



Pythagoras



wiskunde tijdschrift voor jongeren

stichting ivio

jaargang 29
numraer 3
januari 1990

Overbodige nullen op postzegels



Als je er op gaat letten, blijkt het symbool "0" in de notatie van getallen niet altijd op een consequente manier voor te komen. En soms wordt die 0 ook anders gebruikt dan wat je daarover op school (misschien) hebt geleerd. In dit vervolg-artikel worden de overbodige nullen ná de komma nader onder de loep genomen. De voorbeelden halen we weer van postzegels en poststempels.

Op de postzegel van een rijksdaalder in de Beatrix-serie, staat de waarde vermeld als

2,50 G

Waarom die rechter nul?

Op school leren we „tweeëneenhalf” in de kommanotatie te schrijven als

2,5

Die extra nul heeft *niet* te maken met het aangeven van de nauwkeurigheids-graad zoals bij meetresultaten in de natuurkunde gewoonte is. Want op de postzegel van drie gulden staat 3 G en

niet 3,00 G of 3,0 G.

Toch zul je het wel heel gewoon vinden dat die extra nul in 2,50 G er staat. Bij het opschrijven van geldbedragen wordt dat zo goed als altijd gedaan. Niet alleen op postzegels, maar overal. En in alle landen van de wereld.

Vermoedelijk heeft de gewoonte om "overbodige" nullen te gebruiken in kommagetallen, te maken met het feit dat bij een niet-geheel guldensbedrag eerder gedacht wordt aan

— een *geheel* aantal gulden plus een *geheel* aantal centen,

dan aan

— een guldens-hoeveelheid, uitgedrukt in één *breukgetal*.

De meeste mensen zijn nu eenmaal beter vertrouwd met hele getallen dan met breuken! De 2,50 op de postzegel stelt dan niet in de eerste plaats een breukgetal voor, maar een guldenaantal en een centenaantal. In dit verband is het aardig om op te merken dat op de beide oudste Nederlandse rijksdaalderpostzegels de waarde is aangegeven als



2 Gl. 50 c.

In bijna alle geldstelsels speelt de verdeling van de munteenheid in *honderdsten* een belangrijker rol dan die in *tienden*. Zo spelen de *centen* als rekeneenheid in Nederland een grotere rol dan de *dubbeltjes*; vandaar de keuze voor twee cijfers na de komma.

Uitzonderingen

Het is natuurlijk de sport om te zoeken naar afwijkingen van de hierboven genoemde opvatting. Die zijn er in verschillende opzichten.

A. Het eiland Malta gebruikt sinds 1972 een geldstelsel waarbij de maltezer 'cent' is verdeeld in *tien* 'mils'. Bij niet-gehele centwaarden wordt het breukdeel dan natuurlijk maar met één cijfer aangegeven, zonder extra nul.

In plaats van de komma of de punt staat hier de letter c als scheidingsteken vóór het breukdeel.



B. Een afwijking van een ander type — hoewel niet consequent toegepast — is te vinden op zegels van de republiek Congo (Kinshasa) tussen '67 en '71. De muntverdeling is: 1 kuta(K) = 100 sengi. We zien zowel

0,40 K (met extra nul)

als

9,6 K (zonder extra nul).



C. Wanneer de waarde een geheel aantal 'guldens' is, staan er soms toch nog twee nullen achter.

De reden hiervan zal wel zijn dat de aanduiding op die manier duidelijk herkenbaar is als geldbedrag; de overeenkomst met bedragen mét een breukdeel is wat groter. Ook is het een methode om aan te geven dat het genoemde getal slaat op 'guldens' en niet op 'centen'. Zie de voorbeelden op bladzijde 4.

In Japan zijn in 1950 en 1951 zegels uitgegeven in beide varianten, zowel met als zonder de extra dubbelnul.

In Nederland is zo'n dubbele nul (nog) niet op een echte postzegel voorgekomen. Wel nét ernaast, op het witte randje aan de kerstzegelvelletjes van 1988. En ook wél op een postzegel van de Nederlandse Antillen van 1979.

In België lijkt de dubbele nul na de komma alleen voor te komen op een serie spoorpakketzegels uit 1923.

Verder lijken bij voorbeeld ook Groot-Brittannië, Duitsland (Oost én West), Zweden en Hongarije de dubbele nul op hun postzegels geheel te vermijden.

De zegels die in 1973 met een gelijke afbeelding (een cultureel centrum in Reykjavik) door vijf Scandinavische landen zijn uitgegeven, tonen in de wijze van waarde-aanduiding enkele interessante verschillen. Er blijkt uit dat zulke notatie-verschillen niet (uitsluitend) afhangen van de smaak van de zegel-ontwerper, maar dat ook per land een bepaalde lijn wordt aangehouden. Wellicht zijn zulke onderlinge verschillen ook op te sporen op de zogenaamde 'Europa-zegels' van jaargangen met hetzelfde zegelontwerp.

Het nul-streepje

We hebben gezien dat er bij het noteren van getallen, niet altijd op dezelfde manier gebruik gemaakt wordt van het cijfer 0. Er kunnen in bepaalde gevallen zowel argumenten zijn vóór als tégen het schrijven van de 0. In zulke twijfel-situaties wordt soms gekozen voor een compromis.



December-
postzegels
20 stuks
van 50 ct
f 10.00





De eerste mogelijkheid is om de twijfel-nullen een stuk(je) *kleiner* te schrijven, zie de voorbeelden (en enkele tegenvoorbeelden) hierboven.

Een andere compromis-mogelijkheid is om de lege positie aan te geven met een kort liggend streepje (-). Zie de voorbeelden op bladzijde 6.



Postzegels

Postzegels zijn verkrijgbaar in de volgende waarden: 5, 10, 25, 50, 55, 65 en 75 cent, f 1,-, f 1,20, f 1,50, f 2,-, f 2,50, f 3,-, f 4,- f 5,- en f 7,-.

Met name Indonesië maakt hier heel vaak gebruik van. Maar ook in andere landen kom je het tegen, bijvoorbeeld in Finland tussen '38 en '46. En in sommige voormalige Engelse gebieden die van het oude pond-shilling-pence-stelsel zijn overgegaan op een decimaal stelsel.

Soms is het streepje *dubbel* = . Of het is vervormd tot een vierkante of ronde *punt* (b.v. Australië 1954), waarmee het vrijwel identiek geworden is met het teken dat in het Arabische schrift voor de nul in gebruik is.

In Nederland komt zo'n streepje niet op postzegels voor. Maar in de tarieven-lijstjes van de PTT staan ze altijd; waarom dat verschil??

Het streepje staat weer wél op de Juliana-zegel van Nieuw-Guinea uit 1954 f 1,—). En ook op zegels

van de Ned. Antillen uit 1980 en 1982.

Op *poststempels*, ook van Nederland, staat het streepje vaak in de nummer-aanduiding van de eerste negen dagen van elke maand.

Andere 'nul-tekens'

Kijken we naar de afdrukken van frankeer-machines, dan vinden we nog meer variatie in tekens voor de nul. Of misschien is het beter om te zeggen: tekens voor de open plaats. Want mogelijk zijn deze sterretjes, ruitjes en lijntjes voornamelijk bedoeld om fraude tegen te gaan. Het blokkeren van de mogelijkheid om na afstempeling van een goedkoop porto in de machine, met de hand daar nog een extra cijfer vóór te stempelen; de kleur is altijd rood, en niet zoals bij postzegels voor elke waarde anders. □



Zoekt en gij zult vinden

$$4\ 679\ 307\ 774 = 4^{10} + 6^{10} + 7^{10} + 9^{10} + 3^{10} + 0^{10} + 7^{10} + 7^{10} + 7^{10} + 4^{10}$$

Natuurlijke getallen (groter dan 1) die gelijk zijn aan de som van de n -de macht van hun cijfers, worden *getallen van Armstrong* genoemd. Je komt ze echter ook wel tegen onder de naam *powerful numbers of perfect digital invariants* (PDI's). In Pythagoras 28-5 werden enige voorbeelden gegeven. Daarop ontvingen we een aanvulling van Jan de Geus uit Den Haag. De lijst die hij in de literatuur had opgedoken, drukken we hierbij af.

$$\begin{aligned} 153 &= 1^3 + 5^3 + 3^3 \\ 370 &= 3^3 + 7^3 + 0^3 \\ 371 &= 3^3 + 7^3 + 1^3 \\ 407 &= 4^3 + 0^3 + 7^3 \\ 1634 &= 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4 \\ 8208 &= 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4 \\ 9474 &= 9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4 \\ 4150 &= 4^5 + 1^5 + 5^5 + 0^5 \\ 4151 &= 4^5 + 1^5 + 5^5 + 1^5 \\ 54748 &= 5^5 + 4^5 + 7^5 + 4^5 + 8^5 \\ 92727 &= 9^5 + 2^5 + 7^5 + 2^5 + 7^5 \\ 93084 &= 9^5 + 3^5 + 0^5 + 8^5 + 4^5 \\ 194979 &= 1^5 + 9^5 + 4^5 + 9^5 + 7^5 + 9^5 \\ 548834 &= 5^6 + 4^6 + 8^6 + 8^6 + 3^6 + 4^6 \\ 1741725 &= 1^7 + 7^7 + 4^7 + 1^7 + 7^7 + 2^7 + 5^7 \\ 4210818 &= 4^7 + 2^7 + 1^7 + 0^7 + 8^7 + 1^7 + 8^7 \\ 9800817 &= 9^7 + 8^7 + 0^7 + 0^7 + 8^7 + 1^7 + 7^7 \\ 9926315 &= 9^7 + 9^7 + 2^7 + 6^7 + 3^7 + 1^7 + 5^7 \\ 14459929 &= 1^7 + 4^7 + 4^7 + 5^7 + 9^7 + 9^7 + 2^7 + 9^7 \\ 24678050 &= 2^8 + 4^8 + 6^8 + 7^8 + 8^8 + 0^8 + 5^8 + 0^8 \\ 24678051 &= 2^8 + 4^8 + 6^8 + 7^8 + 8^8 + 0^8 + 5^8 + 1^8 \\ 88593477 &= 8^8 + 8^8 + 5^8 + 9^8 + 3^8 + 4^8 + 7^8 + 7^8 \\ 146511208 &= 1^9 + 4^9 + 6^9 + 5^9 + 1^9 + 1^9 + 2^9 + 0^9 + 8^9 \\ 472335975 &= 4^9 + 7^9 + 2^9 + 3^9 + 3^9 + 5^9 + 9^9 + 7^9 + 5^9 \\ 534494836 &= 5^9 + 3^9 + 4^9 + 4^9 + 9^9 + 4^9 + 8^9 + 3^9 + 6^9 \\ 912985153 &= 9^9 + 1^9 + 2^9 + 9^9 + 8^9 + 5^9 + 1^9 + 5^9 + 3^9 \end{aligned}$$

Strikt genomen horen daar de getallen 2 tot en met 9 nog bij voor de eerste macht, zoals J. P. Dijk uit Zwolle ons liet weten. Immers $2^1 = 2$, $3^1 = 3$, enzovoort.

Dikwijls wordt ook nog geëist dat het aantal cijfers van dergelijke getallen gelijk is aan de grootte van de macht. Dus dan vallen 4 150, 4 151, 194 979 en 14 459 929 uit de boot. De eerste twee komen één cijfer te kort, terwijl de laatste twee juist één cijfer te veel hebben.

Fraai, maar saai

Op puzzelaars en niet-wiskundigen oefenen getallen van Armstrong door de jaren heen veel aantrekkingskracht uit. Ze leiden echter niet tot algemene inzichten in de structuur van getallen. Ook is er geen regel op te stellen (laat staan te bewijzen) die aangeeft welke getallen een getal van Armstrong zijn en welke niet. Vandaar dat (beroeps)wiskundigen er weinig belangstelling voor hebben. Voor hen is het slechts een kwestie van uitputtend zoeken (en tegenwoordig van bruut computergeweld) om ze te vinden.

RDI's

Aardige varianten op de getallen van Armstrong, maar wiskundig van dezelfde orde, zijn de recurring digital invariants (RDI's). De som van de n -de machten van de cijfers van een getal N is gelijk aan een getal N_1 . De som van de n -de machten van de cijfers van N_1 , is op haar beurt weer gelijk aan een getal N_2 , enzovoort. Als na een eindig aantal stappen het oorspronkelijke getal N verschijnt, heet N een *recurring digital invariant* (RDI).

Voorbeeld voor de 3-de macht:

$$\begin{aligned} 55: 5^3 + 5^3 &= 250 \\ 250: 2^3 + 5^3 + 0^3 &= 133 \\ 133: 1^3 + 3^3 + 3^3 &= 55 \end{aligned}$$

Dit is korter te noteren als $55 \rightarrow 250 \rightarrow 133 \rightarrow 55$. Of nog korter met het kleinste getal uit de reeks: 55, de eigenlijke RDI.

Andere RDI's van de 3-de macht zijn 136, 160 en 919. Het enige voorbeeld van de 2-de macht is 4.

ADI's

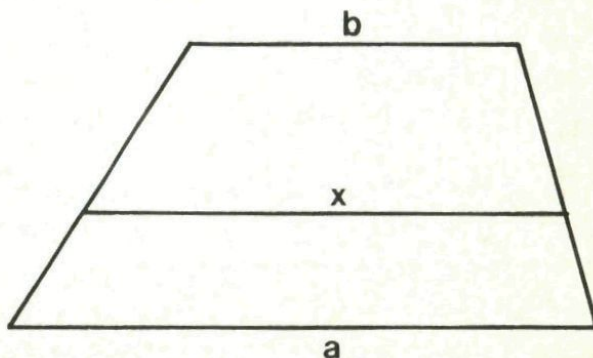
Zoals gezegd, is 136 een RDI van de 3-de macht. De reeks is echter heel kort: $136 \rightarrow 244 \rightarrow 136$. Zo'n RDI-paar wordt wel aangeduid met *amicable digital invariants* (ADI).

Zowel van de RDI's als van de ADI's hebben we nog een aantal voorbeelden van hogere machten. Maar misschien vinden sommige lezers het aardig om eerst zelf op zoek te gaan. In een van de komende nummers zullen we ze zonder verder commentaar afdrucken. □

Trapezium in tweeën

Het lijnstuk x is evenwijdig aan de evenwijdige zijden a en b van een trapezium. Door dit lijnstuk x wordt het trapezium (figuur 1) in twee kleinere trapezia verdeeld met gelijke oppervlakte.

Druk de lengte van x uit in a en b .



Oplossing op bladzijde 14.



Figuur 1

Van rechthoek naar vierkant

Neem een rechthoekig stuk papier. Probeer dat in drie stukken te knippen die opnieuw aaneengevoegd een vierkant vormen.

Natuurlijk moet eerst worden vastgesteld langs welke lijnen er moet worden geknipt. Om die lijnen te bepalen moet bekend zijn wat de *middelevenredige* van twee gegeven lijnstukken is en hoe die kan worden geconstrueerd. Daarom eerst aandacht voor de *middelevenredige*. Los daarvan wordt in een apart stukje (bladzijde 12) beschreven hoe de *middelevenredige* van twee lijnstukken is te construeren.

Middelevenredige

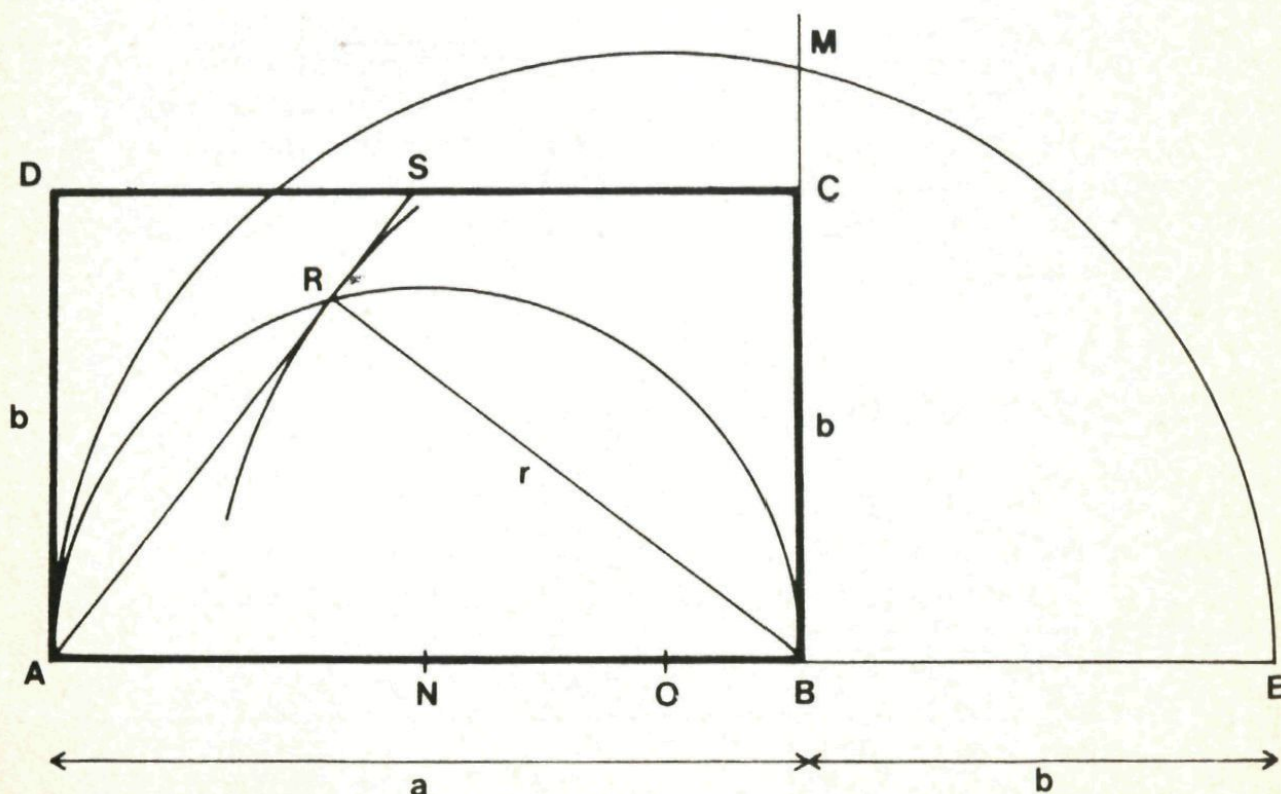
De *middelevenredige* van twee lijnstukken met lengte a en b is het lijnstuk met lengte r waarvoor geldt

$$\frac{a}{r} = \frac{r}{b}.$$

Dit is (door kruislings te vermenigvuldigen) ook te schrijven als

$$r^2 = ab \text{ of } r = \sqrt{ab}.$$

Stel dat de gegeven rechthoek zijden met lengte a en b heeft. Dan is de oppervlakte van de rechthoek ab . De oppervlakte van het te vormen vierkant is daaraan gelijk, ook ab . Het vierkant heeft dus zijden met lengte $\sqrt{ab}$. Anders gezegd, de lengte van de vierkantszijden is gelijk



Figuur 1

aan de middelevenredige r van de zijden van de rechthoek. Dit is het uitgangspunt bij het construeren van de lijnen waarlangs in de rechthoek moet worden geknipt.

Zo moet je knippen

De gegeven rechthoek is $ABCD$ (figuur 1), met $AB = a$ en $BC = b$. Leg hem zo voor je neer dat de grootste zijde, in dit geval AB , horizontaal ligt.

Verleng AB met BE , waarbij $BE = BC = b$.

Construeer de middelevenredige van AB en BE . Dit wordt BM . Dus BM is gelijk aan r met $r^2 = ab$.

Bepaal het midden N van AB .

Trek de halve cirkel waarvan N het middelpunt is en AB de middellijn.

Zet vervolgens de passerpunt in B en cirkel het lijnstuk $BM = r$ om tot de boog AB wordt gesneden.

Noem het snijpunt R .

Trek ten slotte BR en ARS . Dit zijn de lijnen waarlangs moet worden geknipt.

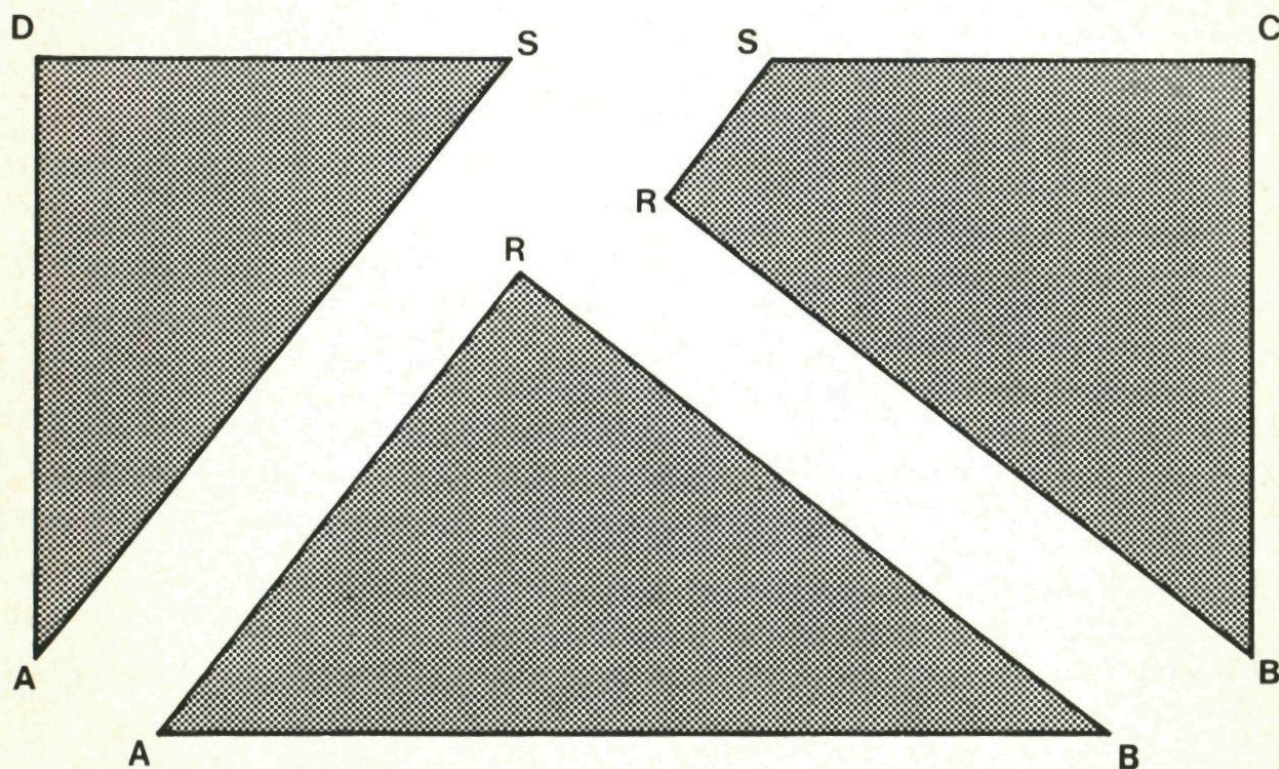
Vragen

Zie je nu hoe het gevraagde vierkant kan worden gevormd. (figuur 2)?

Kun je bewijzen dat het ook écht een vierkant is? Of anders gezegd: Kun je bewijzen dat de constructie juist is? Dit is lastiger dan het op het eerste gezicht lijkt. Je bent namelijk steeds geneigd veronderstellingen te doen die pas waar zijn, nadat is bewezen dat de gevormde vierhoek een vierkant is!

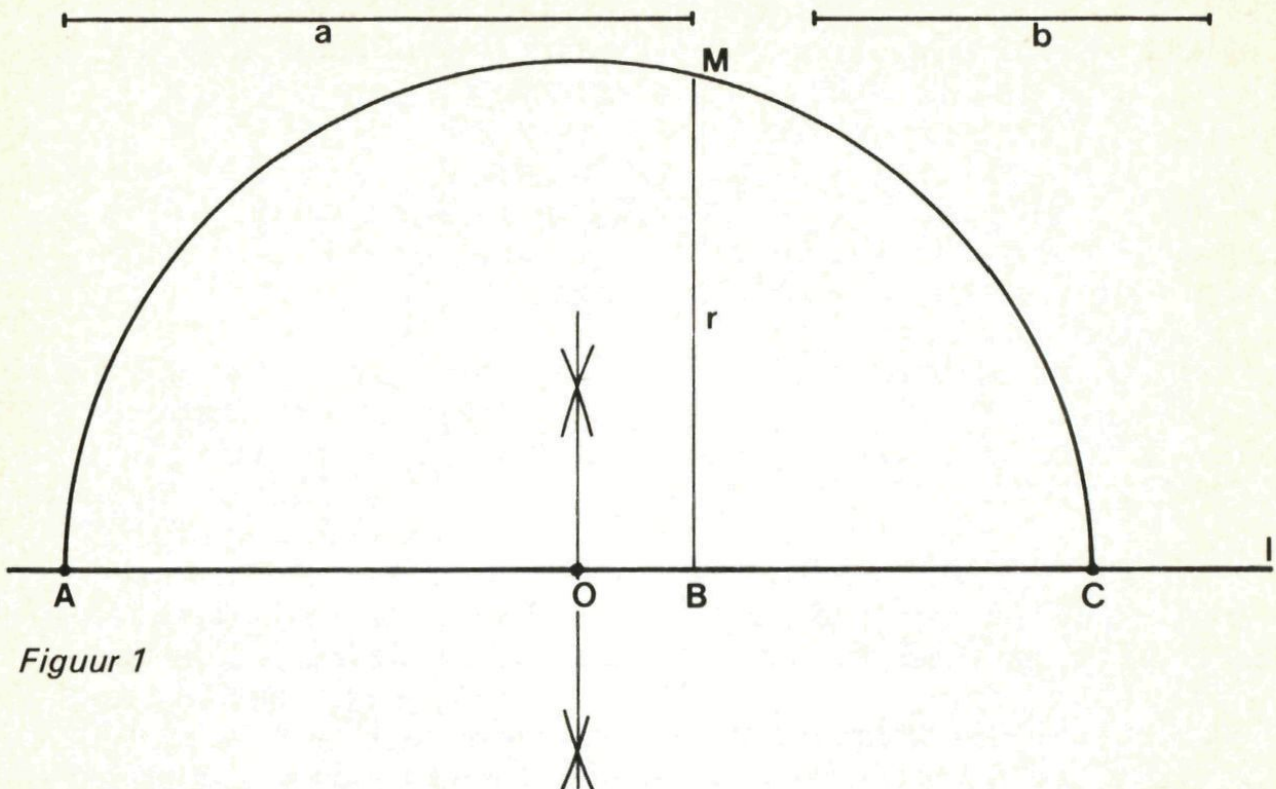
Zal de constructie altijd opgaan? Wanneer niet?

Een antwoord op deze vragen is te vinden in het volgende nummer. □



Figuur 2. Maak van deze stukken een vierkant.

Constructie middelevenredige



Figuur 1

Trek een lijn l (figuur 1).

Pas daar een lijnstuk $AB = a$ op af en een lijnstuk $BC = b$.

Bepaal het midden O van AC .

Trek de cirkel met middelpunt O en middellijn AC .

Richt in B een loodlijn op. Deze snijdt de cirkel in M .

$BM = r$ is de middelevenredige van $AB = a$ en $BC = b$.

Bewijs

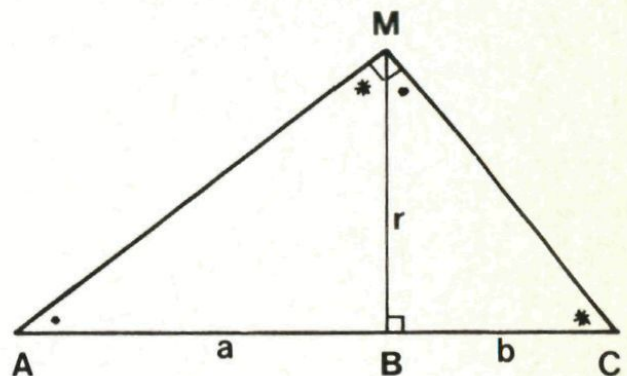
Trek AM en MC . Hoek AMC is recht of 90° . Het is een omtrekshoek die staat op een boog van 180° .

(In figuur 1 is die boog niet helemaal doorgetrokken!) En de omtrekshoek is gelijk aan de helft van de boog waarop hij staat (Zie het stukje 'Verder de oude doos in' in Pythagoras 27-2).

In de rechthoekige driehoek AMC is MB een hoogtelijn uit M op AC (figuur 2).

Driehoek AMB is gelijkvormig met driehoek MCB . Immers hoek MAB is gelijk aan hoek BMC , en hoek AMB is gelijk aan hoek MCB .

Uit de gelijkvormigheid volgt dat de verhoudingen van de lengten van de overeenkomstige zijden gelijk zijn.



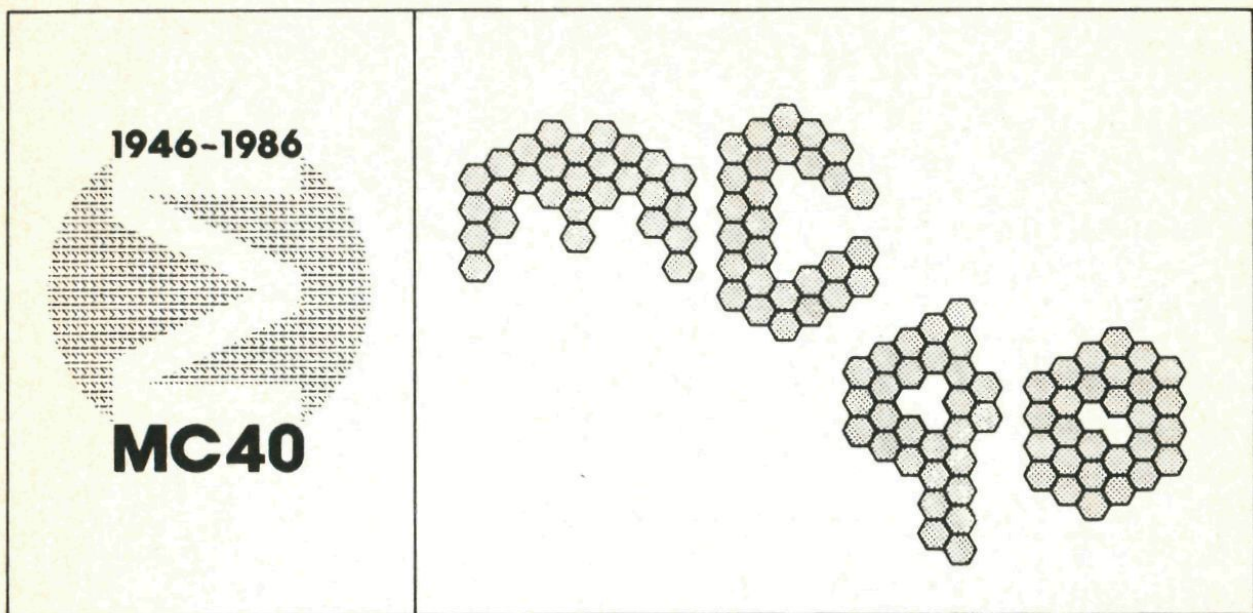
Figuur 2

Daarom geldt

$$\frac{AB}{MB} = \frac{BM}{BC} \quad \text{of} \quad \frac{a}{r} = \frac{r}{b}.$$

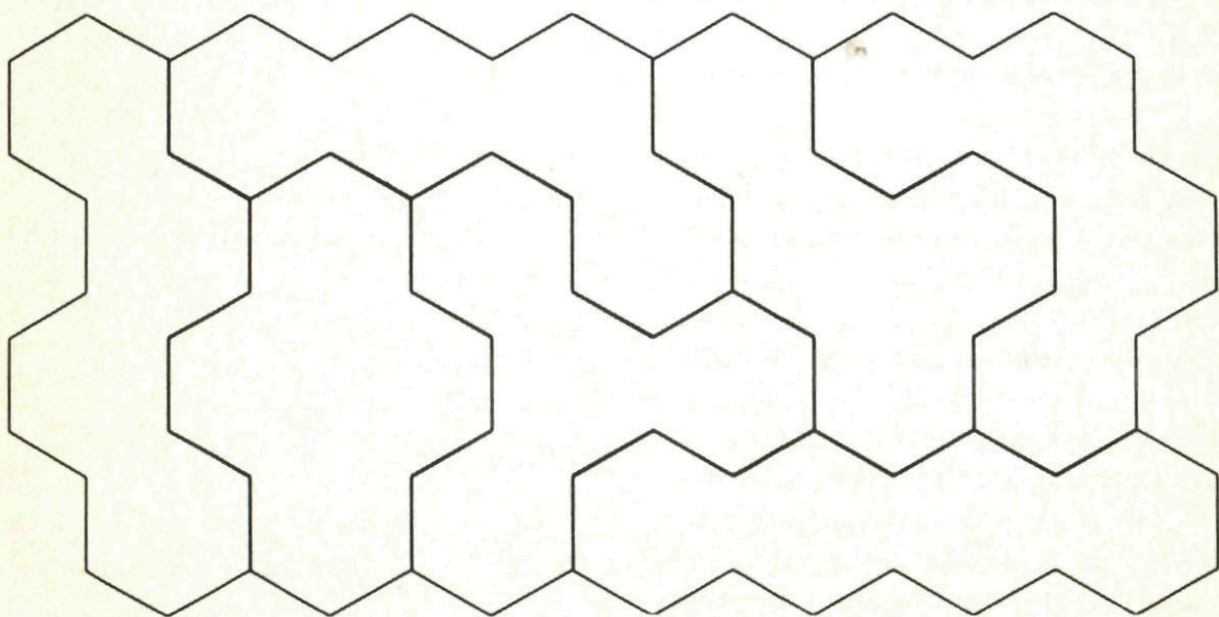
Dus $BM = r$ is de middelevenredige van $AB = a$ en $BC = b$. □

Tetraheksen

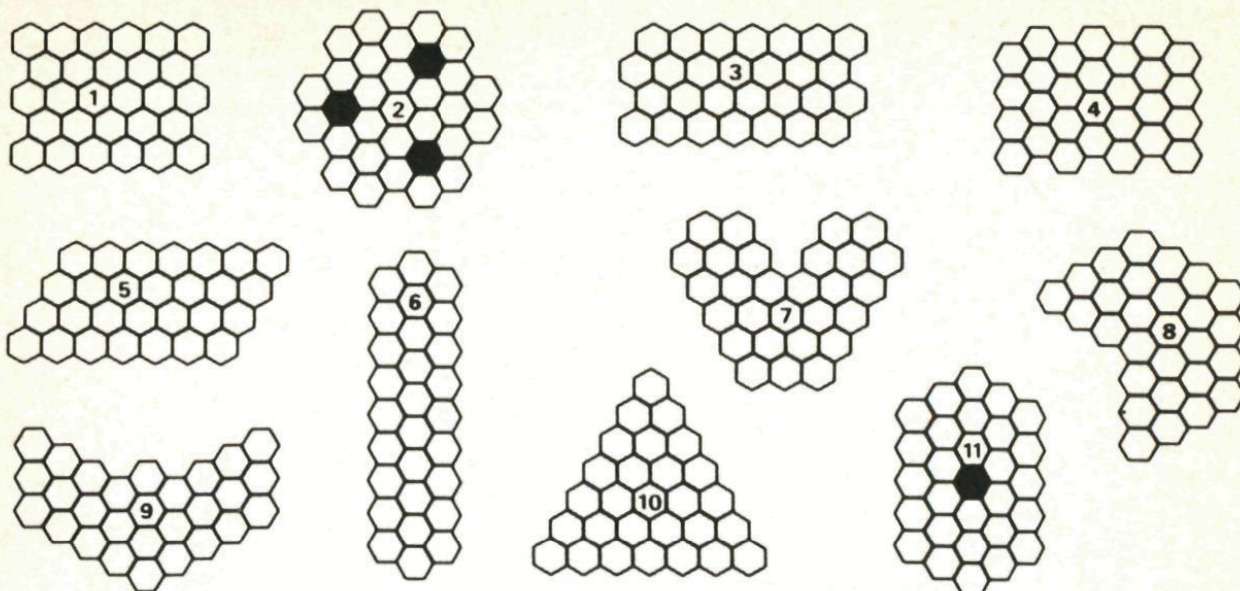


In 1986 bestond de Stichting Mathematisch Centrum 40 jaar. Ter gelegenheid daarvan werd een aardige puzzel uitgegeven. Deze puzzel bestaat uit zeven stukjes, zogenaamde *tetrahexen*. Ieder van deze zeven stukjes is samengesteld uit vier (tetra) even grote regelmatige zeshoeken (hexagons) (figuur 1). Onder de kop van dit stukje zijn vier uit 28 hexagons bestaande figuren afgebeeld. Ze kunnen op tenminste één manier met de zeven tetrahexen worden bedekt. Kopieer figuur 1, knip de tetrahexen uit, en probeer het maar eens. In figuur 2 zijn nog 11 andere figuren gegeven. Helaas kan één daarvan *niet* met de zeven tetrahexen worden bedekt. Kun je ontdekken welke? Let op, de zwarte zeshoeken blijven onbedekt!

Zijn er trouwens nog meer tetrahexen dan de zeven uit figuur 1? □



Figuur 1. De zeven tetrahexen.



De juiste tijd

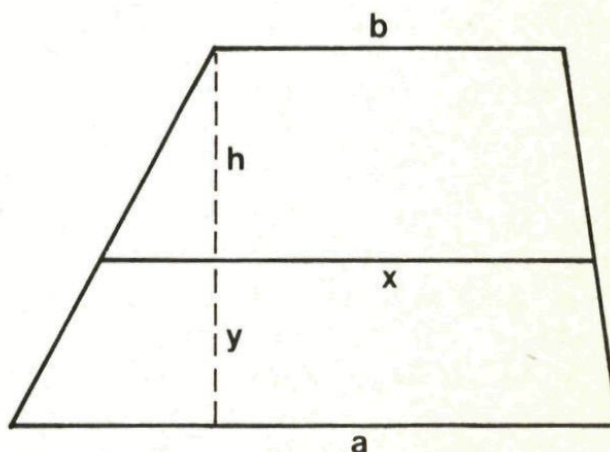
In Thailand is het 6 uur later dan in Nederland. Op Aruba is het juist 5 uur vroeger dan in Nederland. Iemand stapt om 15.00 uur in Thailand op het vliegtuig en reist naar Nederland. Daar bezoekt hij gedurende 12 uur zijn familie, en vliegt vervolgens naar Aruba. De eerste reis duurt 16 uur, de tweede reis 12 uur. Hoe laat is het op Aruba, als hij daar landt? □

Trapezium in tweeën: oplossing

De lengte van x kan worden bepaald met $x^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. Op het eerste gezicht lijkt dit een vraagstuk dat thuishoort in de reeks 'Bekijk het even'. Met kijken alleen kom je er echter niet. Er moet wel enig (reken)werk worden verzet.

Verdeel de hoogte van het trapezium in twee stukken h en y (figuur 1). Die zijn dan op hun beurt de hoogte van het bovenste en het onderste kleinere trapezium.

De oppervlakte van het trapezium is nu $\frac{1}{2}(a + b)(h + y)$. De oppervlakte van het bovenste kleinere trapezium is $\frac{1}{2}(b + x)h$, terwijl dat van het onderste kleinere trapezium $\frac{1}{2}(a + x)y$ is. Met deze drie uitdrukkingen voor de oppervlakten kunnen de volgende drie vergelijkingen worden opgesteld



Figuur 1

$$(b + x)h = (a + x)y \quad (1)$$

$$(b + x)h = \frac{1}{2}(a + b)(h + y) \quad (2)$$

$$(a + x)y = \frac{1}{2}(a + b)(h + y). \quad (3)$$

Vergelijking (1) volgt uit de gelijkheid van de oppervlakten van het bovenste en het onderste trapezium. Die oppervlakten zijn elk de helft van de oppervlakte van het grote trapezium, en dat levert (2) en (3). Bedenk dat dit stelsel van drie vergelijkingen in drie onbekenden x , h en y niet onafhankelijk is. Uit (2) en (3) is namelijk (1) af te leiden.

Uit (1) is nu een uitdrukking voor h te vinden

$$h = \frac{(a + x)y}{b + x}. \quad (4)$$

Uit (3) volgt

$$h + y = \frac{2(a + x)y}{a + b}. \quad (5)$$

Vul (4) in (5) in, deel beide kanten van het gelijkteken door y , en uitwerken levert het gegeven resultaat voor x^2 .

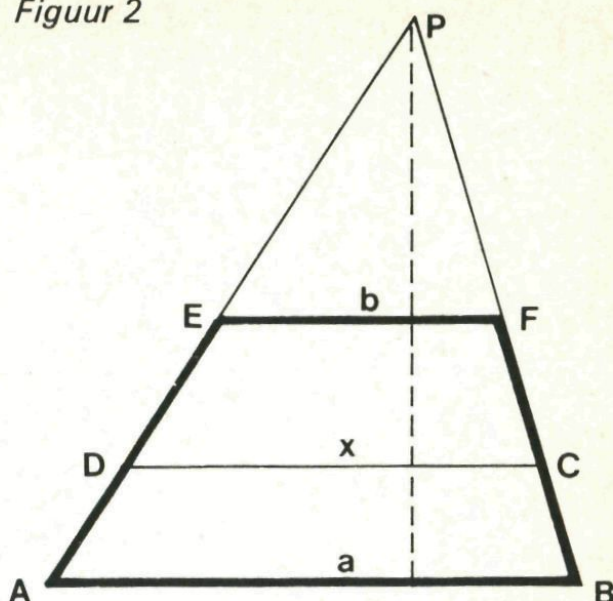
Stel dat a en b gegeven zijn. Dan is x te berekenen, maar h en y niet. Waarom niet?

Is dat ook meetkundig in te zien?

Een ander bewijs

Het hierboven gegeven bewijs is nogal uitvoerig. Hier volgt nog een korter en naar onze smaak fraaier bewijs. Het vergt iets meer inzicht dan het eerste. We geven er alleen de belangrijkste stappen van. De details kun je gemakkelijk zelf uitwerken. Trek de niet-evenwijdige zijden van het trapezium door tot ze elkaar snijden in een punt P (figuur 2). Dan zijn de driehoeken EFP , DCP en ABP gelijkvormig.

Figuur 2



Geef de oppervlakte van driehoek EFP aan met $F(b)$. Voor die oppervlakte geldt halve basis b maal hoogte. Die hoogte zal op een of andere manier van b afhangen. Daarom zal $F(b)$ te schrijven zijn als

$$F(b) = \lambda b^2 \quad (1)$$

met λ een of andere evenredigheidsconstante.

Wegens de gelijkvormigheid zal voor de oppervlakten $F(x)$ en $F(a)$ van de driehoeken DCP en ABP eveneens gelden

$$F(x) = \lambda x^2 \quad (2)$$

$$F(a) = \lambda a^2. \quad (3)$$

De oppervlakten van de trapezia $CDEF$ en $ABCD$ moeten gelijk zijn. Daarom geldt

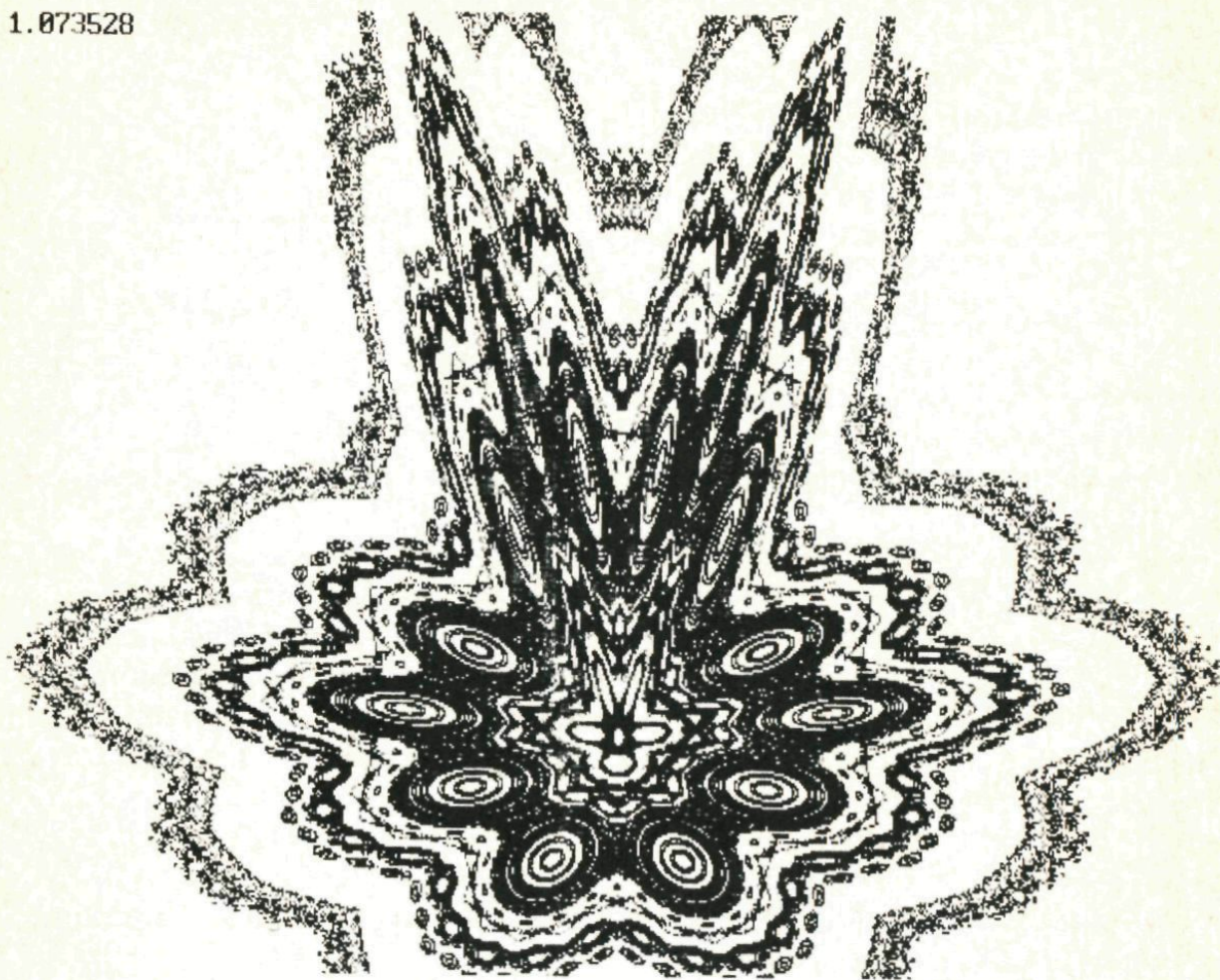
$$F(x) = \frac{1}{2}(F(b) + F(a)). \quad (4)$$

Invullen van (1), (2) en (3) in (4) levert na deling door λ het gewenste resultaat.

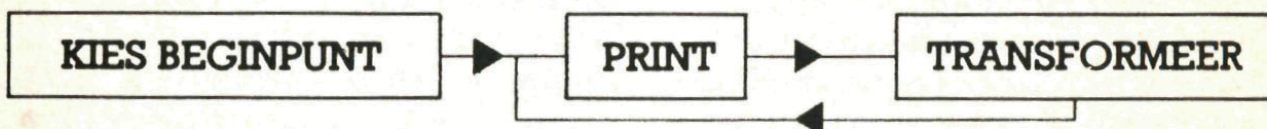
Misschien zijn er lezers die andere, nog kortere of mooiere bewijzen weten. Laat dat eens weten. $\square$

De haas van Devaney

1.073528



Kies in het vlak een *beginpunt* (x_0, y_0) . Pas er een bepaalde *transformatie* op toe, dat wil zeggen bereken met formules die we hieronder zullen geven, uit x_0 en y_0 de coördinaten (x_1, y_1) van een nieuw punt. Doe vervolgens hetzelfde met (x_1, y_1) ; dat leidt tot een punt (x_2, y_2) . Ga op dezelfde manier door, dus bereken, telkens met dezelfde formules, een nieuw punt uit de coördinaten van het vorige. Al het rekenwerk laat je door de computer uitvoeren, en je print elk berekend punt op het scherm. In schema:



Wat krijgt je dan te zien? Daarover gaat dit artikel.

Dynamisch systeem

Men spreekt in dit soort situaties wel van een *dynamisch systeem*, of ook wel van een *iteratief pro-*

ces (iteratie betekent herhaling; het voorschrift wordt steeds herhaald).

De serie punten die uit het begin-

punt (x_0, y_0) ontstaat, heet de baan van het punt (x_0, y_0) . Verschillende beginpunten zullen meestal verschillende banen geven.

Hier zijn de formules die wij voor onze transformatie zullen gebruiken:

$$x_{n+1} = 1 + |x_n| - y_n$$

$$y_{n+1} = x_n$$

(x_n, y_n) is het oude, (x_{n+1}, y_{n+1}) het nieuwe punt. Voor n nemen we achtereenvolgens 0, 1, 2, 3,

Begin je bij voorbeeld met de oorsprong (0,0) als beginpunt, dan krijgt je de rij punten (0,0), (1,0), (2,1), (2,2), (1,2), (0,1), (0,0), (1,0),

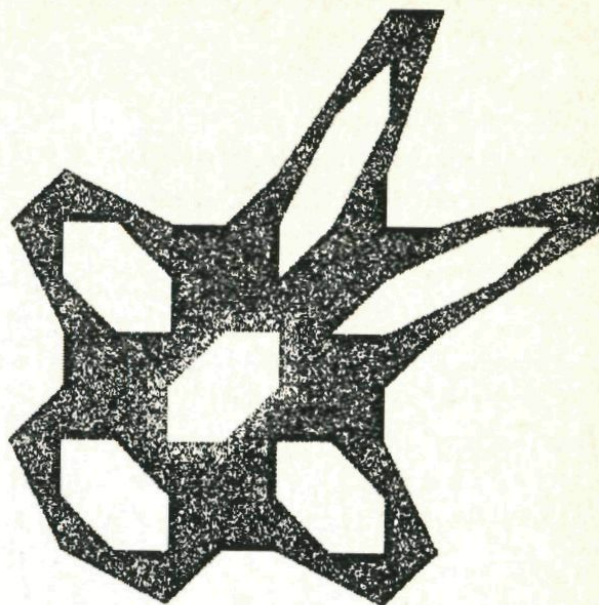
en de rij blijft zich herhalen met periode zes. Er zijn zes verschillende punten, die telkens terugkeren.

Begin je met het punt (1,1), dan gebeurt er helemaal niets, want dat punt blijft gewoon op z'n plaats.

Wirwar

Weinig opzienbarend, tot nu toe. Maar schuif nu eens het beginpunt vanuit de oorsprong ietsje naar links. Kies $(-0.015, 0)$ als startpunt. Je moet het zien om het te geloven. Als je de computer nu netjes de rij van getransformeerde punten laat printen, ontstaat er een geweldige wirwar van stippeltjes op het scherm. In het begin lijkt het tamelijk chaotisch, maar na een tijdje begint zich een patroon af te tekenen. Een zeer vreemd patroon met

Figuur 1



scherp begrensde lijnen en hoeken van 90° en 45° (figuur 1). We hebben die figuur de *paashaas* genoemd, want hij lijkt een beetje op een schuine hazekop met lange oren, dikke zeshoekige wangen, een zeshoekige neus, en een zeshoekige bek.

De neus, de witte zeshoek in het middel, heeft precies de zes punten van de baan van $(0,0)$ die we hierboven hebben berekend als hoekpunten. De oorsprong bevindt zich in het hoekpunt links-onder in de neus. Maar de nu getekende baan van $(-0.015, 0)$ is veel en veel ingewikkelder. Als je hem op het scherm laat tekenen, zie je de punten voortdurend heen en weer springen, maar er zit toch een zekere orde in die chaos. Blijkbaar slaagt de baan van het gekozen startpunt $(-0.015, 0)$ er in om die zes zeshoeken zorgvuldig te vermijden, maar hij loopt af en toe wel heel erg dicht langs de randen. De begrenzing van de hazekop aan de buitenkant door rechte

lijnstukken die samen een grillige 24-hoek vormen, is ook al uiterst verrassend.

Absoluutstrepen

De Amerikaanse wiskundige Robert Devaney was de eerste die deze merkwaardige eigenschappen ontdekte. Hij noemde figuur 1 de *gingerbreadman*, het ontbijt-koekmannetje, maar wij vonden hem meer op de kop van een haas lijken. Een haas die uit de hoge hoed van de simpele transformatieformules wordt getoverd.

Het geheim ervan zit verborgen in de absolute-waarde strepen in de formule voor x_{n+1} . Laat je die weg, dan is er niets leuks aan: elk punt buiten (1,1) heeft dan een baan met periode 6. Maar die absoluutstrepen zorgen voor opwindende avonturen bij het onderzoek van de banen van verschillende startpunten. Dat leidt al snel tot ingewikkelde wiskundige vraagstukken.

Eilanden

Maar zelfs als die je niet interes-

Het programma voor de paashaas

De kern van het programma zit in de regels 80-100, waar de transformatieformules vertaald zijn in computertaal. Omdat je bij het berekenen van de 'nieuwe' Y-waarde de 'oude' X-waarde nodig hebt, moet je die even apart bewaren. Dat doen we in regel 80 in de hulpvariabele U.

De rest spreekt haast vanzelf. In regel 30 wordt het 'window' gedefinieerd, het stuk van het vlak dat op het scherm te zien is. Dat doe je in GWBASIC door de coördinaten op te geven van de punten linksonder en rechtsboven.

In de regels 40 en 50 worden de coördinaten van het startpunt ingevoerd. Wil je een ander startpunt, dan moet je daarvoor andere waarden kiezen.

De FOR-NEXT lussen in de regels 60-70 en 120-130 zorgen ervoor dat er in totaal 60000 punten worden geprint. We hebben dat in een schakeling van 60×1000 gedaan omdat we dan geen last hebben van de maximale

INTEGER-waarde van onze computer (ruim 32-duizend).

In regel 110 wordt het punt (X,Y) geprint, en regel 140 zorgt voor een piepje als het hele karwei geklaard is. Regel 150 laat de 'prompt' pas weer verschijnen als je een toets indrukt (dat is handig als je eerst een afdruk van je scherm wilt maken). □

```
10 SCREEN 3
20 CLS
30 WINDOW (-5,-3.5)-(11,8.5)
40 X = -.015
50 Y = 0
60 FOR J = 1 TO 60
70 FOR I = 1 TO 1000
80 U = X
90 X = 1-Y + ABS(X)
100 Y = U
110 PSET (X,Y)
120 NEXT I
130 NEXT J
140 FOR N = 1 TO 5 : BEEP : NEXT N
150 A$ = INPUT$(1)
160 END
```

Figuur 2

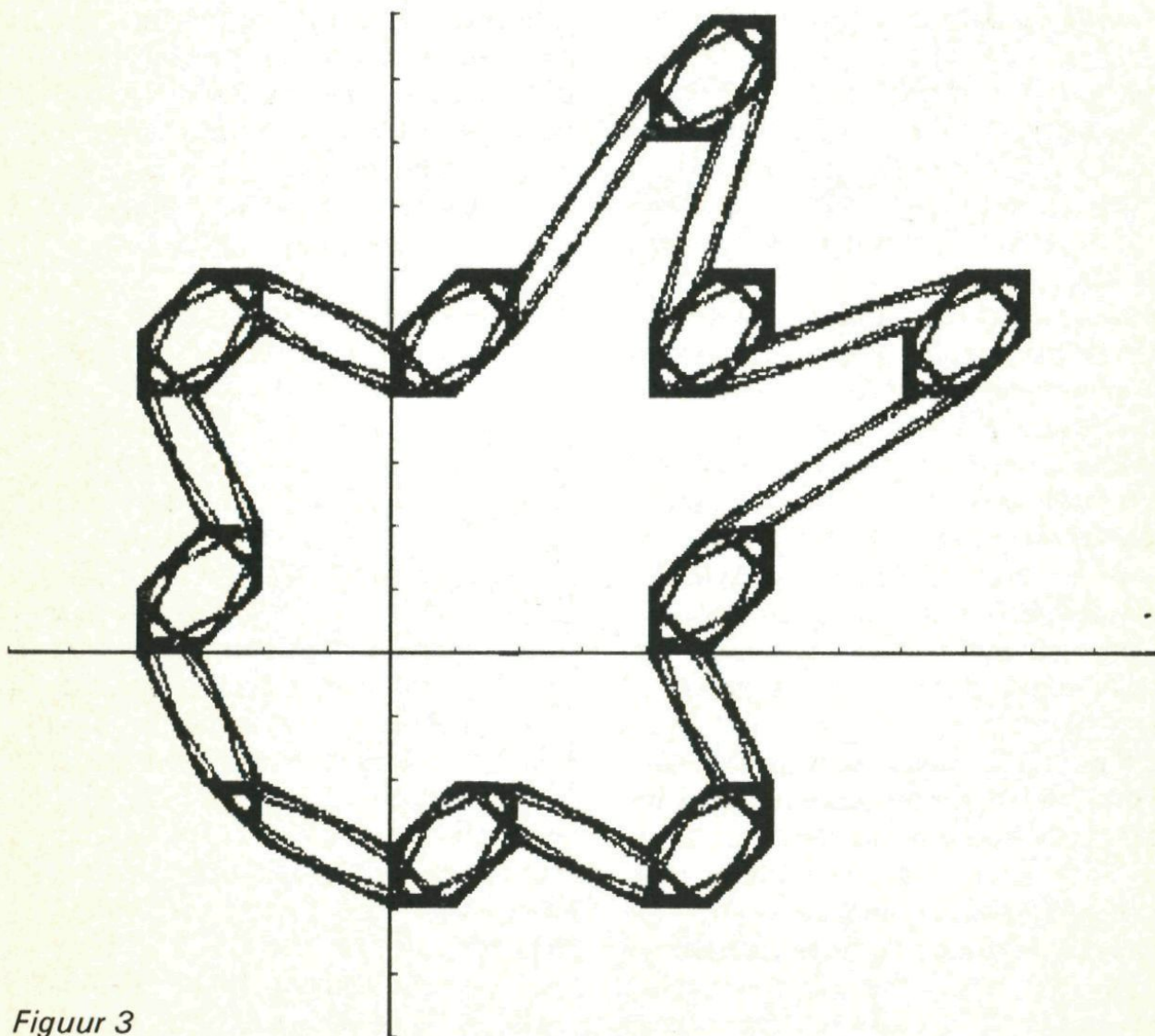
seren, is het toch leuk om zelf te experimenteren. Dat kan met het GWBASIC-programma dat we in figuur 2 hebben afgedrukt. Je kunt andere startpunten kiezen, en kijken wat er gebeurt. Begin je met een startpunt in de witte zeshoek die de neus van de paashaas vormt, dan krijg je steeds periode 6. Dat is nauwelijks interessant.

Begin je in een van de vijf andere witte zeshoeken, dan zie je in *alle vijf* de zeshoeken zes punten verschijnen. De periode wordt dan $5 \times 6 = 30$. De enige uitzondering treedt op als je precies in het centrum van zo'n zeshoek begint. Dan bestaat de baan uit de

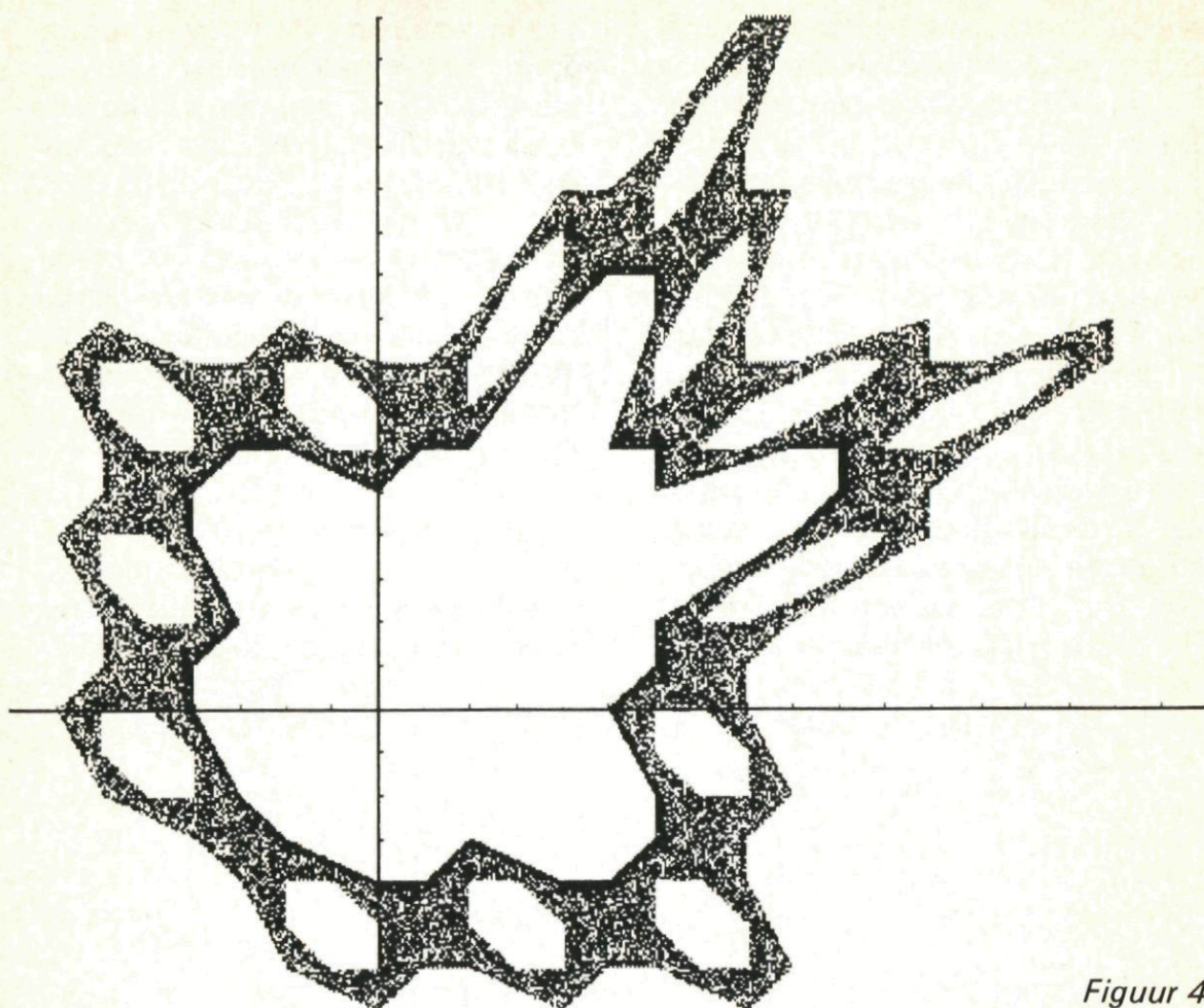
vijf centra, en de periode is dus 5. De vijf witte zeshoeken (oren, wangen, bek) vormen als het ware vijf onderling verbonden 'stabiliteitseilanden', gebieden waar het gedrag van de transformatie betrekkelijk eenvoudig is. Maar het 'grijze gebied' van de paashaas is veel interessanter. Bijna alle startpunten daarin geven een baan die 'overal' in dat gebied lijkt door te dringen.

Toch periodiek

Je kunt daar nog wel iets meer over zeggen. Ons startpunt telde drie cijfers achter de komma in de coördinaten. Uit de vorm van de formules blijkt dat elk punt



Figuur 3



Figuur 4

van de baan dan ook hoogstens drie cijfers achter de komma telt. De baan blijft dus beperkt tot een 'fijnmazig' rooster. Je kunt bewijzen, maar dat is lang niet eenvoudig, dat de baan van een startpunt in het 'hazegebied' daar nooit uit kan ontsnappen. Dat betekent dat je op een gegeven moment weer een punt moet tegenkomen dat je al eens gehad hebt. Dan herhaalt de geschiedenis zich. De baan wordt periodiek, maar de periode is wel gigantisch groot.

Ringen

Devaney heeft nog veel meer bewezen. Hij heeft aangetoond dat het hele vlak door een oneindige

rij van elkaar omvattende grillig gevormde veelhoeken verdeeld wordt in een serie ringgebieden met de eigenschap dat de baan van een startpunt binnen zo'n ring daar niet uit kan ontsnappen.

Elke ring bevat verder 'stabiliteitseilanden', zeshoekig gebiedjes waarbinnen het gedrag van de transformatie 'tam' is: periodiek met een betrekkelijk kleine periode. Buiten die eilanden zijn er echter banen die in 'alle hoeken en gaten' van de rest van de ring doordringen.

We illustreren dit met een paar figuren. Figuur 3 geeft de baan van het startpunt $(-3.015, 0)$, dat ietsje buiten de paashaas van fi-

guur 1 ligt. Je ziet nu de volgende ring, met daarin een groot aantal stabiliteitseilanden. We hebben deze keer ook de coördinaatsassen getekend. Figuur 4 laat de volgende ring zien. Startpunt is daarbij $(-4.015, 0)$.

Op een heel andere schaal is figuur 5 getekend. De startwaarde is nu het punt $(-64.1, 0)$. De ring is relatief smal, maar daarbinnen kun je toch nog steeds de gaten van de stabiliteitseilanden zien. Op de assen hebben we alleen streepjes bij de tientallen gezet. Wat je in figuur 5 ziet, zet zich voort naarmate het startpunt ver-

der van de oorsprong vandaan gaat. De ringen gaan steeds meer lijken op 'dik getrokken' negenhoeken met hoeken van 90° , 135° en 45° .

