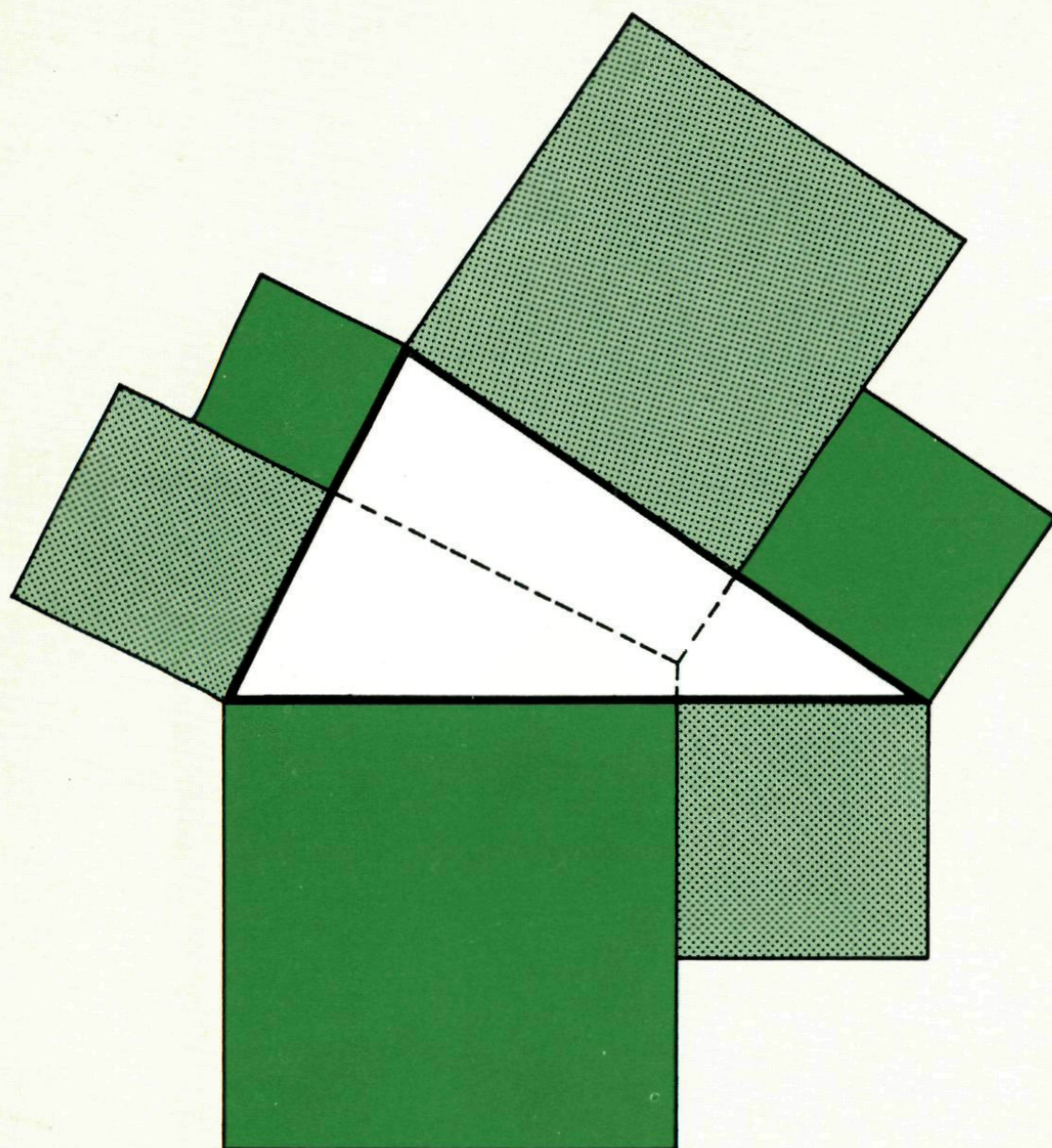
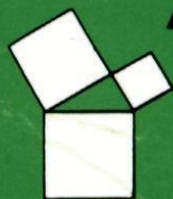




Pythagoras

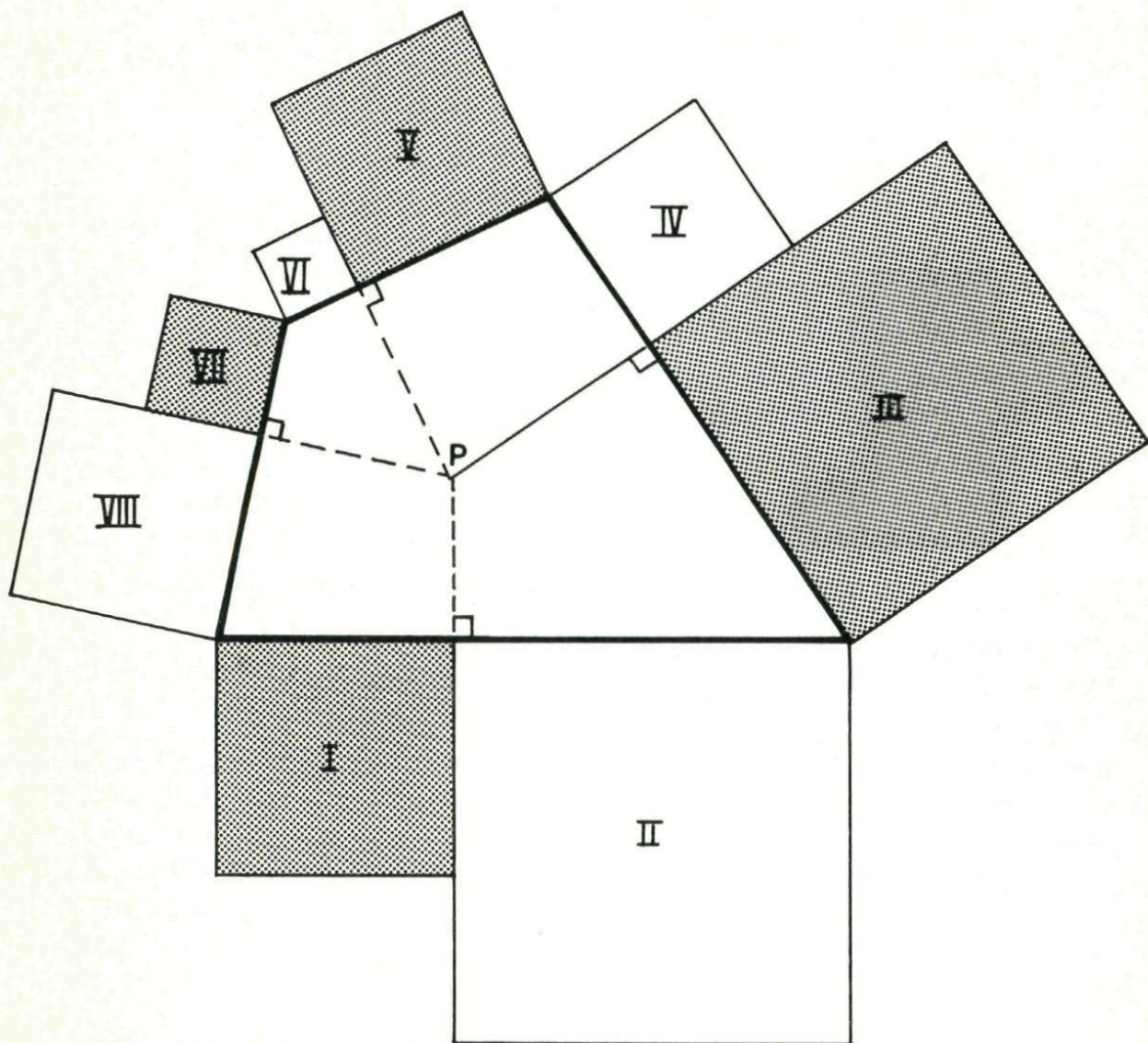


wiskunde tijdschrift voor jongeren

stichting ivio

29e jaargang
nummer 5
september 1990

De vierkantenkrans



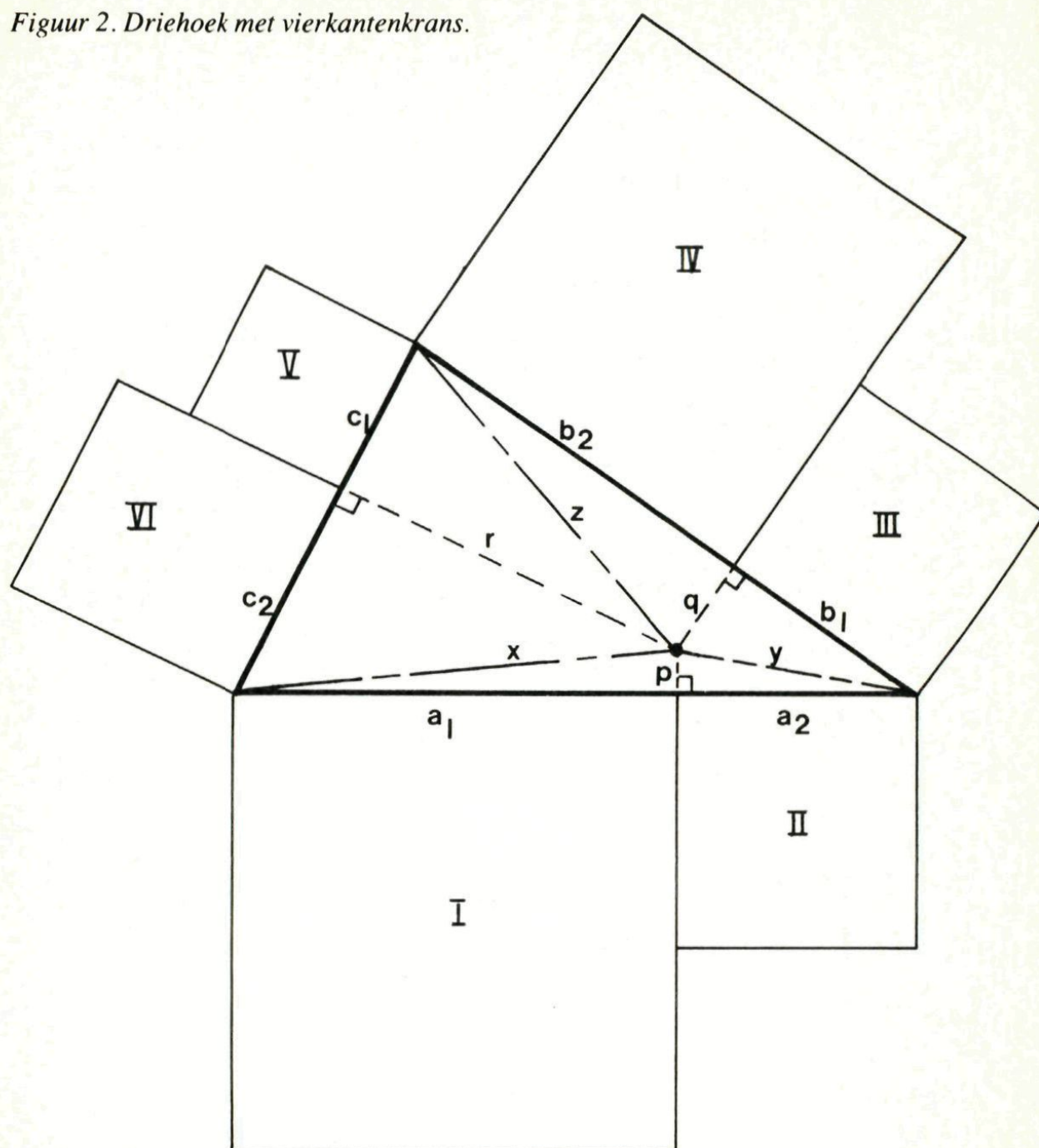
Figuur 1. Vierhoek met vierkantenkrans.

Teken een vierhoek met daar in een willekeurig punt P (figuur 1). Laat vanuit P loodlijnen neer op de zijden van de vierhoek. Hierdoor wordt elke zijde in twee stukken verdeeld. Teken op elk van die stukken vierkanten. Om de oorspronkelijke vierhoek ontstaat dan een *vierkantenkrans*. Voor de vierkanten van deze krans geldt de volgende stelling:

De som van de oppervlakten van de oneven vierkanten, is gelijk aan de som van de oppervlakten van de even vierkanten.

Dus $\text{Opp (I + III + V + VII)} = \text{Opp (II + IV + VI + VIII)}$.

Figuur 2. Driehoek met vierkantenkrans.



Bewijs

Deze stelling gaat ook op voor een driehoek, een vijfhoek, ja zelfs voor elke willekeurige n -hoek! We geven het bewijs voor een driehoek (figuur 2).

Noem de stukken waar in de loodlijnen de zijden verdelen, a_1 , a_2 , b_1 , enzovoort.

2

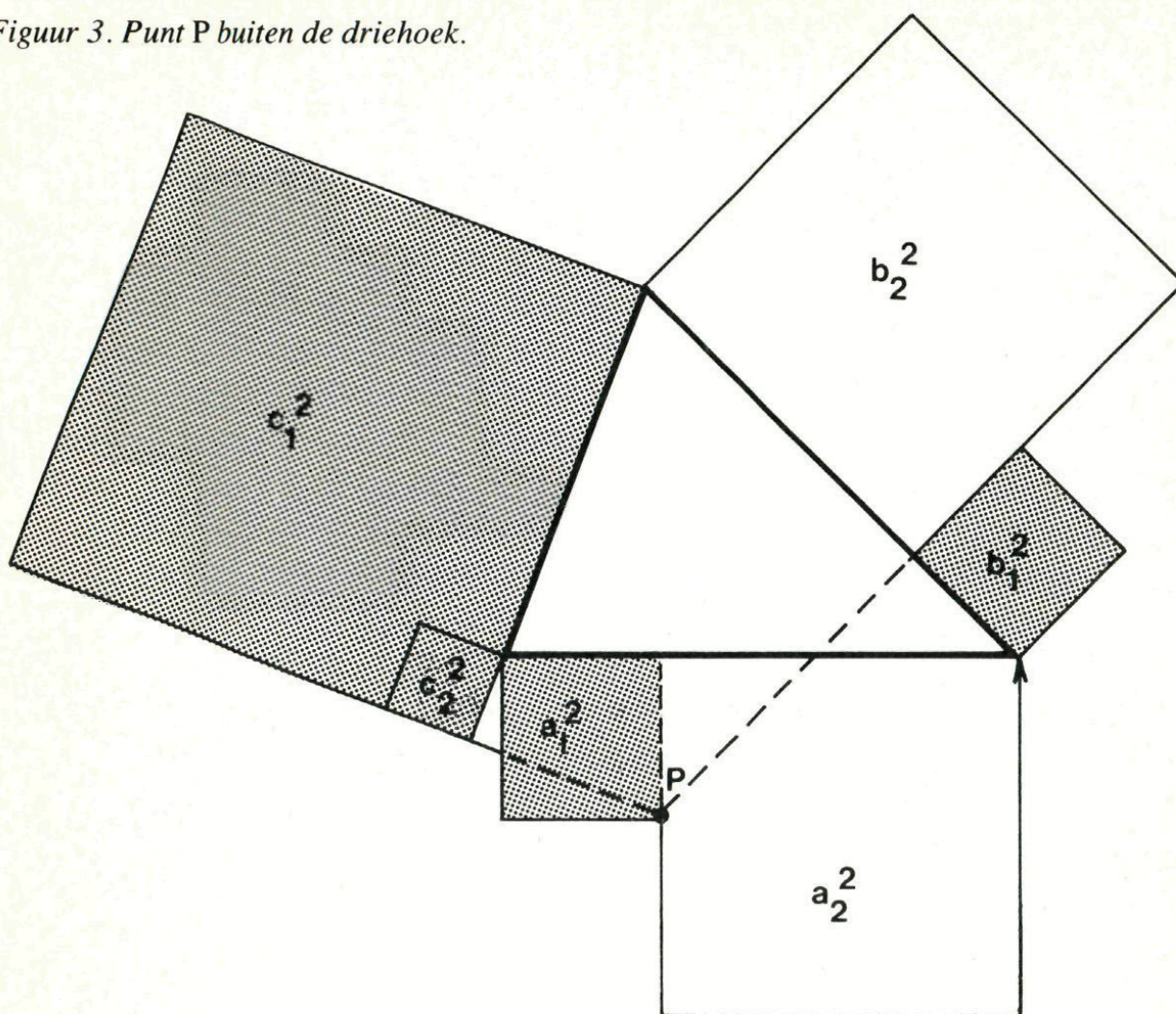
Geef de loodlijnen vanuit punt P aan met p , q en r .

Trek vanuit P hulplijnen x , y en z naar de hoekpunten van de driehoek.

Met de stelling van Pythagoras is dan te vinden:

$$a_1^2 = x^2 - p^2 \quad (1)$$

Figuur 3. Punt P buiten de driehoek.



$$\begin{aligned} a_1^2 &= y^2 - q^2 & (2) \\ c_1^2 &= z^2 - r^2 & (3) \end{aligned}$$

De som van de oppervlakten van de oneven vierkanten (I, III en V) is

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2.$$

Met (1), (2) en (3) is deze som ook te schrijven als

$$x^2 + y^2 + z^2 - p^2 - q^2 - r^2.$$

Voor de som van de oppervlakten van de even vierkanten (II, IV en

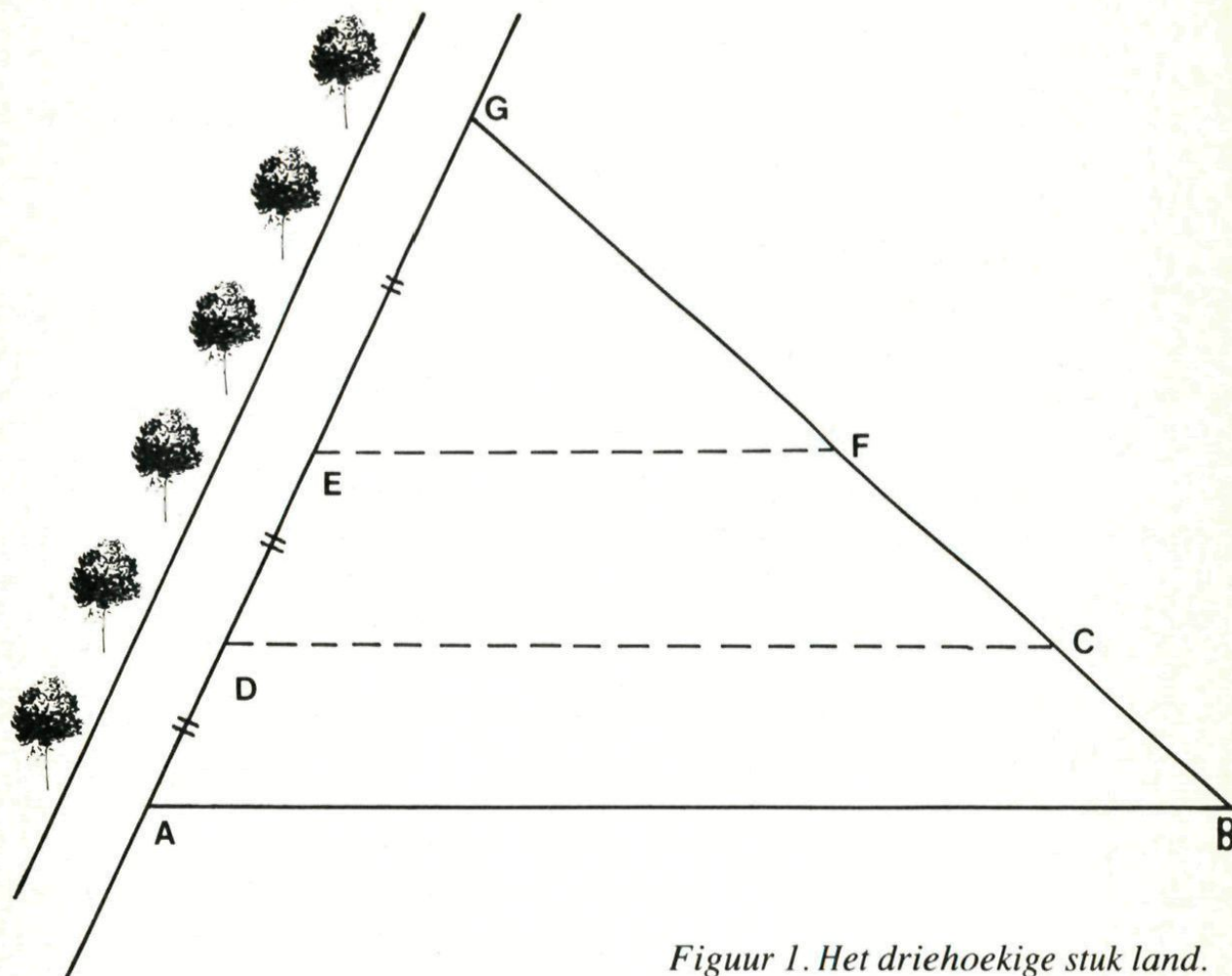
VI) vind je via

$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$$

eenzelfde uitdrukking. Schrijf maar even uit. Voor een vierhoek, vijfhoek, enzovoort gaat het bewijs op dezelfde manier.

Ten slotte nog een vraag. Mag punt P ook buiten de n -hoek liggen? In figuur 3 is zo'n geval voor een driehoek getekend. Probeer het zelf eens te bewijzen. (Let op de verdeling bij de zijde c . c_2 komt buiten de driehoek, en er geldt $c_1 = c + c_2$.) □

Een boer verdeelt zijn land



Een boer heeft een driehoekig stuk land dat aan de provinciale weg ligt (figuur 1). Voor zijn drie zonen wil hij dit in drie stukken verdelen met gelijke oppervlakte. Elk stuk moet een uitgang naar de provinciale weg hebben. Daarom verdeelt de boer zijn land door twee lijnen CD en EF evenwijdig aan AB te trekken. Hoe moet hij dat doen?

Jong geleerd is oud gedaan

In het meetkundeboek dat de boer vroeger op school gebruikte stond een stelling die hem nu goed van pas komt. Deze stelling zegt dat als twee driehoeken gelijkvormig zijn,

dan verhouden hun oppervlakten zich als kwadraten van de overeenkomstige zijden. In een apart stukje staat een bewijs voor deze stelling. Zonder dat het met zoveel woorden werd gezegd is deze stelling al

toegepast in het tweede bewijs voor de oplossing van 'Trapezium in tweeën' (Phytagoras 29-3). In zekere zin lijkt dit probleem zelfs veel op het daar gestelde probleem. Ga maar na.

Werkwijze

In figuur 1 zijn drie gelijkvormige driehoeken te onderscheiden. Te weten EFG , DCG en ABG . Daarin zijn GE , GD en GA overeenkomstige zijden.

De oppervlakte van driehoek DCG moet tweemaal zo groot zijn als die van driehoek EFG . Volgens de stelling geldt dan

$$\frac{\text{Opp } DCG}{\text{Opp } EFG} = \frac{GD^2}{GE^2} = 2.$$

Daar uit volgt $GD^2 = 2GE^2$ of

$$GD = GE \sqrt{2}. \quad (1)$$

De oppervlakte van driehoek ABG moet driemaal zo groot worden als die van driehoek EFG . Dus geldt volgens de stelling

$$\frac{\text{Opp } ABG}{\text{Opp } EFG} = \frac{AG^2}{EG^2} = 3.$$

Dat levert $AG^2 = 3EG^2$ of

$$AG = EG \sqrt{3}. \quad (2)$$

Op het lijnstuk AG moeten twee stukken EG en DG worden afgepast. Volgens (1) en (2) geldt daarvoor

$$EG : DG : AG = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}.$$

Om de lijnen CD en EF netjes evenwijdig aan AB te krijgen moeten op het lijnstuk GB nog twee stukken GF en GC worden afgepast. Ook die moeten voldoen aan

$$GF : GC : GB = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}.$$

Heel nauwkeurig

In de praktijk zal de boer de wortels wel zo goed mogelijk benaderen. En met die benaderde waarden de plaats van de punten E en D op AG vastleggen. Hetzelfde geldt voor de ligging van de punten F en C op GB .

Het kan echter heel precies. Zonder dat de wortels worden afgerond. Daar voor zijn een passer en een liniaal (zonder schaalverdeling of andere merktekens) voldoende. Ga maar eens uit van een verkleinde tekening van het driehoekig stuk land (figuur 2).

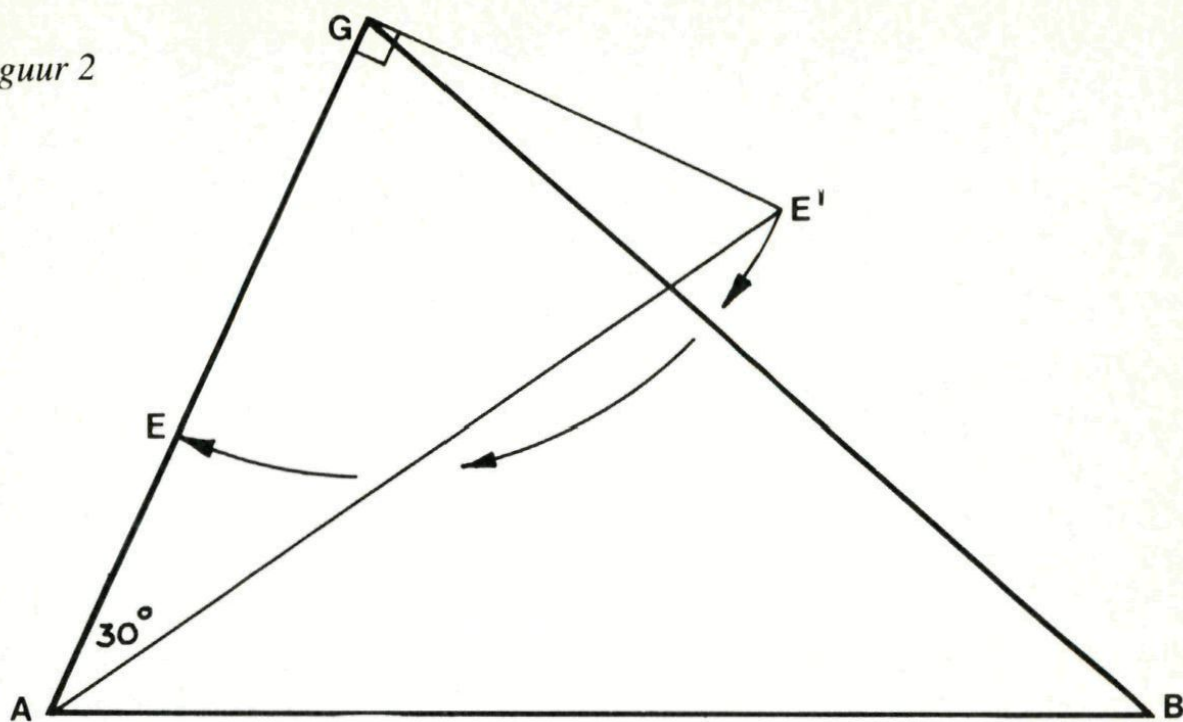
Richt in G een loodlijn op. Construeer in A een hoek van 30° . Dat levert een zogenaamde 30-60-90-driehoek AGE' op. Daar in geldt met name

$$AG : GE' = \sqrt{3} : 1.$$

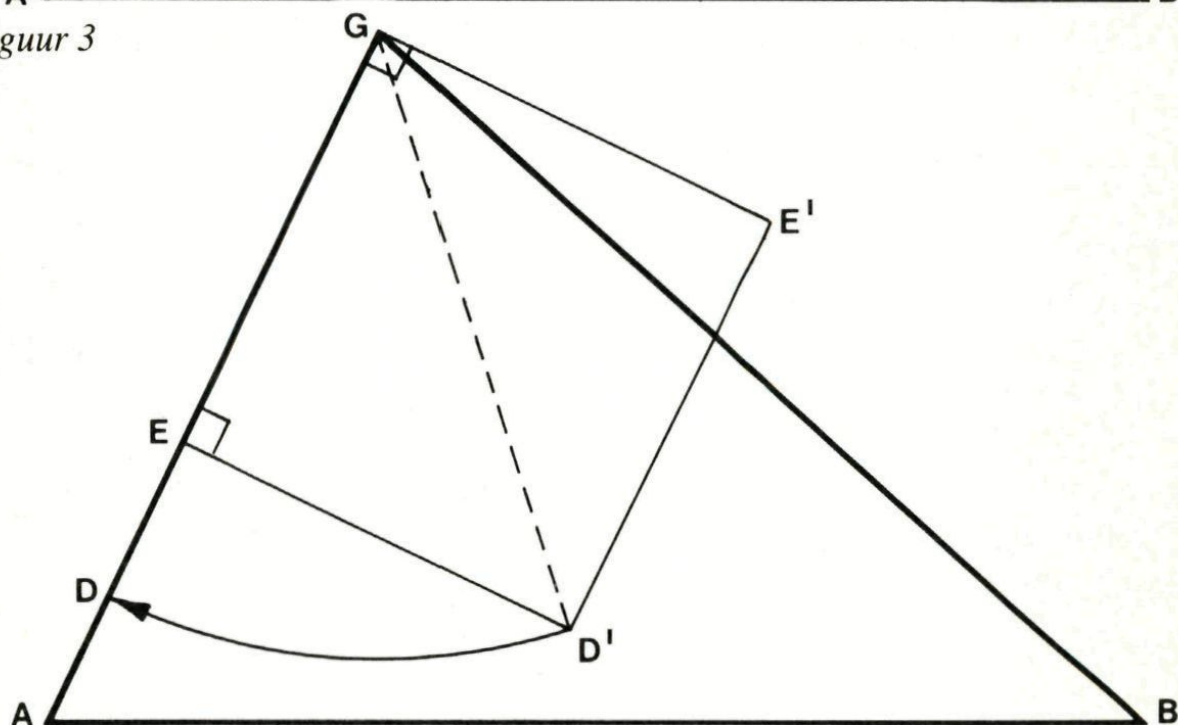
Dus de ligging van E kan worden verkregen door GE' van uit G om te cirkelen.

Richt vervolgens in E een loodlijn op (figuur 3). Cirkel EG van uit E om. Je krijgt dan een punt D' op die loodlijn in E .

Figuur 2



Figuur 3



Trek vervolgens $E'D'$. De zo verkregen vierhoek $ED'E'G$ is dan een vierkant. In het bijzonder geldt in de zogenaamde 45-45-90-driehoek EGD'

$$GE : GD' = 1 : \sqrt{2}.$$

Dus de ligging van D kan worden verkregen door GD' van uit G om te cirkelen.

Op vergelijkbare wijze is de ligging van de punten F en C op GB heel precies te construeren. Daarna kunnen EF en DC worden getrokken. □

Uit het meetkundeboek van de boer

Als twee driehoeken gelijkvormig zijn, dan verhouden hun oppervlakten zich als de kwadraten van een paar overeenkomstige zijden.

In figuur 1 driehoek ABC gelijkvormig met driehoek $A'B'C'$. Daar uit volgt

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

of anders geschreven

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

Stel dat $AB : AC = k$, dus $AB = k \cdot AC$.

Dan is ook $A'B' : A'C' = k$ en dus

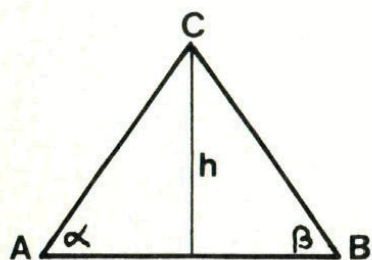
$$A'B' = k \cdot A'C'.$$

Trek de hoogtelijnen h en h' van uit C respectievelijk C' . Voor h geldt

$$h = AC \cdot \sin \alpha.$$

Daarmee is de oppervlakte van driehoek ABC te schrijven als

$$\begin{aligned} \text{Opp } ABC &= \frac{1}{2} AB \cdot h \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha \end{aligned} \quad (1)$$



Evenzo geldt

$$\text{Opp } A'B'C' = \frac{1}{2} A'B' \cdot A'C' \cdot \sin \alpha \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt

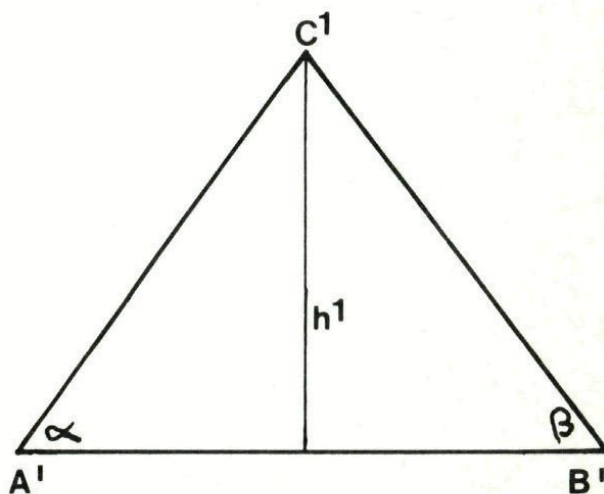
$$\frac{\text{Opp } ABC}{\text{Opp } A'B'C'} = \frac{AB \cdot AC}{A'B' \cdot A'C'}.$$

Met $AB = k \cdot AC$ en $A'B' = k \cdot A'C'$ wordt dit

$$\frac{\text{Opp } ABC}{\text{Opp } A'B'C'} = \frac{AC^2}{A'C'^2}.$$

Op dezelfde manier kan worden aangetoond dat

$$\frac{\text{Opp } ABC}{\text{Opp } A'B'C'} = \frac{AB^2}{A'B'^2} = \frac{BC^2}{B'C'^2} \quad \square$$



Figuur 1. Driehoek ABC is gelijkvormig met driehoek $A'B'C'$.

Geodeet of landmeter?

Iedereen heeft wel eens mannen met rood-witte stokken in de stad zien lopen en daarbij gedacht: 'Dat zijn landmeters'. Als je aan mensen vraagt wat een landmeter doet wordt het veel moeilijker. 'Lopen met rood-witte stokken' is dan geen volledig antwoord. Het blijkt dat weinigen precies weten wat die landmeters doen. Jammer, want het is de moeite waard eens kennis te maken met een heel apart en boeiend beroep. Dat vinden de landmeters zelf eigenlijk ook. Daarom gaan ze daar binnenkort wat aan doen. Zo willen ze door het hele land mensen uitnodigen in hun keukens te komen kijken. En wees er van overtuigd dat het de moeite waard is. Landmeters werken namelijk niet alleen op het land of in de stad. Ze werken overal: te land, ter zee en in de lucht.

Week van de landmeetkunde

Van 22 tot en met 26 oktober wordt een week van de landmeetkunde georganiseerd, eigenlijk een week van de geodesie. Om die spraakverwarring alvast even uit te leggen: landmeter en geodeet is hetzelfde.

Geodeten

Geodesie is de verzamelnaam voor alles wat maar op een of andere manier land meet. Te land kent iedereen wel de mooie land- en stadskarten die worden gemaakt. Minder bekend is wellicht dat ook alles wat onder de grond zit zoals kabels en leidingen, op kaart staat. Het opmeten van al die gegevens gebeurt door *landmeters*. Mooie karten en atlanten daarvan drukken doen *kartografen*. En als een kaart met behulp van een luchtfoto wordt gemaakt, komen er *foto-*

grammeters aan te pas.

Plaatsbepaling te land en op zee gebeurt door middel van satellieten. Wie wel eens mooie zee- of waterkarten heeft bekeken, moet weten dat daar *hydrografen* voor nodig zijn. En het zal natuurlijk niemand verbazen dat tegenwoordig alles digitaal gebeurt. Dat wil zeggen, met gebruik van geautomatiseerde apparatuur en computers.

Alle mensen die de hier beschreven vakken uitoefenen, worden nu aangeduid met de naam *geodeet*. De overeenkomst die allen hebben is dat het werk te maken heeft met het op kaart weergeven van een deel van de aardbol (de *geoïde*). Aan alle methoden die ze daarbij gebruiken ligt de gewone wiskunde ten grondslag die je vandaag op school leert. Het wiskundeboekje in de praktijk dus.



Nadere informatie

Het is niet mogelijk in dit korte stukje weer te geven hoe boeiend en spannend het beroep van geodeet wel is. Ik kan alleen maar zeggen dat je beslist eens moet gaan kijken als straks bij jou in de buurt een landmeetkundig bureau of dienst zijn deuren daartoe opent. De adressen van die bureaus en diensten en andere informatie over de actie geodesie kunnen worden verkregen bij

Theo Scheele

Arnelaan 87

4335 TC Middelburg

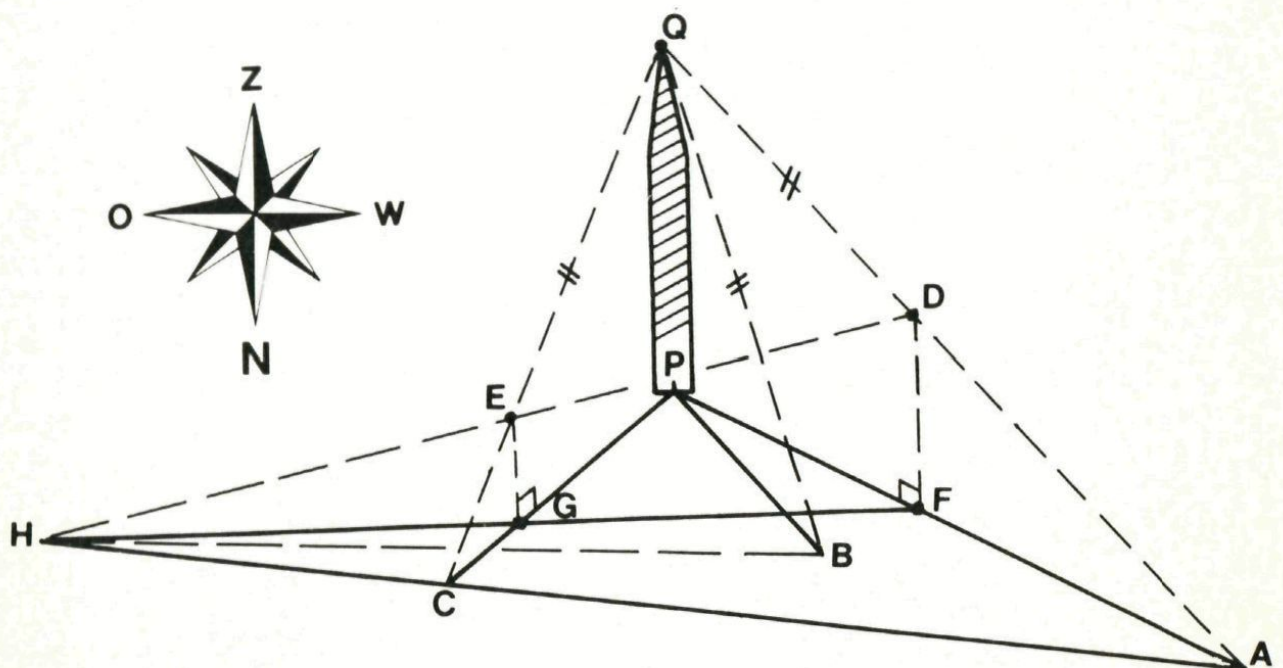
Telefoon 01180 - 12576

Puzzel

Om alvast te wennen hebben we nog een puzzel. De oude Romeinen waren gewend hun kaarten en dus ook hun landmeetkundige me-

tingen te oriënteren op het oosten in plaats van op het noorden, zoals dat tegenwoordig veelal gebruikelijk is. Ook beschikten ze niet over nauwkeurige hoekmeetinstrumenten (theodolieten) en bovendien kenden ze niet het gebruik van goniometrische functies, zoals sinus, cosinus, enzovoort. Daarentegen waren de Romeinen zeer bedreven in het bedenken van vernuftige meetkundige constructies die met eenvoudige hulpmiddelen konden worden gerealiseerd.

Hieronder volgt een methode om de oost-west lijn in het terrein uit te zetten, zonder gebruik te maken van de tegenwoordig in de geodesie beschikbare meetapparatuur. Hoewel de constructie in het terrein eenvoudig is (figuur 1), is het bewijs van die meetopzet niet zo gemakkelijk.



Figuur 1. Bewijs dat BH precies naar het oosten loopt.

Constructie

Op drie willekeurige tijdstippen op een dag wordt de lengte van de schaduw van een toren met bekende hoogte PQ gemeten. Dit levert de ligging van de punten A , B en C . PA is de lengte van de schaduw 's morgens, PB die rond het middaguur en PC die in de namiddag.

Omdat de hoogte PQ van de toren bekend is, kunnen QA , QB en QC met de stelling van Pythagoras worden berekend.

Denk daarna QB afgepast langs respectievelijk de lijnstukken QA en QC . Dit levert de punten D en E en er geldt dus

$$QB = QD = QE.$$

Laat vanuit de punten D en E loodlijnen op de straat neer. De voetpunten van die loodlijnen zijn F en G (figuur 1). De ligging van

F en G is eenvoudig te berekenen door gebruik te maken van gelijkvormigheid in de driehoeken PCQ en PAQ . Er geldt

$$PF = (QB \times PA)/QA$$
$$PG = (QB \times PC)/QC.$$

Trek vervolgens de lijnen AC en FG . Bepaal hun snijpunt H . Nu is BH de lijn die precies naar het oosten loopt. Kun je dat bewijzen zonder goniometrische functies te gebruiken?

Oplossing in een volgend nummer. (Aanwijzing: Bedenk dat de snijlijn tussen het vlak evenwijdig aan de evenaar door het punt op de werldebol waar je staat, en het horizontale vlak ter plaatse precies oost-west loopt.)

Met dank aan Ir. G.L. Strang van Hees. □

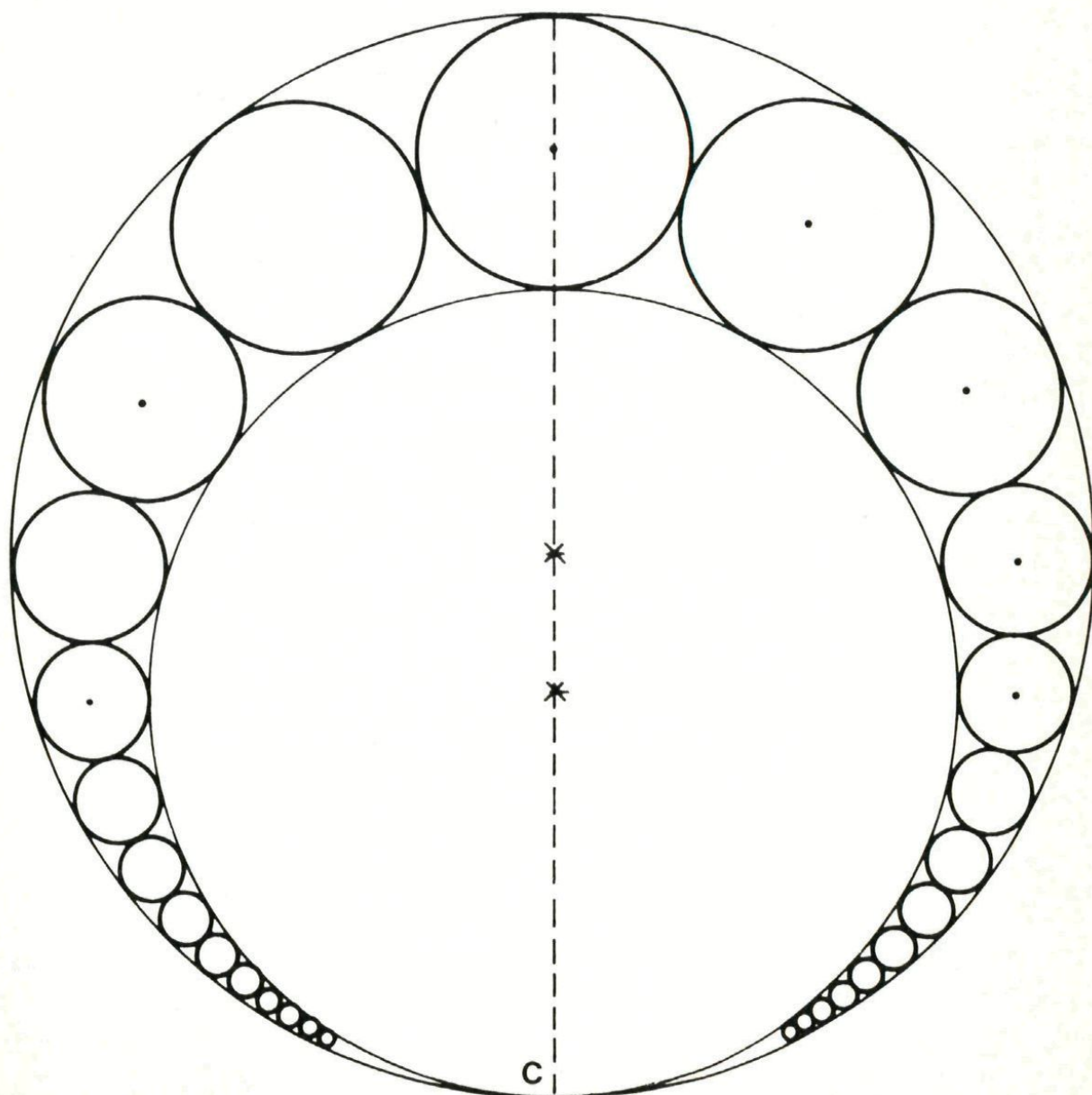
Geschiedenis van de wiskunde

In de Aula-reeks van Uitgeverij Het Spectrum is een herdruk verschenen van het vermaarde boekje 'Geschiedenis van de wiskunde' door D.J. Struik. Deze herdruk is uitgebreid met een hoofdstuk over de eerste helft van de twintigste eeuw. Gelukkig is dit beknopte, maar heldere overzicht van de ontwikkeling van de wiskunde weer verkrijgbaar. Voor ieder met enige interesse voor dit onderwerp is het boek de moeite van het lezen meer dan waard.

'Geschiedenis van de wiskunde' door D.J. Struik, Uitgeverij Het Spectrum, Utrecht (ISBN 90 274 2210 9; prijs f 39,90). □

Het parelsnoer

In het artikel 'Inversie' is beschreven hoe een aantal eigenschappen van de (cirkel-)inversie met de computer kunnen worden ontdekt. Die eigenschappen zijn te gebruiken om allerlei aardige meetkundige figuren te construeren, zoals bij voorbeeld het 'parelsnoer' (figuur 1). Dat bestaat uit twee grote cirkels die elkaar inwendig raken. De tussenruimte is opgevuld met elkaar onderling rakende kleine cirkels. Kort geleden zijn we die figuur ook tegengekomen. In het artikel 'De parelsnoerformule' (Pythagoras 28-5) werd een formule gegeven waarmee de stralen van de



Figuur 1. Het parelsnoer op z'n kop.

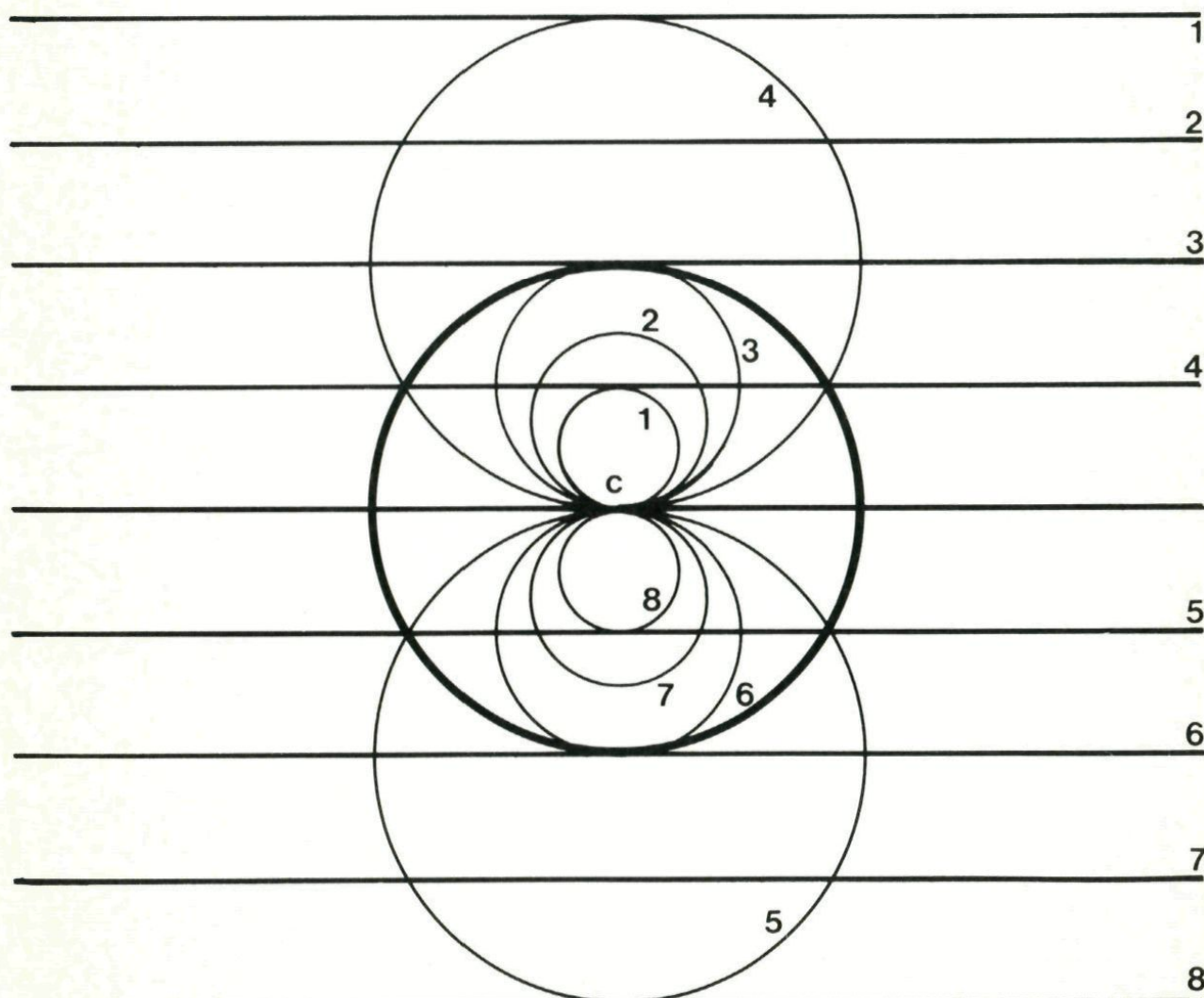
kleine cirkels zijn te berekenen. Nu laten we alleen maar zien hoe de figuur met inversie en met hulp van de computer in een wip is te construeren.

Om een goede gelijkenis met een parelsnoer te krijgen moet je figuur 1 eigenlijk op z'n kop bekijken. Waarom het parelsnoer hier onderste boven is afgebeeld, zal in de loop van dit artikel wel duidelijk worden.

Eigenschappen

Eerst nog even een overzicht van de belangrijkste bevindingen uit het artikel 'Inversie'.

- De inverse van een rechte die niet door het inversie-centrum C gaat, is een cirkel door C . En omgekeerd.



Figuur 2. Een stelsel evenwijdige rechten gaat bij inversie ten opzichte van de dikke zwarte cirkel over in een bundel cirkels die elkaar in het inversie-centrum C raken. De rechten en hun bijbehorende inverse-cirkels zijn overeenkomstig genummerd.

De inverse van een rechte door C is de rechte zelf.

- De inverse van een cirkel niet door C , is een cirkel.
- Inversie is tegengesteld hoektrouw.

Terloops werd gevraagd wat de inverse van een stelsel evenwijdige rechten is. Het antwoord is af te lezen uit figuur 2. Het wordt een bundel cirkels die allemaal door één punt gaan, het inversie-centrum C . Anders gezegd, een stelsel evenwijdige rechten gaat bij inversie over in een stelsel van elkaar rakende cirkels. Het omgekeerde geldt uiteraard ook. De lijn door C gaat in zichzelf over, maar is te beschouwen als een 'oneindig grote cirkel', als aan het platte vlak een punt oneindig wordt toegevoegd.

Het parelsnoer geïnverteerd

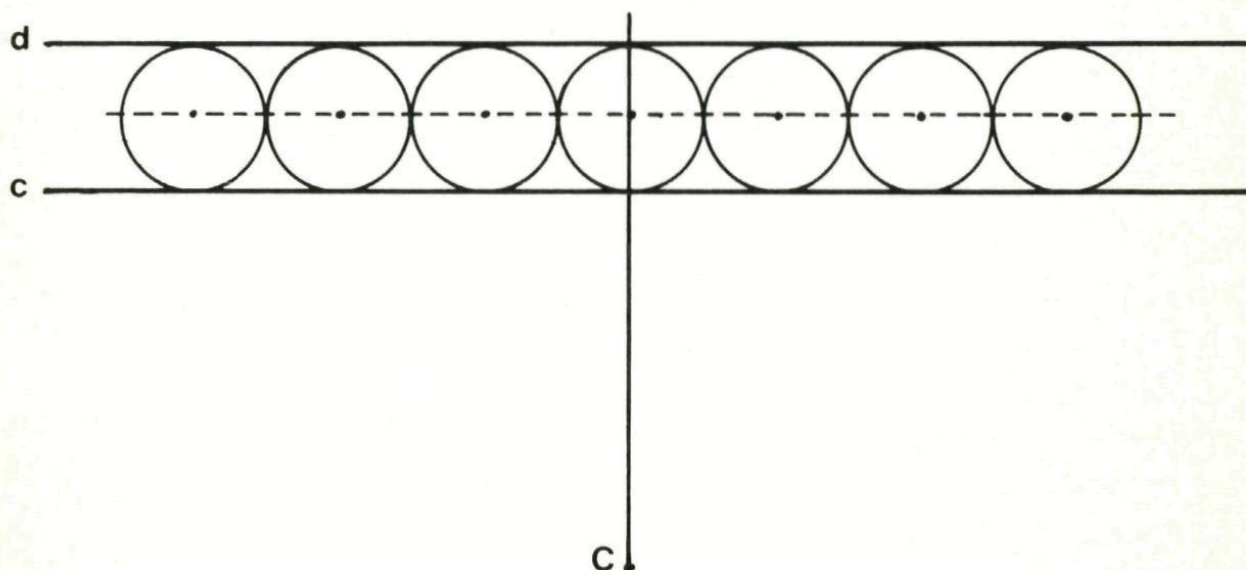
Doe nu eerst alsof het parelsnoer al

is geconstrueerd, zoals in figuur 1. Onderwerp dan het parelsnoer aan een inversie met als centrum C het punt waar de twee grote cirkels elkaar raken. De macht van die inversie is voorlopig niet van belang.

De twee grote cirkels gaan door het inversie-centrum, en gaan dus over in twee evenwijdige rechten. De kleine cirkels gaan niet door C , en gaan dus over in cirkels.

Deze moeten elkaar twee aan twee én de twee evenwijdige rechten blijven raken (figuur 3). Dit is een gevolg van het feit dat inversie tegengesteld hoektrouw is. Cirkels die elkaar raken, snijden elkaar namelijk onder een hoek van 0° . Door de inversie zal dat niet veranderen.

Zoals blijkt uit figuur 3, is het inverse-beeld van het parelsnoer een uiterst eenvoudige figuur. Je



Figuur 3. Het inverse-beeld van het parelsnoer. Inversie ten opzichte van punt C levert weer het parelsnoer. Welke gemeenschappelijke raaklijn gaat daarbij over in de buitenste grote cirkel, en welke in de binnenste?

zou kunnen zeggen dat het een oneindig lang, recht parelsnoer is met allemaal even grote parels. Wordt dat inverse-beeld op zijn beurt onderworpen aan dezelfde inversie ten opzichte van C , dan ontstaat het oorspronkelijke parelsnoer van figuur 1.

Werkwijze

De werkwijze zal duidelijk zijn. Er kan worden begonnen met een rij elkaar twee aan twee rakende cirkels met hun twee gemeenschappelijke raaklijnen. Dat alles wordt aan een inversie onderworpen. De plaats van het inversie-centrum C en de macht van de inversie kunnen willekeurig worden gekozen. De keuze van C zal het punt bepalen waar de twee grote cirkels elkaar inwendig raken. De keuze van de macht bepaalt de afmetingen van het te construeren parelsnoer. Een en ander is snel met de computer uit te voeren. Als tenminste van een door inversie verkregen cirkel zowel de positie van het middelpunt als de grootte van de straal bekend is. Dan kan in het programma de GW-Basic-opdracht `CIRCLE (X, Y), R` worden gebruikt. Daarmee wordt een cirkel getekend met middelpunt (X, Y) en straal R .

Aan de hand van figuur 4 wordt uitgelegd hoe die gegevens zijn te bepalen. Deze meetkundige voorbereidingen vergen enig werk, maar ze zijn dat dubbel en dwars

waard. Want de uiteindelijke resultaten zijn niet alleen van belang voor het programma. Ze vormen ook het grootste deel van de afleiding van de eerder vermelde parelsnoerformule. We hebben dan ook de verleiding niet kunnen weerstaan om die afleiding in een apart artikel te geven. Kortom, ook niet-computer-bezitters kunnen met deze meetkundige voorbereidingen hun voordeel doen.

Meetkundige voorbereidingen

In figuur 4 is C het inversie-centrum. Gemakshalve is de macht van de inversie gelijk aan 1 genomen. Een te inverteren cirkel heeft als middelpunt M en straal r en wordt afgekort met cirkel (M, r) . De lijn door C en M snijdt deze cirkel in A en B . Het inverse-beeld van cirkel (M, r) ten opzichte van C is ook een cirkel. In het bijzonder gaat bij deze inversie A over in A' en B in B' . Zowel A' als B' ligt op de lijn door C en M . De inverse-cirkel is dus de cirkel met middellijn $A'B'$. Het middelpunt van deze cirkel is M' en de straal r' . De positie van M' en de grootte van r' moeten nu worden bepaald.

Positie van M' Omdat A' de inverse is van A en de macht van de inversie 1 is, geldt

$$CA \cdot CA' = 1 \text{ of } CA' = 1/CA. \quad (1)$$

Omdat B' de inverse is van B , geldt evenzo

$$CB \cdot CB' = 1 \text{ of } CB' = 1/CB. \quad (2)$$

Het middelpunt M' ligt midden tussen A' en B' . CM' is dus te berekenen met

$$CM' = (CA' + CB')/2.$$

Met (1) en (2) en enig omwerken is dit ook te schrijven als

$$CM' = (CA + CB)/2m \\ = CM/m$$

waarbij $m = CA \cdot CB$

Uit figuur 4 is eenvoudig af te lezen dat

$$\begin{aligned} CA &= CM - AM, \\ CB &= CM + MB, \\ AM &= MB = r. \end{aligned} \quad (3)$$

Hiermee wordt achtereenvolgens voor m gevonden

$$\begin{aligned} m &= CA \cdot CB \\ m &= (CM - AM)(CM + MB) \\ m &= CM^2 - (AM \cdot MB) \\ m &= CM^2 - r^2. \end{aligned}$$

Grootte van r' Uit figuur 4 is af te lezen dat voor de straal r' van de inverse cirkel (M', r') geldt

$$r' = (CA' - CB')/2.$$

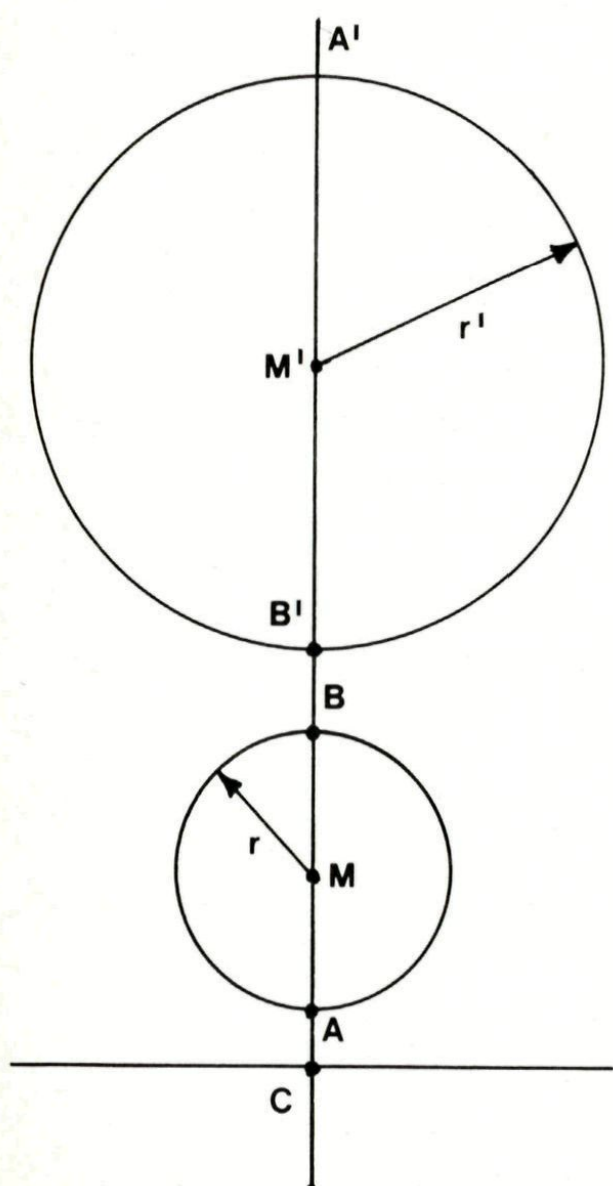
Met (1) en (2) en enig omwerken kan dat worden geschreven als

$$r' = r/m,$$

waarbij m volgens (3) gelijk is aan $CM^2 - r^2$.

Resultaat Gaat een cirkel (M, r) door inversie ten opzichte van een centrum C met macht 1 over in een cirkel (M', r') , dan wordt de positie van M' bepaald door

$$CM' = CM/m \quad (4)$$



Figuur 4. Bij inversie ten opzichte van C met macht 1 gaat cirkel (M, r) over in cirkel (M', r') .

en de grootte van r' door

$$r' = r/m \quad (5)$$

waarbij m volgens (3) gelijk is aan $CM^2 - r^2$.

Kijk uit!

In figuur 4 gaan de punten op de cirkel (M,r) door inversie over in punten op cirkel (M',r') . Punten die binnen cirkel (M,r) liggen, komen ook weer binnen cirkel (M',r') terecht. Met name de inverse van M komt weliswaar binnen cirkel (M',r') terecht, maar ... die inverse is *niet* M' . Dus $CM \cdot CM'$ is *niet* gelijk aan de macht van de inversie die in dit geval 1 is.

Met coördinaten

Voor het computerprogramma zijn formules in coördinaten nodig. Kies het inversie-centrum C als oorsprong $(0,0)$ van een assenstelsel. Geef middelpunt M coördinaten (x,y) , en M' coördinaten (x',y') . Bij inversie met macht gelijk aan 1, gaan dan (4), (5) en (3) achter-eenvolgens over in

$$x' = x/m \quad \text{én} \quad y' = y/m \quad (6)$$

$$r' = r/m \quad (7)$$

$$m = x^2 + y^2 - r^2. \quad (8)$$

In het kaderstukje 'Over op coördinaten' wordt beschreven hoe je daar aan komt.

Als de macht van de inversie s in plaats van 1 is, gaat het stelsel

vergelijkingen (6), (7) en (8) over in het stelsel

$$x' = xs/m \quad \text{én} \quad y' = ys/m \quad (9)$$

$$r' = rs/m \quad (10)$$

$$m = x^2 + y^2 - r^2. \quad (11)$$

Ze vormen de kern van het programma SIKKEL. Dat tekent het op z'n kop staande parelsnoer op het beeldscherm van de computer (figuur 5).

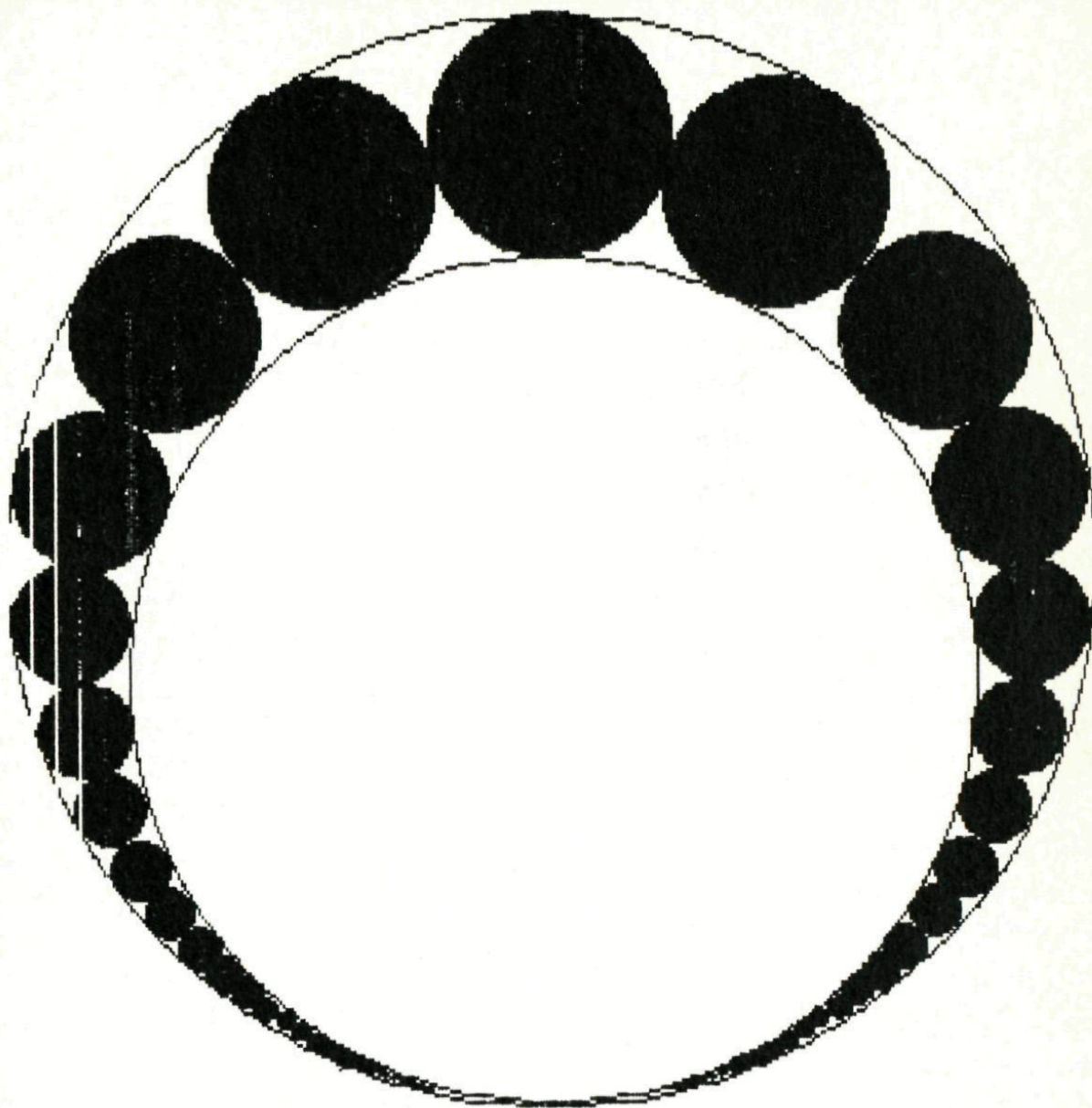
SIKKEL

Het GW-Basic-programma SIKKEL is aan het einde van dit artikel afgedrukt. Je kunt het nu al uitproberen, tenslotte weet je globaal hoe het te werk gaat. Het is echter raadzamer om eerst nog even te kijken hoe de zaken precies worden aangepakt. Dat gaat aan de hand van figuur 6. Straks kun je er dan naar hartelust mee experimenteren.

Ook voor niet-computer-bezitters is het nuttig om de aanpak van het programma wat nader onder de loep te nemen. Dat levert namelijk het nog ontbrekende inzicht dat nodig is, voor de afleiding van de parelsnoerformule.

Wat niet te zien is

Op het beeldscherm wordt het parelsnoer (figuur 5) getekend. Van het oneindig lange rechte snoer (figuur 3), de cirkel ten opzichte waarvan geïnverteerd wordt, het assenstelsel en het hele inversie-proces merk je niets. Toch



Figuur 5. Het resultaat van het programma SIKKEL.

is dit alles wel degelijk in het programma verwerkt.

Er wordt een assenstelsel gebruikt met het inversie-centrum C in de oorsprong (figuur 6). Alleen de rechthoek bepaald door de hoekpunten $(-4,-1)$ en $(4,5)$ wordt er uitgelicht (Regel 40).

De middelpunten $\dots, M_{-k}, \dots, M_{-2}, M_{-1}, M_0, M_1, M_2, \dots, M_k, \dots$ van het

denkbeeldige rechte parelsnoer liggen op de lijn $y=b=4$, met M_0 op de Y-as. De meeste parels van dat snoer liggen buiten de opgegeven rechthoek. Dat is niet erg, want hun inversen komen er wel in te liggen. En daar gaat het uiteindelijk om.

De parels in het rechte snoer zijn allemaal even groot. Hun straal r is gelijk aan 0,5.

Het rechte snoer wordt onderworpen aan een inversie ten opzichte van een cirkel met straal 4 en centrum C . De macht s van de inversie is dus 16.

De waarden voor b , r en s worden vastgelegd in regel 50 van het programma. Wil je met het programma experimenteren, dan kun je die veranderen.

Het inversie-proces

Uit figuur 6 is op te maken dat een willekeurig middelpunt M_k coördinaten $(2kr, b)$ heeft. De coördinaten (x_1, y_1) van het middelpunt van de bijbehorende inverse-parel worden dan met vergelijking (9)

$$x_1 = (2krs)/m \quad \text{en} \quad y_1 = bs/m.$$

Volgens vergelijking (11) geldt hierin voor m

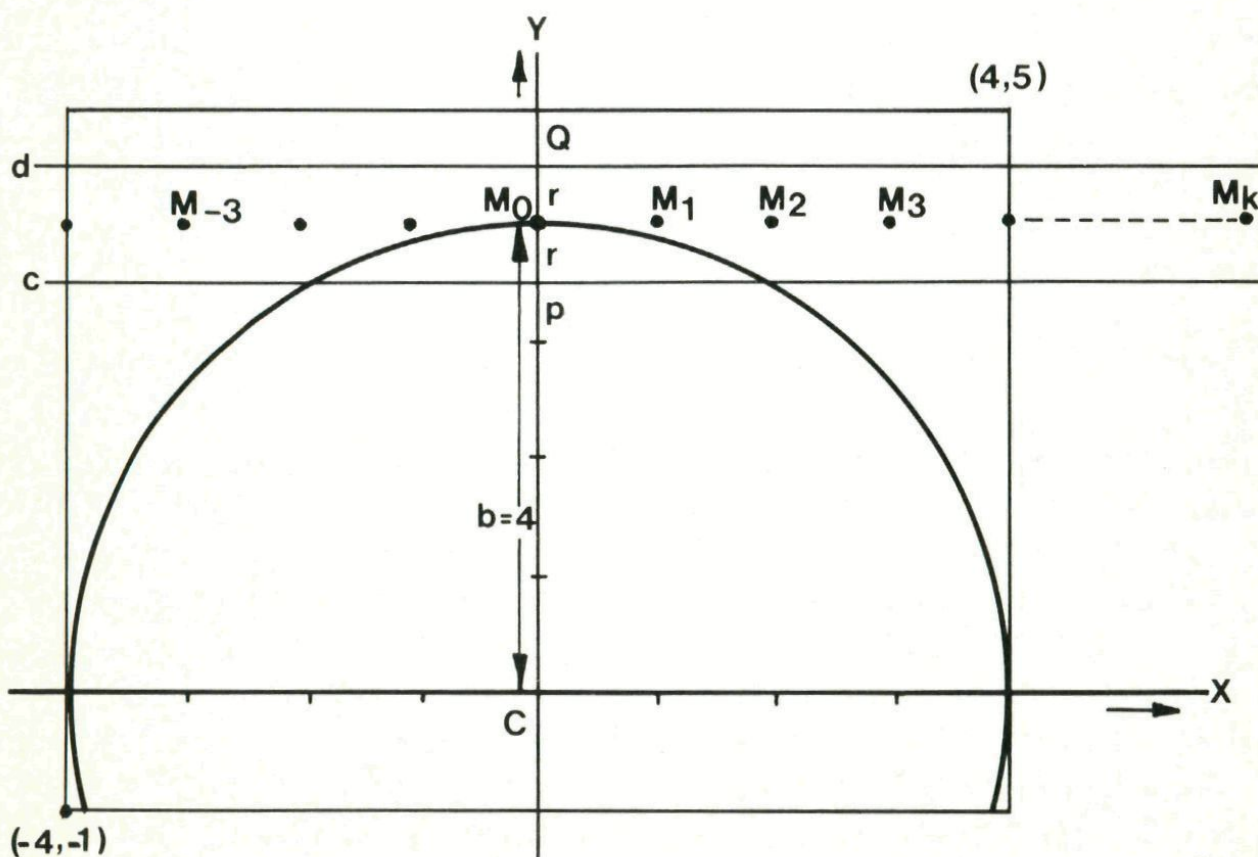
$$\begin{aligned} m &= (2kr)^2 + b^2 - r^2 \\ &= (4k^2 - 1)r^2 + b^2. \end{aligned}$$

De straal r_1 van de inverse-parel volgt tenslotte uit vergelijking (10)

$$r_1 = rs/m.$$

Als x_1, y_1 en r_1 berekend zijn, kan met CIRCLE-opdracht de inverse-parel op het scherm worden getekend.

Van het denkbeeldige rechte snoer worden 61 parels aan inversie



Figuur 6. Wat niet op het scherm te zien is.

onderworpen. Een met middelpunt op de Y-as, 30 parels links van de Y-as en 30 parels rechts er van. Meer is niet nodig, want de inverse-beelden van de overige parels komen al ontzettend dicht bij het inversie-centrum C te liggen. Dit hele inversie-proces is gerealiseerd in de regels 60 tot en met 100 van het programma.

De grote cirkels

De parels in het denkbeeldige rechte snoer bezitten nog twee gemeenschappelijke raaklijnen, in figuur 6 aangegeven met c en d . Hun inversen zijn twee cirkels die elkaar in het inversie-centrum C raken. Het zijn de twee grote cirkels waartussen alle parels van het gebogen snoer ingeklemd zijn.

Raaklijn c snijdt de Y-as loodrecht in P . De inverse P' van P komt ergens boven P op de Y-as. Het lijnstuk CP' wordt de middellijn van de inverse-cirkel van de rechte c . Dit volgt o.a. uit het bewijs dat werd gegeven in het stukje 'Van rechte naar cirkel' in het artikel 'Inversie' (Pythagoras 29-4). Punt P heeft coördinaten $(0, b-r)$. Dus $CP = b-r$. Bij inversie met macht s en centrum C geldt

$$CP \cdot CP' = s \quad \text{of} \quad CP' = s/CP.$$

En dat betekent dat P' coördinaten $(0, s/(b-r))$ krijgt; niet $(0, b+r)$! Dit levert voor het middelpunt van de inverse-cirkel van c coördinaten

$(0, s/2(b-r))$, terwijl de straal $s/2(b-r)$ wordt. Die cirkel kan dus worden getekend (regel 110 van het programma).

De inverse van raaklijn d is een cirkel door het inversie-centrum C met middelpunt $(0, s/2(b+r))$ en straal $s/2(b+r)$. Ze worden op dezelfde manier bepaald als de straal en het middelpunt van de inverse-cirkel van raaklijn c . Ga uit van het snijpunt van d met de Y-as. Dat is punt Q met coördinaten $(0, b+r)$, bepaal de coördinaten van de inverse Q' van Q , enzovoort. Het is ook snel in te zien als je de coördinaten van Q en P vergelijkt: $b-r$ is vervangen door $b+r$. De gevolgde berekening is hetzelfde. Dus ook in de eindresultaten zal $b-r$ door $b+r$ worden vervangen. De inverse-cirkel van raaklijn d wordt getekend met regel 120 van het programma.

Omgeklapt

In de tekst bij figuur 3 wordt gevraagd welke raaklijn in welke grote cirkel overgaat. Kijken in figuur 2 levert het antwoord. Raaklijn c gaat over in de buitenste, alles omhullende grote cirkel. Raaklijn d in de andere. Vergelijk eventueel ter controle de stralen van deze cirkels. Raaklijn c wordt een cirkel met straal $s/2(b-r)$; raaklijn d een cirkel met straal $s/2(b+r)$. Gezien van uit punt C (inversie-centrum) wordt het rechte parel-snoer dus binnenste buiten geklapt.

Alles op een rijtje

Het is misschien verhelderend om nog eens onder woorden te brengen hoe het rechte parelsnoer (figuur 3) wordt omgevormd tot het parelsnoer (figuur 1 of 5). In één beweging wordt het oneindig lange, rechte snoer omgeklapt en omgebogen tot de 'uiteinden' bij elkaar komen (in het punt C). In één moeite door veranderen ook de afmetingen van *alle* parels. Met name ook die van de parel met middelpunt op de Y-as (M_0 in figuur 6)!

Nogmaals, kijk uit!

In aansluiting op de tekst onder het kopje 'Kijk uit!' nog het volgende. De middelpunten van de parels van het rechte snoer gaan *niet* over in de middelpunten van de parels uit het gekromde snoer. Je zou op die

gedachte kunnen komen door de vergelijkingen (9). Die geven echter alleen aan hoe de coördinaten (x',y') van een middelpunt uit het gekromde snoer worden berekend, als de coördinaten (x,y) van het middelpunt van de overeenkomstige parel uit het rechte snoer bekend zijn. Niet dat deze punten in elkaar overgaan.

Uit figuur 3 of figuur 6 is op te maken dat de inversen van de middelpunten van de parels van het rechte snoer op een cirkel liggen in het gekromde snoer. Op die cirkel liggen de middelpunten van de parels van het gekromde snoer niet. Aangetoond kan worden dat die op een ellips liggen. Dat ligt echter ver buiten het bestek van dit artikel.

Voor de raakpunten van de parels geldt een vergelijkbaar verhaal.

Het programma SIKKEL

```
10 REM ***SIKKEL GEVULD MET CIRKELS***
20 REM ***NAAM:SIKKEL***
30 SCREEN 3 : CLS
40 WINDOW (-4,-1)-(4,5)
50 B=4 : R=.5 : S=16
60 FOR K=-30 TO 30
70 M=(4*K*K-1)*R*R+B*B
80 X1=(2*K*R*S)/M : Y1=B*S/M : R1=R*S/M
90 CIRCLE (X1,Y1),R1 : PAINT (X1,Y1)
100 NEXT K
110 CIRCLE (0,S/(2*(B-R))), S/(2*(B-R))
120 CIRCLE (0,S/(2*(B+R))), S/(2*(B+R))
130 A$=INPUT$(1) : END
```


Experimenteren

Tot nu toe is steeds uitgegaan van de waarden voor b , r en s , zoals die in het afgedrukte programma SIKKEL zijn gegeven (regel 50).

Daarbij worden de afmetingen van de parels uit het rechte snoer allemaal kleiner, behalve van de parel met middelpunt op de Y-as. Die wordt een tikkeltje groter. In het rechte snoer was zijn straal 0,5 en die wordt in het parelsnoer afgerond 0,51. Dat is met een rekenmachine trouwens gemakkelijk te controleren.

Om met SIKKEL te experimenteren kun je de waarden van b , r en s veranderen. Uiteraard niet allemaal tegelijk, want dan raak je het overzicht kwijt. We geven een paar voorbeelden.

Verander de macht s van de inversie in 15, daarna in 14, enzovoort. Langzaam maar zeker krimpt het

hele parelsnoer ineen. Bij $s = 15$ worden alle parels al kleiner. Ook die met middelpunt op de Y-as. Had je dit vooraf kunnen voorspellen?

Een aardige vraag, ook voor niet-computer-bezitters: Wanneer zullen de afmetingen van de parel met middelpunt op de Y-as gelijk blijven?

Geef eerst b , r en s de volgende waarden: $b=2$; $r=0,25$; $s=4$. Laat daarna de macht s van de inversie stapje voor stapje toenemen tot $s=16$. Je ziet het parelsnoer dan steeds maar groter worden. Kun je dat verklaren?

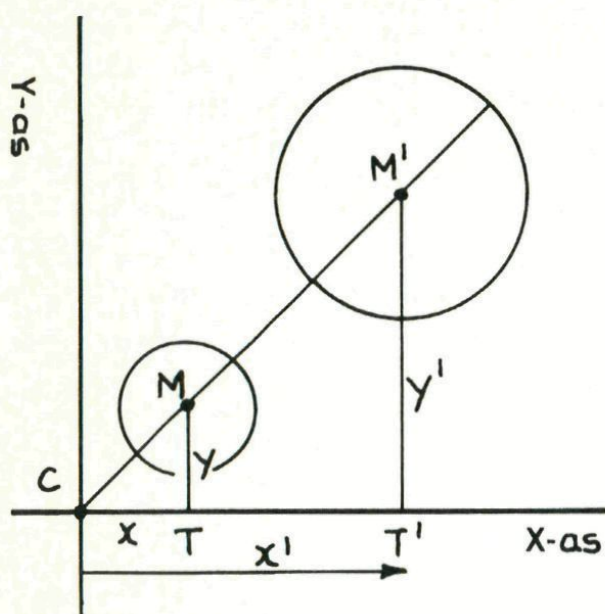
Andere experimenten laten we aan jezelf over. Probeer steeds vooraf te voorspellen wat er zal gaan gebeuren. Pas dan krijg je een goed inzicht in het hele inversieproces. □

Over op coördinaten

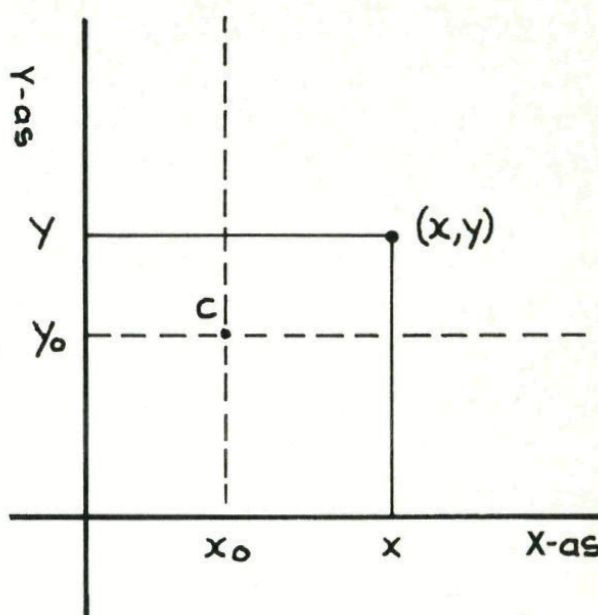
In dit stukje wordt beschreven hoe de formules (4), (5) en (3) uit het artikel achtereenvolgens overgaan in (6), (7) en (8). Daarna wordt in grote lijnen aangegeven hoe daar uit (9), (10) en (11) zijn te verkrijgen. De details kun je gemakkelijk zelf uitwerken. Het is voornamelijk een kwestie van de aangegeven methodes volledig uitschrijven.

Inversie-centrum in de oorsprong

Ga uit van figuur 1. Dat is in feite figuur 4 uit het artikel in een iets andere stand en voorzien van een assenstelsel. Het inversie-centrum C ligt in de oorsprong van dat assenstelsel. C heeft dus coördinaten $(0,0)$. De middelpunten van de cirkels (M,r) en (M',r') krijgen coördinaten (x,y) respectievelijk (x',y') .



Figuur 1



Figuur 2

De omwerking van (3) naar (8) berust op een toepassing van de stelling van Pythagoras:

$$m = CM^2 - r^2 = x^2 + y^2 - r^2.$$

In figuur 1 zijn de driehoeken CMT en $CM'T'$ gelijkvormig. Hun overeenkomstige zijden hebben dus dezelfde verhoudingen. De verhouding tussen CM en CM' is in (4) gegeven door $CM' = CM/m$. Er geldt dus

$$m = \frac{CM}{CM'} = \frac{CT}{CT'} = \frac{x}{x'} = \frac{MT}{MT'} = \frac{y}{y'}.$$

Dit leidt tot de formules (6): $x' = x/m$ én $y' = y/m$. Dat (5) op een aanpassing van m na ongewijzigd overgaat in (7) spreekt haast voor zich. Immers, de lengten van de stralen r en r' hangen niet af van het coördinatenstelsel.

Met macht s

Als de macht van de inversie s is in plaats van 1, worden de formules (1) en (2) uit het artikel

$$CA' = s/CA \text{ en } CB' = s/CB.$$

Daar kan langs dezelfde weg als in het artikel uit worden afgeleid:

$$CM' = (s \cdot CM)/m \text{ of } CM/CM' = m/s$$

$$r' = (r \cdot s)/m$$

$$m = CM^2 - r^2.$$

Daaruit volgen (9), (10) en (11) met behulp van figuur 1 en de hier boven uitgewerkte overgang van (4), (5) en (3) naar (6), (7) en (8).

Inversie-centrum niet in de oorsprong

Stel dat het inversie-centrum C coördinaten (x_0, y_0) heeft (figuur 2). Dan kunnen de assen in gedachten worden verschoven, zodat C wel in de oorsprong komt (stippellijnen). In dat geval kan de inversie worden beschreven met de formules (9), (10) en (11) uit het artikel.

Een willekeurig punt (x, y) krijgt in het gestippelde assenstelsel (figuur 2) coördinaten $(x - x_0, y - y_0)$. (Zo ook krijgt (x', y') in het gestippelde stelsel coördinaten $(x' - x_0, y' - y_0)$.) Kortom, als het inversie-centrum $C(x_0, y_0)$ is, gaan de formules (9), (10) en (11) over in

$$x' = x_0 + s(x - x_0)/m$$

$$y' = y_0 + s(y - y_0)/m$$

$$r' = sr/m$$

$$m = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2.$$



(Uit ons zustertijdschrift Alpha, Oost-Duitsland)

Pythagoras Olympiade



Nieuwe opgaven

Oplossingen vóór 1 december insturen naar: *Pythagoras Olympiade*, Marinus de Jongstraat 12, 4904 PL OOSTERHOUT (NB). Vermeld op elk (éénzijdig beschreven) vel je naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas. Verder moet elke oplossing op een nieuw vel beginnen, want we corrigeren ze afzonderlijk. We bekijken alleen goed leesbare oplossingen die volledig zijn uitgewerkt, met verklarende tekst in goed lopende zinnen. Verdere informatie over de wedstrijd vind je in nummer 1 van deze jaargang op bladzijde 26.

PO 136

Op de velden van een 11×11 schaakbord schrijft men gehele getallen kleiner dan of gelijk aan 11 op zo'n manier dat de som van de getallen op elk 2×2 deelbord van vier aangrenzende velden gelijk is aan 0.

Wat is de maximale waarde van de som van *alle* getallen op het schaak-

bord? Motiveer je antwoord!

PO 137

Bestaan er in het vlak twee elkaar snijdende cirkels met verschillende stralen met de eigenschap dat de vier cirkelbogen waarin de twee snijpunten de twee cirkels verdelen alle vier een *gehele* lengte hebben?

Oplossingen en prijswinnaars van de opgaven PO 124 - 127

PO 124

In een vaas bevinden zich 1 witte en 10 rode ballen. Er is verder een onbeperkte voorraad rode ballen beschikbaar. Je voert de volgende stappen uit:

1. Schud de vaas.
2. Trek (willekeurig) een bal.
3. Is de getrokken bal rood, leg hem dan terug, en doe een extra rode bal in de vaas. Ga vervolgens terug naar stap 1.

4. Is de getrokken bal wit, dan stop je.

Hoe groot is de kans dat je na hoogstens 100 trekkingen stopt?

Oplossing van *Erjen Lefeber*, 6 vwo, Zoetermeer:

Laat X de beurt zijn waarin de witte bal getrokken wordt. Berekend moet worden:

$$P(X \leq 100) = 1 - P(X > 100).$$

Aangezien $P(X > 100) = (10/11) (11/12) (12/13) \dots (108/109) (109/110) = 10/110 = 1/11$ is de gevraagde kans $1 - (1/11) = 10/11$.

Er waren 13 inzendingen, waarvan 10 correct. Prijwinnaars: *Peter Steeneken*, 4 vwo, Vries en *Jeroen Jannink*, 5 vwo, Enschede.

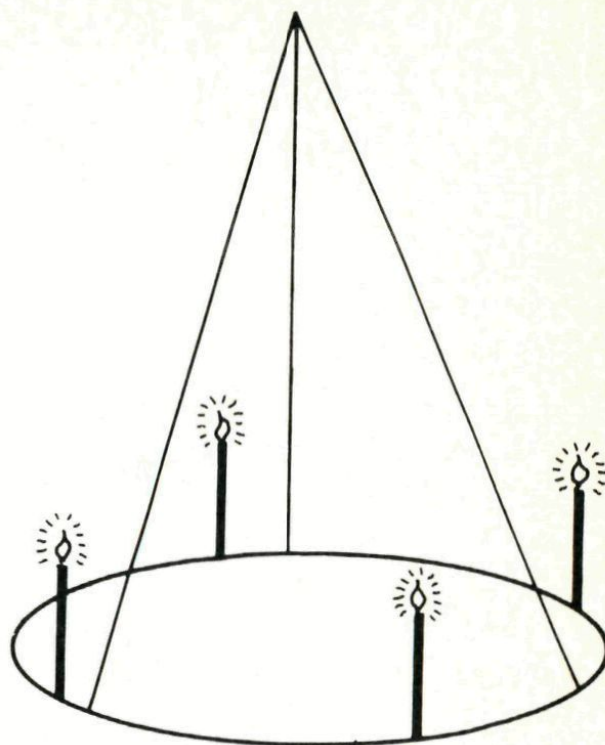
PO 125

Op een krans met een straal van 1 meter bevinden zich n kaarsen, die geplaatst zijn op de hoekpunten van een regelmatige n -hoek. De krans is opgehangen aan m koorden, die bevestigd zijn aan ophangpunten op de krans die de hoekpunten vormen van een regelmatige m -hoek. De kaarsen en de ophangpunten zijn verder zo gekozen dat de *minimale* afstand tussen een kaars en een ophangpunt *maximaal* is (dit met het oog op brandgevaar!).

Bepaal de minimale afstand. (Figuur 1 toont het geval $n = 4$, $m = 3$. De dikte van de krans is verwaarloosbaar.)

We ontvingen voor deze opgave 9 inzendingen, waarvan er 3 niet correct waren. De overige zes hebben we allemaal een punt voor de ladderwedstrijd gegeven, maar we vonden geen van die oplossingen geschikt voor plaatsing omdat ze òf erg lang waren, òf omdat er toch nog wel kleine aanmerkingen op gemaakt konden worden. In plaats daarvan geven we het volgende bewijs.

Bewijs Ga uit van een willekeurige situatie waarin de kaarsen op de hoek-

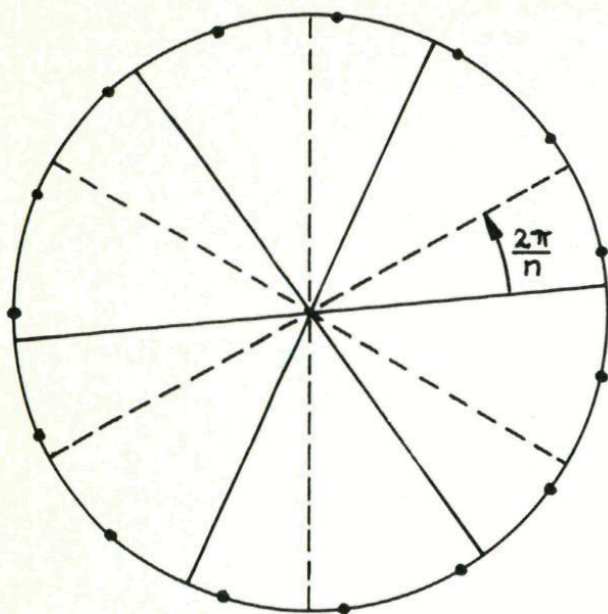


Figuur 1

punten van een regelmatige n -hoek, en de koorden op de hoekpunten van een regelmatige m -hoek bevestigd zijn.

Draai de krans in gedachten over een hoek van $2\pi/n$ radialen. De kaarsen staan dan weer op dezelfde plaatsen (alleen cyclisch verwisseld), maar de koorden zullen op nieuwe posities terecht komen, tenzij m een geheel veelvoud is van n . De minimale afstand kaars-koorde zal door die draaiing niet veranderen, en die verandert dus ook niet als we m extra koorden bevestigen op de nieuwe plaatsen. Figuur 2 toont de situatie met $n = 15$ kaarsen en $m = 6$ koorden.

Zo kunnen we doorgaan: telkens draaien over $2\pi/n$, en telkens nieuwe koorden bevestigen op plaatsen waar ze nog niet zaten. Op een bepaald moment (in het getekende voorbeeld na 5 keer draaien) komen er geen nieuwe



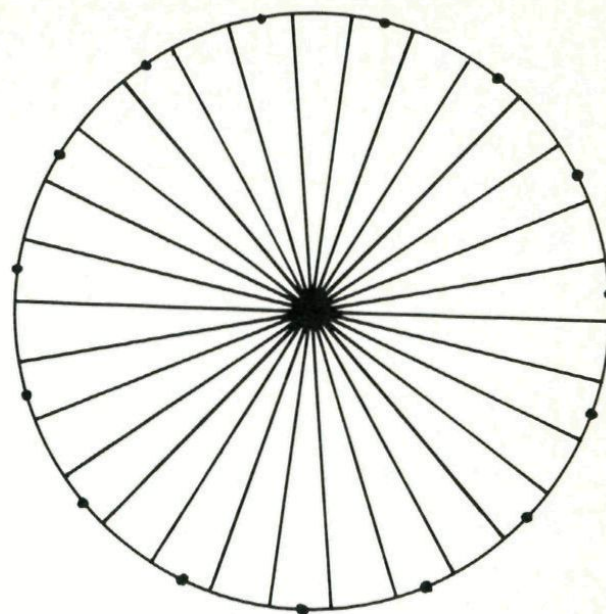
$n=15$
 $m=6$

Figuur 2

koorden meer bij. De bevestigingsplaatsen van de koorden vormen dan een regelmatige K -hoek, waarbij K het kleinste gemene veelvoud is van m en n (in het voorbeeld is $K = 30$, figuur 3). Nu is de krans volledig symmetrisch geworden: een regelmatige K -hoek van koorden, met daartussen een regelmatige n -hoek van kaarsen.

Omdat K een veelvoud van n is (het kgv van m en n), is het duidelijk dat de minimale afstand tussen een kaars en een koorde maximaal is als de kaarsen allemaal precies tussen twee opvolgende koorden staan. De boogafstand langs de cirkel is dan $2\pi/2K = \pi/K$, en de rechte afstand is $2 \sin(\pi/2K)$ meter.

Prijswinnaars: *Timo Gerlagh*, 5 vwo, Driebergen en *Wim Oudshoorn*, 11e klas, Vrije School, Heiloo.



$n=15$
 $k=30$

Figuur 3

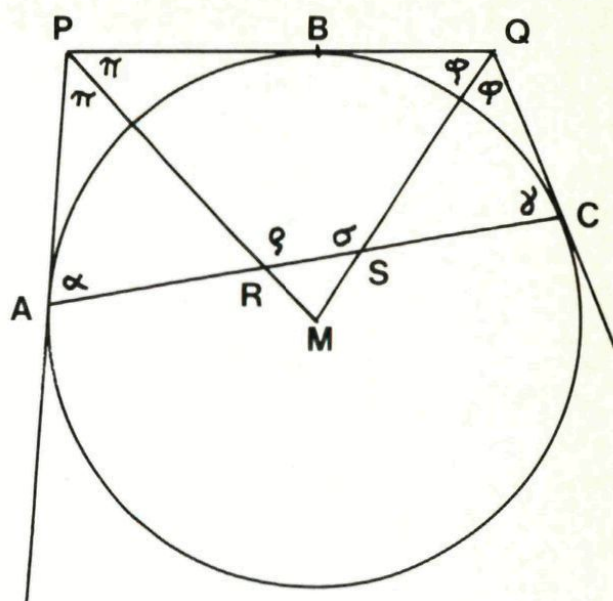
PO 126

Bij een diner zitten er 100 gasten rond een tafel. Tussen elk tweetal staat een klein boeket: rood als ze van hetzelfde geslacht zijn, en wit in het andere geval. Is het mogelijk dat er precies 10 witte boeketten méér zijn dan rode? Motiveer je antwoord!

Oplossing van *Wim Oudshoorn* (11e klas, Vrije School, Heiloo): Als je, bij één persoon beginnend, de tafel rondgaat, verandert het geslacht van de gasten telkens als je een wit boeket passeert. Na een volledige rondgang ben je weer terug bij de eerste persoon, en het totale aantal geslachtswisselingen is dus even. Het aantal witte boeketten is daarom ook even. Uit de gegevens volgt echter dat er 55 witte en 45 rode boeketten neergezet zouden zijn. Dit is dus onmogelijk.

Er waren 10 inzendingen, waarvan 9 correct. Prijswinnaars: *Dorien Haarsma*, 6 vwo, Middenmeer en *Koen Engelborghs*, 5de klas, Heverlee, België.

Opmerking Het probleem met opgeven die je op een 'alledaagse' manier formuleert, is dat ze vaak op meer dan één manier gelezen kunnen worden, en ook dat je als opsteller van zo'n opgave soms ongewild slordig bent. Dat was hier ook het geval. We worden er op gewezen door een van onze lezers, de heer E.C. Buissant des Amorie. Alle andere inzenders hebben de opgave opgevat in de zin dat de boeketten staan tussen gasten *die naast elkaar zitten*, en dat was ook de bedoeling. Maar strikt genomen staat dat er niet. Als er tussen *elk* tweetal gasten een boeketje geplaatst wordt (en al die boeketjes ook nog verschillend zijn), dan ontstaat een veel lastiger probleem. Je moet je ook niet voorstellen wat een bloemenzee er dan nodig is: $100 \cdot 99/2 = 4950$ boeketten, en dat allemaal op één tafel! Maar als wiskunde-sommetje is deze opgave toch ook wel leuk. De heer Buissant des Amorie bewees dat het ook dan onmogelijk is dat er precies 10 witte boeketten meer zijn dan rode. Wie van onze lezers doet hem dat na? En ten slotte werpt hij nog de vraag op of het misschien wel kan als een boeketje meerdere tweetallen tegelijk mag 'bedienen'. Dat leidt tot moeilijke meetkundige vragen die ook nog met de precieze vorm van de tafel en de manier waarop de gasten er omheen



Figuur 1

zitten te maken hebben. We laten die kwestie hier maar rusten.

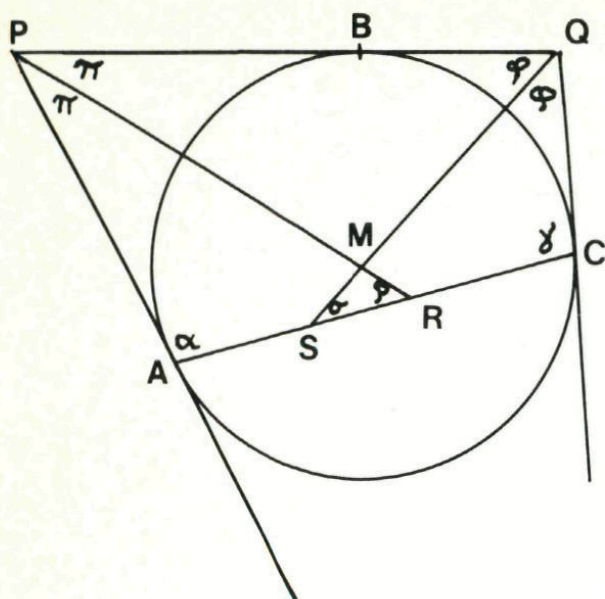
PO 127

Gegeven zijn drie punten A , B en C op een cirkel met middelpunt M . De raaklijnen in A en B snijden elkaar in een punt P , die in B en C snijden elkaar in een punt Q . De lijnen MP en MQ snijden de lijn AC in respectievelijk R en S .

Bewijs dat de vier punten P , Q , R en S op één cirkel liggen.

Oplossing van *Wim Oudshoorn*, 11e klas, Vrije School, Heiloo:

De in figuur 1 getekende hoeken π bij P zijn gelijk want vierhoek $PAMB$ is spiegelsymmetrisch om PM . Evenzo zijn de hoeken φ bij Q gelijk. De hoeken α en γ zijn ook gelijk, want als je de koorde AC spiegelt in zijn middelloodlijn (die door M gaat), gaan de koorde en de cirkel in zichzelf over, en worden de raaklijnen



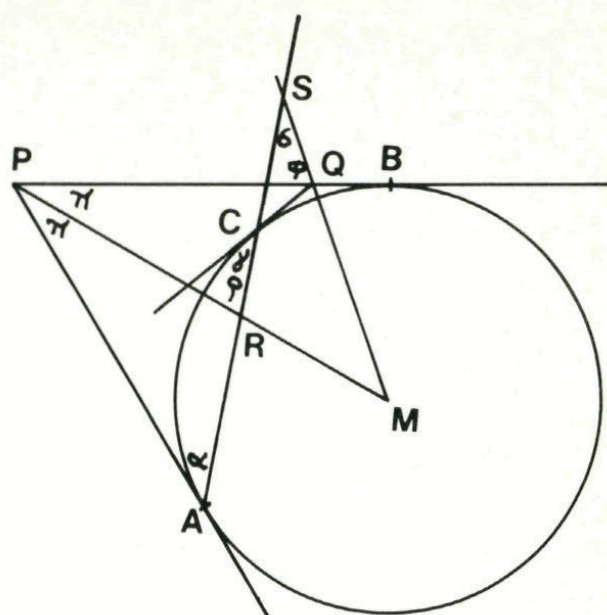
Figuur 2

in A en C verwisseld. Nu geldt: $\rho = 180^\circ - (180^\circ - \alpha - \pi) = \alpha + \pi$, en evenzo $\alpha = \gamma + \varphi = \alpha + \varphi$.

Aangezien $360^\circ = \pi + \varphi + \sigma + \rho = 2\alpha + 2\pi + 2\varphi$, geldt $\rho + \varphi = \alpha + \pi + \varphi = 180^\circ$.

Een bekende stelling zegt dat als van een vierhoek twee overstaande hoeken samen 180° zijn, de vier hoekpunten op een cirkel liggen (de zo geheten koordenvierhoek-stelling). Uit deze stelling volgt dus dat P, Q, R en S op één cirkel liggen.

Eigenlijk is dit bewijs van Wim niet helemaal volledig. Als namelijk de koorde AC aan de andere kant van het middelpunt ligt (zoals in figuur 2), of als A en C aan dezelfde kant liggen van de lijn BM (figuur 3), moet je het bewijs wat aanpassen. Johan Derijckere, 5de klas, Gullegem (B) gaf ook in die gevallen een tekening met bewijs, en hij bewees bovendien de stelling ook nog op een heel andere



Figuur 3

manier door in een coördinatenstelsel te rekenen. Het voordeel daarvan is dat je alle gevallen in één keer behandelt; het nadeel is dat het niet meevalt om de berekeningen kort en overzichtelijk te houden. