

$$3(7+8) = 37+8 = 45$$

$$3(8+7) = 38+7 = 45$$

$$3(9+6) = 39+6 = 45$$

$$(5+1)3 = 5+13 = 18$$

$$(5+3)5 = 5+35 = 40$$

$$6(3+9) = 63+9 = 72$$

$$6(4+8) = 64+8 = 72$$

$$6(5+7) = 65+7 = 72$$

$$(6+6)6 = 6+66 = 72$$

$$6(6+6) = 66+6 = 72$$

$$6(7+5) = 67+5 = 72$$

$$6(8+4) = 68+4 = 72$$

$$6(9+3) = 69+3 = 72$$

Wanneer x en z ééncijferige getallen zijn en y is een tweecijferig getal, dan zijn volgens Maarten alle mogelijkheden van het type $(x + y)z = x + YZ$:

$(3+15)9 = 3+159 = 162$	$(6+39)9 = 6+399 = 405$
$(4+10)8 = 4+108 = 112$	$(7+47)9 = 7+479 = 486$
$(4+23)9 = 4+239 = 243$	$(8+24)8 = 8+248 = 256$
$(5+31)9 = 5+319 = 324$	$(8+55)9 = 8+559 = 567$
$(6+17)8 = 6+178 = 184$	$(9+63)9 = 9+639 = 648$

Het programma van Maarten drukken we hierbij af. Het is geschreven in Pascal. Het levert alle voorbeelden zodra de lengten van de getallen x , y en z zijn opgegeven. Kijk eens of je de hier gegeven lijstjes kunt uitbreiden, eventueel met een zelf gemaakt Basic-programma. (Aanwijzing: Als bij voorbeeld y een getal van n cijfers is, dan is XY te schrijven als $x \cdot 10^n + y$.)

Maar ... pas op. Bij niet kleine getallen voor x , y en z krijg je al snel veel rekenwerk. Als je ze bij voorbeeld alle drie 3 cijfers geeft, moeten er voor één type al zo'n 10^9 mogelijkheden worden bekeken. Als je computer 100 mogelijkheden per seconde kan afwerken, wat al snel is, dan is hij nog zo'n 10^7 seconden bezig. Reken maar eens uit hoeveel dagen dat is! □

```

PROGRAM HAAKJES_FLAUWEKUL ;
USES CRT ;
VAR
  COMBGT,GT   : LONGINT ;
  GT1,GT2,GT3 : LONGINT ;
  START,L     : ARRAY[1..3] OF LONGINT ;

PROCEDURE RSCHRIJF(X1,X2,X3,X4 : LONGINT);
BEGIN  WRITELN('(',X1,',+',X2,')',X3,' = ',X1,',+',X4,' = ',X1+X4);  END;

PROCEDURE LSCHRIJF(X1,X2,X3,X4 : LONGINT);
BEGIN  WRITELN(X1,'(',X2,',+',X3,') = ',X4,',+',X3,' = ',X4+X3);      END;

BEGIN
  CLRSCR;
  FOR GT:= 1 TO 3 DO
    BEGIN
      L[GT]:=0; START[GT]:=1;
      WHILE L[GT]<1 DO
        BEGIN
          WRITE('GEEF HET AANTAL CIJFERS VAN GETAL ',GT,' >');READLN(L[GT]);
          WHILE L[GT]>1 DO BEGIN START[GT]:=START[GT]*10;L[GT]:=L[GT]-1 END
        END
      END;
      FOR GT1:= START[1] TO 10*START[1]-1 DO
        BEGIN
          FOR GT2:= START[2] TO 10*START[2]-1 DO
            BEGIN
              FOR GT3:= START[3] TO 10*START[3]-1 DO
                BEGIN
                  COMBGT:= GT2*10*START[3]+GT3;
                  IF (GT1+GT2)*GT3=GT1+COMBGT THEN RSCHRIJF(GT1,GT2,GT3,COMBGT);
                  COMBGT:= GT1*10*START[2]+GT2;
                  IF GT1*(GT2+GT3)=COMBGT+GT3 THEN LSCHRIJF(GT1,GT2,GT3,COMBGT);
                END
              END
            END
          END
        END
      END;
    END
  END.

```

Figuur 1. Het Pascal-programma van Maarten van den Hoek.

Pi op postzegels

Je zou het misschien niet zo gauw denken, maar ze bestaan toch: postzegels waarop aandacht gegeven wordt aan het getal π . Wel moet je er verschrikkelijk voor zoeken, het aantal lijkt nog op de vingers van één hand te tellen. We geven een korte toelichting bij de afbeeldingen.

A



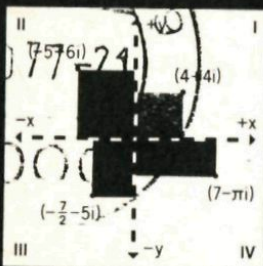
B



C



DEUTSCHE BUNDESPOST



CARL F. GAUSS 1777-1855

D



E

a. Colombia 1951

De Colombiaanse vereniging van ingenieurs SOCIEDAD COLOMBIANA DE INGENIEROS heeft een embleem met als hoofdmotief het symbool π . Dit zal wel gekozen zijn vanwege de belangrijke rol van π in de techniek. Zowat alles wat draaien en rollen kan is cirkelvormig en leidt dus tot berekeningen waar π in voorkomt. Minder duidelijk is waarom de zegel — ter gelegenheid van het 60-jarig jubileum van de vereniging in 1947 — pas in 1951 is verschenen.

b. Colombia 1962

Hetzelfde embleem, nu op een zegel ter gelegenheid van het 75-jarig bestaan.

c. Volksrepubliek China 1955

Deze zegel toont een decimale benadering van π tot acht correcte cijfers na de komma; een benadering die al aan de Chinees *Tsu Chung-chi* (429-500 n.C.) bekend geweest moet zijn. Een andere zegel uit dezelfde serie toont het

portret van een nog oudere Chinees, de astronoom *Chang Heng* (78-139 n.C.), die $\sqrt{10} \approx 3,162$ gebruikte als benadering voor π .

d. West-Duitsland 1977

Hier wordt π gebruikt in het complexe getal ($7 - \pi i$). De figuur stelt voor het zogenaamde Gaussische getallen-vlak, iets wat gezien kan worden als een veralgemening van de bekende getallen-lijn. De letter *i* slaat op één van de twee (buiten de reële getallenlijn gelegen) oplossingen van de vergelijking $x^2 = -1$.

e. Oost-Duitsland 1977

Niet op de postzegel zelf maar in het speciale eerstedag-stempel, komt π voor. De formule beschrijft de zogenoemde 'fouten-functie' van Gauss.

De beide Duitse zegels verschenen op de 200e geboortedag van de knapste en meest invloedrijke wiskundige uit de vorige eeuw *Carl Friedrich Gauss*, professor in de wiskunde in het Duitse *Göttingen*. □

Hoeveel treden?

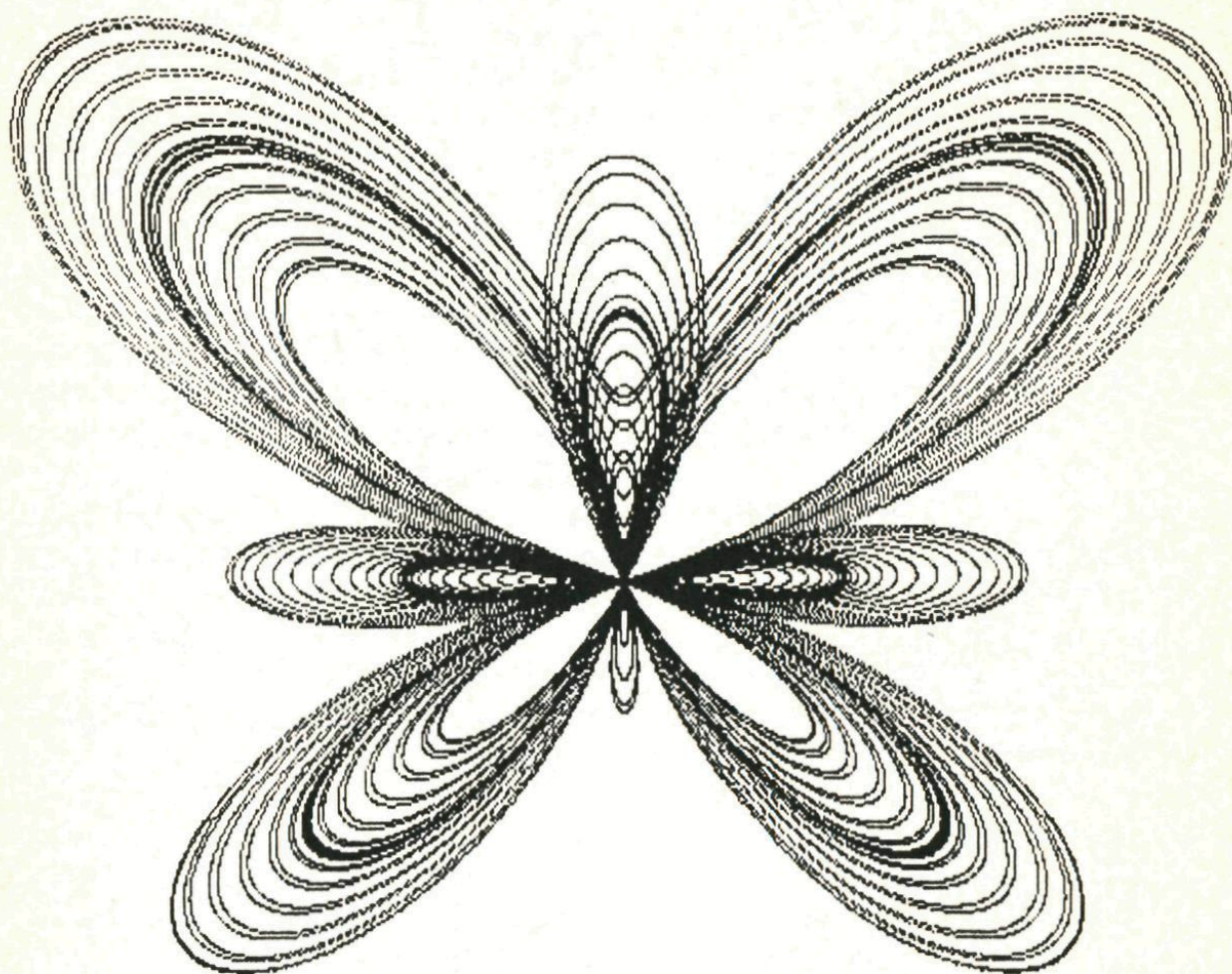
In de Bijenkorf neemt een vrouw de roltrap. Zij blijft niet stil staan. Terwijl de trap omhoog loopt, klimt zij zelf ook met constante snelheid. Nadat zij 35 treden heeft geklommen, is zij boven.

Naar de tweede etage voert precies zo'n zelfde roltrap. Ook daarop blijft zij niet stil staan. Ze klimt zelfs tweemaal zo snel. Boven angekommen heeft ze zodoende 45 treden geklommen.

Hoeveel treden moeten er worden geklommen als de roltrap stil staat?

Oplossing op bladzijde 17. □

Vlinders



Met eenvoudige programma's kun je soms de prachtigste plaatjes op het computerscherm toveren. Fraaie vlinders bij voorbeeld. Het programma van figuur 1 is geschreven in GW-BASIC, en als je het runt, verschijnt er een mooie vlinder op het scherm (figuur 2). De kern van het programma is zo simpel dat iedereen met een klein beetje ervaring het naar behoefte ook in een andere taal kan overzetten.