Een extra factor

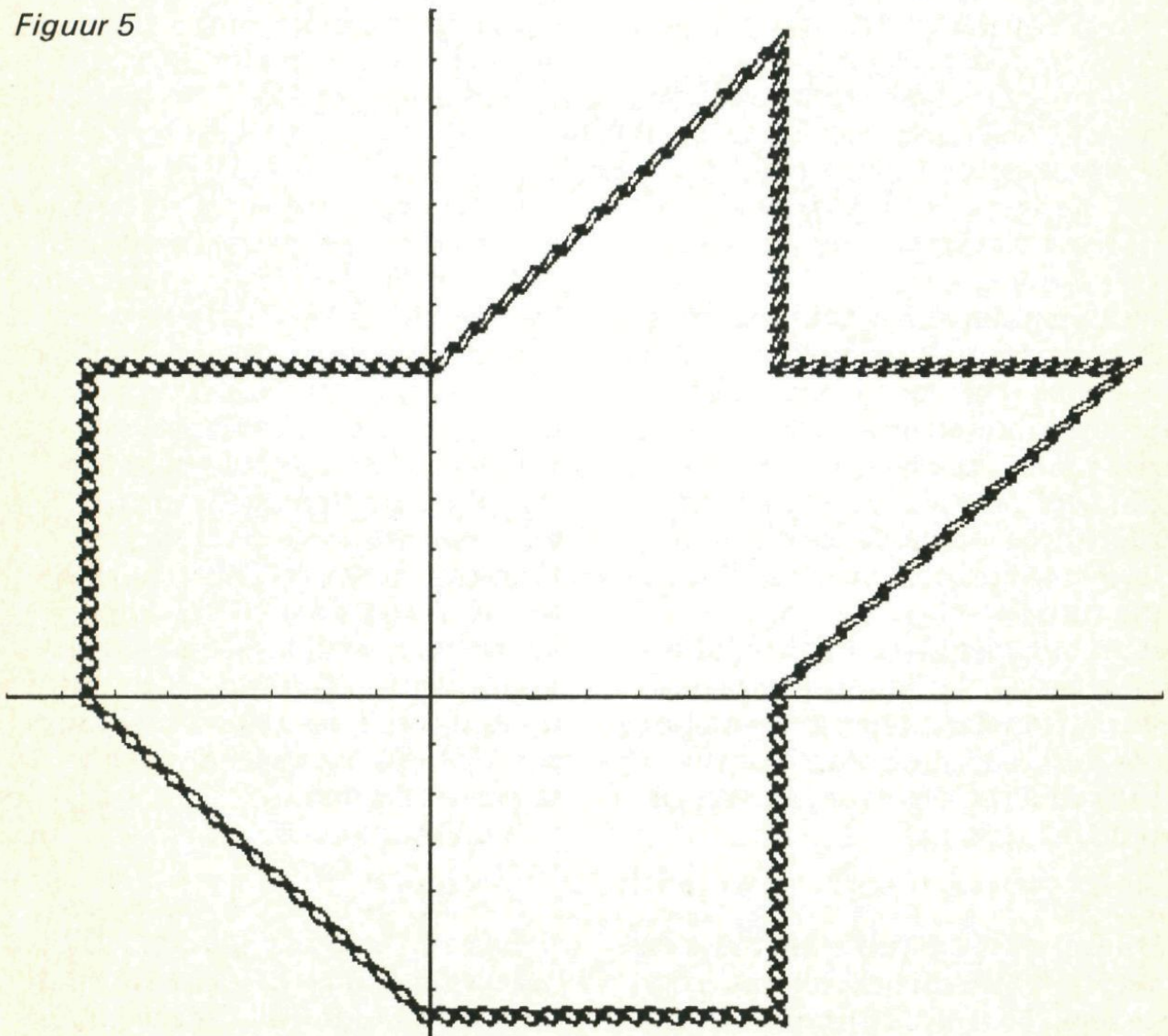
Met een computer kun je gemakkelijk varianten proberen. Hele mooie resultaten krijg je als je de formules als volgt wijzigt:

$$x_{n+1} = 1 + a - x_n \mid -y_n$$

$$y_{n+1} = x_n$$

Je zet dus een extra factor a voor de absolute strepen. Die a kun je

Figuur 5



zelf kiezen. Elke nieuwe a geeft weer nieuwe verrassingen. Je moet er wel voor zorgen dat a niet groter dan 2 wordt, anders gebeuren er ongelukken. In figuur 6 staat een GW-BASIC-programma waarin zo'n a wordt gekozen met behulp van de *randomgenerator* van de computer. In het kader leggen we de details uit.

30 banen

Nadat a gekozen is, kun je een beginpunt kiezen, en kijken wat de baan wordt. In het gegeven programma gebeurt dat kiezen van het beginpunt ook weer *at random*, en daarna worden de eerste 5000 punten van de baan berekend en geprint (voor zover ze binnen het *window* vallen). Het programma tekent op die manier de banen van 30 verschillende startpunten. Met een kleine ingreep hebben we er ook nog voor gezorgd dat alle plaatjes netjes recht staan. Natuurlijk kost het printen van al die banen behoorlijk wat tijd, maar de resultaten zijn vaak verbluffend mooi. We laten er in figuur 7 (bladzijden 24, 25, 26 en 27) een paar zien. Telkens is de bijbehorende waarde van a linksboven afgedrukt.

Voor $a = 1$ (die we apart hebben ingevoerd) krijg je de bekende 'haze-transformatie' terug waar we mee begonnen zijn. Ook daarvan hebben we de banen bij

30 *at random* gekozen startpunten getekend.

De plaatjes zijn zo al mooi om naar te kijken, maar het is absoluut fascinerend als je ze voor je ogen op het scherm ziet verschijnen.

Extra mooi wordt het als je de verschillende banen ook nog verschillend kunt kleuren. Met een kleurenscherm en een paar kleine aanpassingen in het programma kun je daar voor zorgen.

Wiskundig onderzoek

Wiskundig geïnteresseerde lezers zullen, al die plaatjes bekijkende, zich misschien afvragen of je daar in het algemeen ook allerlei resultaten over bewijzen kunt. Zijn er weer van die ringen waaruit de banen niet kunnen ontsnappen? Zijn er 'stabiliteitseilanden'?

De wiskunde die nodig is om dit soort vragen te beantwoorden, bevindt zich op dit moment in het centrum van de wetenschappelijke belangstelling. Er heeft veel onderzoek plaats op het vakgebied van de *dynamische systemen*. Fractals en Chaos zijn de trefwoorden. In Pythagoras kunnen we onze lezers alleen maar wat laten zien van de 'experimentele' kant van de zaak. De echte wiskunde die er achter zit, is veel te moeilijk. Maar de wiskundigen zouden er niet zo enthousiast aan werken als de experimenten op zichzelf al niet zo fascinerend waren! □

Een programma voor uitbreidingen met een factor a

De kern zit nu in de regels 110-130, en in 120 zie je de extra factor a . In regel 40 wordt de *randomgenera-*

tor van de computer opgestart. Die geeft telkens een 'willekeurig' getal tussen 0 en 1 als je RND aanroept. In

regel 50 wordt RND met twee vermenigvuldigt, en a krijgt dan dus een 'willekeurige' waarde tussen 0 en 2. In regel 80-90 wordt het startpunt ook weer gekozen met RND. De X-coördinaat ligt tussen -30 en 70, de Y-coördinaat tussen 0 en 50. Er worden van elke baan 5000 punten geprint. Er zit nog een aardigheidje in regel 140 verborgen: doordat niet het punt (X,Y) maar het punt (X-Y,X+Y) wordt geprint, wordt het plaatje als het ware rechtgezet. Het komt er op neer dat het vlak gedraaid wordt over 45°, terwijl de schaal iets wordt verkleind. Dat zorgt ervoor dat de schuine symmetrie-as van de oorspronkelijke fi-

guren nu vertikaal komt te staan. Degenen die kleur willen aanbren- gen, kunnen tussen de regels 70 en 80 een kleurcommando inlassen. Dan wordt met elk nieuw startpunt een nieuwe kleur gekozen. Je moet dan ook het SCREEN commando in regel 10 aanpassen.

Ten slotte nog een tip: ziet het resultaat er voor een bepaalde a niet zo mooi uit, onderbreek het programma dan (met CTRL-BREAK) en begin opnieuw. De randomgenerator zorgt wel weer voor een andere a die het hopelijk beter doet. Start ook opnieuw als je *overflow* krijgt. □

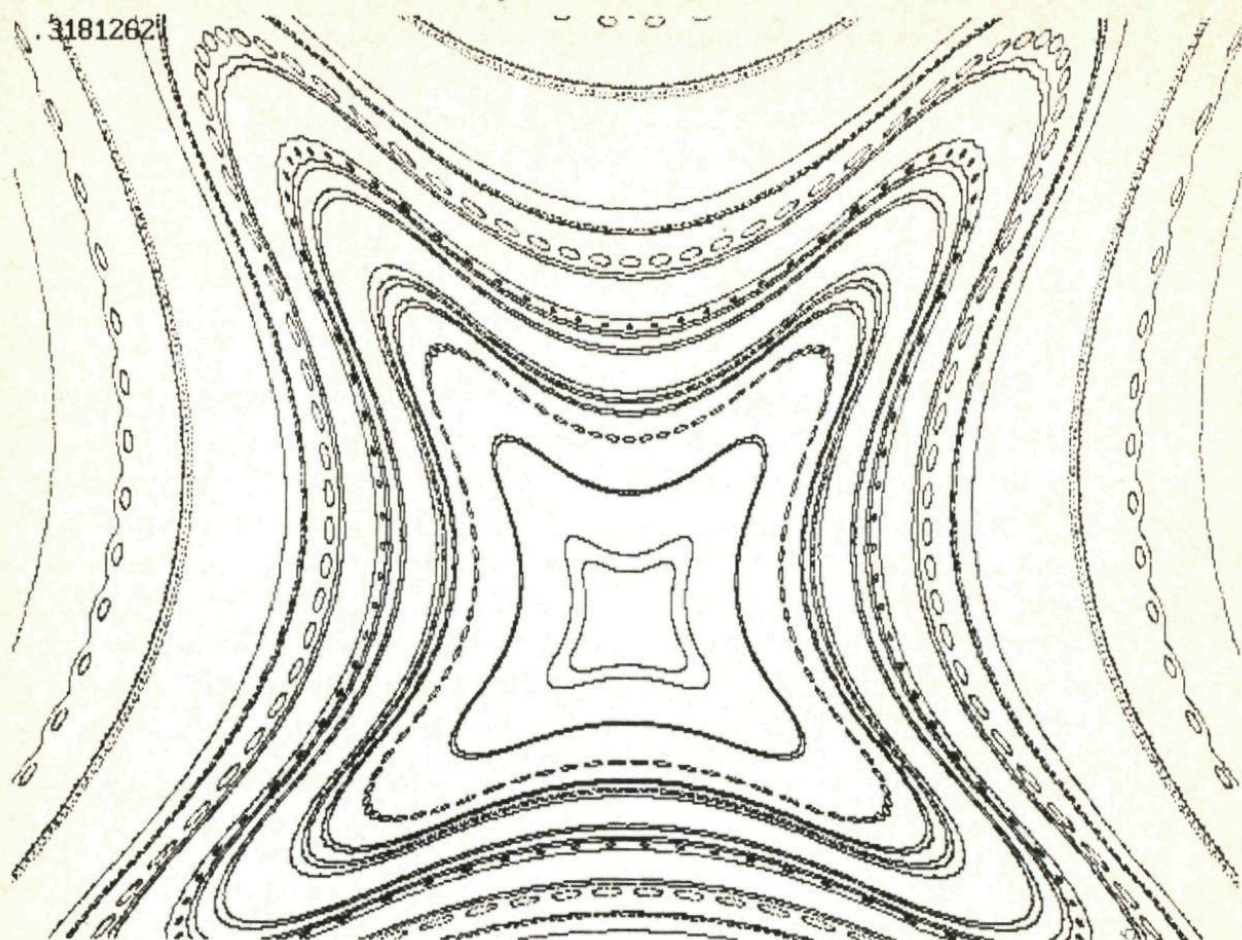
```

10 SCREEN 3
20 CLS
30 WINDOW (-100,-50)-(100,100)
40 RANDOMIZE TIMER
50 A = 2 * RND
60 PRINT A
70 FOR J = 1 TO 30
80 X = -30 + RND*100
90 Y = RND*50
100 FOR I = 1 TO 5000
110 U = X
120 X = 1-Y + ABS(X)*A
130 Y = U
140 PSET(X-Y,X+Y)
150 NEXT I
160 NEXT J
170 FOR N = 1 TO 5 : BEEP : NEXT N
180 A$ = INPUT$(1)
190 END

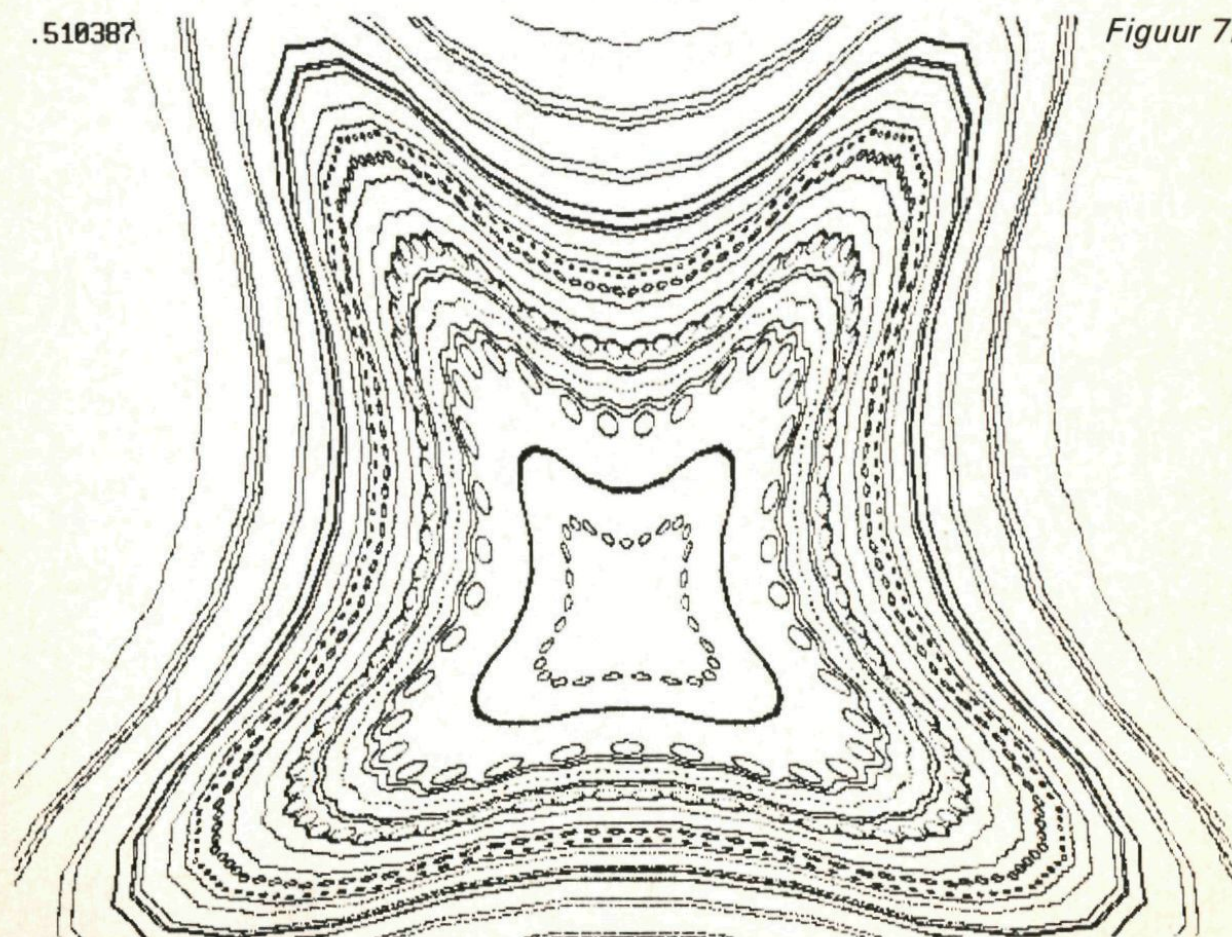
```

