

Pythagoras

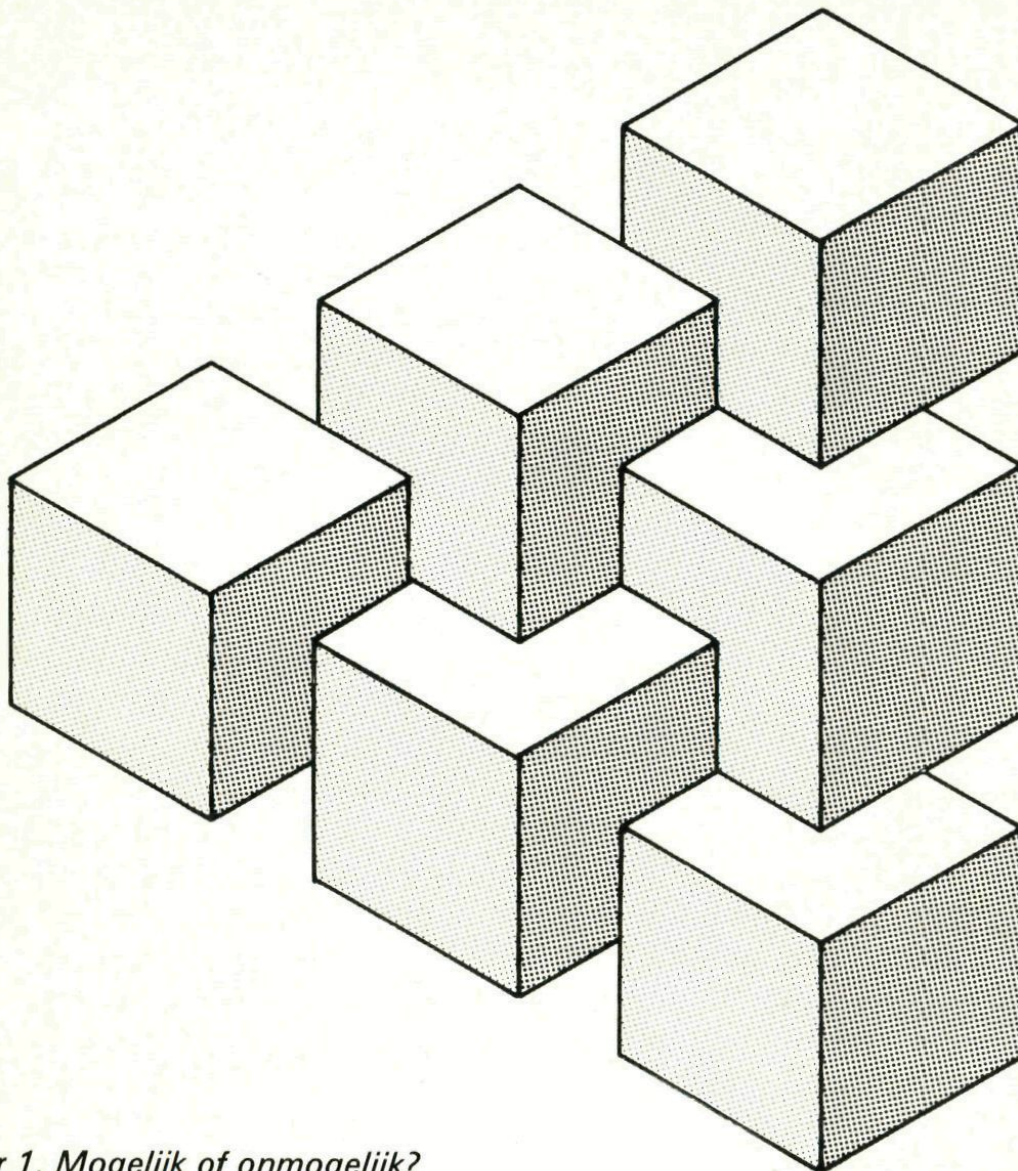


wiskunde tijdschrift voor jongeren

stichting ivio

jaargang 29
nummer 4
april 1990

Een mogelijke onmogelijke figuur



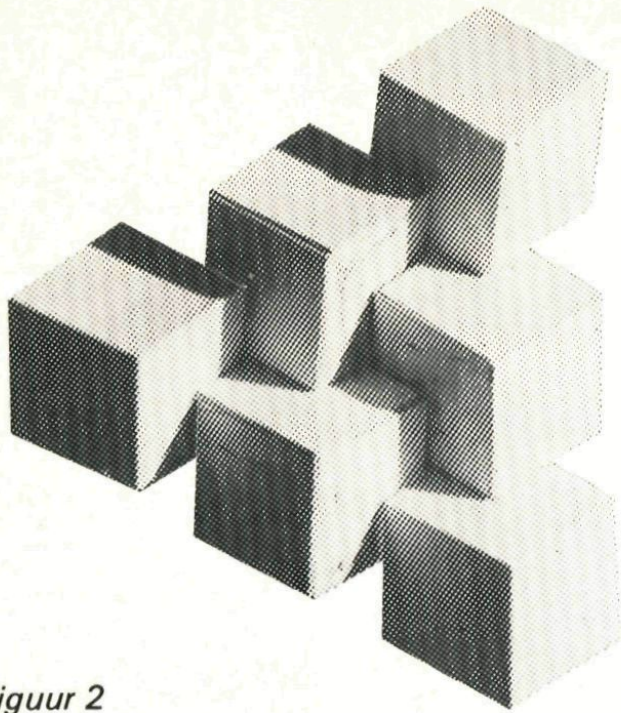
Figuur 1. Mogelijk of onmogelijk?

Als je al eens onmogelijke figuren van de Zweedse kunstenaar Oscar Reutersvärd hebt gezien, zul je zeker denken dat figuur 1 een van zijn onmogelijke kubusbalken is. Toch zijn op deze manier zes echte kubussen aan elkaar geplakt, zoals op de foto van figuur 2 is te zien. Trucage is er niet aan te pas gekomen. Alle kubussen zitten aan elkaar vast en er zijn geen verborgen gaten of openingen. Ten overvloede is nog een foto genomen die dit voorwerpje van opzij laat zien (figuur 3).

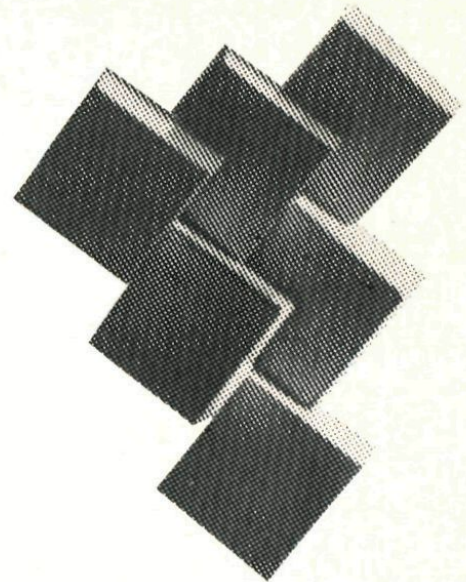
Aan de slag

Probeer het zelf maar eens. Het is een eenvoudig knutselwerkje. Maak eerst zes kubussen van dik briefkaartkarton. Teken op het

karton een uitslag van een kubus (figuur 4) en vouw de vierkanten naar binnen tot ze een kubus vormen. De randen worden met plakband aan elkaar geplakt.



Figuur 2



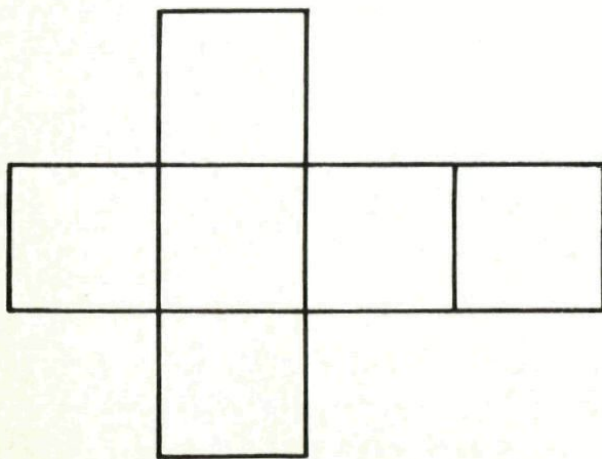
Figuur 3. Van opzij bekeken.

In figuur 5 is weergegeven hoe de eerste drie kubussen aan elkaar worden geplakt. Eerst kubus I op kubus II. Smeer daartoe $1/4$ van de bovenkant van kubus II met lijm in en plaats kubus I er op de aangegeven manier boven op. Smeer dan kubus III en kubus I op de met stippeltjes aangegeven plaatsen in en plak kubus III aan I en II. Je zult zien dat ze keurig passen.
Hoe je de resterende kubussen

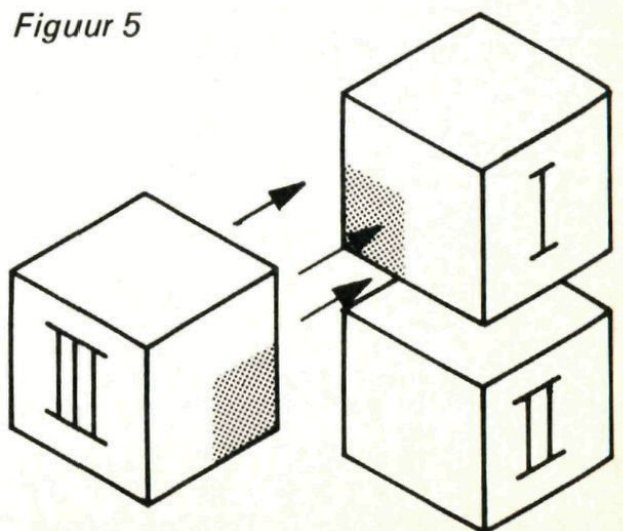
er aan plakt wijst zich nu van zelf.

Verrassend

Nu kun je je nogmaals afvragen: Is figuur 1 een onmogelijke figuur? Het lijkt paradoxaal, maar figuur 1 is werkelijk een onmogelijke figuur. Als je er naar kijkt, maak je er namelijk een andere (een onmogelijke) voorstelling van dan het model dat je met behulp van papieren kubusjes hebt gefabriceerd. □

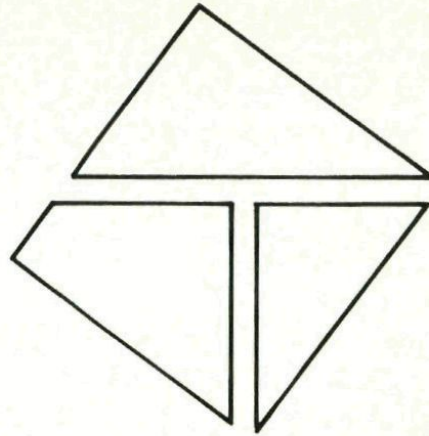
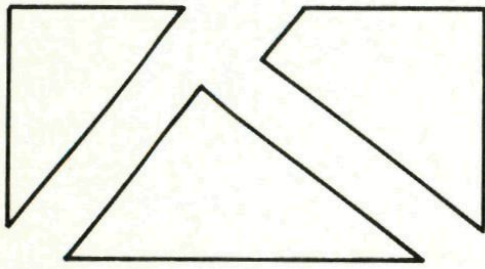


Figuur 4. Uitslag van een kubus.



Figuur 5

Echt vierkant!



Figuur 1. De stukken van de rechthoek. Figuur 2. Zo vorm je het vierkant.

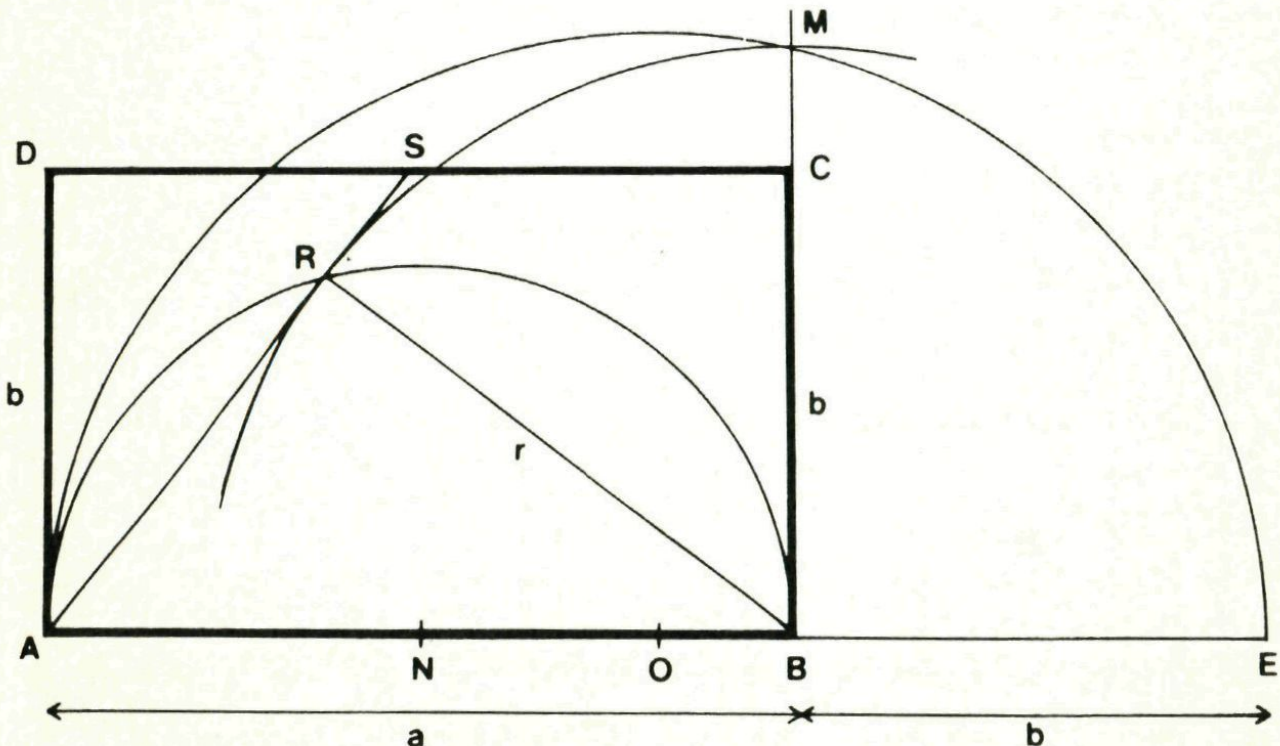
In 'Van rechthoek naar vierkant' (Pythagoras 29-3) werd beschreven hoe een rechthoek in drie stukken kan worden geknipt (figuur 1) waarmee een vierkant kan worden gevormd (figuur 2). De lijnen waarlangs moet worden geknipt, werden bepaald met een constructie. Het bewijs voor de juistheid van die constructie werd echter nog niet gegeven. Dat volgt hier.

Aanzet

Het resultaat van de constructie was figuur 3. Daarin is $ABCD$ de gegeven rechthoek en moet

langs ARS en BR worden geknipt.

Vergelijk maar met de figuren 1 en 2.



Figuur 3. Het resultaat van de constructie.

We stellen vast dat lijnstuk BR loodrecht staat op lijnstuk ARS . Immers het punt R ligt op de cirkel met middellijn AB . Dus hoek ARB is een omtrekshoek van die cirkel. Hoek ARB staat op een boog die weliswaar niet is getrokken in figuur 3, maar die gelijk is aan 180° . Dus hoek ARB is 90° , aangezien een omtrekshoek gelijk is aan de helft van de boog waarop hij staat. Het bewijs van deze laatste eigenschap is te vinden in elk wat ouder meetkundeboek of in het stukje 'Verder de oude doos in' (Pythagoras 27-2).

Schuiven

Uit de figuren 1 en 2 volgt hoe het vierkant moet worden gevormd. Dit is ook uitgevoerd in figuur 3. Dus driehoek ADS levert na verschuiving driehoek BCP , en

driehoek ABR levert driehoek SPQ (figuur 4). Nu moet worden bewezen dat vierhoek $BPQR$ een vierkant is.

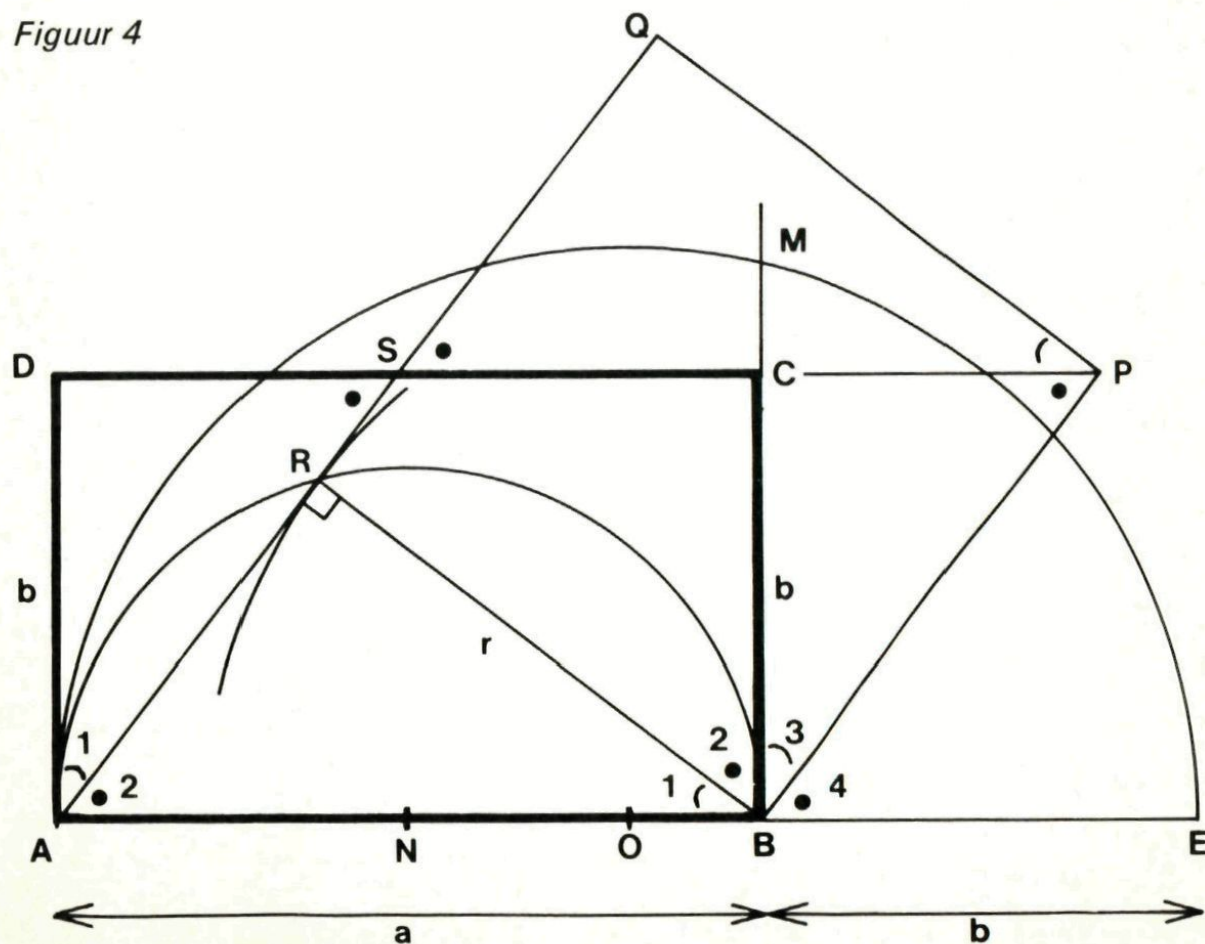
Direct is in te zien dat vierhoek $BPQR$ twee rechte hoeken heeft, namelijk hoek SRB en hoek SQP . Dit volgt uit het feit dat de lijnstukken BR en ARS loodrecht op elkaar staan, en voor hoek SQP bovendien nog dat die hoek gelijk is aan hoek ARB vanwege het schuiven.

Rechthoek

In figuur 4 zijn gelijke hoeken voorzien van gelijke tekenjes (boogjes en stippen). De juistheid daarvan is gemakkelijk te controleren.

In driehoek ABR is de hoek bij R recht. Dus hoek A_2 en hoek B_1 zijn samen 90° . Anders gezegd, een

Figuur 4



hoek met een stip en een hoek met een boogje zijn samen 90° . Dit betekent dat zowel hoek QPB als hoek PBR gelijk is aan 90° . En daarmee is vierhoek $BPQR$ in ieder geval een *rechthoek*.

Gelijke oppervlakten

Nu de laatste stap in het bewijs. $BM = r$ is de middelevenredige van $AB = a$ en $BE = BC = b$. Daarom geldt

$$r^2 = ab \quad (1)$$

Punt R wordt gevonden door BM van uit B om te cirkelen. Kortom $BR = BM = r$ en dus ook $QP = r$. De oppervlakte van de oorspronkelijke rechthoek $ABCD$ is gelijk aan die van $BPQR$. De oppervlakte van $ABCD$ is ab . Die van $BPQR$ is dan ook gelijk aan ab . Er is aangetoond dat $BPQR$ een rechthoek is. Zijn oppervlakte is dus ook te vinden door $BR = r$ met BP

of met RQ te vermenigvuldigen. Dit betekent

$$r \cdot BP = ab \quad (2)$$

$$r \cdot RQ = ab. \quad (3)$$

Uit (1) en (2) volgt $BP = r$, en uit (1) en (3) $RQ = r$.

Conclusie: $BPQR$ is een *vierkant*.

Gelijkvormigheid

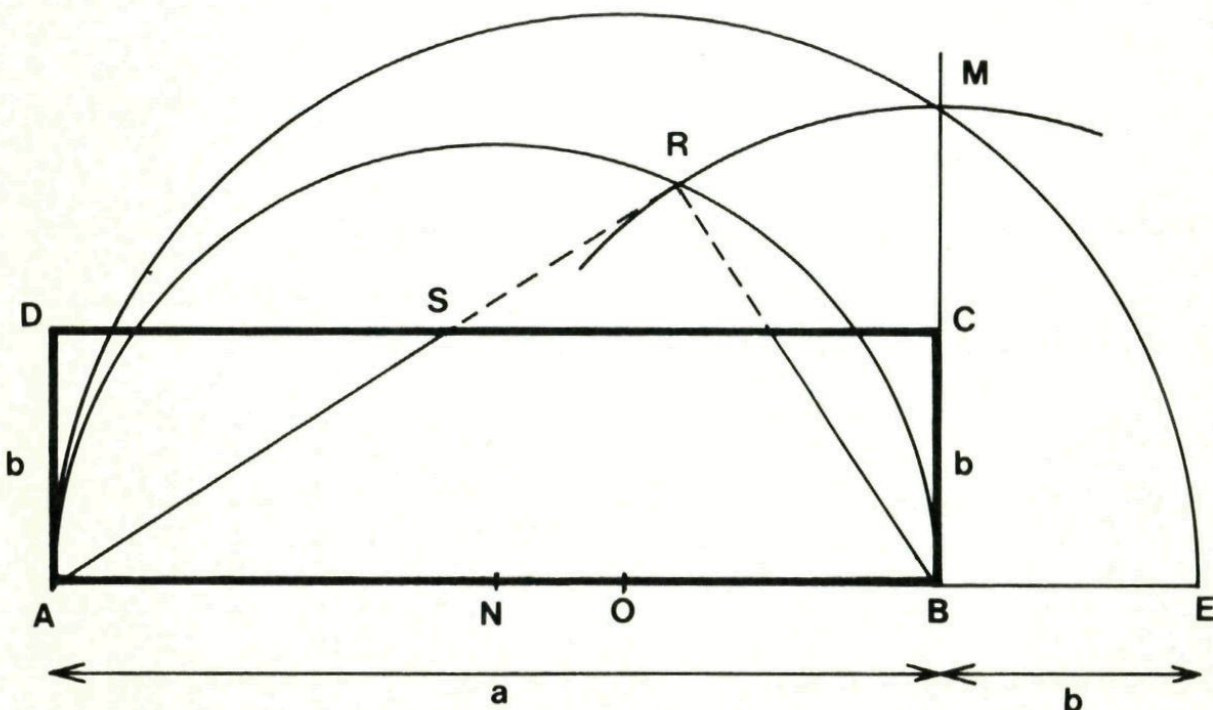
De laatste stap in het bewijs kan ook op een andere manier. De driehoeken ADS en BRA zijn gelijkvormig (gelijke hoeken). Daaruit volgt de evenredigheid

$$b : AS = r : a.$$

Dit is ook te schrijven als

$$AS \cdot r = ab. \quad (4)$$

Uit (1) en (4) volgt dan $AS = r$. Maar dan is ook $BP = r$, omdat de driehoeken ADS en BCP con-



Figuur 5. De constructie gaat niet op.

gruent zijn vanwege het schuiven.

Grensgeval

De constructie gaat niet op als R buiten de oorspronkelijke rechtehoek $ABCD$ komt. Dat gebeurt als de ene zijde van $ABCD$ (hier b) veel kleiner is dan de andere (figuur 5).

De constructie zal nog net opgaan als R op CD terecht komt (figuur 6). Je kunt dan zeggen dat R en S samenvallen.

Nog steeds is hoek ARB gelijk aan 90° en is $BR = r$. Bovendien geldt nu $AR = r$, dus zal R op het midden van DC liggen. Ofwel $DR = RC = \frac{1}{2}a$.

De stelling van Pythagoras toepassen in bij voorbeeld driehoek BRC leidt tot

$$r^2 = b^2 + \frac{1}{4}a^2. \quad (5)$$

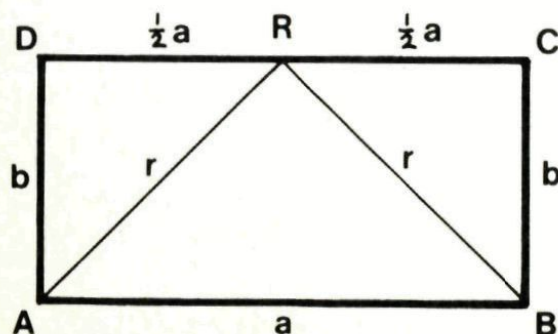
Aangezien r de middelevenredige is van a en b , is (5) met $r^2 = ab$ te schrijven als

$$b^2 + \frac{1}{4}a^2 = ab.$$

Dit is ook te schrijven als

$$b^2 - ab + \frac{1}{4}a^2 = 0.$$

Ontbinden in factoren leidt tot



Figuur 6. Het grensgeval.

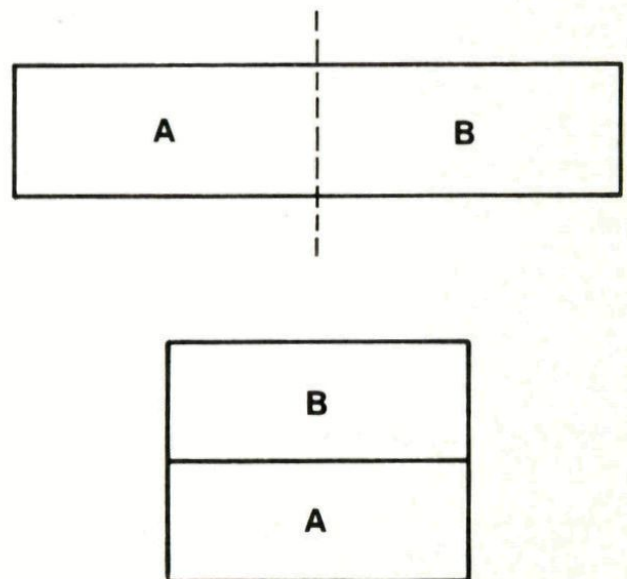
$$(b - \frac{1}{2}a)^2 = 0.$$

En dat levert voor het grensgeval $b = \frac{1}{2}a$. De constructie zal niet opgaan als $b < \frac{1}{2}a$ of $a > 2b$.

Te smalle strook

Heb je te maken met een te smalle rechthoekige strook, dus $a > 2b$, dan is via een omweggetje de constructie nog wel uit te voeren. Alleen krijg je dan meer dan drie stukken waarmee een vierkant is te vormen. En dat was eigenlijk niet de bedoeling.

Knip eerst zo'n te smalle strook evenwijdig aan de kortste zijden in twee gelijke stukken, en leg die boven elkaar (figuur 7). Dit levert een rechthoek die mogelijk voldoet aan $a < 2b$, zodat de constructie kan worden toegepast. Zo niet, knip dan de oorspronkelijke smalle strook op dezelfde manier in drie gelijke stukken (of zo veel als maar nodig is), en leg die eerst boven elkaar. \square



Figuur 7. Knip de te smalle strook middendoor en leg de stukken boven elkaar.

Pi-benaderingen

Het artikel 'Pi in acht decimalen nauwkeurig' (Pythagoras 29-1) blijkt flink wat mensen aan het puzzelen gekregen te hebben. Hieronder enkele resultaten.

Kwaliteit boven 600 000

Het absolute record voor wat betreft de hoogte van het kwaliteitsgetal werd gevestigd door *Bernard Thieme* uit Delft. Hij schrijft er overigens bij dat hij z'n oplossing niet echt fraai vindt.

Uit een oude Pythagoras wist hij zich te herinneren dat er tussen de 761e en 768e decimaal van π zes negens achter elkaar voorkomen:

3,1415...13499999983729780...

De uit 762 cijfers bestaande decimale breuk

3,1415...135

geeft dus een uitstekende benadering. Met een kwaliteitsgetal van maar liefst 614620.

Kwaliteit oneindig

Zoals onder meer *Bert Boonstra* (Amstelveen) opmerkte, behoeven de spelregels enige verscherping. Want exact goede omschrijvingen van π zoals

$$2 \operatorname{ARCSIN}(1)$$

en

$$4 \operatorname{ARCTAN}(1)$$

en zelfs

$$4(\operatorname{ARCTAN}(\frac{1}{2}) + \operatorname{ARCTAN}(\frac{1}{3}))$$

willen we uitsluiten. (ARCSIN en ARCTAN zijn hier functies met radiaalwaarden.

Kwaliteit boven de 10

De volgende π -benaderingen zijn wél van het bedoelde soort:

$\pi \approx$	kwaliteit \approx
$\ln \sqrt{535,5}$	13
$\sqrt{9,87}$	16
$7,85^{5/9}$	22
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{6/6}}}$	31
$71/22,6$	37
$\sqrt{\sqrt{(767/\sqrt{62})}}$	195

De laatste van dit rijtje is verreweg de fraaiste. De vondst is gedaan door *Peter Romeyn* uit Barneveld. Hij gebruikte hiervoor alléén z'n rekendoosje, en niet zoals sommige anderen de microcomputer.

Maar misschien moet de conclusie van al dit zoek naar een handig ezelsbruggetje voor de decimalen van π toch wel zijn, dat je maar het beste kunt proberen te onthouden:

**drie komma één vier
één vijf negen twee
zes vijf drie vijf
acht negen zeven negen
drie twee drie . . .**

De kortste weglengte

Drie dorpen A , B en C wil men door een wegennet met elkaar verbinden. Maar in verband met materiaalkosten zó dat de totale weglengte zo klein mogelijk is. Hoe ziet het wegennet met de kleinst mogelijke lengte er uit?

Dit lijkt een eenvoudig probleem en de oplossing is ook eenvoudig, maar je moet er wel even op komen. Het antwoord weet je na lezing van het artikel 'Punt van Fermat' in het volgende nummer.

Probleem van Fagnano

Zoek in een scherphoekige driehoek ABC de ingeschreven driehoek UVW met de *kleinst* mogelijke omtrek.

Dit op het oog lang niet eenvoudige en zelfs wat beruchte probleem werd in 1775 opgeworpen door J.F. Toschi Fagnano. Hij loste het op met behulp van differentiaal-rekening. Een andere, wat eenvoudigere oplossing werd gegeven door Hermann Amandus Schwarz (1843-1921). De hier volgende oplossing is van Leopold Fejér (1880-1959). Daarbij wordt slechts een beroep gedaan op de meest elementaire meetkunde kennis.

Ingeschreven driehoek

Een ingeschreven driehoek van een driehoek ABC is een driehoek PQR waarvan de hoekpunten P , Q en R op verschillende zijden van driehoek ABC liggen (figuur 1).

Merk meteen op dat de ingeschreven driehoek met de *grootst* mogelijke omtrek driehoek ABC zelf is.

Spiegelen

Ga uit van een willekeurige ingeschreven driehoek UVW , met U

op BC , V op CA en W op AB (figuur 2). Spiegel U in AC . Het spiegelbeeld van U wordt U_1 en

$$UV = U_1V. \quad (1)$$

Spiegel U ook in AB . Het spiegelbeeld van U is dan U_2 en

$$UW = U_2W. \quad (2)$$

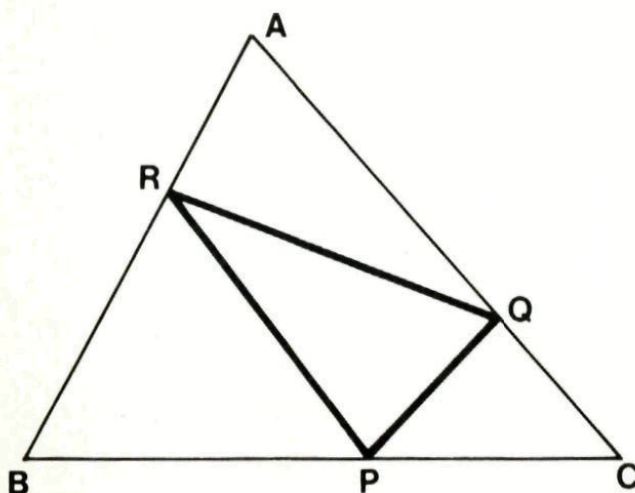
De omtrek van driehoek UVW is nu niet alleen te schrijven als

$$UV + VW + WU,$$

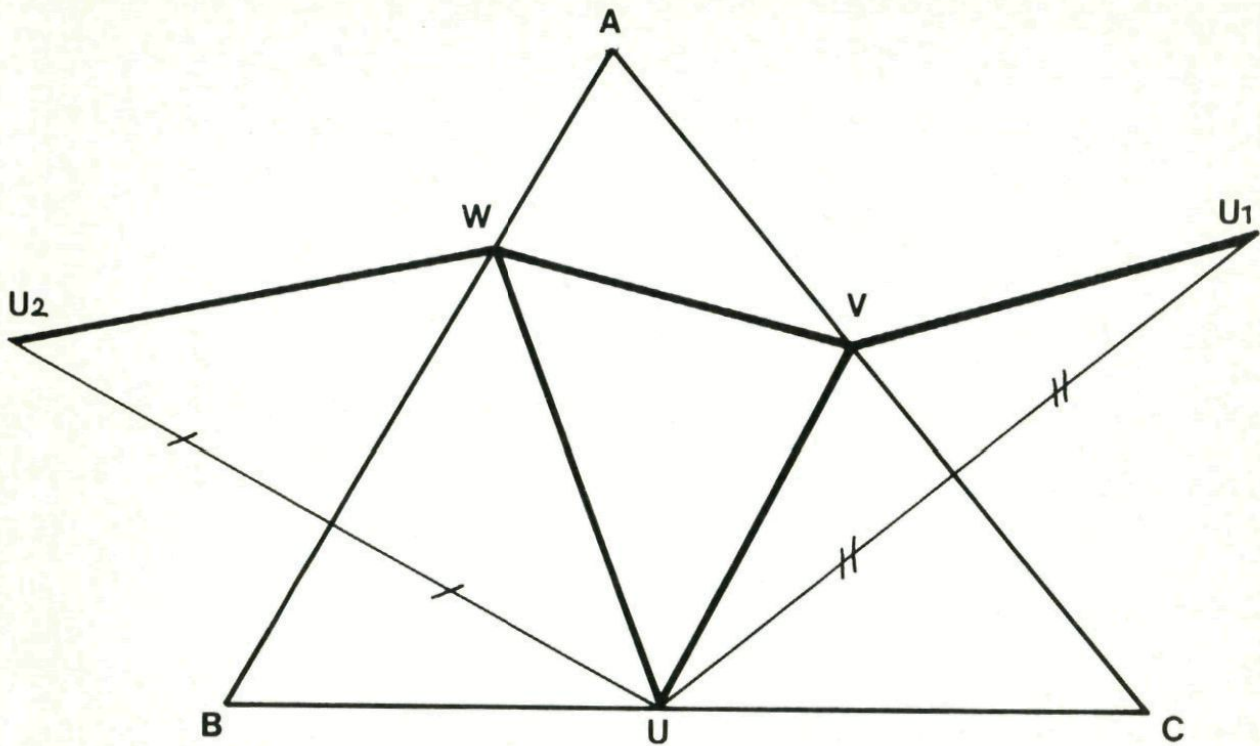
maar met de gelijkheden (1) en (2) ook als

$$U_1V + VW + WU_2.$$

Deze tweede uitdrukking is de lengte van een gebroken lijnstuk van U_1 naar U_2 . Deze lengte is minimaal als dat lijnstuk niet gebroken is, maar recht. Van alle ingeschreven driehoeken UVW met een gegeven hoekpunt U op BC heeft de driehoek met V en W op de rechte U_1U_2 dus de kleinste omtrek. De vraag is nu dát punt U te vinden waarbij het lijnstuk U_1U_2 zo klein mogelijk is.



Figuur 1. Een ingeschreven driehoek PQR van driehoek ABC .



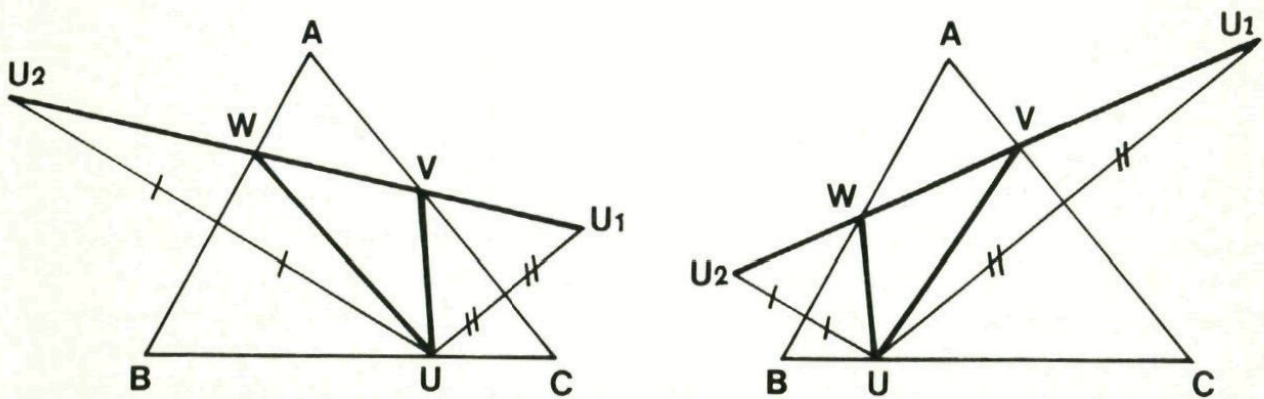
Figuur 2. De omtrek van driehoek UVW is gelijk aan $U_2W + WV + VU_1$.

Gelijkbenige driehoek

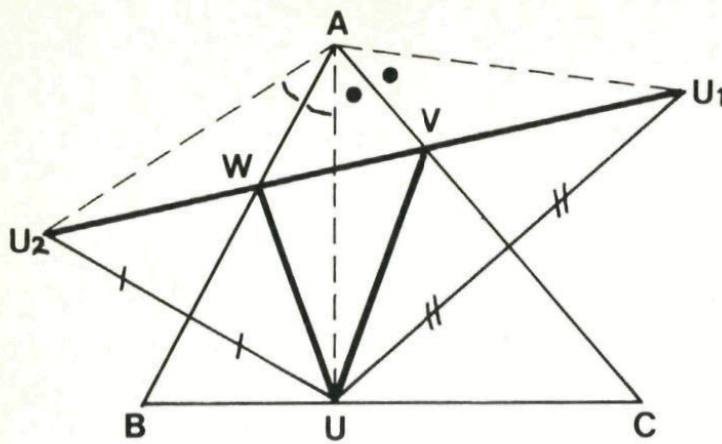
Een ingeschreven driehoek UVW met V en W op de rechte door U_1 en U_2 is gemakkelijk te construeren. Kies U op BC . U spiegelen in AC en AB levert U_1 en U_2 (figuur 3).

Trek U_1U_2 , en noem de snijpunten met AC en AB achtereenvolgens V en W .

Trek AU , AU_1 en AU_2 (figuur 4). Lijnstuk AU_1 is het spiegelbeeld van lijnstuk AU bij spiegeling in AC . Dus $AU = AU_1$ en de hoeken



Figuur 3. Twee ingeschreven driehoeken met W en V op de rechte door de spiegelbeelden U_1 en U_2 .



Figuur 4. Driehoek U_1AU_2 is gelijkbenig. De tophoek van driehoek U_1AU_2 hangt niet af van de keuze van punt U op BC .

bij A aangegeven met een stip, zijn gelijk.

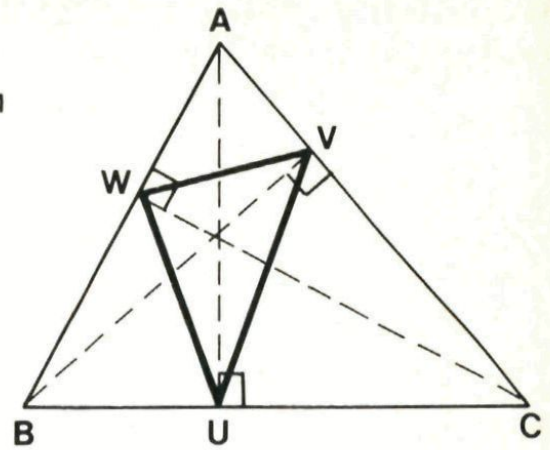
Lijnstuk AU_2 is het spiegelbeeld van lijnstuk AU bij spiegeling in AB . Dus $AU = AU_2$ en de hoeken bij A aangegeven met een boogje, zijn gelijk.

Omdat nu AU_1 gelijk is aan AU_2 , is driehoek U_1AU_2 gelijkbenig. Bovendien is de tophoek van die driehoek tweemaal zo groot als hoek BAC , een hoek van de gegeven driehoek ABC . Dit is onafhankelijk van de keuze van U op BC . Hoe U ook wordt gekozen, steeds zal driehoek U_1AU_2 gelijkbenig zijn met een tophoek die tweemaal zo groot is als hoek BAC .

Zo klein mogelijke basis

Het lijnstuk U_1U_2 is de basis van een gelijkbenige driehoek met een vaste tophoek. Die basis zal zo klein mogelijk zijn als de gelijke benen (te weten AU_1 en AU_2) zo klein mogelijk zijn.

Aangezien AU_1 en U_2A beiden gelijk zijn aan AU , zal de basis van



Figuur 5. De voetpunten U , V en W van de hoogtelijnen vormen de ingeschreven driehoek met de kleinst mogelijke omtrek.

driehoek U_1AU_2 zo klein mogelijk zijn als AU zo klein mogelijk is. Lijnstuk AU is zo klein mogelijk, als AU loodrecht staat op BC . Anders gezegd, AU moet de hoogtelijn zijn van uit A op BC .

Orthocentrische driehoek

In plaats van met U op BC had ook begonnen kunnen worden met V op AC . Dan was gevonden dat BV een hoogtelijn moet zijn van uit B op AC .

Voor hetzelfde geld had ook begonnen kunnen worden met W op AB . In dat geval was gevonden dat WC een hoogtelijn moet zijn op AB .

Kortom, in een scherphoekige driehoek ABC vormen de voetpunten van de hoogtelijnen de hoekpunten van de ingeschreven driehoek met zo klein mogelijke omtrek (figuur 5). Deze driehoek is een bijzonder soort *voetpuntdriehoek* (zie kaderstukje) en wordt wel de *orthocentrische driehoek* van driehoek ABC genoemd. □

Voetpuntdriehoek

Een voetpuntdriehoek in een driehoek ABC is een driehoek met als hoekpunten de voetpunten U , V en W van de loodlijnen uit een willekeurig punt P op de zijden van driehoek ABC (figuur 1).

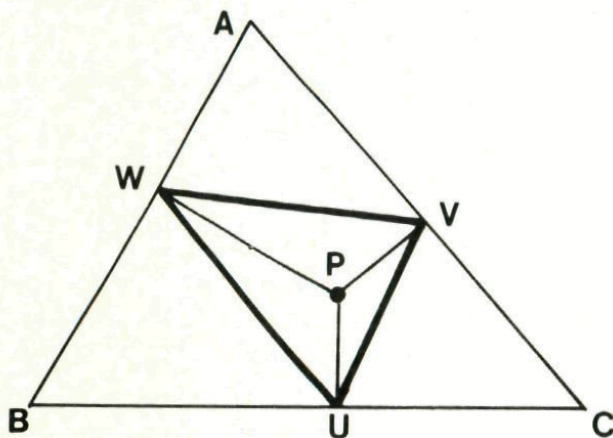
De keuze van P is vrij. Daarom zijn in een driehoek ABC vele voetpuntdriehoeken mogelijk. Een bijzondere is de *orthocentrische driehoek*. Dat is de voetpuntdriehoek waarvan de hoekpunten de voetpunten zijn van de hoogtelijnen. Deze snijden elkaar in één punt, het *hoogtepunt*, meestal aangegeven met H .

Het punt P dat nodig is voor een voetpuntdriehoek, is bij de orthocentrische driehoek dus het hoogtepunt (figuur 2 A en B).

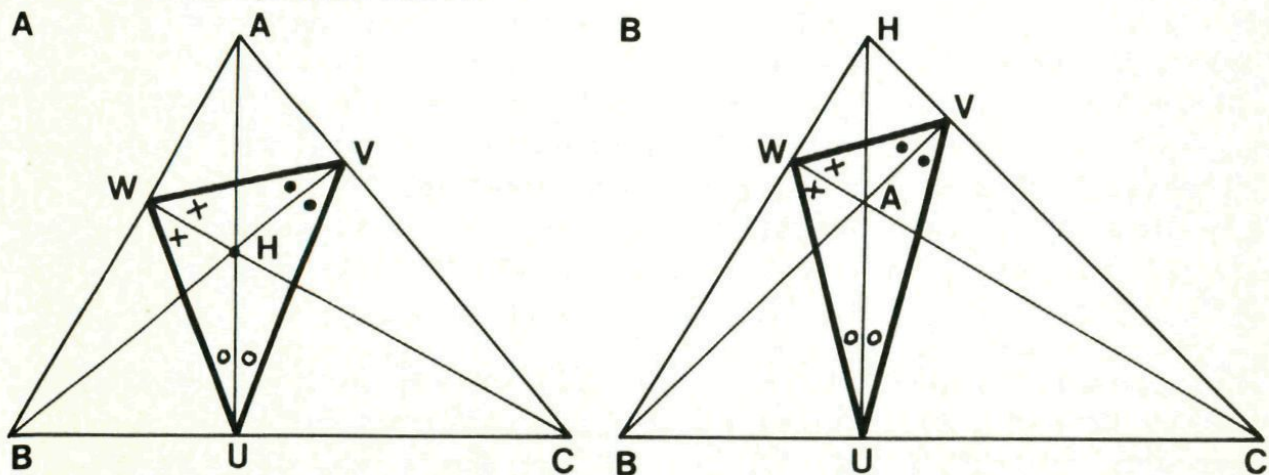
Zoals we zagen in het artikel, is de orthocentrische driehoek in een *scherphoekige* driehoek ABC de ingeschreven driehoek met de kleinst mogelijke omtrek. Bovendien zijn in een *scherphoekige* driehoek de hoogtelijnen de bissectrices van de orthocentrische driehoek (figuur 2A). Een bewijs voor deze stelling laten we hier achterwege.

In een *stomphoekige* driehoek ABC gaat genoemde bissectrice-stelling niet op. Voor de situatie in figuur 2B zijn de hoogtelijn AU en de zijden AB en AC de bissectrices van de orthocentrische driehoek.

In een *stomphoekige* driehoek is de orthocentrische driehoek geen ingeschreven driehoek (figuur 2B). Als er daar al sprake zou kunnen zijn van een ingeschreven driehoek met de kleinst mogelijke omtrek, dan is dat dus *zeker niet* de orthocentrische driehoek. □

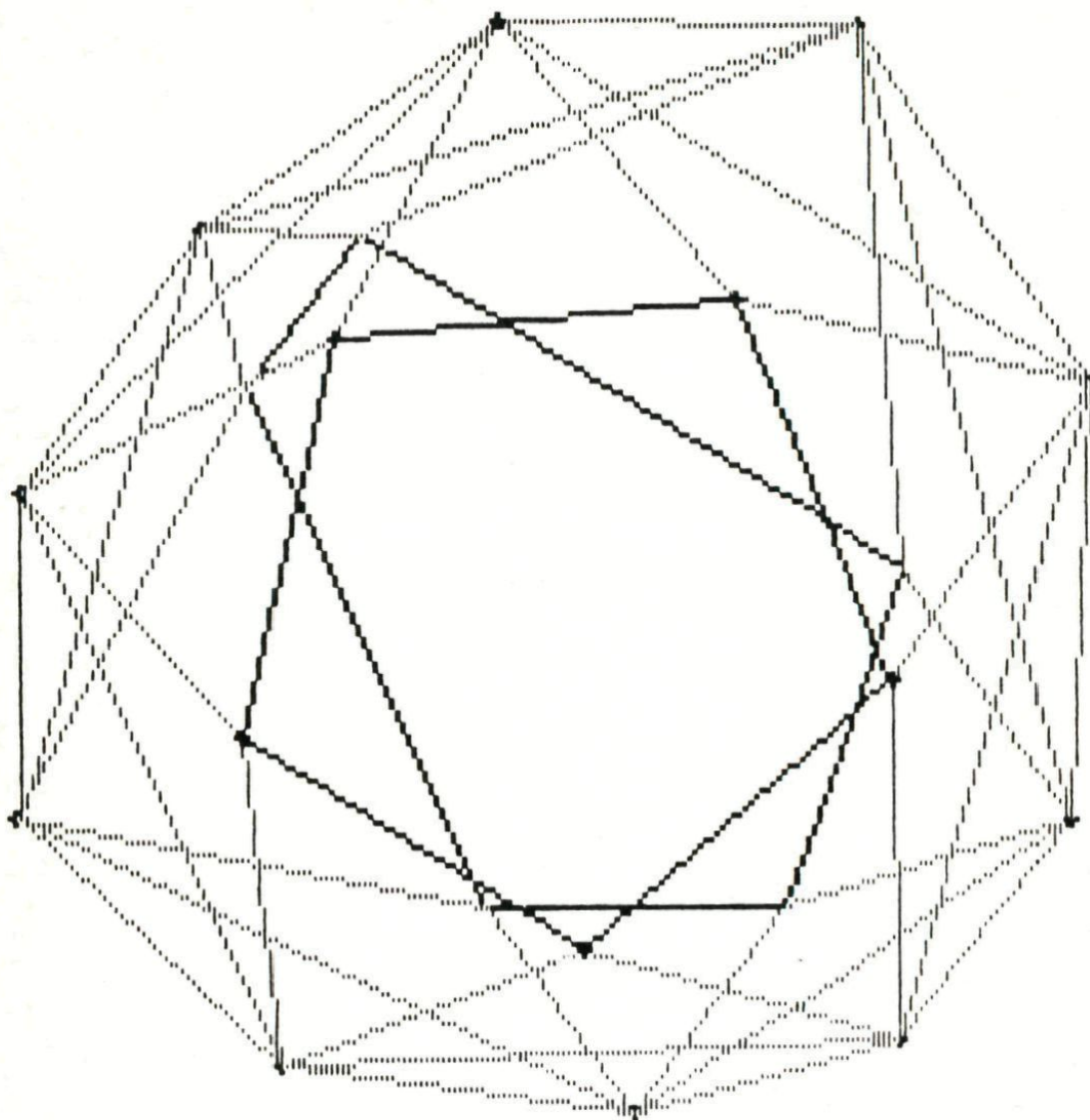


Figuur 1. Voetpuntdriehoek in driehoek ABC ten opzichte van P .



Figuur 2. Orthocentrische driehoek in een *scherphoekige* driehoek ABC (A) en in een *stomphoekige* driehoek ABC (B).

De stelling van Petr



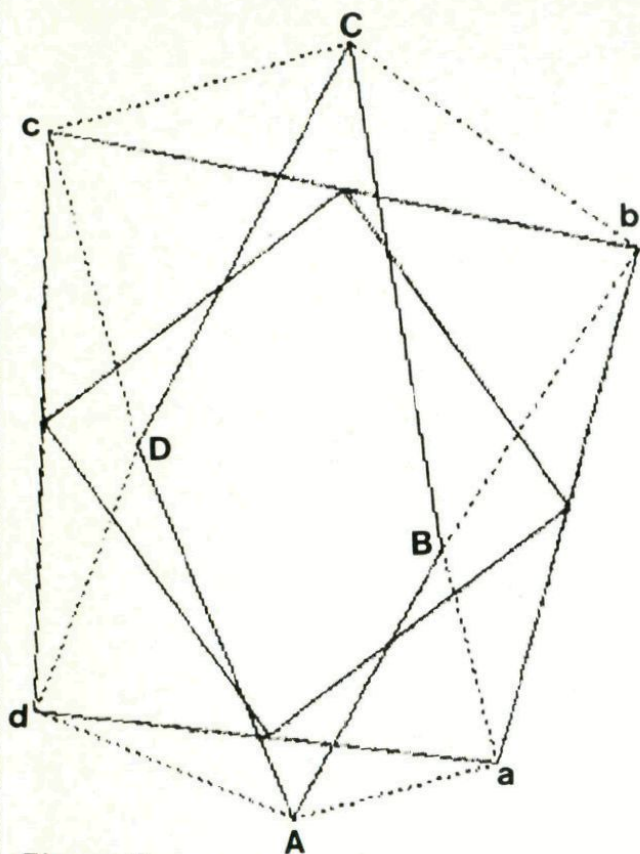
Op het artikel 'Het reguleren van veelhoeken' in het eerste nummer van deze jaargang ontvingen we reacties van de heer *Kraeima* uit Zwolle, *Gustav Strijkers* uit Grevenbicht en *Frank Vernailen* uit Erpe-Mere (België).

Gustav Strijkers stuurde een plottertekening van de voorplaat van nummer 1. De heer Kraeima stuurde twee plottertekeningen (figuur 2 en figuur 3). Frank Vernailen ten slotte zond ons een schijfje, programma-listings plus beschrijvingen en enkele plottertekeningen (waar onder figuur 1).

Vierhoek reguleren

Figuur 1 geeft het reguleren van een vierhoek $ABCD$ weer. Op de zijden komen naar buiten toe gelijkbenige driehoeken ABa , BCb ,

CDc en DAd met een tophoek van $\frac{1}{4} \times 360^\circ = 90^\circ$. De toppen van deze driehoeken vormen een vierhoek $abcd$. Op de zijden ab , bc , cd en da van deze vierhoek

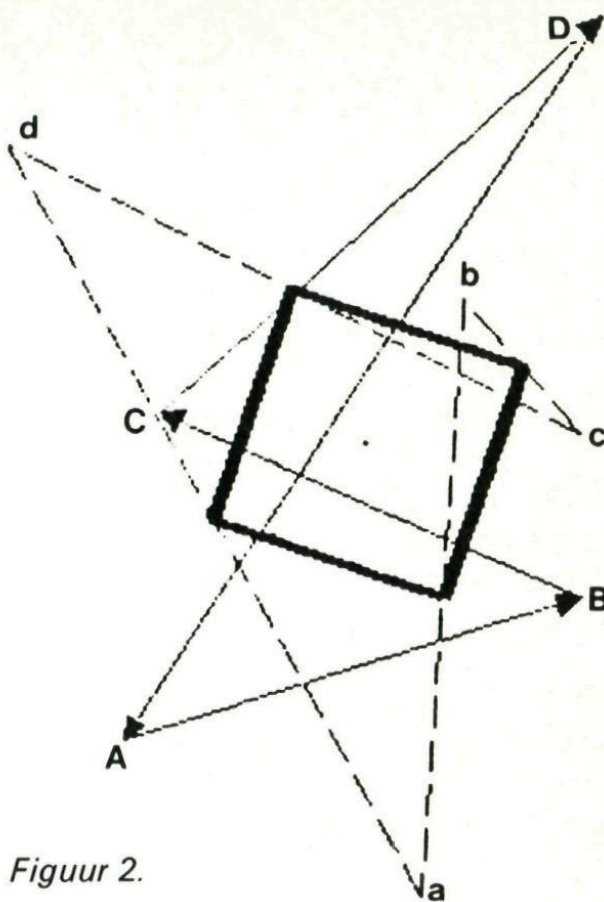


Figuur 1.

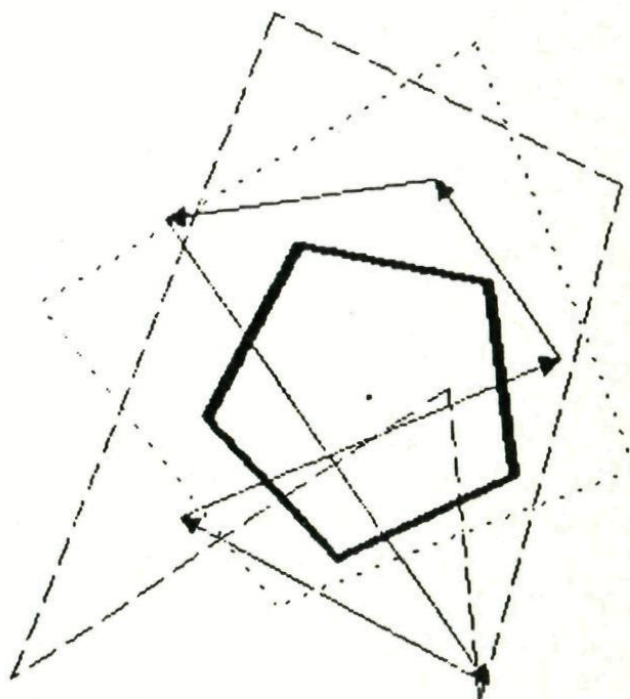
komen weer gelijkbenige driehoeken, maar nu met een top-hoek van $\frac{3}{4} \times 360^\circ = 180^\circ$. Kortom, de middens van de zijden ab , bc , cd en da zijn de toppen van deze gelijkbenige driehoeken. Die middens vormen een vierkant.

In figuur 2 wordt volgens hetzelfde procédé eveneens een vierhoek gereguleerd. Begonnen wordt met vierhoek $ABCD$ die wordt doorlopen in de richting van de pijlen. Dus in de volgorde $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$.

Op de zijden AB , BC , CD en DA komen weer gelijkbenige rechthoekige driehoeken ABa , BCb , CDc en $DA d$. Steeds naar buiten toe, dat wil zeggen aan de rechterkant als je vierhoek $ABCD$ in de aangegeven volgorde door-



Figuur 2.



Figuur 3.

loopt. De driehoeken zelf zijn niet getekend, alleen de toppen a , b , c en d . Deze toppen worden verbonden en zo ontstaat vierhoek

abcd. Daar van de middens van de zijden nemen en je krijgt het dik zwart getekende vierkant.

Vijfhoek reguleren

In figuur 3 wordt de vijfhoek met de pijlen gereguleerd, zoals in het artikel 'Het reguleren van veelhoeken' is beschreven. De gevolgde methode is hetzelfde als in figuur 2. Ga zelf maar na.

Programma

Frank Vernailen maakte een mooi programma in Pascal waarin je zelf het aantal hoekpunten en de coördinaten van de hoekpunten kunt opgeven. Daarna wordt die veelhoek stap voor stap gereguleerd door telkens een toets in te drukken. Hij maakte ook een GW-BASIC ver-

sie van zijn programma. Beide programma's zijn echter te lang om hier af te drukken. Belangstellenden kunnen naar de redactie schrijven, dan sturen we je brief door naar Frank.

In plaats daarvan geven we hier een kort GW-BASIC-programma dat in deze vorm alleen vijfhoeken reguleert (regel 50: $M = 5$). De hoekpunten van de vijfhoek waarmee je begint staan in regel 90. Wil je andere hoekpunten, dan moet je die data veranderen. Wil je het aantal hoekpunten wijzigen, dan moet je zowel regel 50 als regel 90 aanpassen. Het is verder een leuke opgave om na te gaan wat het programma precies doet, en waarom dat werkt, met name in de regels 140 en 150! □

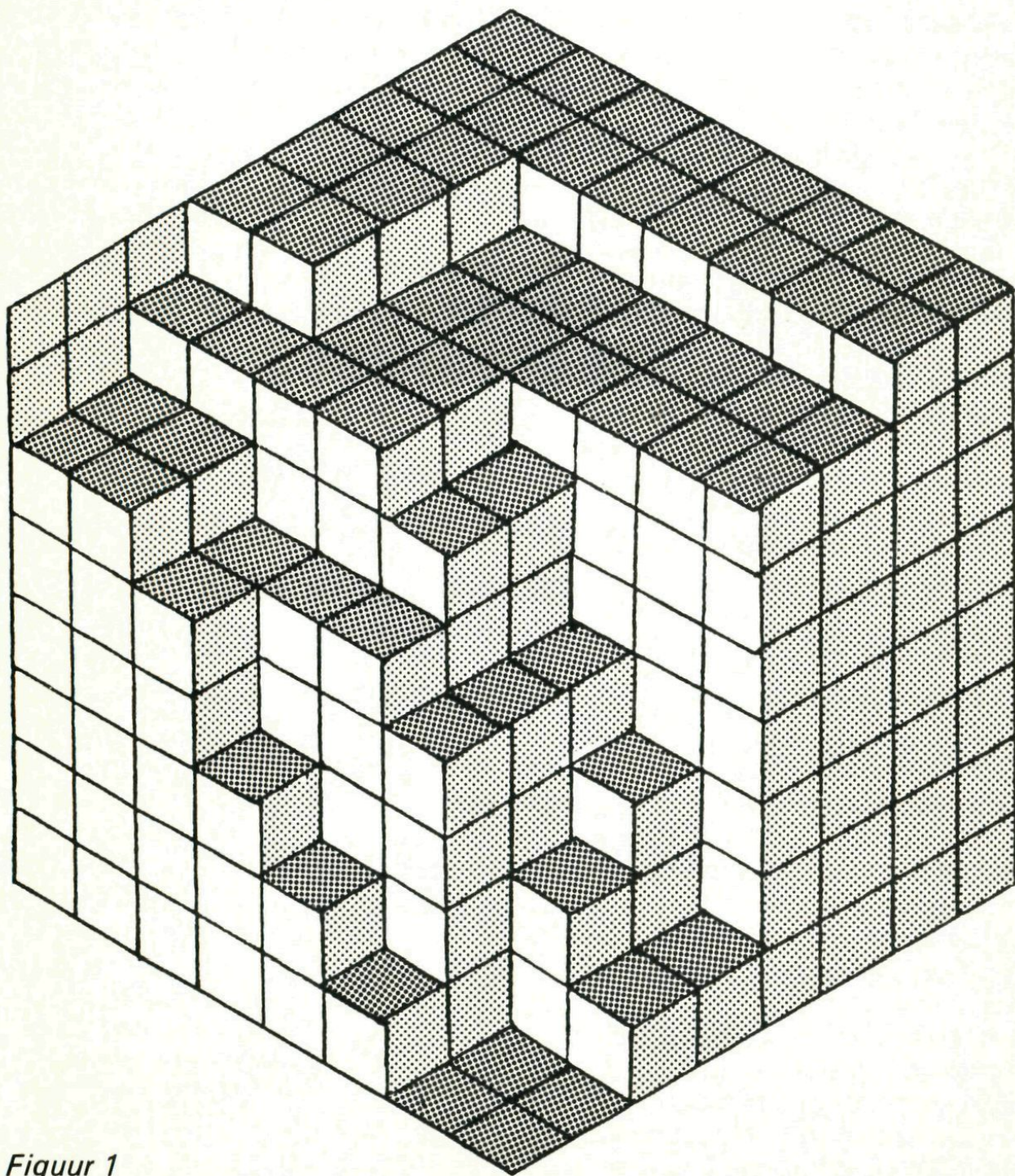
Programma voor het reguleren van een vijfhoek

```
10 REM ***STELLING VAN PETR***
20 REM ***NAAM:PETR***
30 SCREEN 3 : CLS
40 WINDOW (-16,-12)-(16,12)
50 M=5 : DIM X(M),Y(M),U(M),V(M),F(M),CT(M)
60 PI=4*ATN(1) : F=PI/M
70 FOR I=1 TO M-1 : F(I)=I*F : CT(I)=1/TAN(F(I)) : NEXT I
80 REM ***KEUZE BEGINVEELHOEK***
90 DATA 5,4,-4,3,-1,-4,3,-5,3,2
100 FOR I=0 TO M-1 : READ X(I),Y(I) : NEXT I
110 GOSUB 220 : A$=INPUT$(1)
120 FOR L=1 TO M-1
130 FOR K=0 TO M-1
140 U(K)=(X(K)+X(K+1)-CT(L)*(Y(K)-Y(K+1)))/2
150 V(K)=(Y(K)+Y(K+1)+CT(L)*(X(K)-X(K+1)))/2
160 NEXT K
170 FOR I=0 TO M-1
180 X(I)=U(I) : Y(I)=V(I) : NEXT I
190 X(M)=X(0) : Y(M)=Y(0)
200 GOSUB 220 : A$=INPUT$(1)
210 NEXT L : END
220 X(M)=X(0) : Y(M)=Y(0)
230 PSET (X(0),Y(0)) : FOR J=1 TO M
240 LINE -(X(J),Y(J)) : NEXT J : RETURN
250 END
```

Wybertjes in een zeshoek

Een bewijs

Kijk naar figuur 1. Die toont een regelmatige zeshoek die gevuld is met wybertjes. Ze zijn er in drie standen, en elke stand heeft een andere kleur. Van elke kleur zijn er evenveel; dat kun je natellen, maar je kunt het ook zien als je figuur 1 'ruimtelijk' interpreteert als een



Figuur 1

plaatje van gestapelde kubusjes. Kijk je in gedachten vanuit één richting tegen de kubusjes aan, dan zie je precies n^2 vierkantjes, en dat zijn juist alle wybertjes van één kleur. In het eerste nummer van deze jaargang hebben we het daar uitvoerig over gehad.

Twijfel

Toch bleef er enige twijfel knagen; niet over de geldigheid van die redenering in dit getekende geval, maar over de *algemene* geldigheid. Kun je *elke* zeshoeksvulling op zo'n manier ruimtelijk interpreteren? En zie je dan ook altijd dat er van elke kleur evenveel wybertjes zijn? Kunnen er geen 'onmogelijke figuren' optreden?

Daarom vroegen we ons toen af of de conclusie dat er bij *elke* zeshoeksvulling evenveel wybertjes van elke soort zijn, wel gerechtvaardigd is. We maken nu aan alle twijfels een einde door een waterdicht bewijs te geven.

Bewijs

Neem een willekeurige regelmatige zeshoek in gedachten, en neem aan dat die op de een of andere manier verdeeld is in wybertjes. De lengte van de zijde van een wybertje nemen we als eenheid van lengte. Stel dat de regelmatige zeshoek dan zijden heeft van lengte n .

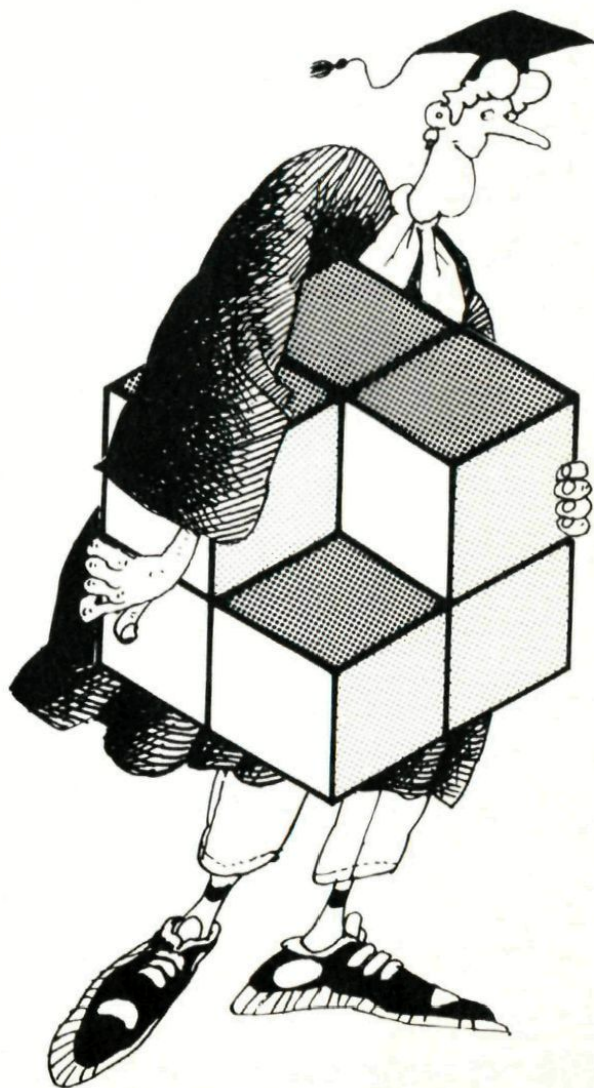
We denken ons verder voor het gemak maar weer in dat de wybertjes gekleurd zijn in drie kleuren, zeg wit, grijs en zwart (of donkergrijs), al naar gelang de stand die ze in de zeshoek innemen.

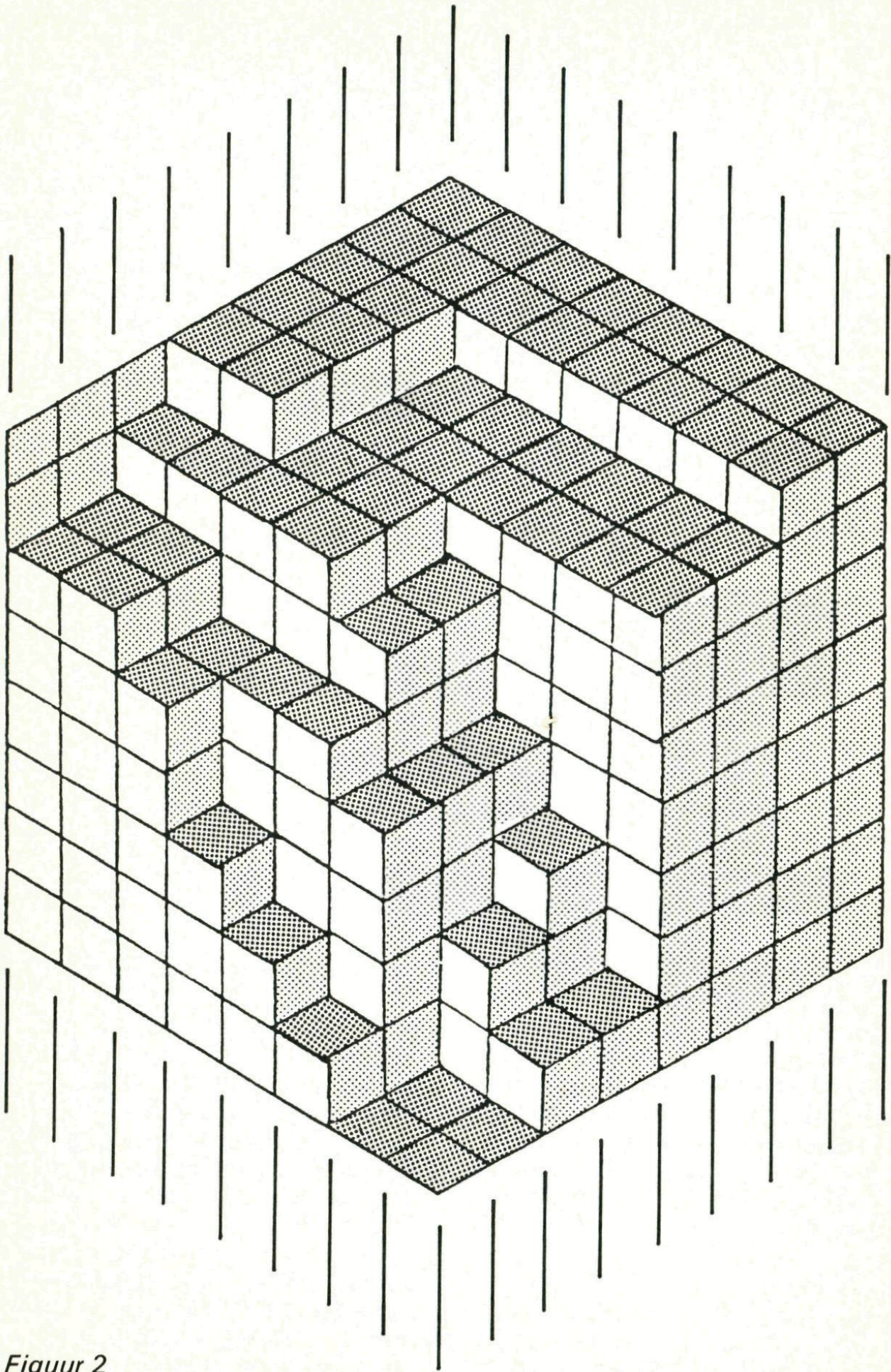
Wat we willen bewijzen is dat er precies n^2 wybertjes zijn van elke kleur. We zullen dat doen zonder ons te beroepen op enige vorm van ruimtelijk inzicht. Zelfs een

'platlander' moet ons bewijs kunnen volgen.