Kromme

Het gaat om vlakke krommen die punt voor punt getekend worden. Zeker de helft van het plezier zit 'm in het feit dat je ze voor je ogen ziet ontstaan. Het commando PSET (x, y) in regel 90 van figuur 1 zet een puntje op het scherm. Dat commando zit in een 'loop' die 2000 keer wordt herhaald (regel

50). Het gevolg is dat de vlinder geleidelijk op het scherm getekend wordt. De coördinaten x en y worden telkens berekend in regel 80 volgens de formules

$$\begin{aligned}x &= r(t) \cdot \sin(t) \\ y &= r(t) \cdot \cos(t)\end{aligned}$$

en daarbij hangt $r = r(t)$ ook weer

```

10 CLS
20 SCREEN 3
30 WINDOW (-4,-2.5)-(4,4)
40 PI = 3.14159
50 FOR N = 1 TO 2000
60 T = PI*N/1000
70 R = EXP(COS(T)) - 2*COS(4*T)
80 X = R*SIN(T) : Y = R*COS(T)
90 PSET (X,Y)
100 NEXT N
110 FOR K = 0 TO 3 : BEEP : NEXT K
120 A$=INPUT$(1) : END

```

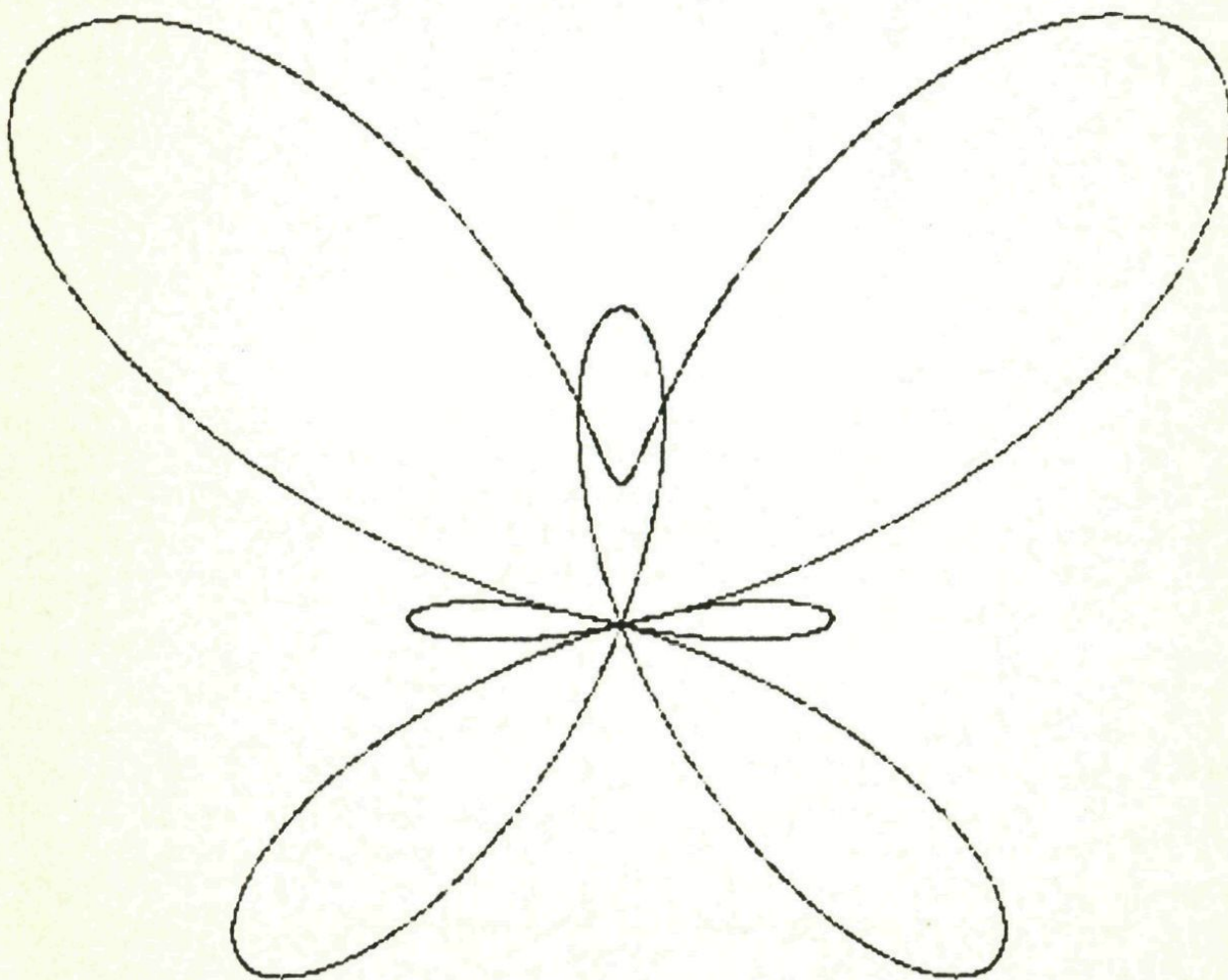
Figuur 1. Het vlinderprogramma.

van t af. De formule is (regel 70)

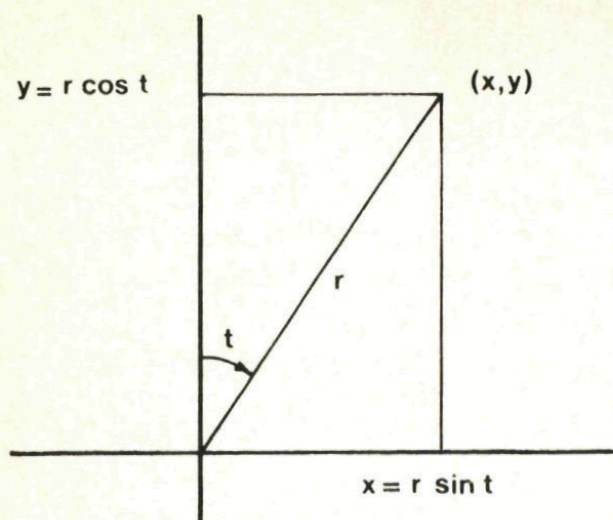
$$r(t) = e^{\cos(t)} - 2 \cos(4t).$$

Het gaat dus om een kromme in parametervorm, met t als parameter.

Je kunt r opvatten als de afstand van het punt (x, y) tot de oorsprong, en t als de hoek (in radialen) die de voerstraal maakt met de positieve y -as (gemeten met de klok mee; zie figuur 3), maar voor de rest van het verhaal is dat niet zo belangrijk. Lezers die iets afweten van zogenaamde *poolcoördinaten* zullen dit wel herkennen; om de vlinder netjes recht op te krijgen hebben we hier echter ten opzichte van de gebruikelijke notatie de rol van x en y verwisseld.



Figuur 2. De vlinder bij het programma van figuur 1.



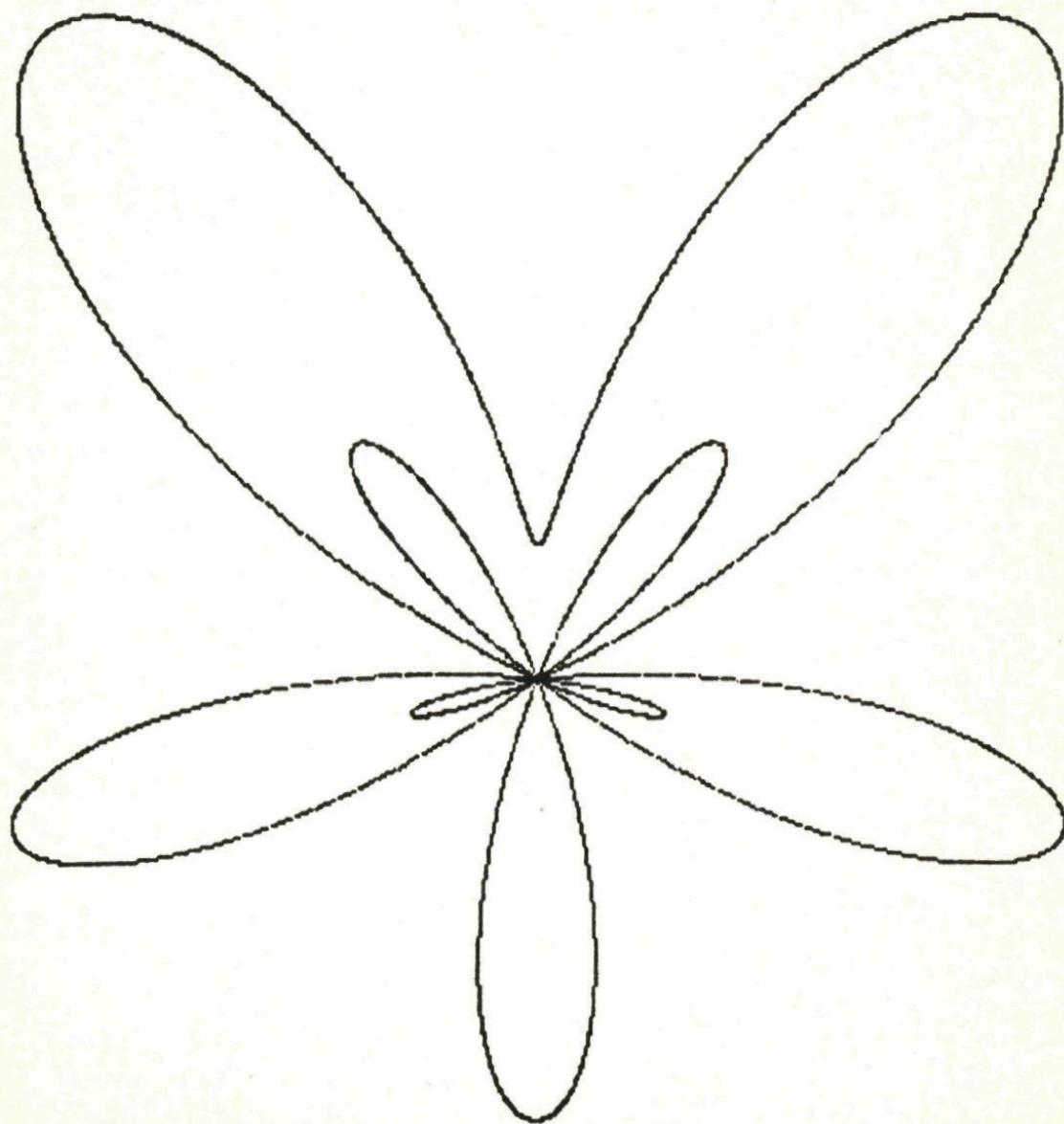
Figuur 3. De betekenis van r en t .

Periodiek

Omdat in de formules alleen maar sinussen en cosinussen van t voorkomen, zal de kromme periodiek zijn: de periode is gelijk aan 2π . Het t -interval van 0 tot 2π hebben we in 2000 stukjes verdeeld, en in elk deelpunt daarvan worden de coördinaten x en y berekend en getekend. Het resultaat is figuur 2.

Variaties

Deze vlinderkromme is verzonnen door de Amerikaanse wiskundige



Figuur 4. Varianten van figuur 2.

$$r(t) = e^{\cos t} - 2\cos(5t)$$

Temple H. Fay. In het artikelje dat hij erover schreef in het tijdschrift *The American Mathematical Monthly* zegt hij dat je er allerlei variaties in kunt aanbrengen: termen een beetje veranderen, factoren erbij zetten. Je kunt bij voorbeeld $\cos(4t)$ vervangen door $\cos(5t)$ of $\cos(6t)$. De figuur krijgt dan meer lussen (figuur 4).

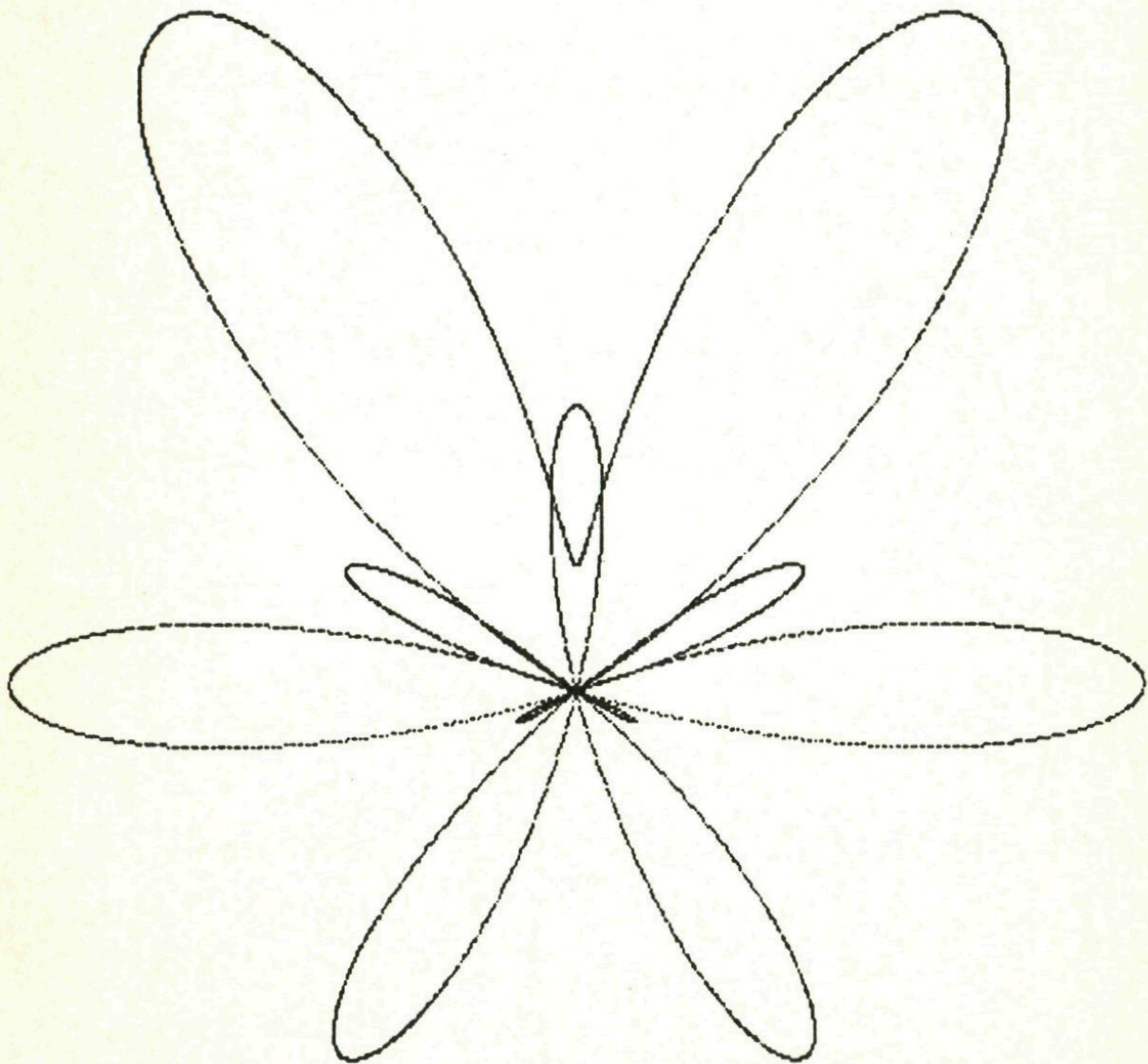
Een andere mogelijkheid is de introductie van een 'storingsterm': een term die de kromme een klein beetje verandert. Neem bij voor-

beeld in de formule voor r nu eens

$$r = e^{\cos(t)} - 2 \cos(4t) + (\cos(t/12))^5.$$

De extra term $(\cos(t/12))^5$ is meestal erg klein, want de vijfde macht van een getal tussen -1 en 1 is bijna nul, tenzij je vlak bij 1 of -1 zit.

Verder is deze storingsterm ook weer periodiek, maar z'n periode is niet 2π maar 24π vanwege de



$$r(t) = e^{\cos t} - 2\cos(6t)$$

factor $1/12$. Dat betekent dat de vlinder na 12 'gestoorde' rondgangen weer in z'n uitgangspositie terugkomt. In figuur 5 zie je hoe hij er dan uit gaat zien: Een prachtige vlinder met fraai versierde vleugels. De herhalingslus is nu natuurlijk 12 keer zo lang: er moeten niet minder dan 24000 punten getekend worden.

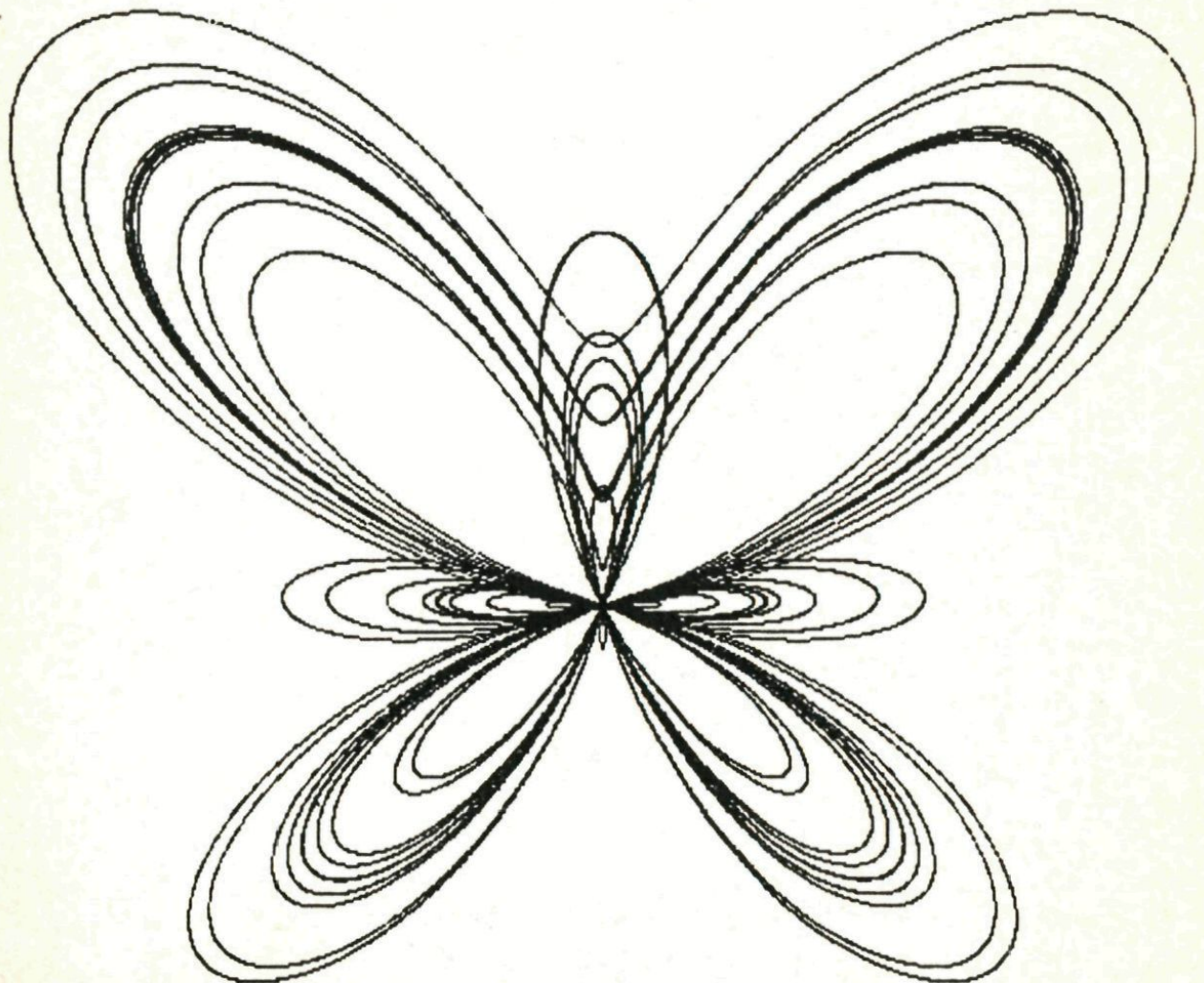
De 12 lussen per vleugel zijn overigens niet allemaal goed te onderscheiden, want in het midden liggen er een paar vlak bij elkaar. Dat zie je ook als de vlinder op het computerscherm getekend wordt: het bewegende punt beschrijft dan een paar keer bijna

dezelfde kromme. De storings-term is in deze gevallen bijna nul, en het bewegende punt beschrijft vrijwel de oorspronkelijke vlinder van figuur 2.

In kleur

De vlinder wordt nog veel mooier als je er kleuren in kunt aanbren-gen. Je moet dan een kleuren-scherm hebben. In figuur 6 staat een gewijzigd programma voor een gekleurde vlinder. De 'loop' van 24000 punten is nu opgedeeld in zes stukken die elk hun eigen kleur krijgen.

Verder is er nog een versnelling aangebracht in regel 140. Die be-rust er op dat de vlinder symme-



Figuur 5. De invloed van de storingsterm.

trisch is om de y -as, want als je t vervangt door $24\pi - t$ dan veranderen r en y niet van waarde, maar x klappt van teken om. Je hoeft dus maar de helft van de punten uit te rekenen als je telkens naast (x, y) ook het punt $(-x, y)$ tekent. Dat spaart tijd, en het is bovendien ook nog leuker om op het scherm te kijken naar twee symmetrisch bewegende punten dan naar een enkel bewegend punt. Ook als je geen kleurenscherm hebt, kun je deze variant gemakkelijk aanbrengen. In de re-

gels 50-70 zie je ook dat de herhalingslus dan in totaal niet 24000 maal, maar slechts $6 \times 2000 = 12000$ maal doorlopen wordt.

Je kunt je fantasie de vrije loop laten als je verdere variaties wilt onderzoeken: andere factoren, andere storingstermen. Vind je iets heel moois, dat bovendien door een heel eenvoudig programma beschreven wordt, dan zullen we daar in Pythagoras graag aandacht aan besteden. Reacties van lezers zijn, zoals altijd, zeer welkom! $\square$

Opmerking De formules van de vlinders op bladzijde 9 resp. 14 zijn

$$r(t) = 0,8e^{\cos t} - 2\cos(4t) + (\cos(t/32))^3$$

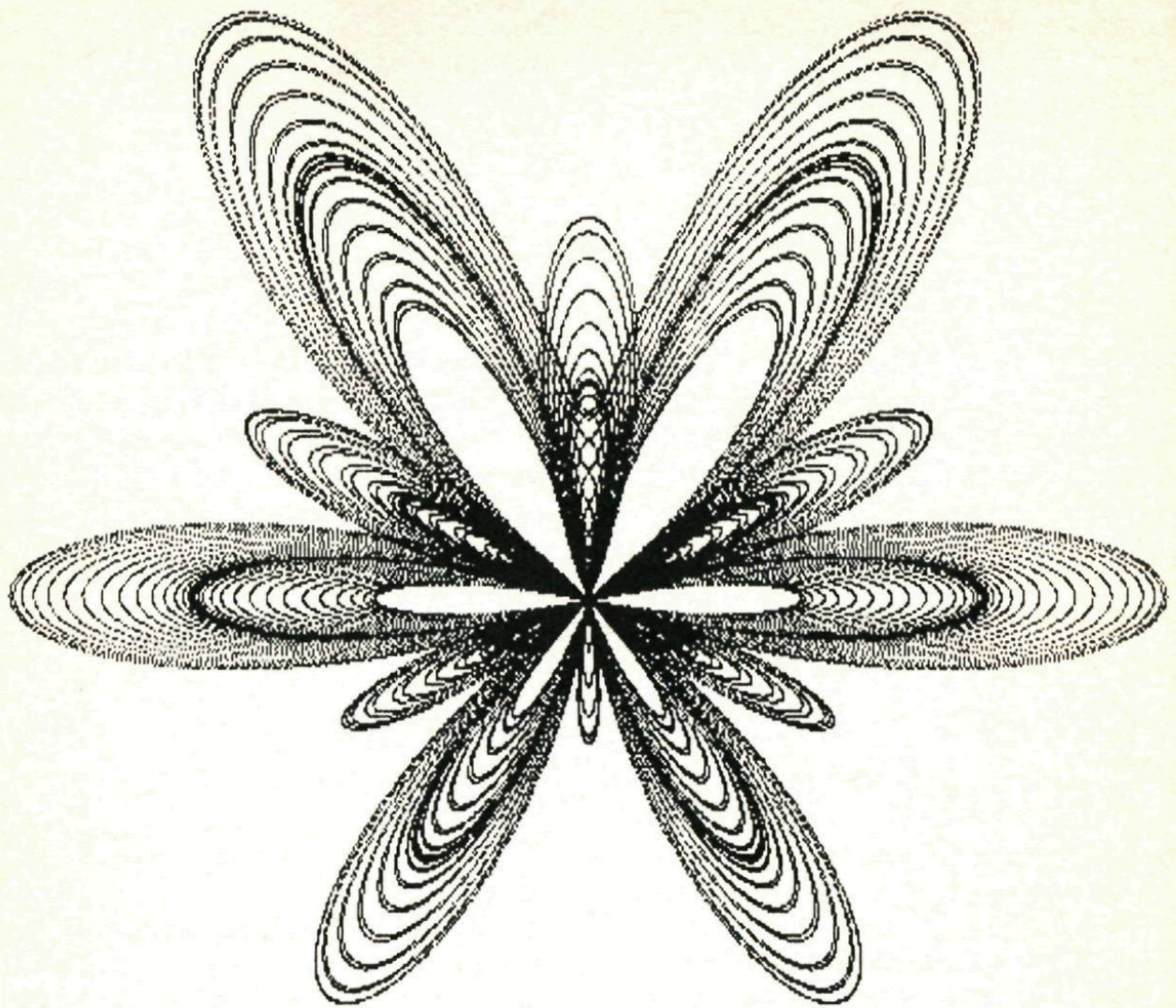
$$r(t) = 0,8e^{\cos t} - 2\cos(4t) + 1,3(\cos(t/36))^3$$

```

10 CLS
20 SCREEN 9
30 WINDOW (-4,-2.5)-(4,4)
40 PI = 3.14159
50 FOR J = 1 TO 6
60 MIN = (J-1)*2000
70 MAX = J*2000
80 COLOR (16 - J)
90 FOR N = MIN TO MAX
100 T = PI*N/1000
110 C = COS(T) : S = SIN(T)
120 R = EXP(C) - 2*COS(4*T) + (COS(T/12))^5
130 X = R*S : Y = R*C
140 PSET (X,Y) : PSET (-X,Y)
150 NEXT N
160 NEXT J
170 FOR K = 0 TO 3 : BEEP : NEXT K
180 A$ = INPUT$(1) : END

```

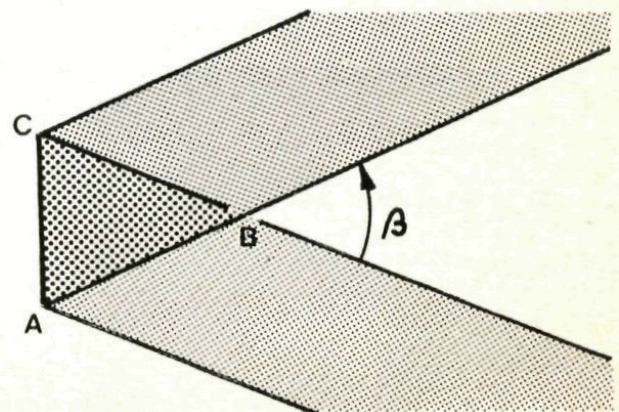
Figuur 6. Programma voor de vlinder van figuur 5 in zes kleuren.



Een vouwpuzzel

Neem een strook papier en vouw die om zoals in de tekening is aangegeven. Als je hem dan tegen het licht houdt, zie je een driehoek ABC . Verschillende vouw-
hoeken β geven verschillende driehoeken ABC . Over die driehoeken gaan de
volgende drie opgaven:

1. Laat zien dat ABC steeds een *gelijkbenige* driehoek is.
2. Laat zien dat de driehoeken ABC bij vouwhoeken β en $\pi - \beta$ dezelfde oppervlakte hebben.
3. Voor welke hoek(en) β is de oppervlakte van driehoek ABC *minimaal*?



Oplossingen op bladzijde 25.



Pi in acht decimalen nauwkeurig

$$\pi \approx$$

$$\sqrt{\sqrt{97 \frac{9}{22}}} = \sqrt{\sqrt{99 - 5 \cdot \frac{22}{7}}} =$$

$$\sqrt{\sqrt{\frac{777}{7,7} - \frac{7 \times 7}{7+7}}} = \sqrt{\sqrt{222 : 2,2 + 2 : 2^2 - 2^2}}$$

Dat hier — in een viertal varianten — een verrassend nauwkeurige benadering staat voor π kun je zelf makkelijk nagaan, als je weet dat de 'echte' waarden zijn:

$$\begin{aligned}\pi &= 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ \dots \\ \pi^4 &= 97,40909\ 10340\ 02437\ 23644\ \dots\end{aligned}$$

Geprobeerd is om een formule te vinden die met zo *weinig* mogelijk cijfers toch zo *veel* mogelijk correcte decimalen van π oplevert.

De eerste vorm is tot nu toe de beste: 8 correcte decimalen uit een formule met 5 cijfers.

Andere eisen

Je kunt ook andere voorwaarden stellen, bij voorbeeld het makkelijk-te-onthouden-zijn. De tweede vorm bevat één cijfer meer dan de eerste, maar aardig is dat de beroemde benadering $22/7$ voor π er in voorkomt. Met uitsluitend *gelijke cijfers* is de 9-zevens-formule misschien de kortste. En de laatste vorm, met 10 tweeën, betekent een flinke verbetering van de tweeënformules voor π die genoemd werden in Pythagoras 25-5.

Kwaliteit

We willen nog wat scherper kunnen zeggen of een oplossing beter is dan een andere, volgens de eerstgenoemde voorwaarde: véél correcte decimalen bij weinig cijfers in de formule. Daartoe geven we de *kwaliteit* van een formule aan met een getal.

Als n het totale aantal cijfers is in de formule (ook kleine exponentcijfertjes tellen voor vol mee!) en b is de uitkomst van de formule, dan wordt de kwaliteit gegeven door:

$$kw = \frac{1}{|b - \pi| \cdot 10^n}$$

Voor de kwaliteit van de bekende breuken $\frac{22}{7}$ en $\frac{355}{113}$ geldt dus:

$$kw\left(\frac{22}{7}\right) = \frac{1}{|3,14286 - 3,14159| \cdot 10^3} \approx 0,8$$



Op deze Chinese postzegel staat pi ook in acht decimalen. Meer over de zegel zelf op blz. 7.

$$kw(\frac{388}{113}) =$$

$$1 : (|3,14159292 - 3,14159265| \cdot 10^6) \approx 3,7.$$

Als je zelf probeert om het kwaliteitsgetal te bepalen van de eerste formule boven aan dit stukje, zul je merken dat dat met een gewone rekendoos niet zo makkelijk gaat. Er treden grote nauwkeurighedsproblemen op, en er is een rekentechnische truc (zie opmerking in kader) nodig om toch te kunnen vinden:

$$kw(\sqrt{\sqrt{97 \frac{9}{22}}}) \approx 9929$$

Deze formule is dus van superkwaliteit!

Nog een paar voorbeelden:

$$kw(3) \approx 0,71$$

$$kw(3,14) \approx 0,63$$

$$kw(\sqrt[3]{31}) \approx 4,7.$$

Wie vindt er een formule met een kwaliteit boven de 10? $\square$

Een reke|uc | |

Wegens de ontbinding

$$b^4 - \pi^4 = (b - \pi)(b + \pi)(b^2 + \pi^2) \approx (b - \pi) \cdot 4\pi^3$$

kan de kwaliteit benaderd als

$$\frac{1}{|b - \pi| \cdot 10^n} \approx \frac{4\pi^3}{|b^4 - \pi^4| \cdot 10^n}.$$

π^4 staat in twintig decimalen aan het begin van dit stukje, en de decimalen van b^4 volgen uit het repeterend zijn van de breuk $9/22$.

Hoeveel treden: oplossing

Stel het hoogteverschil tussen twee etages van de Bijenkorf gelijk aan x treden van een roltrap.

Bekijk de eerste roltrap.

Noem de snelheid van de vrouw V en de snelheid van de roltrap W .

In de tijd dat de vrouw 35 treden klimt, voert de roltrap haar de overige $(x - 35)$ treden omhoog. Dit leidt tot

$$V : W = 35 : (x - 35).$$

Voor de tweede roltrap krijgen we volgens eenzelfde redenering

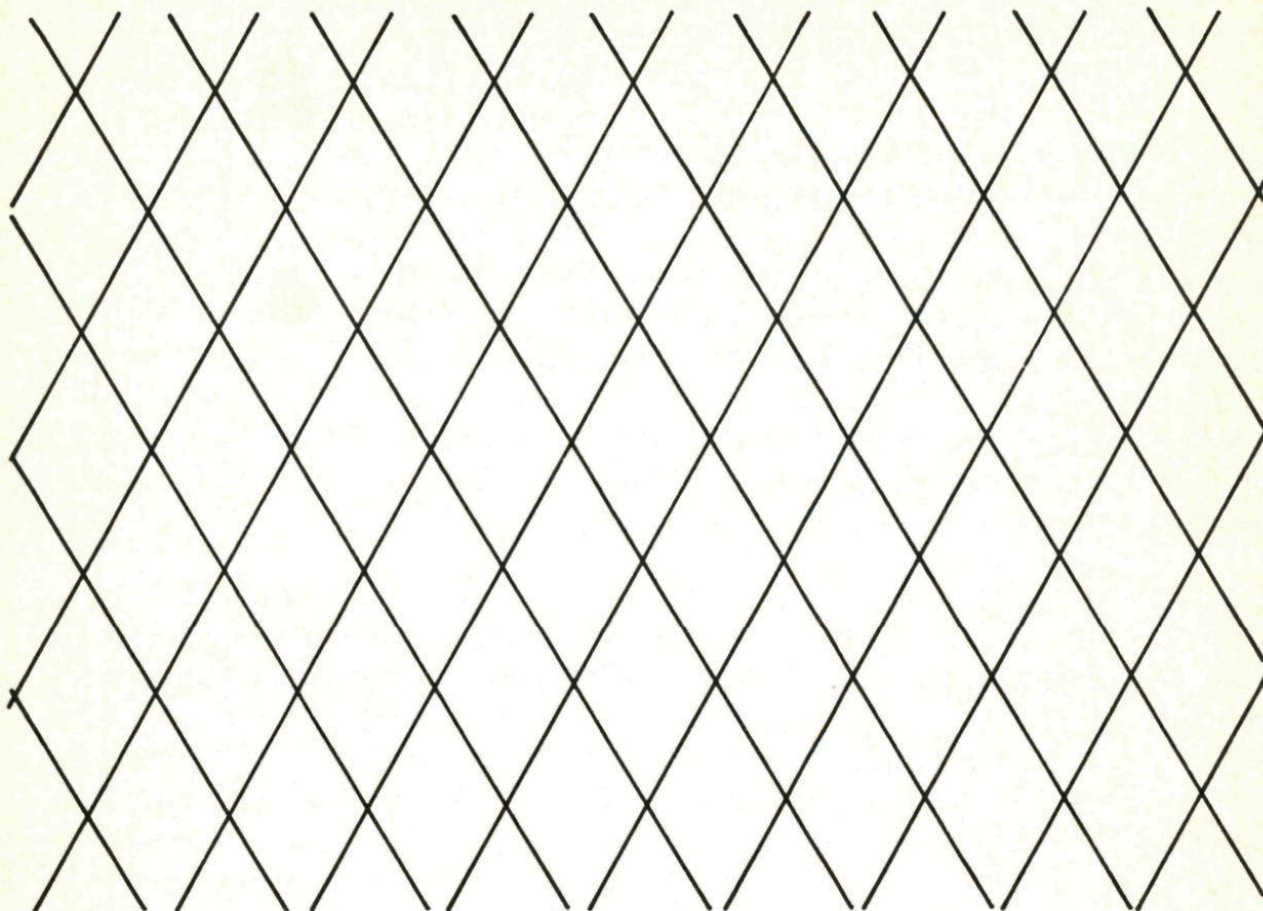
$$2V : W = 45 : (x - 45).$$

Eenvoudig volgt uit beide vergelijkingen

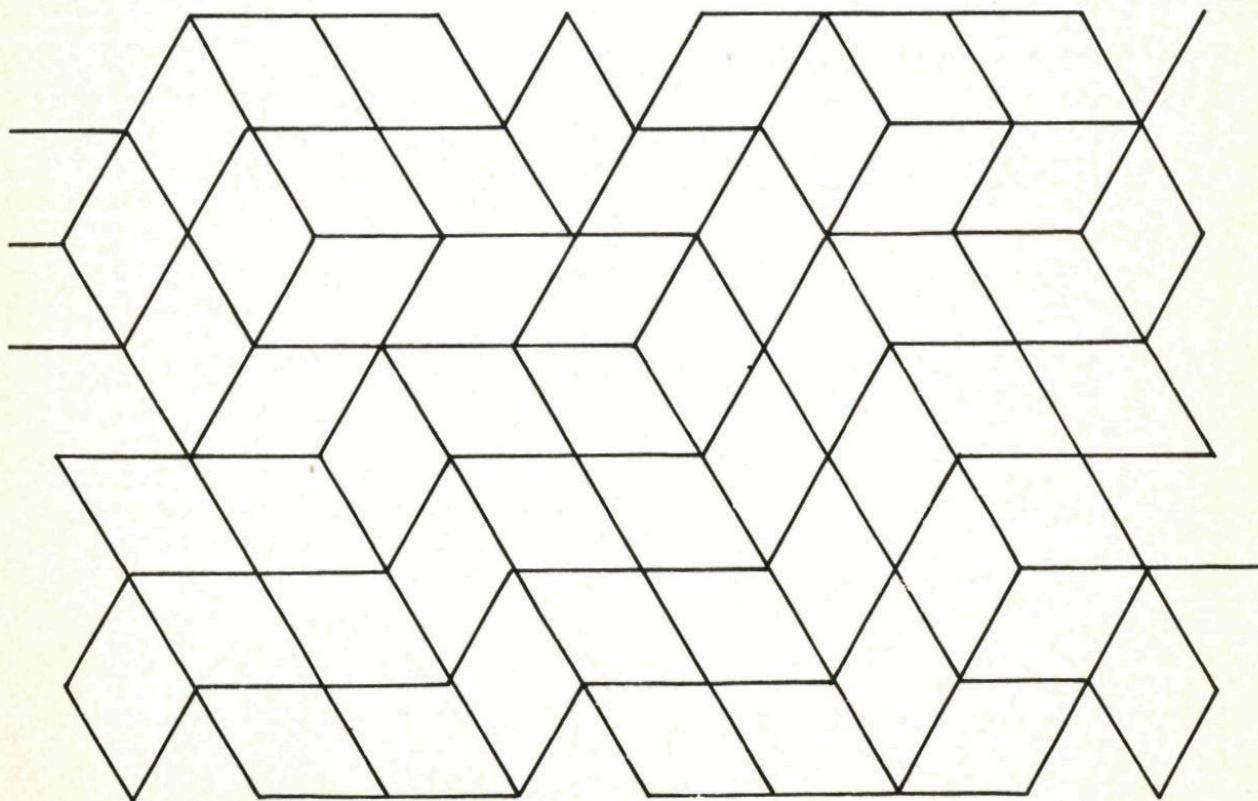
$$\frac{70}{x - 35} = \frac{45}{x - 45}, \text{ dus } x = 63.$$

$\square$

Wybertjes in een zeshoek



Figuur 1



Figuur 2

Wybertjes zijn dropjes in de vorm van een ruit met hoeken van 60° en 120° . Zo'n ruit is een parallellogram met vier zijden die even lang zijn. Je kunt ook zeggen dat wybertjes-ruiten opgebouwd zijn uit twee gelijkzijdige driehoeken die langs een zijde tegen elkaar aan liggen.

Met wybertjes kun je een vlak vullen door ze tegen elkaar aan te leggen. Netjes allemaal dezelfde kant op (figuur 1), of wat meer door elkaar, waarbij ze in drie verschillende standen kunnen voorkomen (figuur 2).

De stand van een wybertje ligt vast als je bij voorbeeld de richting geeft van de lange diagonaal. Je ziet dan dat die lange diagonalen in drie richtingen voor kunnen komen, die onderling ook weer hoeken maken van 60° (of 120°).

Ook de zijden van de wybertjes komen voor in drie richtingen, maar elk wybertje op zichzelf gebruikt maar twee van die richtingen: overstaande zijden zijn immers parallel.

Zeshoeken

Met wybertjes kun je grote regelmatige zeshoeken opvullen, en ook dat kan weer op allerlei manieren. In figuur 3 zie je een regelmatige verdeling van zo'n zeshoek, en in figuur 4 een onregelmatige.

Bij de regelmatige verdeling zie je onmiddellijk dat het aantal wybertjes in elk van de drie standen hetzelfde is. Het kost wat meer moeite om na te tellen dat dit in figuur 4, de onregelmatige verdeling, ook het geval is.

Is dat toeval voor deze tekening? Op het eerste gezicht zou je dat wel denken. Maar twee wiskundigen, de Fransman Guy David en de Braziliaan Carlos Tomei, hebben ontdekt en bewezen dat het helemaal geen toeval is: Bij elke verdeling van een regelmatige zeshoek in wybertjes zijn er evenveel wybertjes in elke stand!

Kubussen

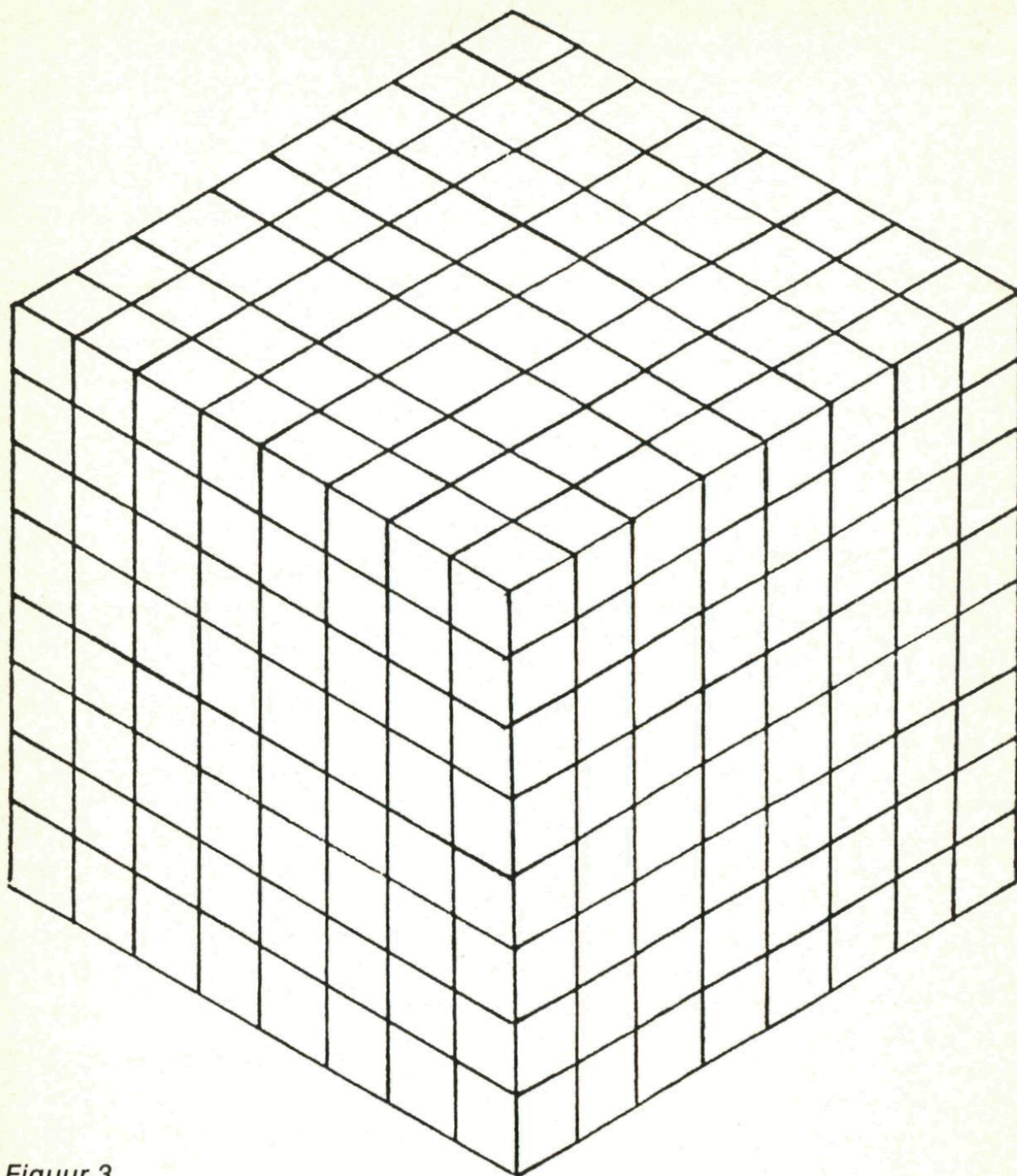
Je kunt daar op een heel verrassende wijze zonder enige berekening of redenering een intuïtief 'bewijs' van geven. Je hoeft zo'n

verdeling alleen maar te *kleuren*:

De drie standen van de wybertjes geef je elk een eigen kleur, net zo als in figuur 5.

En dan gebeurt het. Je gaat plotse-*ling diepte* zien: Je ziet de zeshoek als een soort ruimtelijk kubusbouwsel: een opengewerkte kubus, met daarin stapels kleine kubussen. Anders gezegd, je ziet een gedeelte van een vierkante tegelvloer en vierkante betegelde zijwanden, en daarbinnen liggen kubussen opgestapeld.

Kijk bij voorbeeld eens naar de witte wybertjes. Je ziet ze als de zijvlakken van kubusjes, en als tegeltjes op de zijwand. Tel je nu hun aantal door er in gedachten tegenaan te kijken vanuit een richting loodrecht op die zijwand, dan zie je direct dat het er n^2 zijn, waarbij n de lengte van de zijden van de grote zeshoek is (uitgedrukt in de zijde van een wybertje als eenheid). Dit geldt natuurlijk niet alleen voor de witte wybertjes, maar even goed voor de grijze en de zwarte. Telkens zijn het er n^2 . Einde van het bewijs!



Figuur 3

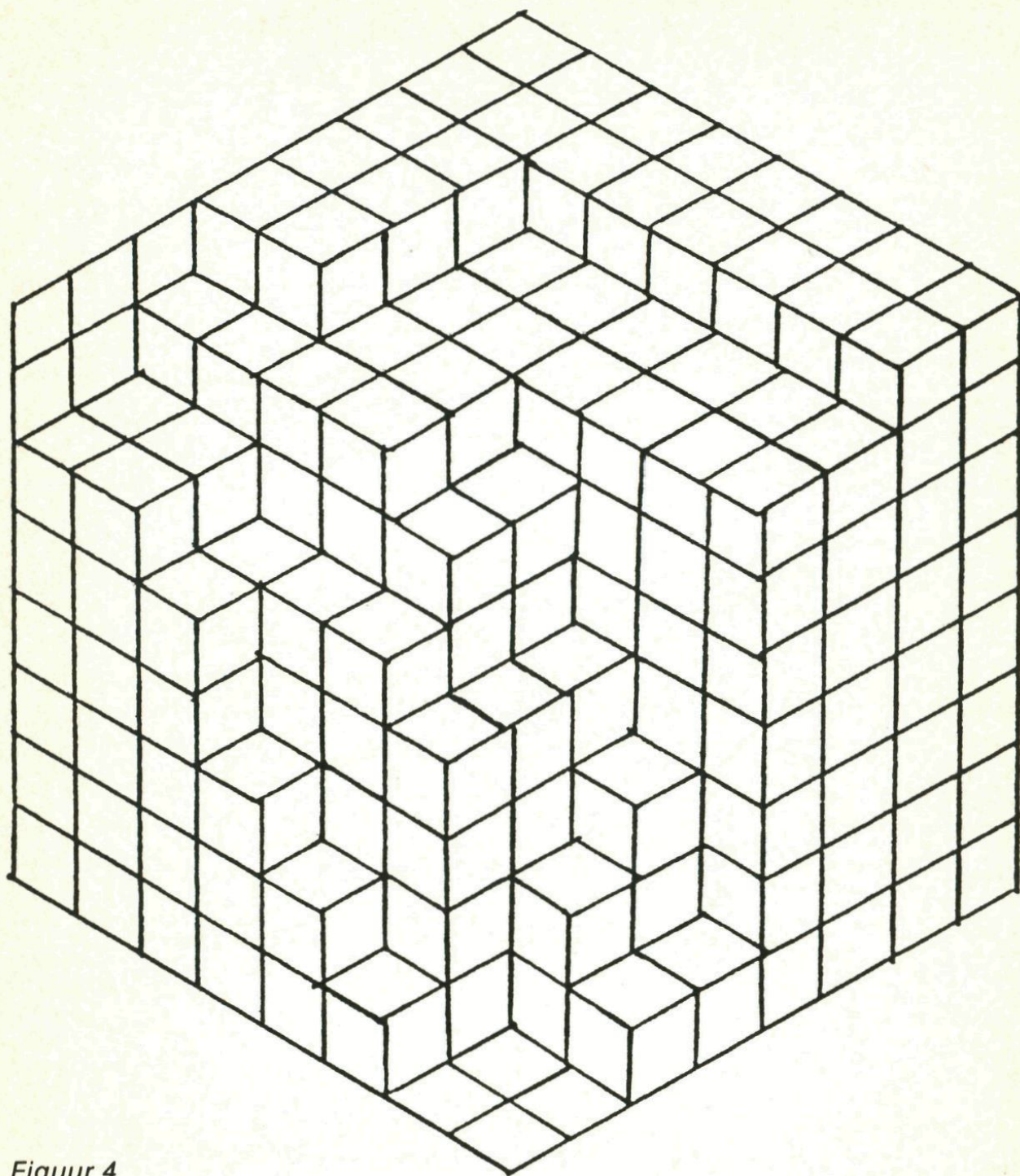
Twee manieren van zien

Het gekke is dat je zo'n wybertjespatroon altijd op twee manieren ruimtelijk kunt zien. Je kunt er als het ware schuin bovenop, of schuin van onderen tegenaan kijken. Dat is een heel gek effect.

Als je de tekening 'met een ruimtelijk oog' bekijkt, zie je één van

die twee mogelijkheden. Je moet je dan goed concentreren, even met je ogen knipperen, en dan kun je het beeld als het ware laten omklappen: Je ziet de kubussen dan op de andere manier.

Het gaat er natuurlijk om dat onze hersenen het platte plaatje op twee manieren ruimtelijk kunnen



Figuur 4

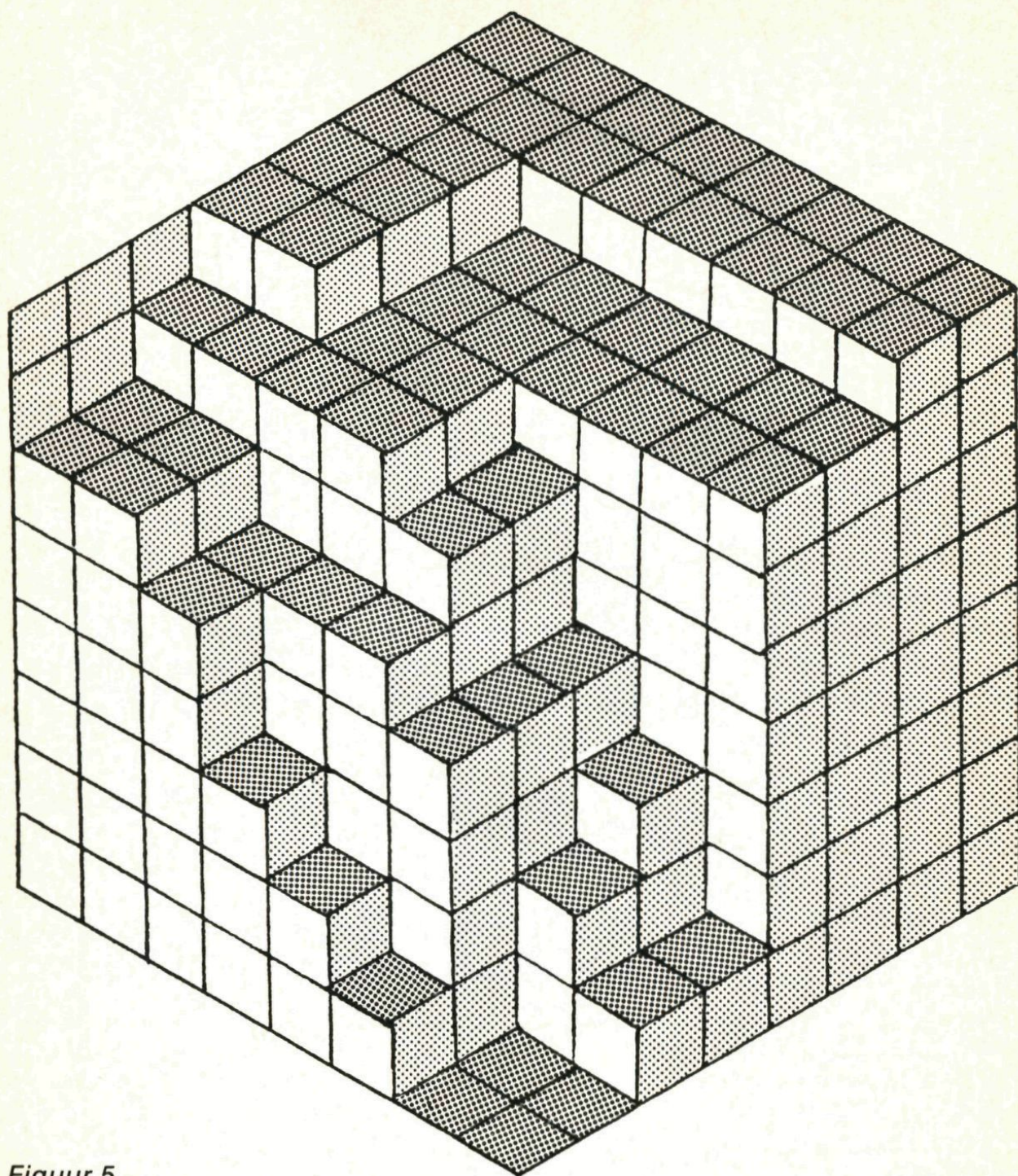
interpreteren. Hebben ze eenmaal een bepaalde interpretatie te pakken, dan laten ze die niet gemakkelijk weer los. Maar hoe je ook kijkt, je ziet op elk van de twee manieren in elke richting steeds n^2 kubuszijvlakjes.

Adders onder het gras

Is dit nu echt een *bewijs*? Voor de

getekende situaties is het natuurlijk volkomen overtuigend. Je ziet de kubusjes voor je, en je telt in elke richting n^2 wybertjes. Je hebt ook het idee dat het in allerlei andere situaties wel net zo zal gaan.

Toch schuilen er twee addertjes onder het gras. De eerste is ons gebrekkige voorstellingsvermo-