Figuur 6

Figuur 7A

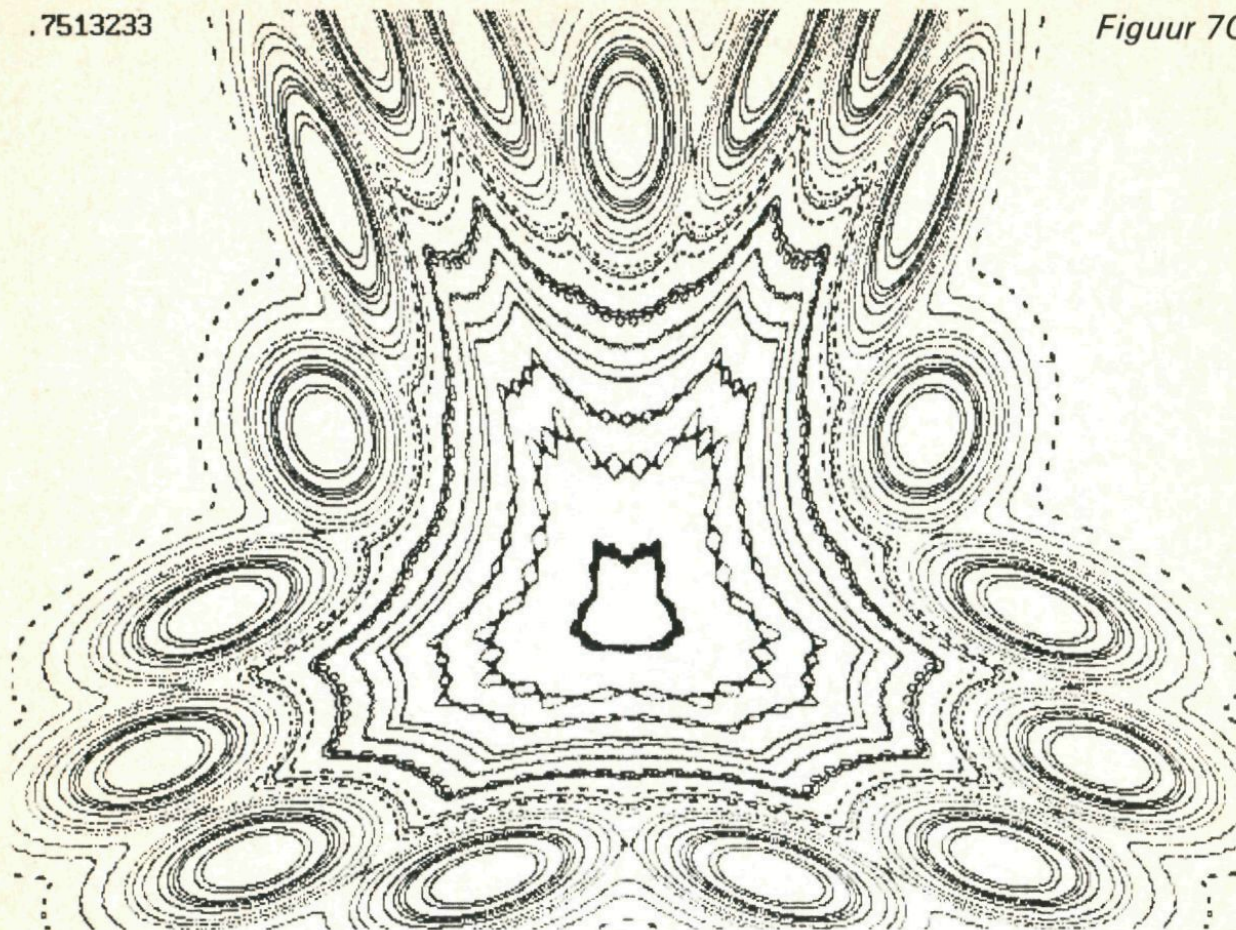


Figuur 7B



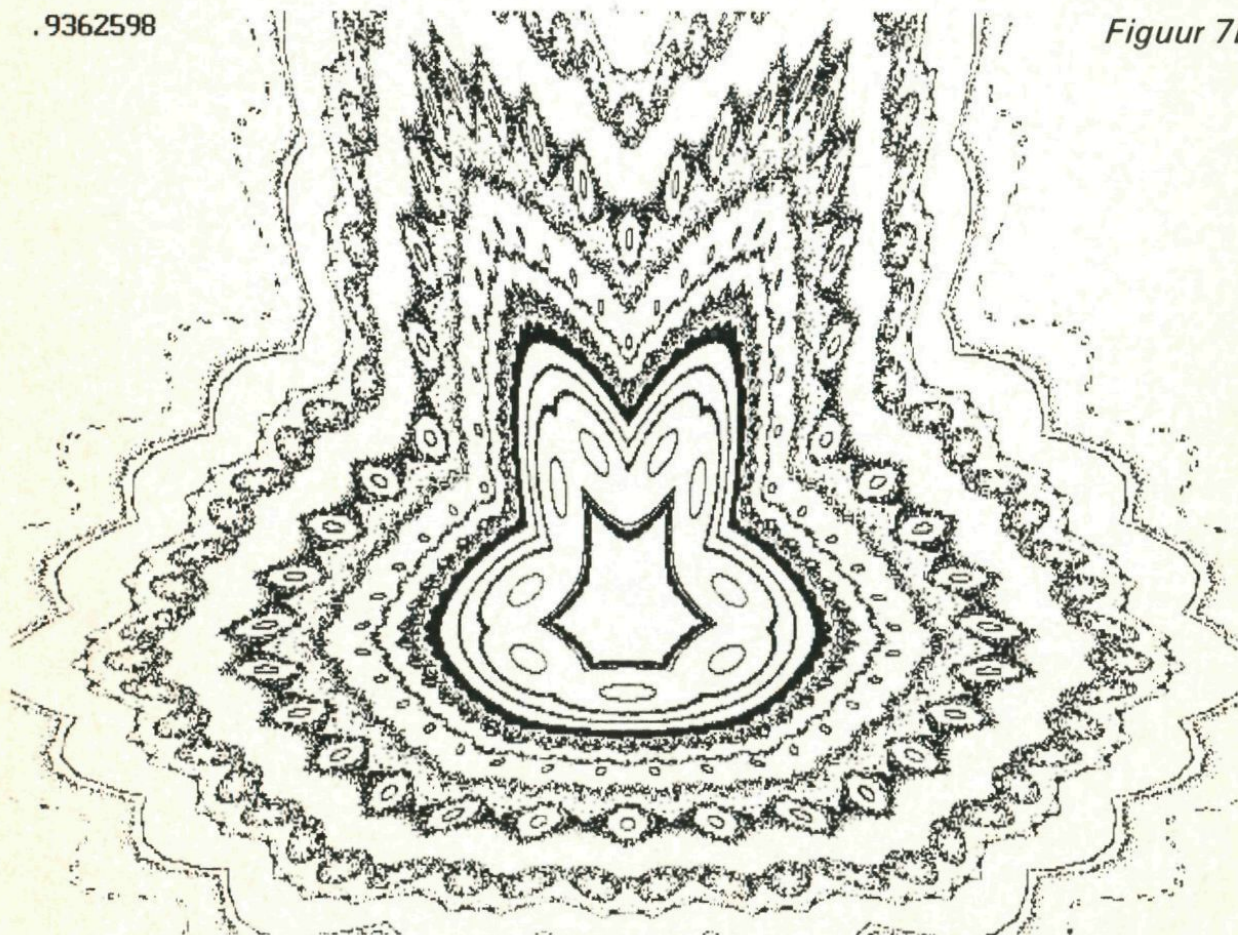
.7513233

Figuur 7C



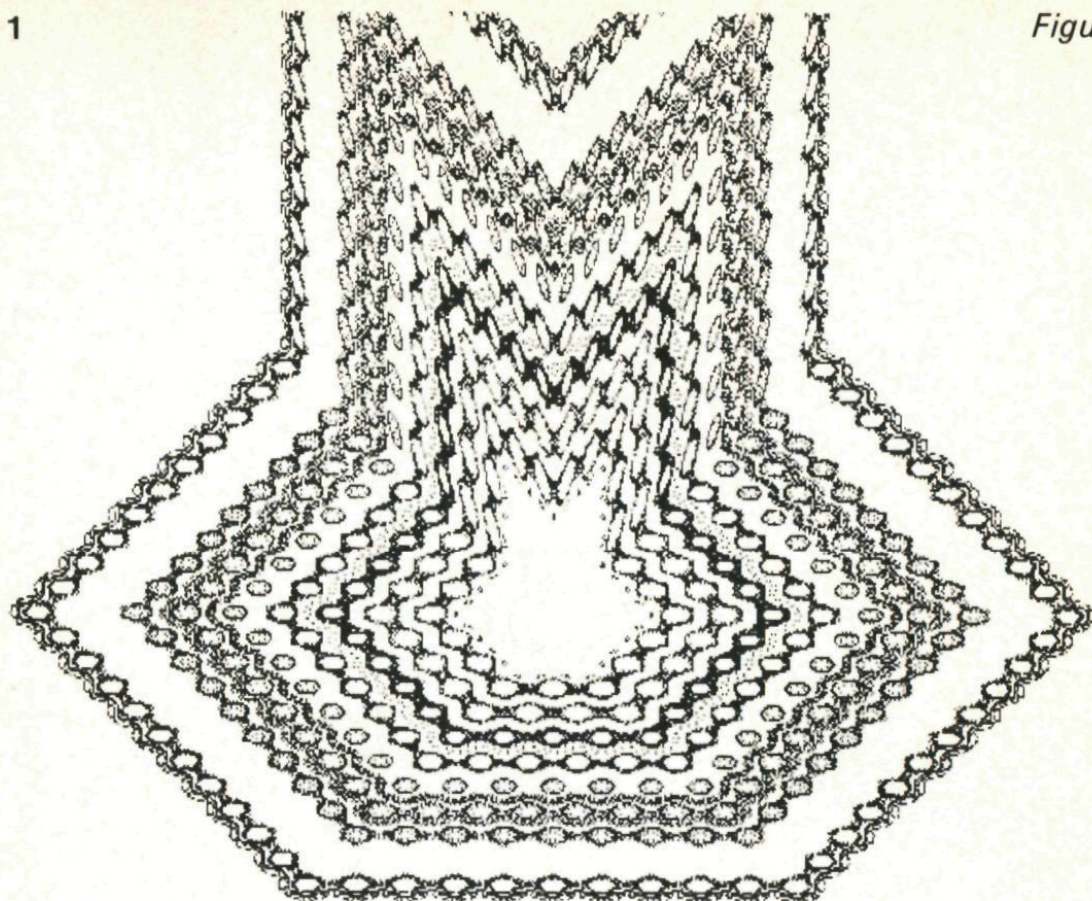
.9362598

Figuur 7D



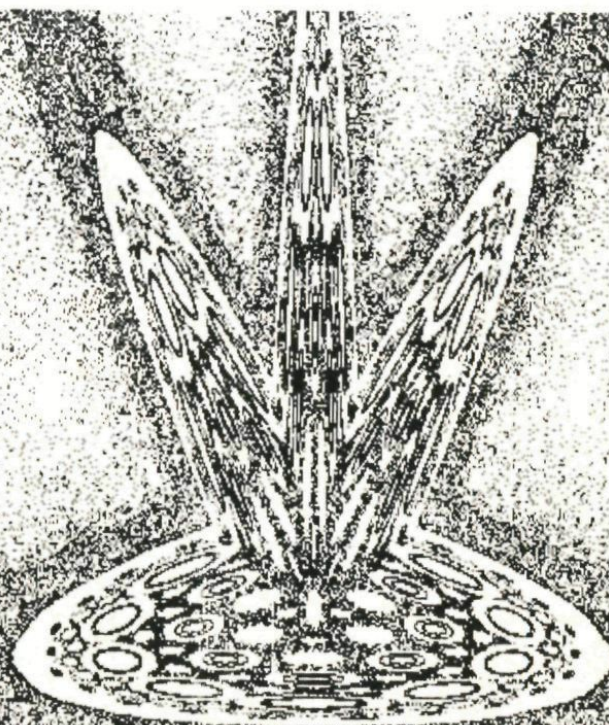
1

Figuur 7E



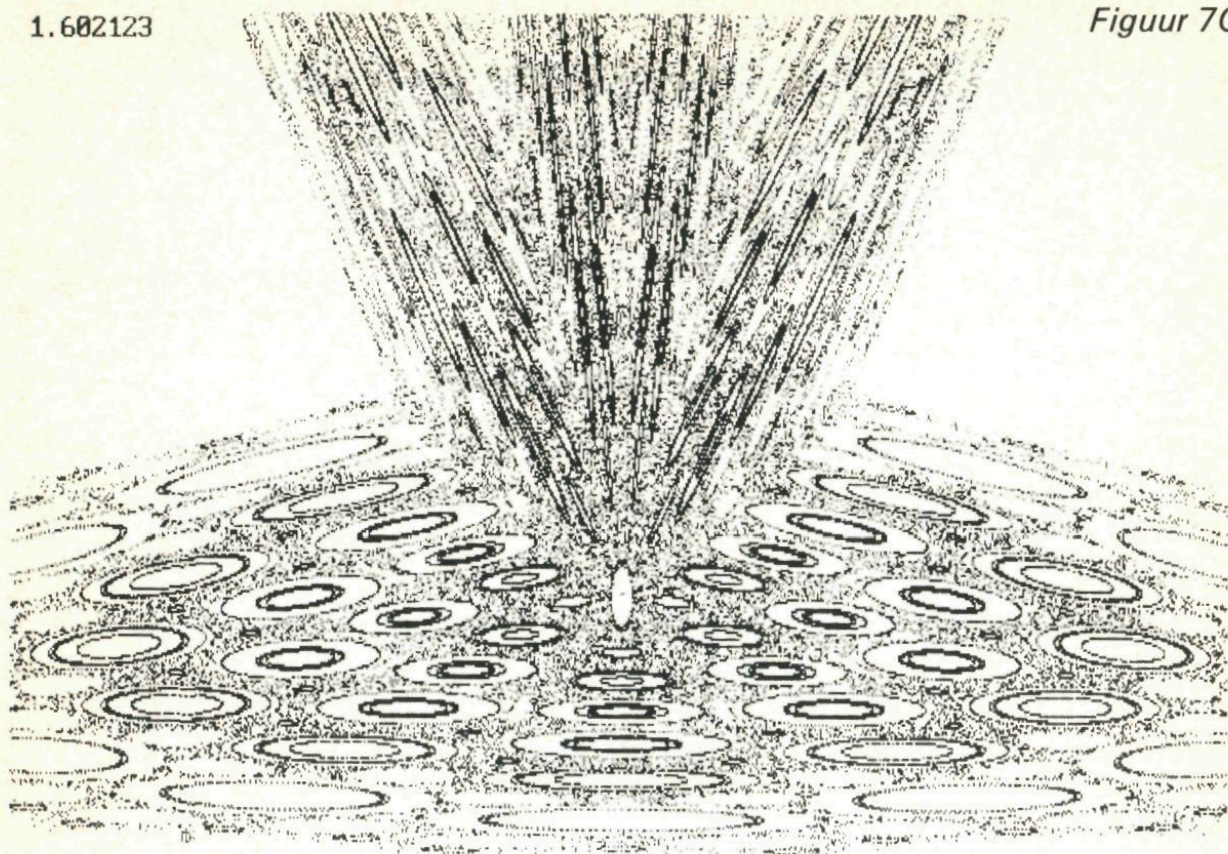
1.362621

Figuur 7F



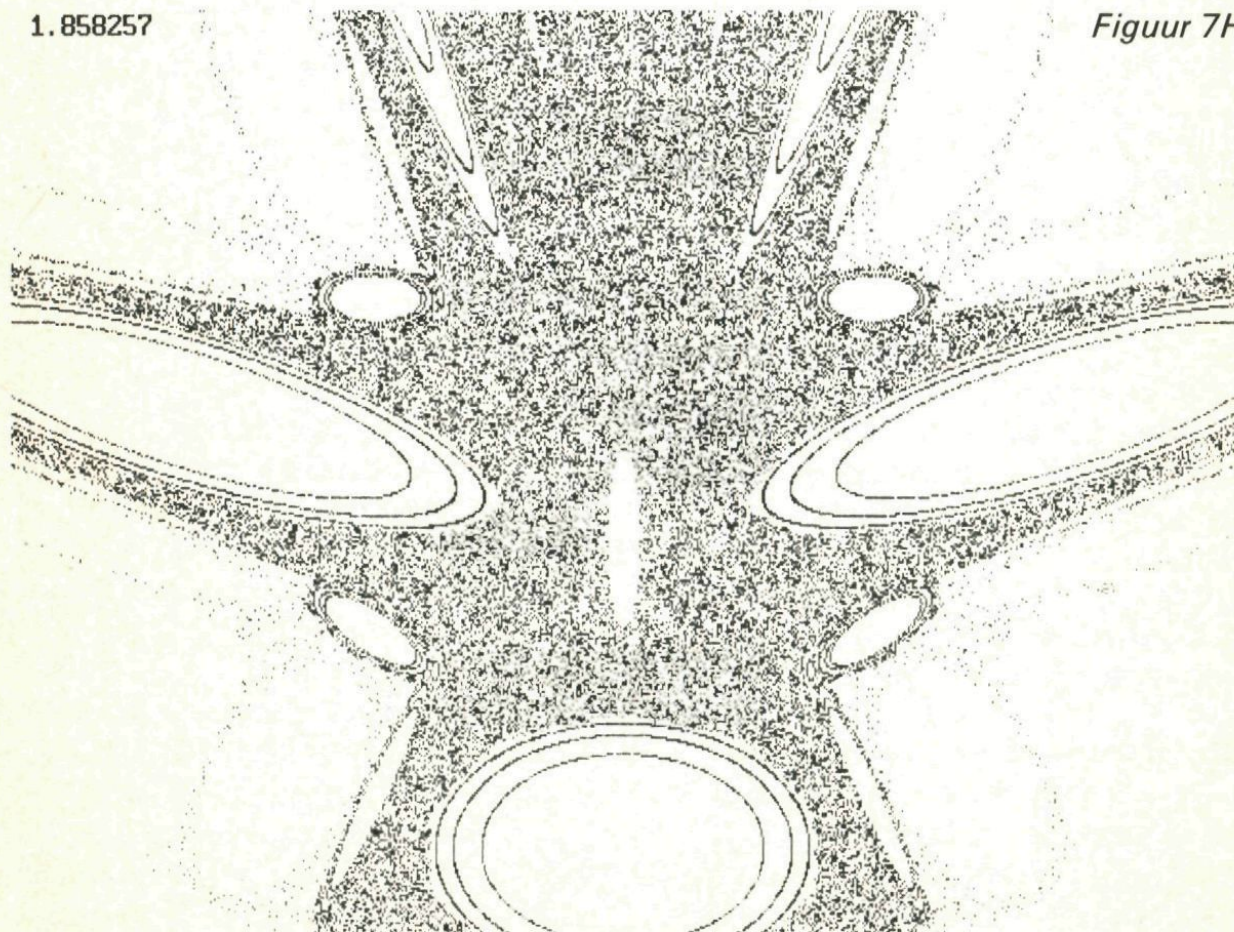
1.602123

Figuur 7G



1.858257

Figuur 7H



Nederlandse Wiskunde Olympiade



De Nederlandse Wiskunde Olympiade is een wedstrijd voor leerlingen van het havo en het vwo. Uit de winnaars wordt een team van zes scholieren samengesteld dat Nederland vertegenwoordigt bij de Internationale Wiskunde Olympiade.

In 1989, in West-Duitsland, behaalden we daarbij een zilveren en een bronzen medaille. Op de ranglijst van 51 deelnemende landen eindigden we op de 29e plaats. We hopen op minstens evenveel succes in 1990 in China en in 1991 in Zweden.

Wie kan meedoen?

De Nederlandse Wiskunde Olympiade is bestemd voor alle leerlingen van havo en vwo met belangstelling voor wiskunde. De meeste deelnemers aan de Eerste Ronde komen uit de klassen 4 en 5.

Leerlingen van 5 havo kunnen vanaf dit jaar deelnemen, maar leerlingen van 6 vwo kunnen echter alleen buiten mededingen aan de Eerste Ronde deelnemen. Zit je in een lagere klas dan de vierde, dan zul je de opgaven waarschijnlijk nog te moeilijk vinden. Maar ben je enthousiast en heb je een wiskundeknobbel, dan mag je het ook al eerder proberen. Deelname van lagere klassers is dus toegestaan!

Hoe kun je meedoen?

Eerste Ronde. Als je graag wilt meedoen, moet je dat tegen je wiskundeleraar zeggen. De eerste ronde vindt vrijdagmiddag 16

maart 1990 op school plaats. Je krijgt drie uur de tijd om de antwoorden te vinden bij een stuk of twaalf opgaven. Sommige daarvan zijn gemakkelijk, andere lastig tot zeer lastig. Allemaal laten ze iets zien van ongebruikelijke, leuke, niet-erg-schoolse wiskunde.

Alle deelnemers uit het hele land krijgen dezelfde opgaven. Je leraar corrigeert het werk aan de hand van een correctieformulier en stuurt de uitslag op. De laatste jaren doen er telkens ruim tweeduizend scholieren mee, maar we hebben het idee dat er nog veel meer zijn die plezier aan de Olympiade zouden kunnen beleven. Probeer het eens!

Tweede Ronde. De beste honderd deelnemers van het hele land krijgen een uitnodiging voor de Tweede Ronde, die gehouden wordt op vrijdag 7 september 1990 in de Technische Universi-

teit Eindhoven. De Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde kan in bijzondere gevallen ook anderen uitnodigen deel te nemen aan de Tweede Ronde. Deelnemers mogen echter niet ouder zijn dan 19 jaar en ze mogen niet studeren aan een universiteit. De Tweede Ronde is natuurlijk een stuk moeilijker. Hij duurt eveneens drie uur. Enige weken later zal de prijsuitreiking plaatsvinden. Er zijn prijzen voor de beste tien deelnemers.

Naar de Internationale

De vraagstukken bij de Internationale Wiskunde Olympiade, die elk jaar in juli in een ander land wordt georganiseerd, zijn zo moeilijk, dat zelfs beroepswiskundigen er een zware kluit aan hebben. Toch lukt het ons team elk jaar weer om prijzen in de wacht te slepen. Dat kan alleen maar dankzij een goede voorbereiding, waar we dan ook direct na de Tweede Ronde aan beginnen. De prijswinnaars krijgen dan lesbrieven toegestuurd. Als je er plezier in hebt, kun je daar een paar maanden onder deskundige leiding aan werken. Mede aan de hand van de reacties op de lesbrieven wordt in april 1991 de Nederlandse ploeg voor Zweden gekozen. Jij kunt één van de gelukkigen zijn!

Scholenprijs

Bij de Eerste Ronde worden de punten van de vijf beste leerlingen per school opgeteld en de

school die zo de hoogste score bereikt, krijgt een door Shell beschikbaar gestelde wisselprijs. In 1989 is die prijs gewonnen door de *Scholengemeenschap Philips van Horne* uit Weert.

Meisjes

Om deelname van meisjes te bevorderen heeft de staatssecretaris van onderwijs en wetenschappen, mevr. drs. N.J. Ginjaar-Maas, een speciale prijs ingesteld voor de school waarvan de som van de scores van de beste drie deelnemende meisjes bij de Eerste Ronde de hoogste is van alle scholen. In 1989 is die prijs gewonnen door twee scholen: de *Scholengemeenschap Stella Maris* uit Meerssen en de *Scholengemeenschap Philips van Horne* uit Weert. Maar in de toekomst zal zo'n 'gelijk spel' waarschijnlijk niet meer voorkomen, want voor de scholenprijzen geldt vanaf dit jaar dat bij gelijk eindigende scholen de score van de beste deelnemer uit het team de doorslag geeft. Het spreekt overigens natuurlijk vanzelf dat de leerlingen die gezamenlijk een scholenprijs veroveren ook individueel een prijsje krijgen.

Meer weten?

Nadere inlichtingen over de Olympiade kun je krijgen bij dhr. H.N. Schuring, secretaris van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, tel. 085-521346, adres: CITO, Postbus 1034, 6801 MG Arnhem. ☐

De juiste tijd: oplossing

$15.00 + 16 \text{ uur} - 6 \text{ uur} + 12 \text{ uur} - 5 \text{ uur} = 44 \text{ uur}$. Dus op Aruba is het 20.00 uur als hij daar landt. ☐

Pythagoras Olympiade



Nieuwe opgaven

Oplossingen vóór 15 maart insturen naar: *Pythagoras Olympiade*, Marinus de Jongstraat 12, 4904 PL OOSTERHOUT (NB). Vermeld op elk (éénzijdig beschreven) vel je naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas. Verder moet elke oplossing op een nieuw vel beginnen, want we corrigeren ze afzonderlijk. We bekijken alleen goed leesbare oplossingen die volledig zijn uitgewerkt, met verklarende tekst in goed lopende zinnen. Verdere informatie over de wedstrijd vind je in nummer 1 van deze jaargang op bladzijde 26.

PO 132

Drie niet-lege deelverzamelingen A , B en C van een verzameling X verdelen X in maximaal 8 onderling disjuncte deelverzamelingen. Dit wordt vaak geïllustreerd met een zogenaamd Venn-diagram van drie elkaar overlappende cirkels (figuur 1). Het vlak stelt dan X voor, de cirkels (inclusief hun binnengebied) stellen A , B en C voor, en je ziet de acht stukken voor je.

Bij vier deelverzamelingen zijn er maximaal 16 onderling disjuncte stukken. Kan dat geïllustreerd worden met een Venn-diagram van vier elkaar overlappende cirkels?

Motiveer je antwoord!

PO 133

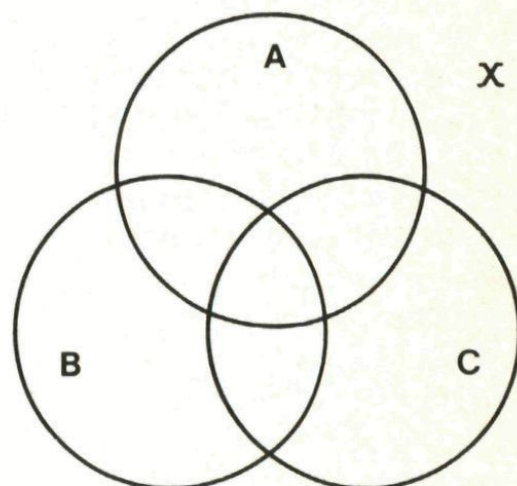
Een rij reële getallen

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

heeft de eigenschap dat

$$|a_n| = a_{n-1} + a_{n+1}$$

voor alle $n = 2, 3, \dots$



Figuur 1. Venn-diagram van drie elkaar overlappende cirkels.

Bewijs dat die rij *periodiek* is met periode 9, dat wil zeggen dat

$$a_{n+9} = a_n$$

voor alle $n = 1, 2, 3, \dots$

Voorbeeld:

$-1, 1, 2, 1, -1, 0, 1, 1, 0,$

$-1, 1, 2, \dots$

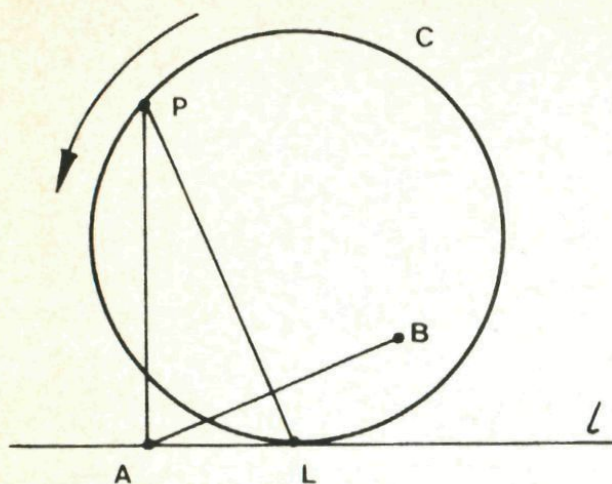
Oplossingen en prijswinnaars van de opgaven PO 121-123

PO 121

Gegeven zijn een vaste cirkel C , een vaste lijn l die C raakt in een punt L , en een variabel punt P op C . Laat A de loodrechte projectie zijn van P op

l , en B het spiegelbeeld van A in de lijn PL . (figuur 1).

Bepaal de verzameling van alle punten B als P de cirkel doorloopt.

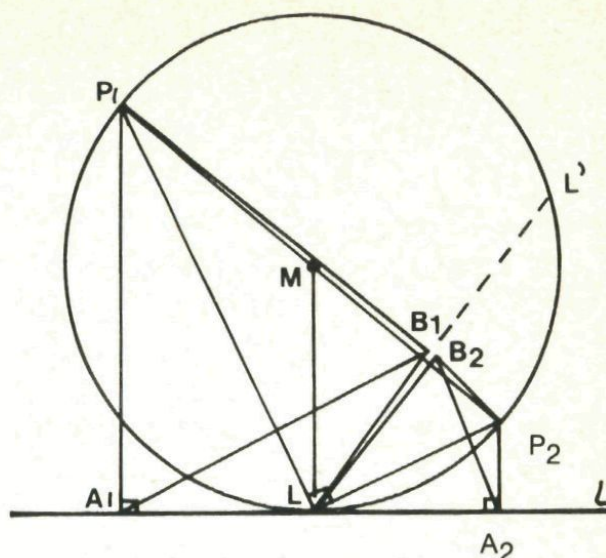


Figuur 1

Oplossing van Siebrand Tilma, 4 vwo, Leeuwarden:

Noem het middelpunt van de cirkel M , en teken een middellijn P_1P_2 , waarbij P_1 en P_2 diametrale punten op de cirkel zijn. De bijbehorende punten uit de opgave noemen we respectievelijk A_1 , A_2 , B_1 en B_2 (figuur 2). Omdat P_1P_2 een middellijn van de cirkel is, is hoek P_1LP_2 recht, dus de hoeken A_1LP_1 en A_2LP_2 zijn samen 90° . Hieruit volgt dat het beeld B_1L van A_1L bij spiegeling in P_1L en het beeld B_2L van A_2L bij spiegeling in P_2L op dezelfde halfrechte vanuit L liggen.

Maar omdat ook $A_1L = LA_2$ (het zijn de projecties van P_1M en MP_2 op de lijn l), geldt $B_1 = B_2$. Omdat verder de hoeken P_1A_1L en P_2A_2L recht zijn, zijn ook de hoeken P_1B_1L en P_2B_2L recht, dus B ligt op P_1P_2 en het is de loodrechte projectie van L op die lijn. Als je L in die middellijn spiegelt, krijg je een punt L' dat weer op de cirkel ligt. Je kunt dus ook zeggen dat je B krijgt door L' met een factor $1/2$ te vermenigvuldigen vanuit L . Als de middellijn P_1P_2 ronddraait, doorloopt L' de cirkel C , en B doorloopt dan dus de cirkel die uit C ont-



Figuur 2

staat door vermenigvuldiging vanuit L met een factor $1/2$. Die cirkel heeft LM als middellijn.

Verdere goede oplossingen ontvingen we van *Pieter-Tjerk de Boer*, 5 vwo, Enschede, *Timo Gerlagh*, 4 vwo, Driebergen, *Erjen Lefeber*, 6 vwo, Zoetermeer, *Nguyen Hoang Viet*, 6 vwo, Nijmegen, *David Omtzigt*, 5 vwo, Emst, *Jasper Scholten*, 5 vwo, Heemskerk, *René Uittenbogaard*, 6 vwo, Nijmegen, *Antoine van de Ven*, 5 vwo, Heesch, *Martijn Wubs*, 5 vwo, Hoogeveen en *Gijsbert Zwart*, 5 vwo, Geleen. Er waren twee inzenders die wel de kleine cirkel vonden, maar geen bewijs gaven. Prijswinnaars: *Pieter-Tjerk de Boer* en *Antoine van de Ven*.

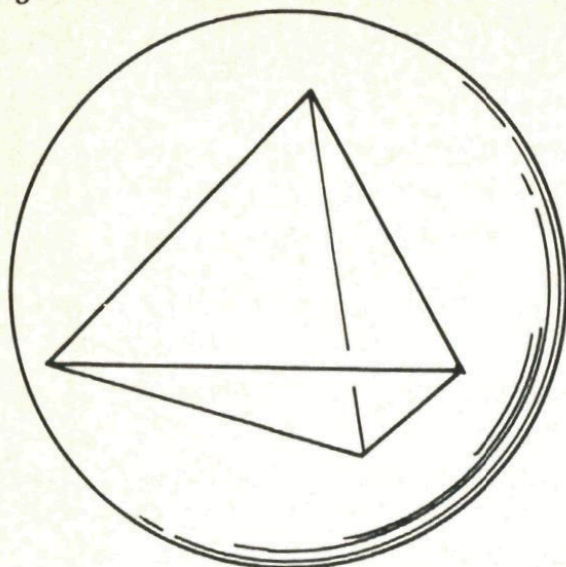
PO 122

Bewijs: van alle viervlakken die binnen een gegeven bol passen, heeft het ingeschreven regelmatige viervlak de grootste inhoud.

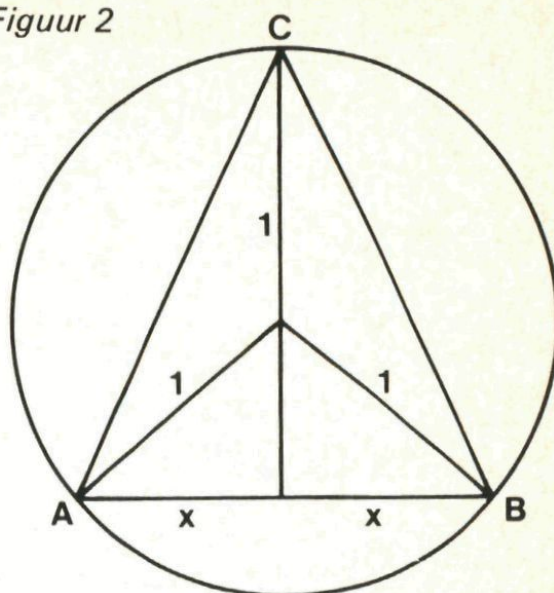
Oplossing van Erjen Lefeber, 6 vwo, Zoetermeer:

We bewijzen eerst dat van alle driehoeken die binnen een gegeven cir-

Figuur 1



Figuur 2



kel passen, de gelijkzijdige ingeschreven driehoek de grootste oppervlakte heeft. Voor het gemak nemen we aan dat die cirkel straal 1 heeft. Neem een koorde AB van lengte $2x$. Bij variabele C op de cirkel is de oppervlakte van driehoek ABC maximaal als C het middelpunt is van de grootste boog AB (figuur 2). Dan is driehoek ABC dus gelijkbenig, en met de stelling van Pythagoras vind je voor de oppervlakte de formule

$$\text{Opp} = x + x \sqrt{1-x^2}.$$

Functieonderzoek op $x \in [0, 1]$ van deze functie geeft een maximum bij $x = (\sqrt{3})/2$, en dat is precies het geval van een *gelijkzijdige* driehoek. De oppervlakte is dan $(3/4)\sqrt{3}$. Bij een cirkel met straal r is die oppervlakte dus

$$\text{Opp} = (3/4) \sqrt{3} \cdot r^2.$$

Laat nu een viervlak $ABCD$ ingeschreven zijn in een bol met straal 1. Het vlak ABC noemen we α . De inhoud van een viervlak is gelijk aan $1/3$ maal opp (grondvlak) maal hoogte. Als we α vast houden, en de inhoud van $ABCD$ zo groot mogelijk willen

hebben, moeten we voor ABC dus een gelijkzijdige driehoek kiezen met hoekpunten op de snijcirkel van de bol met α . We noemen de straal van die cirkel r . De oppervlakte van driehoek ABC is dan $(3/4)\sqrt{3} \cdot r^2$. De hoogte van het viervlak is maximaal als de top D recht boven het grondvlak ligt, en dan is de hoogte gelijk aan $1 + \sqrt{1-r^2}$ (figuur 3). De inhoud van $ABCD$ is in dat geval dus gelijk aan

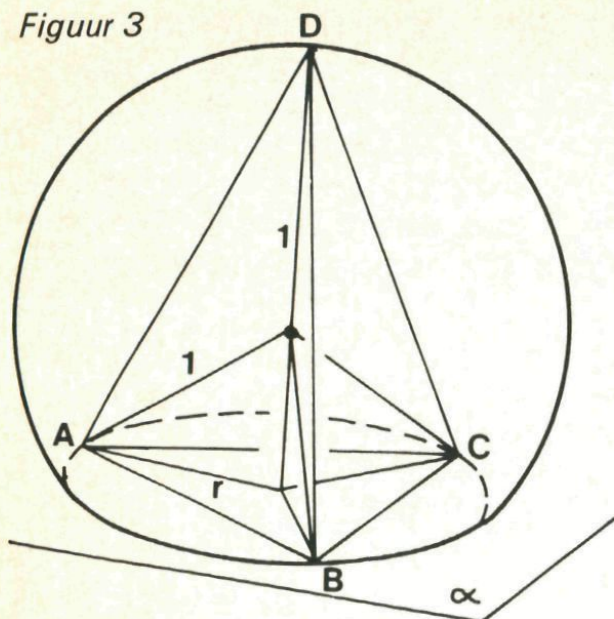
$$I = (1/3) (3/4) \sqrt{3} \cdot r^2 (1 + \sqrt{1-r^2}).$$

Functieonderzoek op $r \in [0, 1]$ geeft een maximum voor $r = (2/3)\sqrt{2}$. Het viervlak is dan inderdaad regelmatig, en alle ribben hebben lengte $(2/3)\sqrt{6}$.

We ontvingen verder correcte oplossingen van *Arthur Bakker*, 6 vwo, Bergen (NH), *Timo Gerlagh*, 5 vwo, Driebergen, *Nguyen Hoang Viet*, 6 vwo, Nijmegen, *David Omtzigt*, 6 vwo, Emst, *Jan Wilmaers*, 6 IW, Sint-Pieters-Leeuw, België, *Martijn Wubs*, 5 vwo, Hoogeveen en *Gijsbert Zwart*, 6 vwo, Geleen.

Prijswinnaars: *David Omtzigt* en *Jan Wilmaers*.

Figuur 3



PO 123

Gegeven is een breuk p/q (waarbij p en q natuurlijke getallen zijn) die in decimale schrijfwijze 1989 als repetend heeft.

Bewijs dat de noemer q een geheel veelvoud is van 1111.

(Voorbeeld: $333/27775 = 0,01198919891989 \dots$)

Oplossing van Erjen Lefeber, 6 vwo, Zoetermeer:

$221/1111 = 0,198919891989\dots$ dus

$p/q = x + (221/1111) 10^{-n}$, waarbij x een getal is met n cijfers achter de komma. Het getal $a = 10^n x$ is dus geheel. Dit geeft

$p/q = (1111a + 221)/(1111 \cdot 10^n)$, dus

$q \cdot (1111a + 221) = p \cdot (1111 \cdot 10^n)$

$= p \cdot 11 \cdot 101 \cdot 2^n \cdot 5^n$.

Aangezien 221 geen factor 11 of 101 bevat, is $1111a + 221$ niet deelbaar door 11 of door 101. Beide priemfactoren moeten dus in q bevat zijn, dus q is een veelvoud van $11 \cdot 101 = 1111$.

Er waren verder goede oplossingen van *Arthur Bakker*, 6 vwo, Bergen (NH), *Timo Gerlagh*, 5 vwo, Driebergen, *David Omtzigt*, 6 vwo, Emst, *Jasper Scholten*, 6 vwo, Heemskerk en *Martijn Wubs*, 5 vwo, Hoogeveen. De inzendingen van vier andere lezers waren niet geheel correct.

Prijswinnaars: *Jasper Scholten* en *Martijn Wubs*. □

Internationale Wiskunde Olympiade



In Braunschweig, West Duitsland, werd van 13 tot en met 24 juli 1989 de 30e Internationale Wiskunde Olympiade georganiseerd. Dit jaar namen 291 scholieren uit 50 landen aan de Olympiade deel; een nieuw record. Op twee opvolgende dagen kregen de deelnemers telkens $4\frac{1}{2}$ uur de tijd om twee opgaven op te lossen. Het werk werd daarna door een internationale jury beoordeeld en van een puntenwaardering voorzien. Voor elke opgave waren maximaal 7 punten te verdienen. Deelnemers met een puntenaantal van 38-42 kregen een gouden medaille, 30-37 punten leverde zilver op, en 18-29 punten brons. Er waren 10 deelnemers met een maximumscore van 42 punten, waaronder een 14-jarig meisje uit de Sovjet-Unie! De Nederlandse ploeg telde één winnaar van zilver en één winnaar van brons. Bij de Belgen waren er drie bronzen medaillewinnaars.

Bij de Olympiade kan elk land een team van maximaal zes deelnemers afvaardigen. Alle landen op vier na stuurden ook zo'n volledig team. Telt men de scores per land op, dan ontstaat het landenklassement, dat dit jaar aangevoerd werd door China met een puntentotaal van 237 (bij een maximum van $6 \cdot 42 = 252$). De Chinese ploeg won vier gouden en twee zilveren medailles. België en Nederland eindigden in de middenmoot met respectievelijk 104 en 92 punten. Hier is het volledige landenklassement.

Nr.	Land	Score (max. 252)	Prijzen (goud-zilver-brons)		
1	China	237	4	2	—
2	Roemenië	223	2	4	—
3	Sovjet-Unie	217	3	2	1
4	Oost-Duitsland	216	3	2	1
5	Verenigde Staten	207	1	4	1
6	Tsjecho-slowakije	202	2	1	3
7	Bulgarije	195	1	3	2
8	West-Duitsland	187	1	3	2
9	Vietnam	183	2	1	3
10	Hongarije	175	—	4	1
11	Joegoslavië	170	1	3	1
12	Polen	157	—	3	3
13	Frankrijk	156	—	1	5
14	Iran	147	—	2	3
15	Singapore	143	—	—	4
16	Turkije	133	—	1	4
17	Hong Kong	127	—	2	1
18	Italië	124	—	1	2
19	Canada	123	—	1	3
20/21	Groot-Brittanië	122	—	2	1
	Griekenland	122	—	1	3
22/23	Australië	119	—	2	2
	Colombia	119	—	1	2
24	Oostenrijk	111	—	2	1
25	India	107	—	4	—
26	Israël	105	—	2	1
27	België	104	—	—	3
28	Korea	97	—	1	—
29	Nederland	92	—	1	1
30	Tunesië	81	—	1	—
31	Mexico	79	—	—	1
32	Zweden	73	—	—	2
33/34	Cuba	69	—	—	1
	Nieuw-Zeeland	69	—	—	2
35	Luxemburg	65	—	1	1 (team van 3)
36/37	Brazilië	64	—	—	3

	Noorwegen	64	—	—	—	(team van 4)
38	Marokko	63	—	—	1	
39	Spanje	61	—	—	1	
40	Finland	58	—	—	—	
41	Thailand	54	—	—	1	
42	Peru	51	—	—	—	
43	Philippijnen	47	—	1	—	
44	Portugal	39	—	—	—	
45	Ierland	37	—	—	—	
46	IJsland	33	—	—	—	(team van 4)
47	Koeweit	31	—	—	—	
48	Cyprus	24	—	—	—	
49	Indonesië	21	—	—	—	
50	Venezuela	6	—	—	—	(team van 4)

Prestaties Nederlanders en Belgen

De individuele prestaties van de Nederlanders waren:

Opgave	1	2	3	4	5	6	totaal
Piet Brouwer	—	3	—	7	7	—	17
Lucas du Croo de Jongh	—	2	—	4	7	—	13
Alex Heinis	2	3	—	1	—	1	7
Melvin Koppens	7	3	—	7	—	1	18 (brons)
Gerton Lunter	—	—	1	3	—	—	4
Marco Vervoort	7	5	7	7	7	—	33 (zilver)

De scores van de Belgen waren (helaas kregen we alleen de achternamen van de deelnemers toegestuurd):

Opgave	1	2	3	4	5	6	totaal
Lardinois	2	5	—	2	—	—	9
Lehman	5	5	—	—	7	—	17
Masson	7	5	—	3	7	—	22 (brons)
Rombouts	2	3	—	7	5	—	17
Ruiz Lopez	1	1	1	7	2	7	19 (brons)
Sax	7	5	1	2	1	4	20 (brons)

Voor Nederland hadden zitting in de internationale jury Drs. J. M. Notenboom (Hogeschool Nederland, Utrecht) en Drs. J. Donkers (Technische Universiteit Eindhoven).

De 31e Internationale Wiskunde Olympiade zal in juli 1990 worden georganiseerd in Beijing, China. ☐

Redactioneel

Dit keer maar liefst 36 bladzijden. Desondanks was er geen ruimte om de oplossing van de opgave uit het artikel 'Wybertjes in een zeshoek' (Pythagoras 29-1) te plaatsen. Dit is voornamelijk te wijten aan het artikel 'De haas van Devaney' dat heel wat bladzijden in beslag neemt. Maar het bevat dan ook een aantal plaatjes en voorbeelden (bladzijde 24 tot en met 27) die we je beslist niet wilden onthouden. Wel in dit nummer het aangekondigde vervolg op 'Overbodige nullen op postzegels'.

Volgend nummer

De oplossing van de opgave uit 'Wybertjes in een zeshoek' komt beslist in het volgende nummer. Daarnaast ook het bewijs voor de juistheid van de constructie uit het artikel 'Van rechthoek naar vierkant' en de antwoorden op de in dat artikel gestelde vragen. In het volgend nummer kun je ook reacties verwachten op 'Het reguleren van veelhoeken' (Pythagoras 29-1), de opgaven van de Tweede Ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, en misschien eveneens die van de Internationale Wiskunde Olympiade 1989.

Naast dat alles uiteraard weer een aantal artikelen onder andere over Inversies (met computer-programma's), een mogelijke onmogelijke figuur en het probleem van Fagnano. ☐

Oproep

We zoeken een klas jongens en/of meisjes met belangstelling voor wiskunde en interesse om Leuven (België) op een alternatieve manier te bezoeken. Wij, 17 jongens van 16 jaar, vormen een ondernemende wiskunde-klas die graag een uitwisseling voor een paar dagen wil houden. Voor meer informatie schrijven naar *Koen Engelborghs, Graaf de Grunnellaan 8, B-3030 Heverlee (Leuven), België.* ☐

Uitgave onder toezicht van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Lay-out: Klaas Lakeman, Amsterdam.

Tekenwerk: Hans van Kuyk, Amsterdam.

Foto's en andere illustraties: Hessel Pot, Woerden (blz. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7); Klaas Lakeman, Amsterdam (blz. 9, 10, 11, 12, 14, 15); Stichting Mathematisch Centrum, Amsterdam (blz. 13, 14); Jan van de Craats, Oosterhout (NB) (omslag, blz. 16, 17, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 30, 31, 32, 33).

© 1990 Redactie Pythagoras/Stichting IVIO - alle rechten voorbehouden, nadruk of weergave, geheel of gedeeltelijk, in welke vorm dan ook, zonder schriftelijke toestemming van de redactie en uitgever verboden.



Pythagoras wiskunde tijdschrift voor jongeren

Redactie: Jan van de Craats, Klaas Lakeman, Hans de Rijk.

Medewerkers: Popke Bakker, Gerard Bäuerle, F. van der Blij,
Niels M. Buizert, Hans Lauwerier, Hessel Pot.

Redactiesecretariaat: Klaas Lakeman, Cornelis Krusemanstraat 60^{II},
1075 NS Amsterdam (NL).

Inhoud jaargang 29, nummer 3

Overbodige nullen op post-
zegels / 1

Hessel Pot

Zoekt en gij zult vinden / 8

Klaas Lakeman

Trapezium in tweeën / 9, 14

Klaas Lakeman

Van rechthoek naar vierkant
/ 10

Klaas Lakeman

Constructie middelevenredige
/ 12

Tetrahexen / 13

Klaas Lakeman

De juiste tijd / 14, 29

De haas van Devaney / 16

Jan van de Craats

Het programma voor de paashaas
/ 18

Een programma voor uitbrei-
dingen met een factor a / 22

Nederlandse Wiskunde Olym-
piade / 28

Jan van de Craats

Pythagoras Olympiade / 30

Jan van de Craats

Internationale Wiskunde Olym-
piade / 33

Jan van de Craats

Redactioneel / 36

Oproep / 36

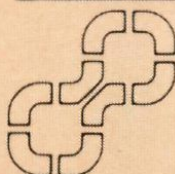
Pythagoras verschijnt zesmaal per
schooljaar; opgave van abonnementen
bij de uitgever (zie onder).

Abonnementen zijn doorlopend, tenzij
voor 1 september schriftelijk bij de uit-
gever is opgezegd.

Bij tussentijdse abonnering ontvangt
men ook de reeds verschenen num-

mers. Betaling per acceptgirokaart.

Tarieven	NLG/BEF
Abonnement Pythagoras	23,—/430
Luchtpost-toeslag	10,—
Inclusief Archimedes	40,—/750
Luchtpost-toeslag	20,—
Losse nummers	5,—/ 90



stichting ivio

Postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL.)

Tel. 03200-76411

educatieve uitgeverij - instituut voor buitenschools

onderwijs - wereldschool - AO-reeks - leerprojecten

Postgiro Nederland: 287934

Postcheck België: 000-0130850-94