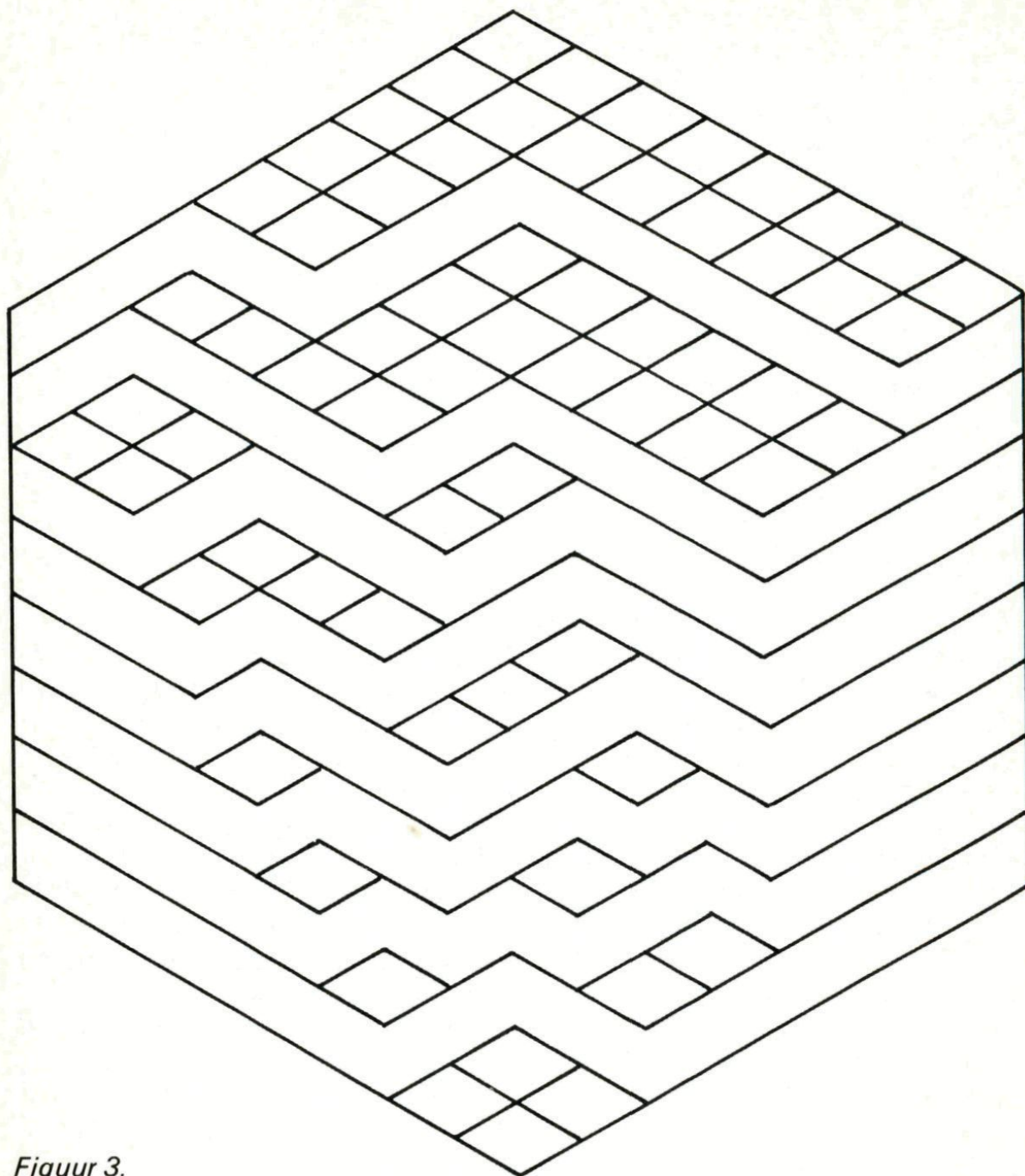
Om gemakkelijker te kunnen praten, nemen we aan dat de zeshoek op z'n punt staat, zoals in figuur 1. We kijken eerst naar de wybertjes die *vertikale* zijden hebben. Dat zijn precies de witte en de grijze.

We verdelen de zeshoek vervolgens in verticale stroken; in figuur 2 is aangegeven hoe. Er zijn





Figuur 2



Figuur 3.

$2n$ van die stroken; witte en grijze wybertjes liggen altijd precies binnen een strook, en zwarte wybertjes bedekken altijd een gedeelte van twee aangrenzende stroken.

Kettingen

Elk wit of grijs wybertje dat niet tegen de linker- of rechter zijkant van de zeshoek aan ligt, heeft

precies één linker- en één rechterbuurman. Dat zijn de wybertjes die er langs de verticale zijken tegenaan liggen. Het zijn altijd weer witte of grijze wybertjes.

Je kunt dus wit-grijze *kettingen* maken van buur-wybertjes die langs verticale zijden aan elkaar vast zitten. Elke ketting begint aan de verticale linkerzijkant van

de zeshoek, en eindigt aan de verticale rechterzijkant. Elk wit of grijs wybertje zit in één ketting, en elke ketting bestaat ook alleen maar uit witte of grijze wybertjes. In figuur 3 hebben we de kettingen zichtbaar gemaakt door alle verticale scheidingswanden weg te halen.

De lengte van een ketting is altijd $2n$, want elke ketting heeft met elke verticale strook precies één wybertje gemeen. En omdat elk wybertje slechts in één ketting tegelijk kan zitten, kunnen kettingen elkaar niet snijden.

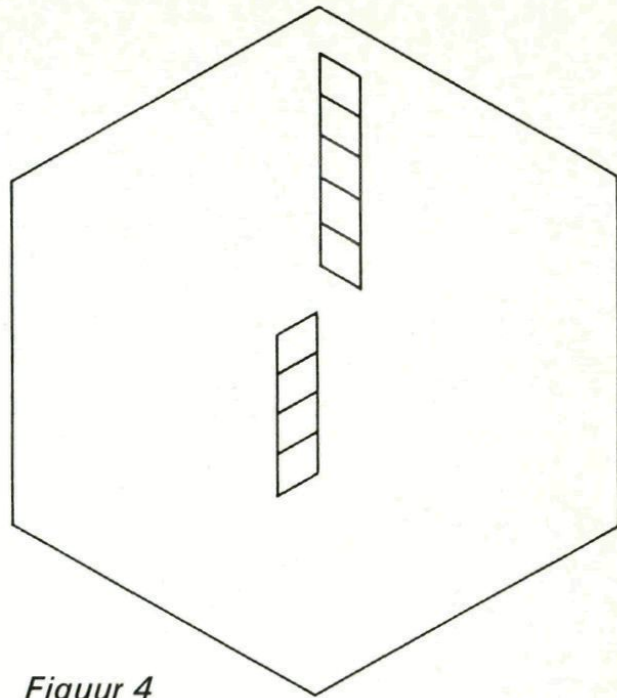
De n kettingen die links aan de rand van de zeshoek beginnen, eindigen, netjes onder elkaar, allemaal weer aan de rechterrاند. Onderweg zijn ze misschien hier en daar uit elkaar gegaan om 'zwarte eilanden' te omsluiten, maar rechts eindigen ze weer netjes op volgorde onder elkaar. Het aantal wybertjes in de kettingen is dus in totaal $n \cdot 2n = 2n^2$, en aangezien het precies de zwarte wybertjes zijn die niet in deze kettingen zitten, zijn er in totaal $N - 2n^2$ zwarte wybertjes, waarbij N het totale aantal wybertjes in de zeshoek is.

Dezelfde redenering geeft, toegepast op wit-zwarte of grijs-zwarte kettingen, even zo veel grijze en witte wybertjes. Van alle kleuren zijn er dus evenveel. Hoeveel? Tel alle wybertjes maar bij elkaar. Dan moet je weer N krijgen. Dus

$$(N-2n^2) + (N-2n^2) + (N-2n^2) = N.$$

Hieruit volgt dat $N = 3n^2$. Dat betekent dat er van elke soort n^2 wybertjes zijn.

Hiermee is het bewijs voltooid. □



Figuur 4

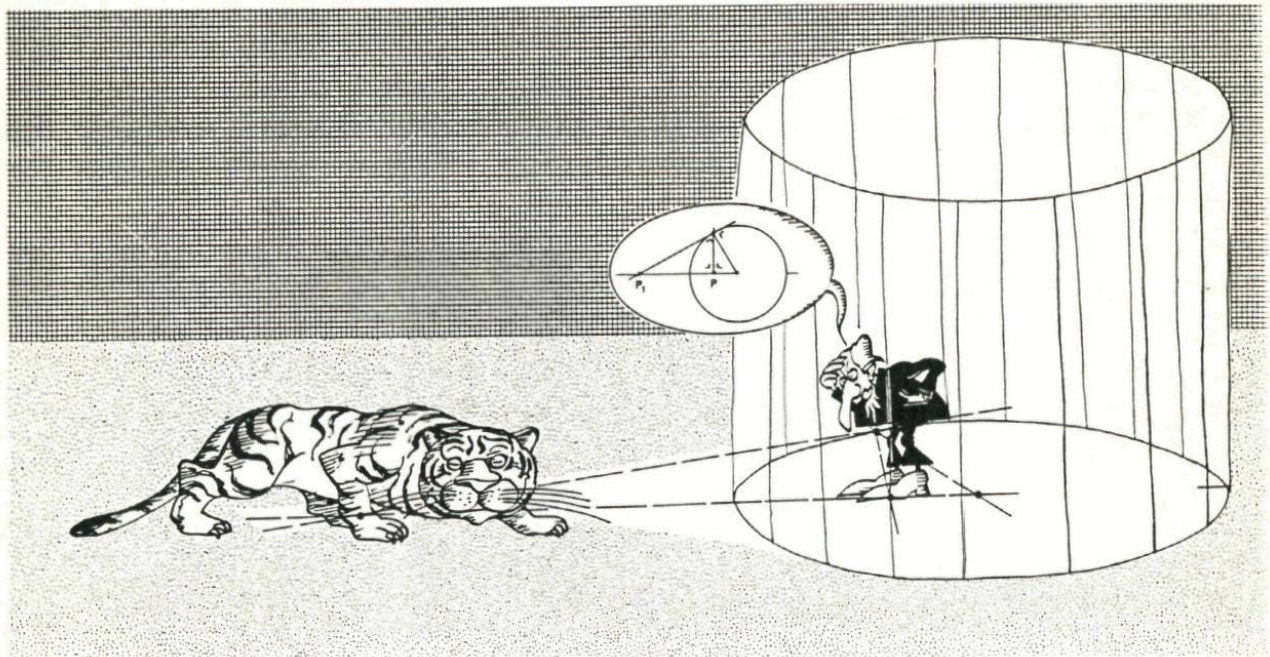
De onmogelijke vulling

We hadden ook nog de opgave gesteld om te bewijzen dat de zeshoek van figuur 4 met zijden van lengte 8 niet volledig met wybertjes kan worden opgevuld. Dat zie je als volgt.

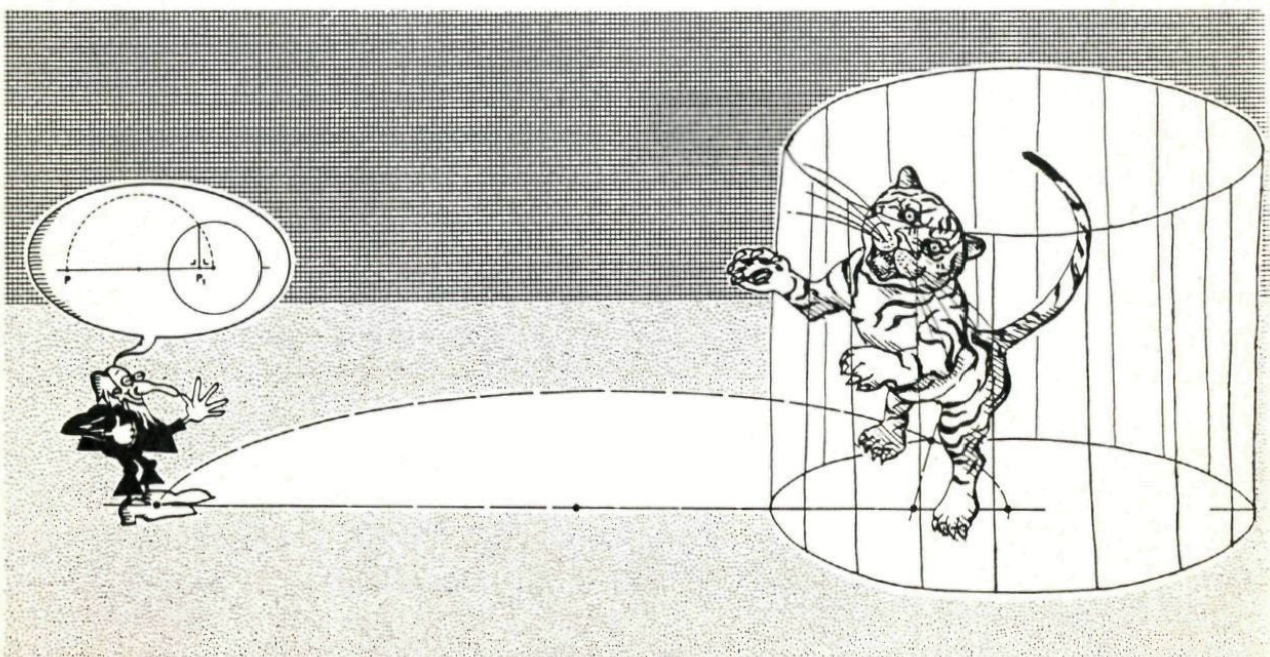
De 9 getekende wybertjes moeten allemaal in *verschillende* wit-grijze kettingen zitten. Maar er zijn maar acht kettingen, want de zijden van de zeshoek hebben lengte 8. Dat kan dus niet.

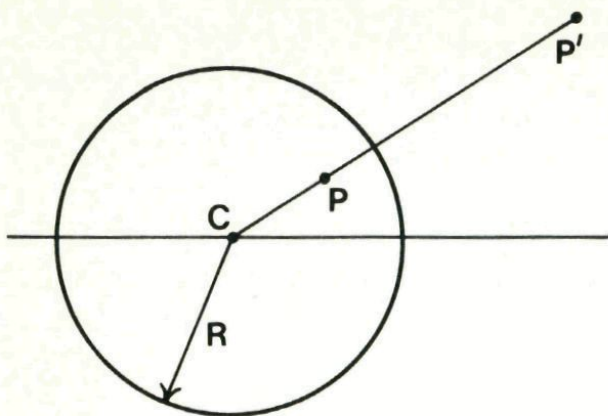
Ten slotte nog twee vragen: kun je nu zelf bewijzen dat er in elke wit-grijze ketting *evenveel* witte als grijze wybertjes zitten? En hoe zit het eigenlijk met het 'ruimtelijke' bewijs? Zou je dat waterdicht kunnen maken door bij elke zeshoeksvulling ook een ruimtelijk kubusbouwwerk, bij voorbeeld in een geschikt coördinatenstelsel, te construeren? Zou je een computer zo kunnen programmeren dat hij daarvoor een coördinatenbeschrijving levert? Denk er maar eens over na!

Inversie



Wiskundigen maken soms vreemde grapjes die voor 'buitenstaanders' dikwijls volkomen onbegrijpelijk zijn. Een aardig voorbeeld is de manier waarop een wiskundige een tijger in een kooi weet te krijgen. Hij neemt een cirkelvormige kooi en gaat er zelf in zitten. De tijger bevindt zich ergens buiten de kooi. Daarna past de wiskundige inversie (een meetkundige transformatie) toe die tot gevolg heeft dat binnen- en buitengebied van de cirkelvormige kooi worden verwisseld. Na de transformatie zit de tijger dus in de kooi, terwijl de wiskundige in de vrije wereld staat.





Figuur 1. Inversie ten opzichte van het centrum C met macht R^2 .

Wat is inversie?

Wat inversie precies is laat zich het beste uitleggen aan de hand van figuur 1. Inversie wordt bepaald door een centrum C en door een cirkel met C als middelpunt, of liever door het kwadraat van de straal R van deze cirkel. Dit kwadraat van R wordt de *macht* van de inversie genoemd. Men heeft het soms wel over *cirkel-inversie*, wanneer het wenselijk is onderscheid te maken met andere betekenissen van het begrip inversie.

Inversie ten opzichte van een punt C houdt nu in dat een willekeurig punt P overgaat in een punt P' op de lijn CP , zodanig dat

$$CP \cdot CP' = R^2.$$

We zeggen dan dat P' het inverse punt is van P .

Wanneer lijnstuk CP gelijk is aan R , dan is ook CP' gelijk aan R . Hieruit volgt dan dat P' samenvalt met P . Anders gezegd, alle punten van de cirkel om C met straal R blijven bij inversie op hun plaats.

Is $CP < R$, dan is $CP' > R$. Punten binnen de cirkel komen na inversie dus buiten de cirkel terecht, en omgekeerd.

Tweemaal inversie

Inversie is een speciaal geval van een meetkundige transformatie, een voorschrift dat uit een gegeven punt P , het origineel, een nieuw punt afleidt, het beeldpunt. Punt P' is dus het beeldpunt van P . Uit de definitie van inversie volgt onmiddellijk dat wanneer we P' op zijn beurt als origineel opvatten, P' het beeldpunt P heeft. Anders gezegd, als we de inversie twee maal na elkaar uitvoeren, staat alles weer op zijn oorspronkelijke plaats. Deze eigenschap vind je bij voorbeeld ook bij het spiegelen om een lijn (lijnspiegeling). Je zou dus kunnen zeggen dat (cirkel-)inversie een meetkundige spiegeling is ten opzichte van een cirkel.

Uitzondering

Met uitzondering van het centrum C kan elk punt van het platte vlak worden geïnverteerd. Punten P die heel dicht bij C liggen, komen na inversie ver weg in het vlak terecht. Laten we P steeds dichter naar C naderen, dan komen we tot het inzicht dat de inverse van C kan worden opgevat als de oneindig verre 'begrenzing' van het vlak.

Het omgekeerde is ook waar. De inverse van een oneindig ver punt is altijd C , ongeacht in welke richting het oneindige verre punt zich bevindt.

Met coördinaten

De inversie bezit een paar heel fraaie eigenschappen. We zou-

den ze meteen al kunnen geven, maar het is leuker ze zelf met behulp van de computer te ontdekken. Daartoe gaan we eerst de inversie beschrijven met behulp van coördinaten. We kiezen het centrum C als de oorsprong $(0,0)$ en geven P respectievelijk P' de coördinaten (x,y) en (x',y') . Als de coördinaten van P zijn gegeven, kunnen die van P' worden berekend volgens

$$\begin{aligned}x' &= xR^2/(x^2 + y^2) \\y' &= yR^2/(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

Een afleiding hiervan is te vinden in het kaderstukje 'Transformatieformules'.

INVERS1

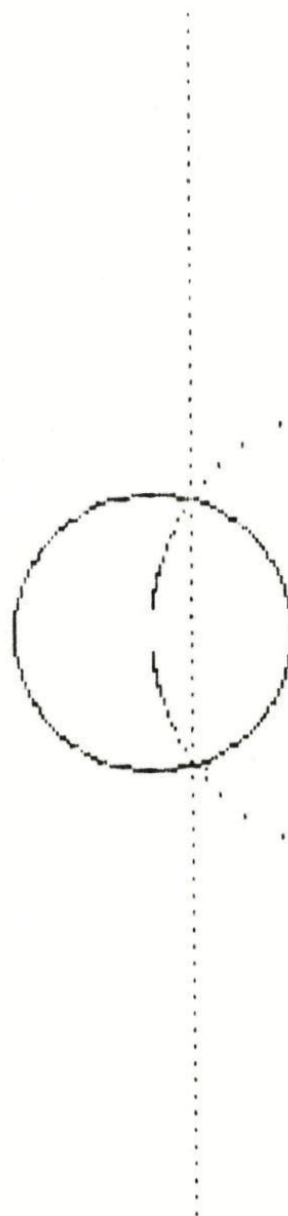
We zijn nu gereed voor het eerste computer-experiment. We laten P een stukje van een rechte lijn doorlopen en kijken hoe de baan van het beeldpunt P' er uit komt te zien. Dit gaat met het programma INVERS1. Dit is evenals de nog volgende programma's geschreven in GW-Basic en aan het einde van dit artikel opgenomen.

Het programma INVERS1 laat P in 100 stappen een verticaal lijnstuk doorlopen. Elke positie van P wordt onderworpen aan een inversie ten opzichte van de eenheidscirkel (cirkel met straal 1). (Opmerking: de keuze van $R=1$ is slechts een kwestie van schaling.)

Wie het programma uitvoert ziet dat P keurig stapje voor stapje een lijnstuk afloopt, terwijl P' een cirkelvormige baan doorloopt (figuur 2). Dit doet vermoeden dat de inverse figuur van een rechte lijn een cirkel wordt.

In het gegeven geval snijdt de rechte lijn de cirkel van inversie in twee punten. De beeldcirkel gaat door dezelfde twee snijpunten. Dat is eenvoudig te verklaren. Immers alle punten op de inversie-cirkel, punten waarvoor geldt $CP=R$, blijven bij inversie op hun plaats.

Wat verder opvalt, is dat de beeldcirkel door het centrum C lijkt te gaan. Ook dat is eenvoud-



Figuur 2. De inverse van een rechte lijn is een cirkel.

dig te verklaren. Als het te inverteren lijnstuk wordt verlengd, zal het twee oneindige verre punten

bevatten. En het beeld van die oneindig verre punten is het centrum C , zoals we al zagen.

Transformatie formules

Kies een assenstelsel en laat het centrum C van de inversie samenvallen met de oorsprong $(0,0)$. Trek een cirkel met straal R en middelpunt C , dat wil zeggen de oorsprong $(0,0)$ (figuur 1). Stel dat $P(x,y)$ door inversie met macht R^2 ten opzichte van $C(0,0)$ overgaat in $P'(x',y')$. Zijn de coördinaten van P bekend, dan moeten die van P' daarmee berekend kunnen worden. Anders gezegd, de coördinaten van P' moeten worden uitgedrukt in die van P .

Allereerst geldt

$$CP = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ en } CP' = \sqrt{x'^2 + y'^2} \quad (1)$$

Voor de macht R^2 van de inversie geldt

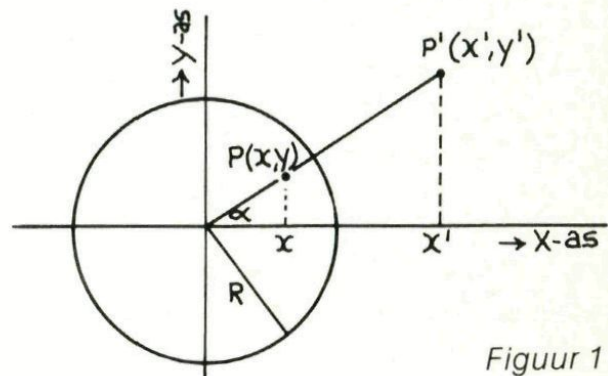
$$CP \cdot CP' = R^2 \text{ of } \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2} = R^2. \quad (2)$$

Voor de cosinus van hoek α geldt nu

$$\cos \alpha = \frac{x}{CP} = \frac{x'}{CP'}$$

Hieruit volgt

$$x' = \frac{x}{CP} \cdot CP' = \frac{x}{CP} \cdot \frac{R^2}{CP} = \frac{x R^2}{x^2 + y^2}$$



Figuur 1

Wegens (2) en daarna (1) kan dit worden geschreven als

$$x' = \frac{x}{CP} \cdot \frac{R^2}{CP} = \frac{x R^2}{x^2 + y^2}$$

... gaande van de sinus van hoek α wordt op vergelijkbare manier de uitdrukking voor y' gevonden.

Omdat in de INVERS-programma's is gekozen voor $R=1$, worden de uitdrukkingen voor x' en y' vereenvoudigd tot

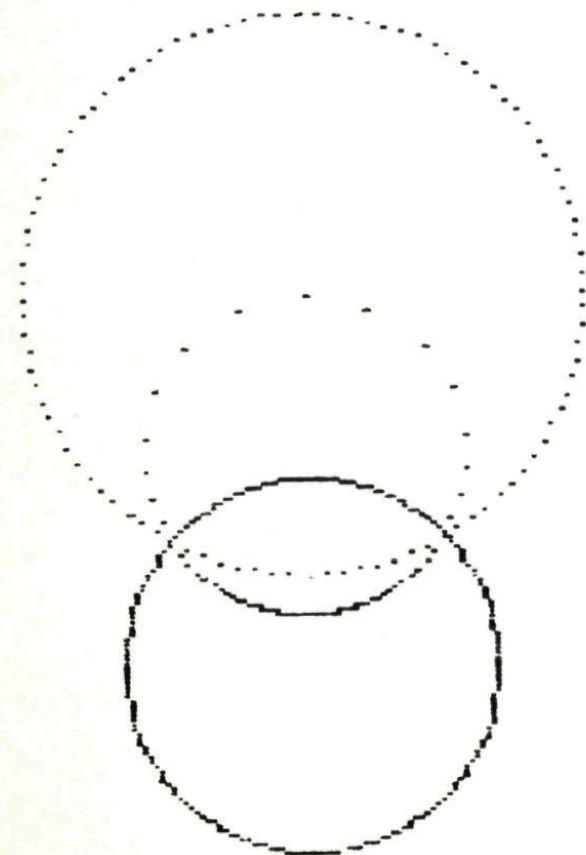
$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \text{ en } y' = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

In INVERS1, INVERS2 en INVERS4 is dit terug te vinden in regel 80 en in INVERS3 in regel 100. □

Al met al zijn er dus genoeg aanwijzingen om te veronderstellen dat de inverse van een rechte lijn een cirkel is door het inversiecentrum C . Netjes bewezen is het echter nog niet. Dat wordt gedaan in het stukje 'Van rechte naar cirkel'.

Rechte en cirkel

Het is je misschien opgevallen dat we in het voorgaande en bij het bewijs een rechte namen die niet door het inversiecentrum gaat. Dat was niet voor niets. Gaat de te inverteren lijn namelijk door het inversiecentrum, dan is de inverse figuur dezelfde lijn. Met behulp van figuur 1 is dit al eenvoudig in te zien. Om toch te kunnen zeggen dat de inverse figuur van een rechte



Figuur 3. De inverse van een cirkel is een cirkel.

altijd een cirkel is, wordt daarom afgesproken dat een rechte lijn is op te vatten als een 'oneindig grote cirkel'. Met deze afspraak valt dus het onderscheid tussen rechten en cirkels weg. Het geeft de mogelijkheid om ten aanzien van inversie tot korte en duidelijke formuleringen te komen, zoals we straks bij de eerste hoofdstelling zullen zien.

INVERS2

We hebben gezien en in een kaderstukje bewezen dat de inverse van een rechte lijn een cirkel is die door het inversiecentrum gaat. Het omgekeerde is dan ook waar. De inverse van een cirkel door C is een rechte lijn. De volgende stap wordt nu natuurlijk het inverteren van een willekeurige cirkel. Met het programma INVERS2 kun je eerst wat experimenteren. Je zult dan zien dat de inverse-figuur weer een cirkel is (figuur 3), tenzij — maar dat wisten we al — de te inverteren cirkel door het centrum C gaat.

Eerste hoofdstelling

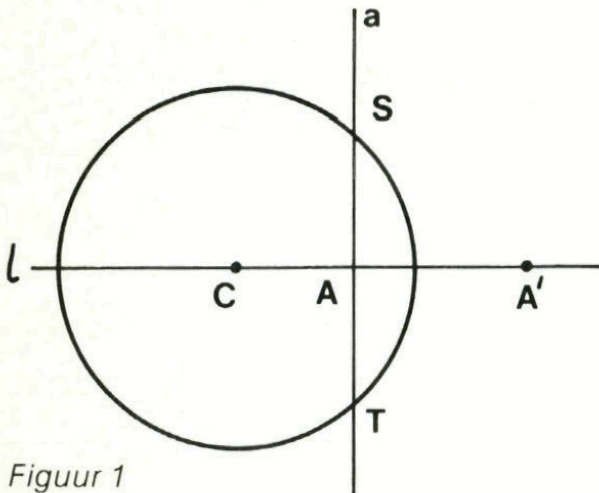
De bevindingen van de programma's INVERS1 en INVERS2 leiden tot de eerste hoofdstelling van de inversie:

De inverse van een cirkel (rechte) is een cirkel (rechte).

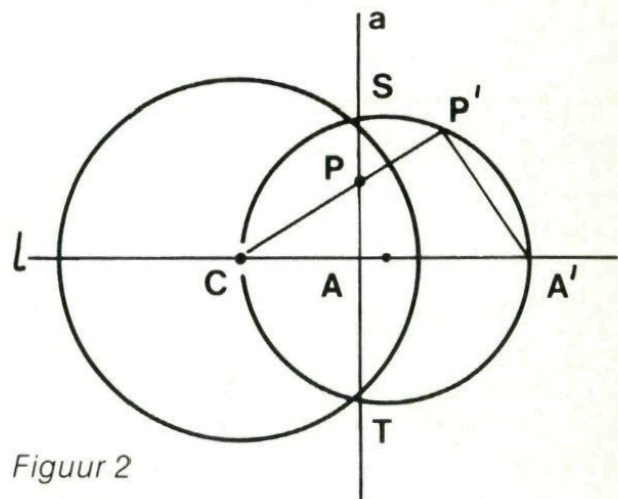
Het complete bewijs voor deze stelling laten we achterwege. Het berust op dezelfde principes als het bewijs dat is gegeven in 'Van rechte naar cirkel'. We experimenteren liever nog wat met de computer.

Van rechte naar cirkel

Er moet worden bewezen dat de inverse van een rechte lijn een cirkel is door het inversie-centrum. Dit is ook anders te formuleren. Stel dat P een punt is op die rechte, en dat P' de inverse is van P . Dan moet worden aangetoond dat P' een cirkel doorloopt, als P de rechte doorloopt.



Figuur 1



Figuur 2

In figuur 1 is C het middelpunt van een cirkel met straal R . Als C het centrum van inversie is, dan is R^2 de macht van de inversie. Lijn a moet worden geïnvverteerd. In figuur 1 snijdt a de cirkel met straal R in S en T . Dit zal aan het bewijs niets afdoen. Het bewijs verloopt op dezelfde manier, indien a de cirkel met straal R niet snijdt.

Door C wordt nu een lijn l loodrecht op lijn a getrokken. Het snijpunt is A . Neem aan dat A' het inverse punt van A is. De inversen van S en T zijn S en T zelf. De 'uiteinden' van a liggen oneindig ver van C af. De inverse van die uiteinden is dus C .

Als de inverse van a een cirkel is, dan zal die cirkel door C , A' , S en T moeten gaan. Aangezien lijn l een symmetrie-as is van de situatie in figuur 1, zal CA' de middellijn van die cirkel moeten zijn.

In figuur 2 is die cirkel getrokken. Bovendien is een willekeurig punt P op a genomen. Dan valt te bewijzen dat de inverse P' van P de cirkel met middellijn CA' doorloopt, als P lijn a doorloopt. Dit gaat door aan te tonen dat in driehoek $CA'P'$ de hoek bij P' altijd 90° is. Lees eventueel het stukje met kopje 'Aanzet' in het artikel 'Echt vierkant!' (op bladzijde 3) nog maar eens na.

Uit de definitie van de inversie volgt

$$CA \cdot CA' = CP \cdot CP',$$

en dus zal de evenredigheid

$$CA : CP = CP' : CA'$$

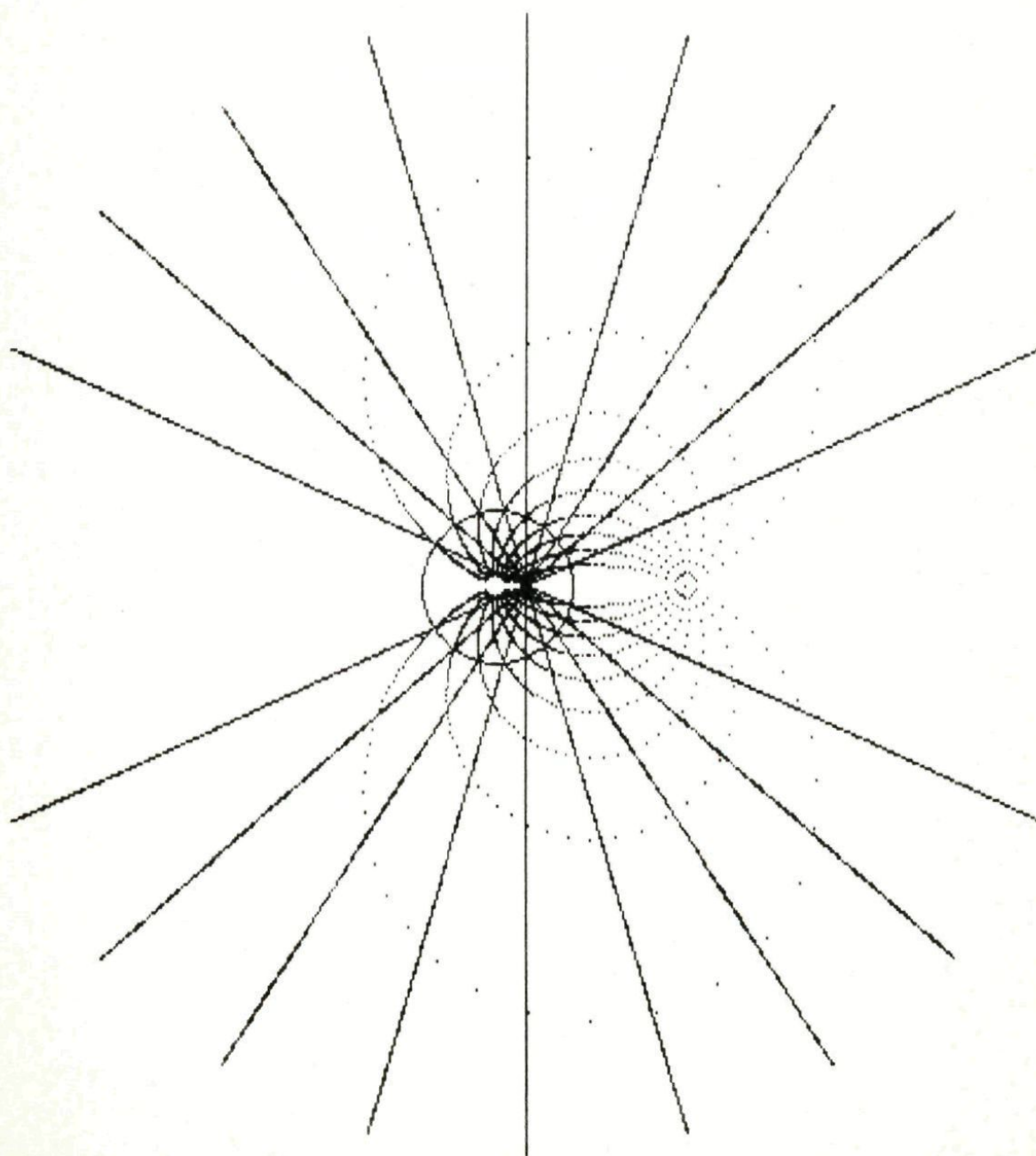
gelden. Daaruit volgt dat de driehoeken CAP en $CP'A'$ gelijkvormig zijn. Omdat de hoek bij A 90° is, zal de hoek bij P' altijd recht zijn. \square

INVERS3

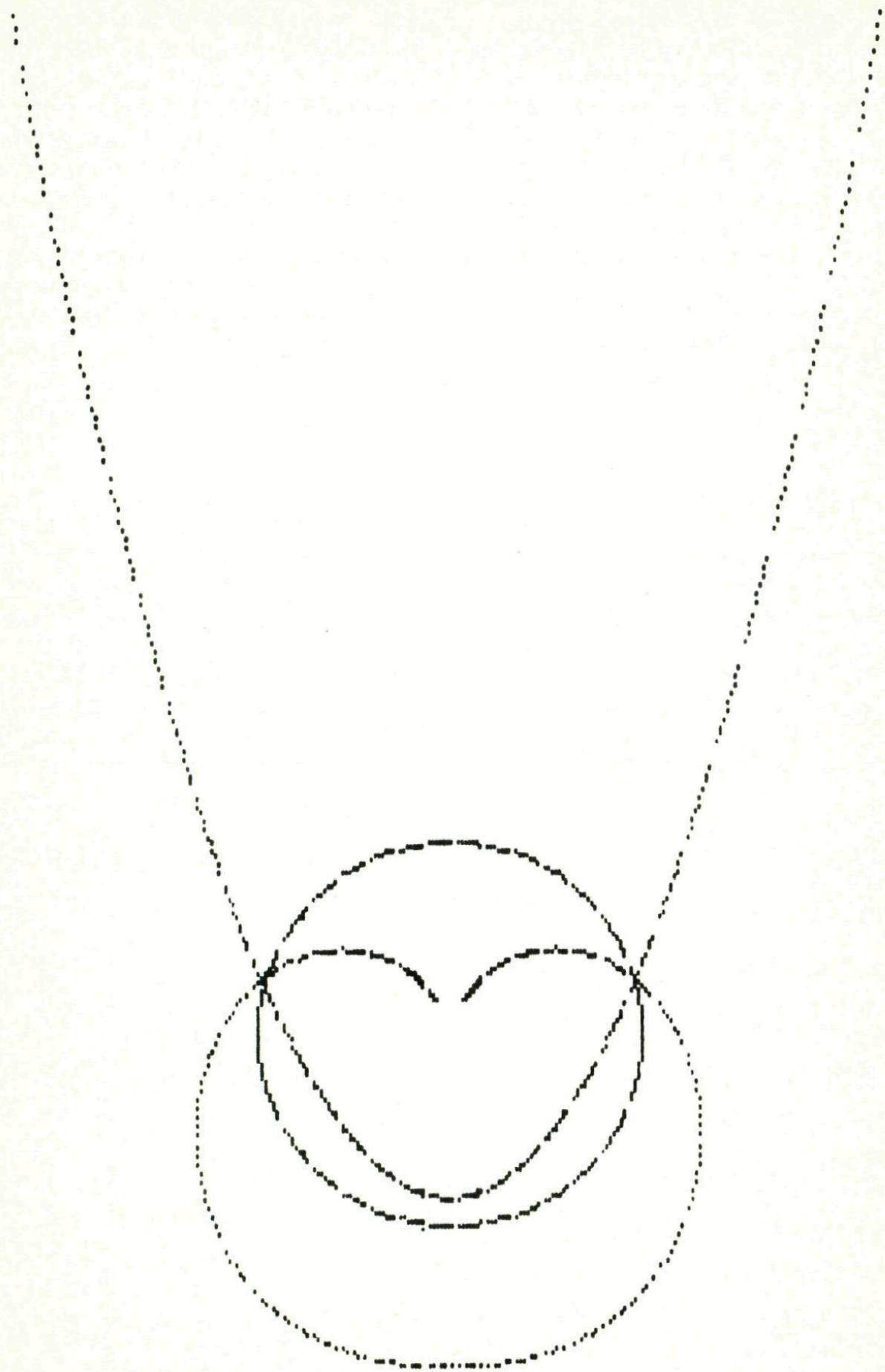
Met het programma INVERS3 wordt een aantal rechten die door één punt gaan (een *lijnenbundel*) aan een inversie onderworpen. Daarbij wordt de zogenaamde parameter-voorstelling van een rechte lijn gebruikt. Die wordt gegeven door

$$\begin{aligned}x &= x_0 + t \sin\alpha \\ y &= y_0 + t \cos\alpha.\end{aligned}$$

Als t alle mogelijke waarden aanneemt, doorloopt het punt (x,y) een rechte lijn die een hoek α maakt met de verticale as. Voor de hoek α worden een negental waarden gekozen met gelijke tussenafstanden. Daardoor maken opeenvolgende rechten steeds dezelfde hoek met elkaar. Het programma toont zowel de negen rechten als de negen beeldcirkels (figuur 4).



Figuur 4. De inverse van een lijnenbundel is een cirkelbundel.



Figuur 5. De inverse van een parabolische kromme is een cardioïde.

De negen beeldcirkels (we spreken van een *cirkelbundel*) blijken twee gemeenschappelijke snijpunten te hebben. Het ene snijpunt is het inversie-centrum *C*. Elke lijn (niet door *C*) gaat immers over in een cirkel door *C*. Het andere snijpunt is natuurlijk het beeld van het gemeenschappelijk punt van het stelsel rechte lijnen. We zien dus dat de inverse figuur van een lijnenbundel een cirkelbundel is. Wat wordt de inverse van een stelsel evenwijdige rechten?

Tweede hoofdstelling

Bij het experiment met INVERS3 valt het misschien op dat twee rechte lijnen die een bepaalde hoek met elkaar maken, overgaan in twee cirkels die elkaar onder dezelfde hoek lijken te snijden. Dat is inderdaad zo. In het algemeen geldt zelfs de volgende (tweede) hoofdstelling:

Inversie is tegengesteld hoektrouw.

Een korte en krachtige uitspraak, waarbij wel enige toelichting nodig is. Bedoeld is dat een figuur van twee bogen die elkaar onder een bepaalde hoek snijden, overgaat in een soortgelijke figuur. De bogen kunnen na inversie vervormd zijn, maar de tussenliggende hoek blijft onveranderd. Wel is de volgorde van de bogen veranderd: Tegenwijzerzin gaat over in wijzerzin, en omgekeerd.

Ook deze stelling wordt niet bewezen, maar in een volgend artikel 'Het parelsnoer' maken we er wel graag gebruik van.

INVERS4

Wie een beetje handig is in het programmeren kan langs experimentele weg uitzoeken wat de inverse figuur van allerlei andere krommen wordt. In het programma INVERS4 is bij wijze van voorbeeld nog een parabolische kromme geïnverteerd. Het resultaat is een hartvormige kromme, een cardioïde (figuur 5). □

Programma's

INVERS 1

```
10 REM ***INVERSIE VAN EEN BAAN***
20 REM ***NAAM: INVERS1***
30 SCREEN 3 : CLS
40 WINDOW (-8,-6)-(8,6)
50 CIRCLE (0,0),1
60 FOR K=0 TO 100
70 X=.3 : Y=-6+12*K/100
80 S=X*X+Y*Y : U=X/S : V=Y/S
90 PSET (X,Y) : PSET (U,V)
100 NEXT K : END
```

INVERS 2

```
10 REM ***INVERSIE VAN EEN BAAN***
20 REM ***NAAM: INVERS2***
30 SCREEN 3 : CLS : PI=3.141593
40 WINDOW (-8,-6)-(8,6)
50 CIRCLE (0,0),1
60 FOR K=0 TO 100 : T=K*PI/50
70 X=2+1.5*COS(T) : Y=1.5*SIN(T)
80 S=X*X+Y*Y : U=X/S : V=Y/S
90 PSET (X,Y) : PSET (U,V)
100 NEXT K : END
```

INVERS 3

```
10 REM ***INVERSIE VAN STELSEL RECHTEN***
20 REM ***NAAM: INVERS3***
30 SCREEN 3 : CLS : PI=3.141593
40 WINDOW (-8,-6)-(8,6)
50 CIRCLE (0,0),1
60 FOR J=-4 TO 4
70 SS=SIN(J*PI/11) : CS=COS(J*PI/11)
80 FOR K=-300 TO 300 : T=K/40
90 X=.4+SS*T : Y=CS*T
100 S=X*X+Y*Y : U=X/S : V=Y/S
110 PSET (X,Y) : PSET (U,V)
120 NEXT K : NEXT J : END
```

INVERS 4

```
10 REM ***INVERSIE VAN EEN BAAN***
20 REM ***NAAM: INVERS4***
30 SCREEN 3 : CLS : PI=3.141593
40 WINDOW (-6,-3)-(6,4.5)
50 CIRCLE (0,0),1
60 FOR K=-200 TO 200
70 X=K/80 : Y=-.7+X*X
80 S=X*X+Y*Y : U=X/S : V=Y/S
90 PSET (X,Y) : PSET (U,V)
100 NEXT K : END
```

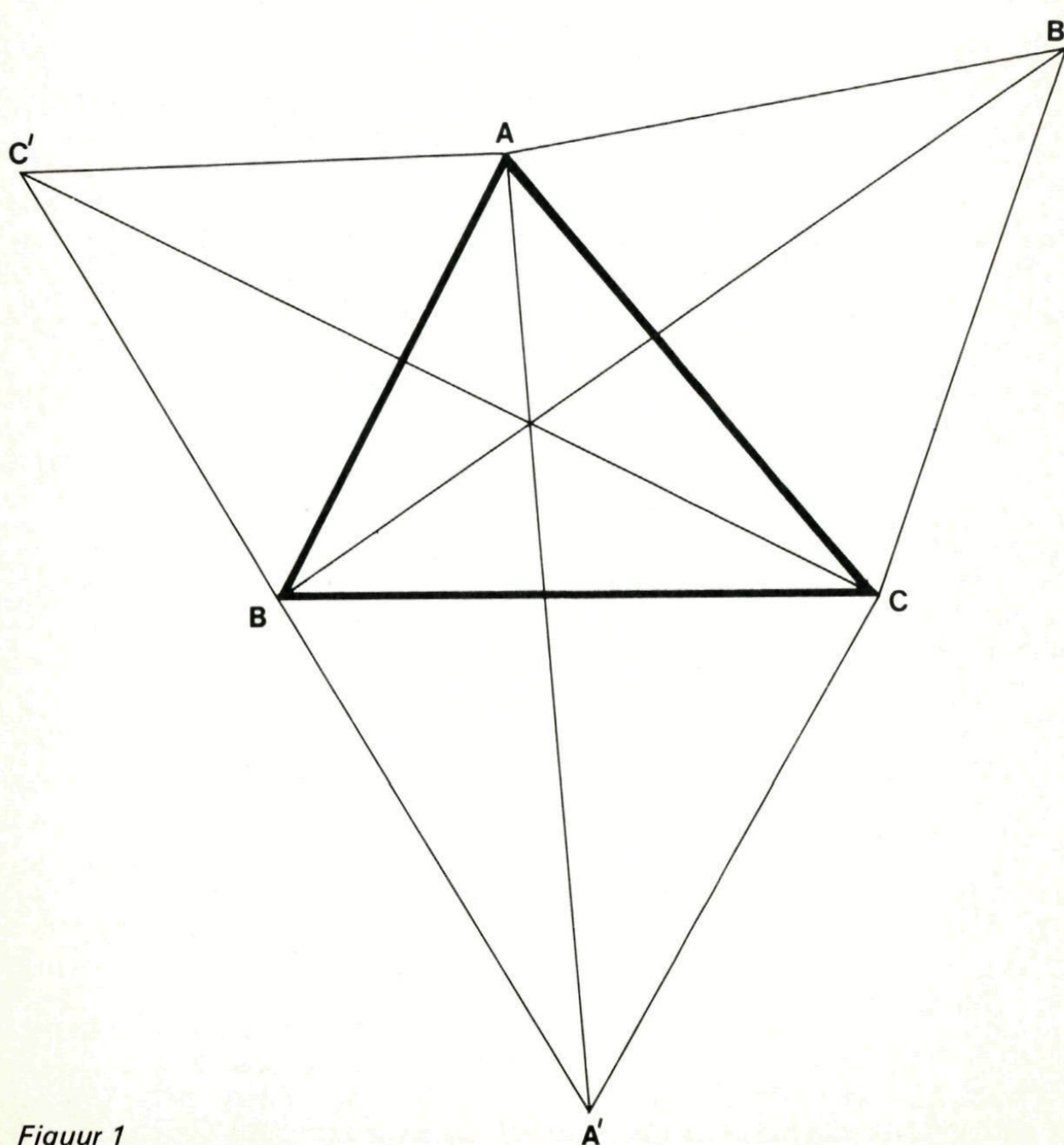
De regelmatige driehoeken driehoek

Teken een driehoek ABC . Zet op de zijden naar buiten toe regelmatige driehoeken ABC' , $AB'C$ en $A'BC$ (figuur 1). Anders gezegd, neem drie regelmatige driehoeken (driehoeken met gelijke zijden en gelijke hoeken), leg ze met hun hoekpunten zo aan elkaar dat ze een driehoek ABC insluiten.

Bewering: De lijnstukken AA' , BB' en CC' zijn even lang en gaan door één punt waar ze hoeken van 60° met elkaar maken.

Geloof je het niet? Probeer zelf maar!

Het bewijs van deze bewering krijg je op een koopje aan het einde van het artikel 'Punt van Fermat' in het volgende nummer. \square



Figuur 1

Pythagoras Olympiade



Nieuwe opgaven

Oplossingen vóór 1 mei insturen naar: *Pythagoras Olympiade, Marinus de Jongstraat 12, 4904 PL OOSTERHOUT (NB)*. Vermeld op elk (éénzijdig beschreven) vel je naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas. Verder moet elke oplossing op een nieuw vel beginnen, want we corrigeren ze afzonderlijk. We bekijken alleen goed leesbare oplossingen die volledig zijn uitgewerkt, met verklarende tekst in goed lopende zinnen. Verdere informatie over de wedstrijd vind je in nummer 1 van deze jaargang op bladzijde 26.

PO 134

D , E en F zijn punten op de zijden BC , CA , respectievelijk AB van driehoek ABC met de eigenschap dat $BD : DC = CE : EA = AF : FB$.

Bewijs: als driehoek DEF gelijkzijdig is, is driehoek ABC het ook.

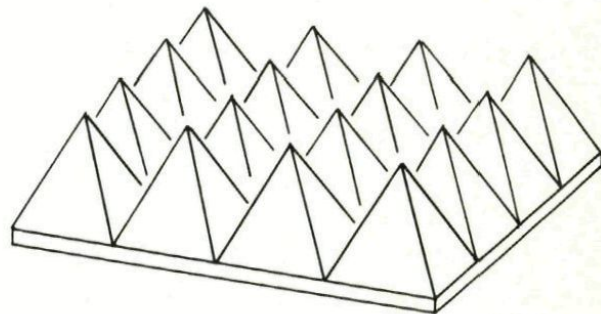
PO 135

Er bestaan platen geluiddempend materiaal die aan de ene kant vlak zijn en aan de andere kant de vorm hebben van een rooster van vierkanten met op elk vierkant een regelmatige vierzijdige piramide. Neem aan dat die vierkanten zijden van lengte 1 hebben en dat ook de hoogte van de piramides gelijk is aan 1.

Men legt zo'n plaat omgekeerd op

een andere plaat, op zo'n manier dat de toppen van de piramides van de ene plaat precies vallen op de plaatsen waar vier grondvlakken van aangrenzende piramides van de andere plaat samenkomen. Er blijven dan nog zekere uitsparingen tussen de piramides over.

Bepaal de vorm en de inhoud van zo'n uitsparing.



Oplossing en prijswinnaars van de opgave PO 118

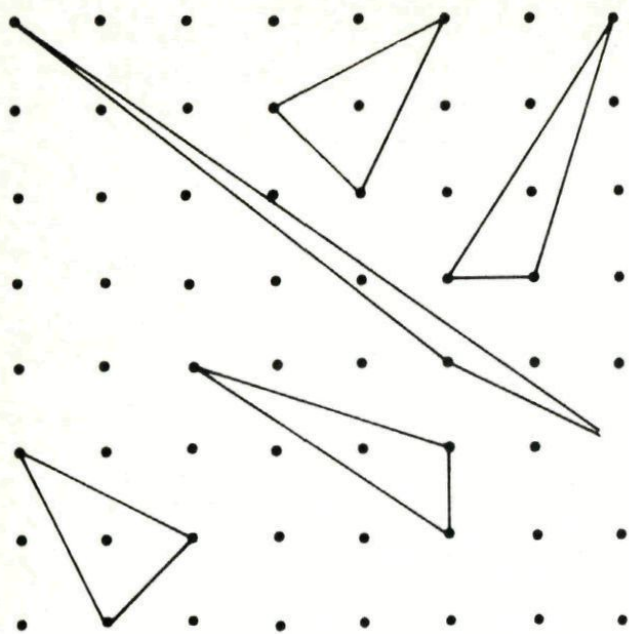
PO 118

Onder een *roosterpunt* in het vlak verstaan we een punt met gehele coördinaten.

Gegeven zijn een roosterpunten-driehoek ABC en een roosterpunt Z binnen ABC . Verder is gegeven dat er geen andere roosterpunten liggen binnen ABC of op de rand ervan.

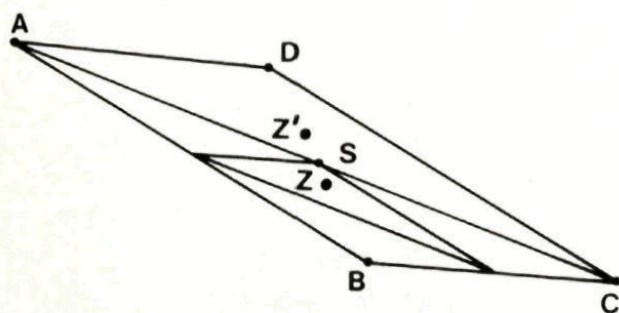
Bewijs dat Z dan het zwaartepunt is van driehoek ABC (figuur 1 geeft enkele voorbeelden van zulke driehoeken).

Aanvankelijk kregen we voor deze moeilijke opgave helemaal geen correcte oplossingen binnen. We hebben toen de inzendtermijn verlengd,



Figuur 1

en nog een extra prijs beschikbaar gesteld. Dat heeft succes gehad, want we kregen daarna weer nieuwe inzendingen. Drie daarvan bleken correct te zijn: die van *Johan Derijckere* (5de klas, Gullegem, België), *Jasper Scholten* (6 vwo, Heemskerk) en *Martijn Wubs* (6 vwo, Hoogeveen). Zij krijgen dus alle drie een prijs. Daarnaast waren er acht incorrecte inzendingen. De oplossingen van Martijn en Johan waren in grote lijnen gelijk; die van Jasper was heel anders. Omdat Jaspers oplossing ook nogal omvangrijk was, geven we hier alleen de oplossing van Johan en Martijn (in



Figuur 2

een enigszins aangepaste formulering).

Oplossing van Johan de Rijckere en Martijn Wubs:

Spiegel je een rooster in het middelpunt van een lijnstuk dat twee roosterpunten verbindt, dan gaat elk roosterpunt weer in een roosterpunt over. Spiegel je dus driehoek ABC samen met het punt Z in het midden S van AC , dan zijn de beelden van die vier punten weer roosterpunten: A en C worden verwisseld, B gaat over in een roosterpunt D , en Z gaat over in een roosterpunt Z' dat binnen driehoek ACD moet liggen (figuur 2). Behalve Z' kan binnen of op de rand van ACD geen ander roosterpunt liggen, want anders zou je door terugspiegelen in S nog een tweede roosterpunt in ABC krijgen.

Spiegelen we A , B en C in Z , dan krijgen we weer roosterpunten. Die mogen niet in of op de rand van ABC liggen, dus dat betekent dat Z moet liggen binnen de driehoek die gevormd wordt door de middens van de zijden van driehoek ABC . Vermenigvuldig je die middens-driehoek vanuit het roosterpunt B met een factor 2, dan is het beeld de driehoek ACD . Bij die vermenigvuldiging is het roosterpunt Z overgegaan in een roosterpunt binnen ACD , en aangezien Z' daar het enige roosterpunt is, moet het beeld van Z dus Z' zijn. De punten B , Z en Z' liggen daarom op één lijn, en aangezien Z' zo geconstrueerd is dat S het midden is van $Z'Z$, ligt S ook op die lijn. BS is de zwaartelij vanuit B in driehoek ABC , en we hebben dus aangetoond dat Z op die zwaartelij ligt.

Via een soortgelijke redenering toon je aan dat Z ook op de andere twee zwaartelijnen ligt, dus dat Z het zwaartepunt van ABC is.

Uitslag ladderwedstrijd 1988/1989

Aan de Pythagoras Olympiade in de vorige jaargang hebben in totaal 38 lezers meegedaan. Elke goede oplossing leverde 1 punt op. Soms hebben we ook halve punten toegekend. We geven hieronder de beste 12 deelnemers met hun totaalscores. De beste drie hebben een prijs van f 25,— ontvangen.

1	Martijn Wubs, Hoogeveen, 6 vwo	11	p
2	Erjen Lefeber, Zoetermeer, 6 vwo	8	p
3	Timo Gerlagh, Driebergen, 5 vwo	7	p
4	Jasper Scholten, Heemskerk, 6 vwo	6	p
5/6	Gijsbert Zwart, Geleen, 6 vwo	5,5	p
	David Omtzigt, Epe, 6 vwo	5,5	p
7/8	Johan Derijckere, Gullegem, België, 5e klas	5	p
	Antoine van de Ven, Heesch, 6 vwo	5	p
9/12	Arthur Bakker, Bergen (NH), 6 vwo	4	p
	Wim Oudshoorn, Heiloo, 11e klas Vrije School	4	p
	Siebrand Tilma, Leeuwarden, 5 vwo	4	p
	Hoang Viet-Nguyen, Nijmegen, 6 vwo	4	p

In nummer 1 van de vorige jaargang hebben we beloofd dat de beste 10 ook een uitnodiging zouden krijgen voor de Tweede Ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, ook als ze zich niet via de Eerste Ronde geplaatst zouden hebben (en natuurlijk op het tijdstip van de Tweede Ronde — 8 september — nog op school zouden zitten). Omdat Pythagoras de vorige jaargang sterk vertraagd is verschenen, was de uitslag van de ladderwedstrijd eind juli, toen de uitnodigingen voor de Tweede Ronde de deur uitgingen, nog lang niet bekend. We hebben toen een paar deelnemers die op dat moment al waren opgevallen door inzendingen van goede kwaliteit een uitnodiging voor de Tweede Ronde bezorgd. Daardoor zijn een paar deelnemers die vooral met de opgaven van de laatste nummers punten hebben verzameld uit de boot gevallen. Met een beroep op overmacht bieden we hen onze excuses aan. We vertrouwen erop dat we dit jaar wel op schema zullen zitten. Maar tegelijkertijd raden we iedereen aan om vooral ook aan de Eerste Ronde mee te doen en op die manier een plaats voor de Tweede Ronde te veroveren.

Waar komt de knoop?

In het blad van een tafel zijn drie gaten geboord. Door elk gat gaat een stukje koord naar de onderkant van het tafelblad. Daar zijn aan elk koord drie gewichten bevestigd. Aan de bovenzijde van het blad zijn de drie koorden aan elkaar geknoopt.

Waar zal de knoop tot rust komen als de gewichten alledrie gelijk zijn?

Na lezing van het artikel 'Punt van Fermat' in het volgende nummer zal duidelijk zijn wat het antwoord is.

Nederlandse Wiskunde Olympiade



De Tweede Ronde 1989

Op 8 september 1989 is in Eindhoven de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade gehouden. Van de 87 uitgenodigde leerlingen hebben er 85 deelgenomen. Ze hadden drie uur de tijd om vijf opgaven op te lossen.

De maximale score per opgave was 10 punten.

Door bij gelijke eindscore rekening te houden met het behaalde puntenaantal in de eerste ronde, zijn de volgende tien deelnemers prijswinnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1989:

	2° ronde	1° ronde
1 Melvin Koppens, Helmond	33 punten	29 punten
2 Giso van Loon, Dordrecht	33 punten	20 punten
3 Raimondo Eggink, Wijchen	32 punten	31 punten
4 Ronald de Man, Strijen	28 punten	30 punten
5 René Sitters, Heerhugowaard	25 punten	20 punten
6 Erjen Lefeber, Zoetermeer	23 punten	22 punten
7 Remke Rutgers, Wijhe	22 punten	23 punten
8 Quintijn Puite, Wageningen	20 punten	36 punten
9 Erwin Streur, Papendrecht	20 punten	22 punten
10 Jaco Baauw, Vlaardingen	20 punten	21 punten

Opgaven Tweede Ronde 1989

- 1 Voor een rij gehele getallen a_1, a_2, a_3, \dots met $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ geldt:

$$a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2} \quad \text{voor } n > 2$$

Verder is gegeven dat $a_4 = 194$.

Bereken a_8 .

- 2 E is een willekeurig punt op de zijde BC van een vierkant $ABCD$. Op de zijde CD ligt het punt F zo dat $\angle EAF = 45^\circ$.
Bewijs dat het lijnstuk EF raakt aan de cirkel met middelpunt A en de lengte van de zijde van het vierkant als straal.

3 Bereken

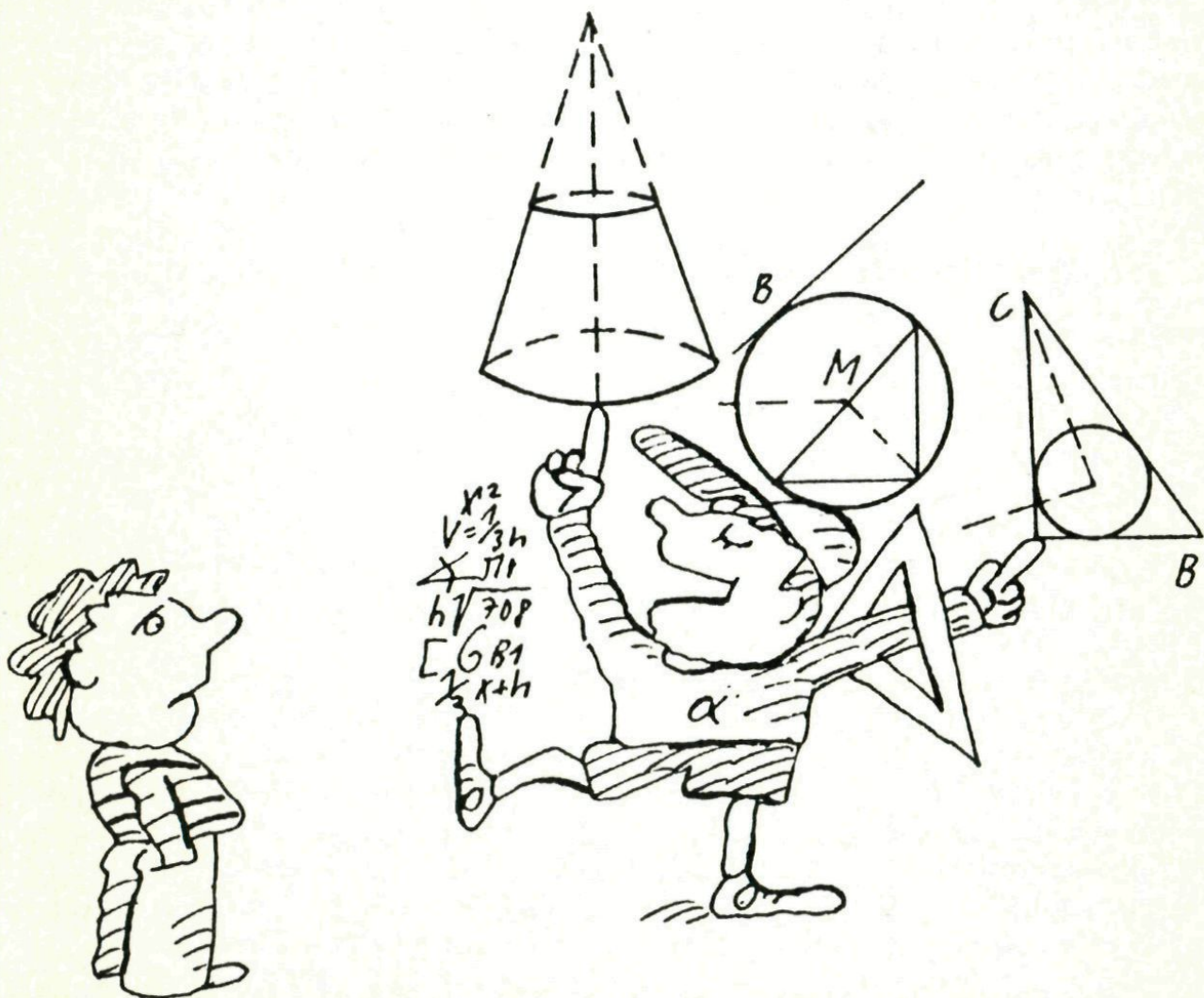
$$\sum_{n=1}^{1989} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n^2 - 1}}$$

- 4 Gegeven is een regelmatige n -zijdige piramide met top T en grondvlak $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$. De lijn loodrecht op het grondvlak door een punt B van het grondvlak binnen $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ snijdt het vlak $TA_1 A_2$ in C_1 , het vlak $TA_2 A_3$ in C_2 , enzovoort en ten slotte het vlak $TA_n A_1$ in C_n .
Bewijs dat $BC_1 + BC_2 + \dots + BC_n$ onafhankelijk is van de keuze van B .

- 5 $(1 + \sqrt{2})^{2k+1} = n(k) + \alpha(k)$ met $k, n(k) \in \mathbb{N}$ en $0 < \alpha(k) < 1$.

Bewijs $(n(k) + \alpha(k)) \cdot \alpha(k) = 1$ voor alle k en bereken $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(k)$.

In een volgend nummer komen de oplossingen □



'Ik oefen voor de Wiskunde Olympiaden!'
(Uit Alpha, Oost-Duitsland)

Redactioneel

Met dit nummer worden een aantal beloften uit voorgaande nummers ingelost. Maar we doen ook weer een aantal nieuwe toezeggingen in het artikel 'Inversie' en de stukjes 'De kortste weglengte', 'Waar komt de knoop?' en 'De regelmatige driehoeken driehoek'. Die beloften worden in het volgende nummer ingelost.

Over de computerprogramma's

Ook in dit nummer zijn weer een aantal programma's opgenomen. Het is misschien goed een opmerking te maken over programma's die we af en toe bij bepaalde artikelen afdrucken. Meestal zijn ze geschreven in GW-Basic, een wijdverbreide en eenvoudige programmeertaal. Bij het schrijven van die programma's is onze eerste zorg duidelijkheid en overzichtelijkheid, zodat zelfs lezers die geen programmeer-ervaring hebben, kunnen begrijpen wat die programma's doen. De snelheid waarmee de computer ze uitvoert komt niet op de eerste plaats. Soms schrijven lezers ons dat een programma in dit opzicht kan worden verbeterd. Vaak hebben ze daarin gelijk. Maar zo'n verbetering vergt dikwijls nog wat extra programmeerregels, die dan in de tekst weer uitgelegd moeten worden. We denken dat dit de aandacht van de hoofdzaken afleidt. Daarom laten we zulke verbeteringen meestal achterwege. De gevorderden moeten ze zelf maar aanbrengen. □

Uitgave onder toezicht van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Lay-out: Klaas Lakeman, Amsterdam.

Tekenwerk: Hans van Kuyk, Amsterdam.

Foto's en andere illustraties: Moderne Wiskunde, Wolters-Noordhoff bv, Groningen (Omslag, blz. 16); Hans de Rijk, Utrecht (blz. 1, 2); Klaas Lakeman, Amsterdam (blz. 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 21, 23, 25, 30); Gustav Strijkers, Grevenbicht (blz. 12); Hr. Kraeima, Zwolle (blz. 13); Frank Vernailen, Erpe-Mere (België) (blz. 13); Jan van de Craats, Oosterhout (NB) (blz. 15, 17, 18, 19, 31, 32); Peter Bata (blz. 20); Hans Lauwerier, Amsterdam (blz. 22, 24, 26, 27); Alpha, Oost-Duitsland (blz. 35).

© 1990 Redactie Pythagoras/Stichting IVIO - alle rechten voorbehouden, nadruk of weergave, geheel of gedeeltelijk, in welke vorm dan ook, zonder schriftelijke toestemming van de redactie en uitgever verboden.

Pythagoras wiskunde tijdschrift voor jongeren

Redactie: Jan van de Craats, Klaas Lakeman, Hans de Rijk.

Medewerkers: Popke Bakker, Gerard Bäuerle, F. van der Blij,
Niels M. Buizert, Hans Lauwerier, Hessel Pot.

Redactiesecretariaat: Klaas Lakeman, Cornelis Krusemanstraat 60^{II},
1075 NS Amsterdam (NL).

Inhoud jaargang 29, nummer 4

Een mogelijke onmogelijke
figuur / 1

Hans de Rijk

Echt Vierkant! / 3

Klaas Lakeman

Pi-benaderingen / 7

Weia Reinboud/Hessel Pot

De kortste weglengte / 7

Probleem van Fagnano / 8

Klaas Lakeman

De stelling van Petr / 12

Klaas Lakeman

Wybertjes in een zeshoek

Een bewijs / 15

Jan van de Craats

Inversie / 20

Hans Lauwerier/Klaas Lakeman

Transformatie-formules / 23

Van rechte naar cirkel / 25

Programma's / 28

De regelmatige driehoeken
driehoek / 30

Klaas Lakeman

Pythagoras Olympiade / 31

Jan van de Craats

Waar komt de knoop? / 33

Nederlandse Wiskunde

Olympiade / 34

Jan van de Craats

Redactioneel / 36

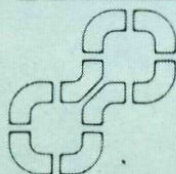
Pythagoras verschijnt zesmaal per
schooljaar; opgave van abbonemen-
ten bij de uitgever (zie onder).

Abonnementen zijn doorlopend, tenzij
voor 1 september schriftelijk bij de uit-
gever is opgezegd.

Bij tussentijdse abonnering ontvangt
men ook de reeds verschenen num-

mers. Betaling per acceptgirokaart.

Tarieven	NLG/BEF
Abonnement Pythagoras	23,—/430
Luchtpost-toeslag	10,—
Inclusief Archimedes	40,—/750
Luchtpost-toeslag	20,—
Losse nummers	5,—/ 90



stichting ivio

Postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL.)

Tel. 03200-76411

educatieve uitgeverij - instituut voor buitenschools

onderwijs - wereldschool - AO-reeks - leerprojecten

Postgiro Nederland: 287934

Postcheck België: 000-0130850-94