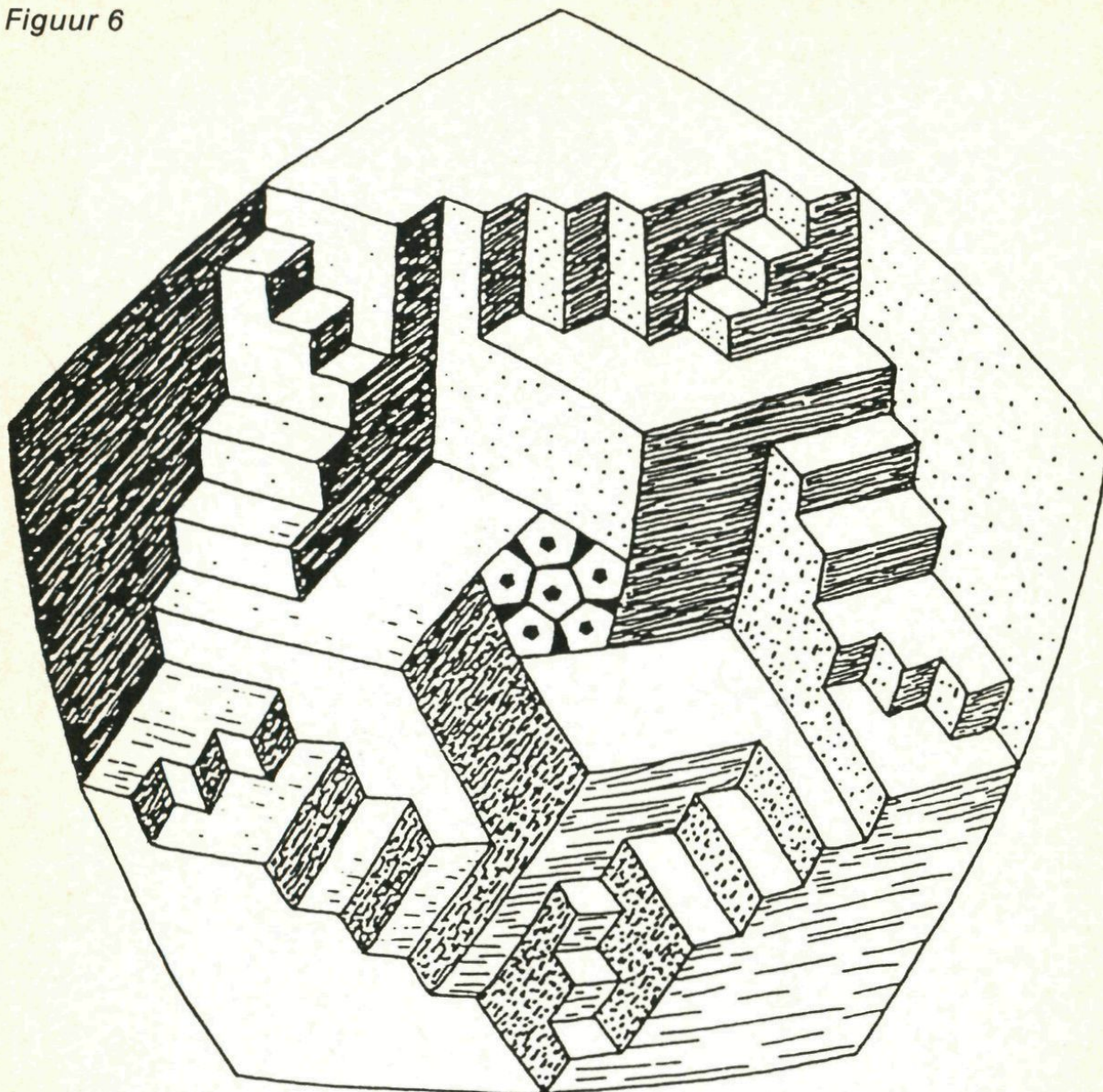
Figuur 5

gen. We kunnen ons alleen maar betrekkelijk kleine zeshoeksvullingen voorstellen. Zie je alle kubusjes ook nog in gedachten voor je als de zeshoek zijden heeft van een miljoen, een miljard, of een biljoen? Een echt bewijs moet in alle situaties opgaan; ook in het geval van gigantisch grote zeshoeken.

Onmogelijke figuren

De tweede adder is misschien nog wel gevaarlijker. Sinds Eschers onmogelijke figuren weten we dat de ruimtelijke suggesties die platte plaatjes ons geven, soms tot ongerijmdheden kunnen leiden. We denken een ruimtelijke voorstelling te zien, maar bij nader inzien klopt het niet: de ruim-

Figuur 6



telijke figuur kan onmogelijk bestaan.

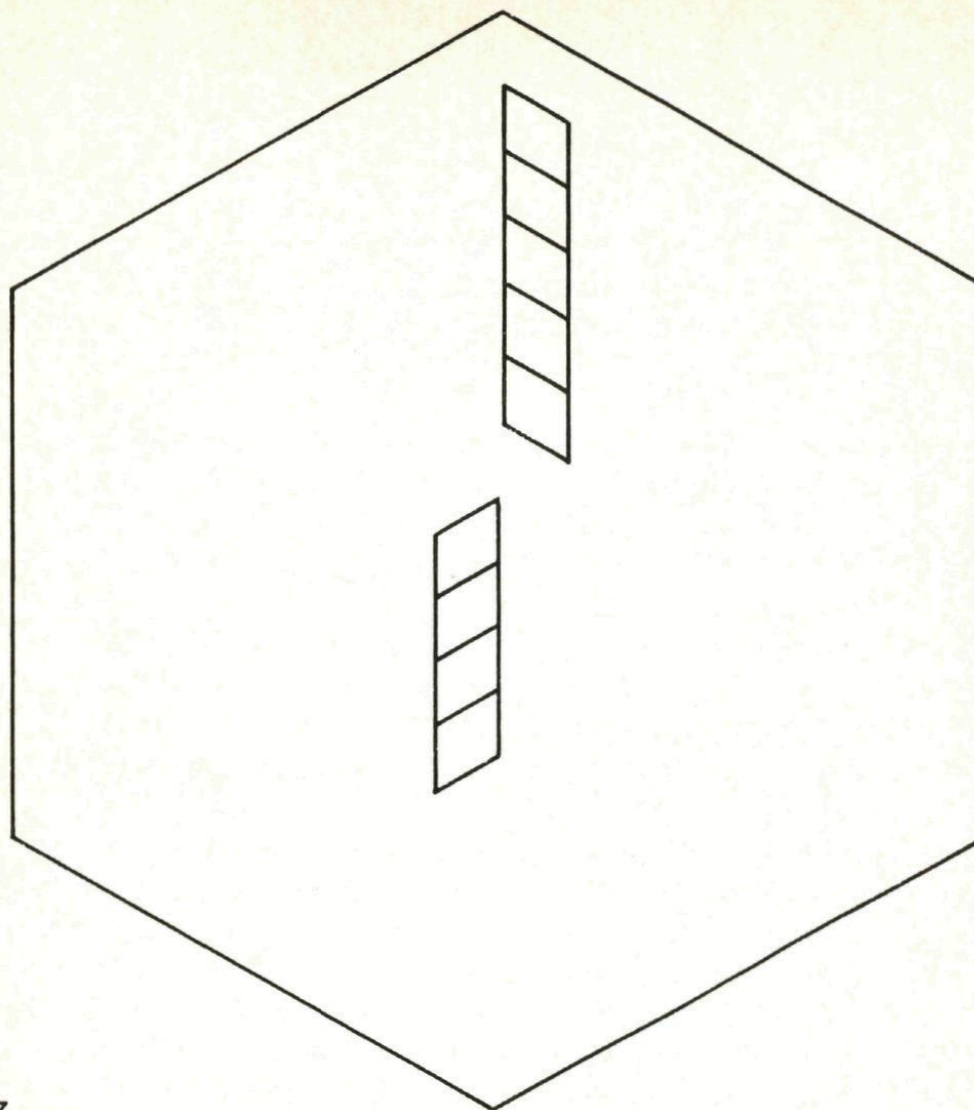
Zou zo iets bij bepaalde zeshoeksvullingen ook niet voor kunnen komen? Kijk maar eens naar figuur 6. Dat is wel geen zeshoeksvulling, maar hij lijkt er toch een beetje op. Het is een onmogelijke figuur die ontworpen is door R. Penrose.

Op het eerste gezicht lijkt het alsof je hem kunt interpreteren als een ruimtelijk bouwwerk met trappen, terrasjes en blokken. Maar als je probeert om je echt al-

les in de ruimte voor te stellen, dan ontdek je na enige tijd de onmogelijkheid.

Als je bij voorbeeld, bovenaan beginnend, de trappen rechtsom afloopt, kom je na één rondgang om het centrum van de tekening heen, op de 'verkeerde' manier weer omhoog. Wat in het begin hol was, is nu bol geworden, en omgekeerd; er klopt niets meer van.

Wie garandeert ons dat bij een zeshoeksvulling met wybertjes ook niet zo iets kan gebeuren? In



Figuur 7

dat geval zou het 'ruimtelijk bewijs' in duigen vallen.

Een echt bewijs

David en Tomei hebben zich deze moeilijkheden gerealiseerd, en ze hebben ze ook overwonnen. Hun bewijs is werkelijk vlekkeloos. Het maakt geen gebruik van moeilijke technieken, dus we zouden het hier ook kunnen herhalen. Het is misschien veel leuker om hun geheimen nog niet te verklappen. Sommige lezers willen er vast zelf wel eens hun krachten op beproeven. In het volgende nummer zullen we hier echter op terugkomen, en een waterdicht be-

wijs geven dat zich helemaal in het platte vlak afspeelt.

In hun artikel in *The American Mathematical Monthly* geven David en Tomei aan het slot nog als test-case een oefenopgave. Wij doen dat hier ook: bewijs dat figuur 7 niet tot een volledige zeshoeksverdeling kan worden aangevuld. Figuur 7 is weer een zeshoek met zijden ter lengte $n = 8$, en de positie van 9 van de 192 wybertjes ligt vast. Je moet nu dus aantonen dat je de overige 183 wybertjes niet meer allemaal in de zeshoek kwijt kunt!

Oplossing in een volgend nummer. □

Een vouwpuzzel: oplossing

Misschien heb je de vragen beantwoord door de oppervlakte van driehoek ABC uit te drukken in de hoek β en de breedte b van de strook. Maar met een eenvoudige meetkundige redenering kun je de antwoorden ook zonder berekeningen vinden. Alles wat je doen moet, is het in gedachten doortrekken van de omgevouwen strook-stukken. Je krijgt dan onderstaande figuur: twee stroken van gelijke breedte die onder een hoek β over elkaar heen liggen. Het overlappende stuk is nu een vierhoek $ABCD$.

Gelijkbenig

De hele figuur heeft twee symmetrieassen: de bissectrices van de hoeken die door de twee stroken worden gevormd. Dat betekent dat ook vierhoek $ABCD$ deze symmetrieassen heeft, dus dat alle zijden van die vierhoek even lang zijn. Met andere woorden: $ABCD$ is een *ruit*.

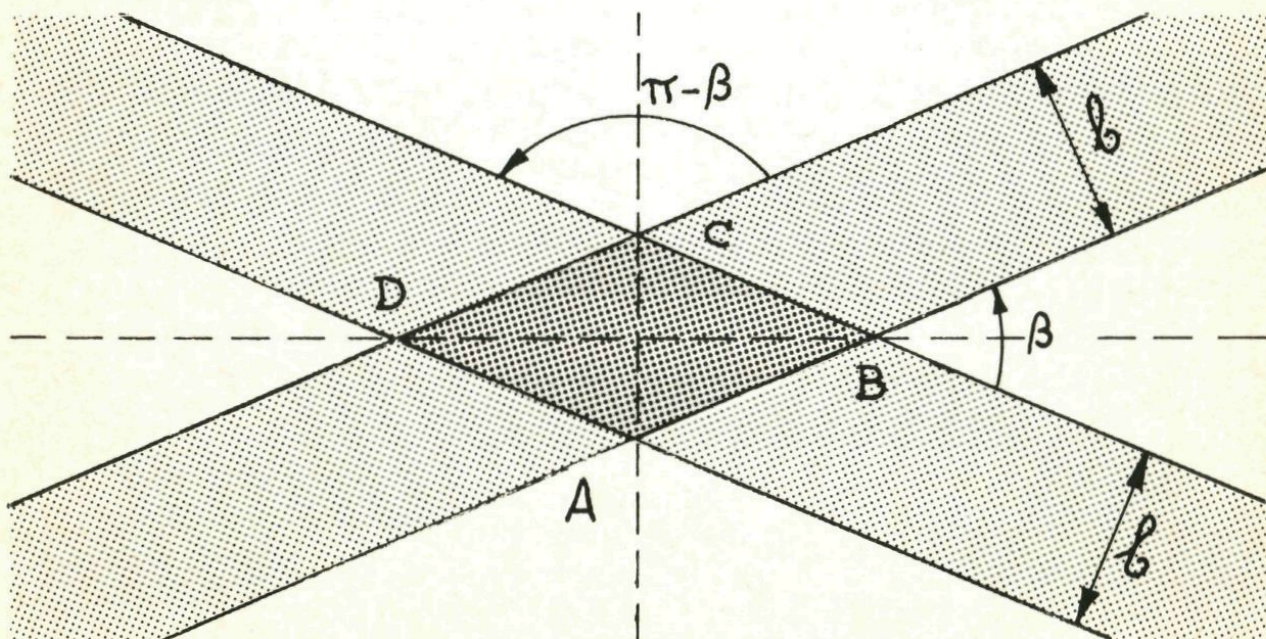
Driehoek ABC , de helft van die ruit, is dus gelijkbenig, en z'n oppervlakte is de helft van de oppervlakte van de ruit. Maar dat geldt natuurlijk ook voor driehoek BCD , de overlappingsdriehoek die hoort bij een vouwhoek $\pi - \beta$. En daarmee hebben we tevens vraag 2 beantwoord.

Minimum

Ten slotte de vraag voor welke β de

oppervlakte van driehoek ABC minimaal is. Je kunt dan net zo goed vragen voor welke β de oppervlakte van de ruit minimaal is.

De ruit is een bijzonder soort parallellogram, en z'n oppervlakte is dus $\text{basis} \times \text{hoogte}$. De 'hoogte' is constant: die is gelijk aan de breedte van de stroken. En de 'basislengte' van de ruit is de lengte van de zijden. Maar die zijdelengte is natuurlijk altijd minstens zo groot als de breedte van de stroken, en *precies* zo groot als de breedte, wanneer de stroken elkaar *loodrecht* kruisen. De ruit is dan een vierkant met zijden b , en de minimale oppervlakte van driehoek ABC is dus de helft van de oppervlakte van dat vierkant: $\frac{1}{2} b^2$. $\square$



Pythagoras Olympiade



Ook deze jaargang gaan we weer door met de *Pythagoras Olympiade*. Dat is een wedstrijd voor slimmerikken die al enige jaren in Pythagoras draait. In elk nummer komen twee opgaven. Je zult er nauwelijks wiskundige voorkennis voor nodig hebben, maar wel een flinke dosis gezond verstand! Tot ruim een maand na de verschijningsdatum kun je oplossingen insturen.

Prijzen

Iedere opgave is een wedstrijd op zichzelf. Je hoeft niet aan alles mee te doen, je kunt van elke som afzonderlijk een oplossing inzenden. Bij elke opgave verloten we onder de goede inzenders twee prijzen van f 10,—/BEF 150.

Verder vormen de 12 opgaven van deze jaargang samen een *ladderwedstrijd*. Iedere goede oplossing geeft 1 punt. Voor de besten van de ladderwedstrijd zijn drie prijzen van f 25,—/BEF 400 beschikbaar. Bovendien ontvangen de beste tien van de ladderwedstrijd een uitnodiging voor de Tweede Ronde van de *Nederlandse Wiskunde Olympiade*, zelfs al hebben ze niet aan de Eerste Ronde meegedaan of daarbij niet genoeg punten behaald (ze moeten natuurlijk op het moment van de Tweede Ronde nog wel op school zitten; de huidige eindexamenklassers vallen dus uit de boot, want de Tweede Ronde vindt in het najaar van 1990 plaats).

Oplossingen

De uitwerkingen komen weer in Pythagoras. Bij elke opgave zal de oplossing van één van de deelnemers worden gepubliceerd. Je kunt de uitslag en de uitgekozen oplossingen eerder krijgen, als je een aan jezelf geadresseerde en gefrankeerde enveloppe meestuurt.

Inzendingen

Leerlingen van het voortgezet/secundair onderwijs kunnen hun oplossingen sturen aan:

Pythagoras Olympiade,
Marinus de Jongstraat 12,
4904 PL Oosterhout (NB).

Vermeld op elk (éénzijdig beschreven) vel: naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas. Verder moet elke oplossing op een nieuw vel beginnen, want we kijken ze afzonderlijk na. We bekijken alleen goed leesbare oplossingen die volledig uitgewerkt zijn, met verklarende tekst in goed lopende zinnen.

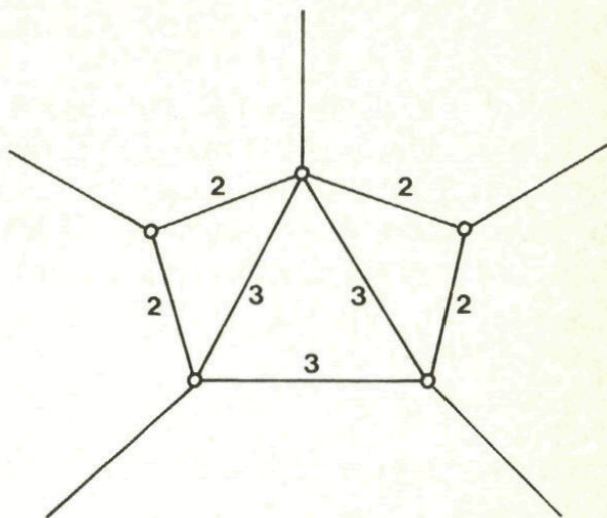


Nieuwe opgaven

Oplossingen inzenden vóór 15 december.

PO 128

Wiskodam is een belangrijk verkeersknooppunt; uit vijf richtingen komen er wegen samen. De vijf pleinen van Wiskodam zijn verbonden via zeven wegen volgens de getekende plattegrond (afstanden in km). Wegens de verkeersdruk wil men voor auto's eenrichtingverkeer instellen op zo veel mogelijk van die wegen. Het doorgaande verkeer wil men echter niet meer dan 3 km laten omrijden. Hoe moet men dit probleem oplossen? Motiveer je antwoord!



Figuur 1. De vijf pleinen van Wiskodam.

PO 129

Een school telt 300 leerlingen: evenveel jongens als meisjes. In de schoolcomputer heeft elke leerling een volgnummer 1, 2, ..., 300. Iemand beweert dat de verdeling over jongens en meisjes van die nummers zo is, dat

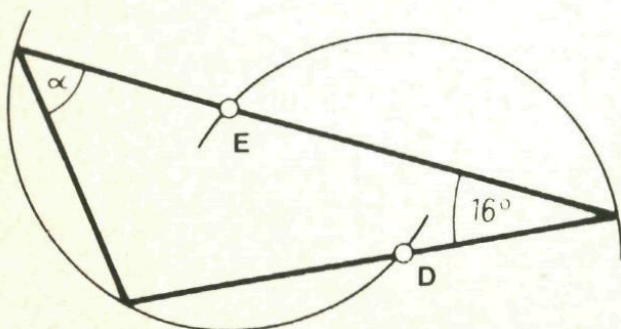
1. de som van de nummers van de meisjes gelijk is aan die van de jongens,

2. bij elk meisje er een jongen is zo dat de som van hun twee nummers gelijk is aan 301.

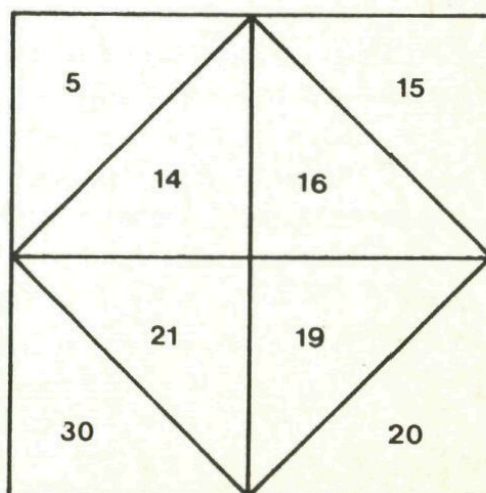
Geef een voorbeeld van een verdeling die aan deze voorwaarden voldoet, of bewijs dat zo'n verdeling onmogelijk is. $\square$

Bekijk het even

D en E zijn middelpunten van de cirkelbogen.
Bereken α . $\square$



Vierkant met gemiddelden: oplossing



Redactioneel

Deze jaargang zal in elk nummer aandacht worden besteed aan wiskunde en postzegels. In dit nummer wordt begonnen met 'Pi op postzegels'. Verder in dit nummer ook het artikel 'Vlinders' dat we middels de voorplaat van het laatste nummer van de vorige jaargang aankondigden. Die voorplaat wordt aan het begin van het artikel 'Vlinders' herhaald en aan het einde van het artikel is de formule te vinden waarmee die figuur kan worden verkregen.

Voor de nieuwe lezers

Tenzij in een artikel anders vermeld, kun je je voor reacties op artikelen en problemen die in Pythagoras aan de orde komen, wenden tot het redactiesecretariaat (het adres staat op de achterzijde van de omslag). Uiteraard zijn ook nieuwe artikelen altijd welkom!

Verwijzing Soms wordt verwezen naar artikelen uit voorgaande nummers, bij voorbeeld: Pythagoras 24-2. Hierbij geeft het eerste getal de jaargang aan en het tweede het nummer uit die jaargang. Overigens zorgen we er wel voor dat je die verwijzingen niet per se hoeft te raadplegen om artikelen waar ze in voor komen te kunnen lezen.

Fractalia et alia

Onder de titel 'Fractalia et alia' is van 4 september tot en met 26 oktober 1989 twee- en driedimensionaal werk van de Leidse kunstenares *Lidie Bossen* tentoongesteld in het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI). De openingstijden zijn steeds maandag tot en met vrijdag van 9 tot 16 uur. Het adres van het CWI is Kruislaan 413 (achter het spoorwegviadukt), Amsterdam. □

Uitgave onder toezicht van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Lay-out: Klaas Lakeman, Amsterdam.

Tekenwerk: Hans van Kuyk, Amsterdam.

Foto's en andere illustraties: Hessel Post, Woerden (omslag, blz. 1, 2, 6, 16); Jan van de Craats, Oosterhout (NB) (blz. 8, 9, 10, 11, 12, 14, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 27); R. Penrose (blz. 23).

Pythagoras wiskunde tijdschrift voor jongeren

Redactie: Jan van de Craats, Klaas Lakeman, Hans de Rijk.

Medewerkers: Popke Bakker, Gerard Bäuerle, F. van der Blij,
Niels M. Buizert, Hans Lauwerier, Hessel Pot.

Redactiesecretariaat: Klaas Lakeman, Cornelis Krusemanstraat 60^{II},
1075 NS Amsterdam (NL).

Inhoud jaargang 29, nummer 1

Het reguleren van veel hoeken /

1

Hessel Pot

Vierkant met gemiddelden /

3, 27

Fout... of toch goed? / 4

Klaas Lakeman

Pi op postzegels / 6

Hessel Pot

Hoeveel treden? / 7, 17

Niels M. Buizert

Vlinders / 8

Jan van de Craats

Een vouwpuzzel / 14, 25

Henk Mulder/

Jan van de Craats

Pi in acht decimalen

nauwkeurig / 15

Weina Reinboud/Hessel Pot

Wybertjes in een zeshoek / 18

Jan van de Craats

Pythagoras Olympiade / 26

Jan van de Craats

Bekijk het even / 27

Redactioneel / 28

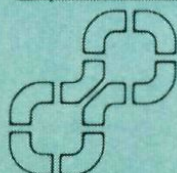
Pythagoras verschijnt zesmaal per schooljaar; opgave van abonnementen bij de uitgever (zie onder).

Abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 september schriftelijk bij de uitgever is opgezegd.

Bij tussentijdse abonnering ontvangt men ook de reeds verschenen num-

mers. Betaling per acceptgirokaart.

Tarieven	NLG/BEF
Abonnement Pythagoras	23,—/430
Luchtpost-toeslag	10,—
Inclusief Archimedes	40,—/750
Luchtpost-toeslag	20,—
Losse nummers	5,—/ 90



stichting ivio

Postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL.)

Tel. 03200-76411

educatieve uitgeverij - instituut voor buitenschools

onderwijs - wereldschool - AO-reeks - leerprojecten

Postgiro Nederland: 287934

Postcheck België: 000-0130850-94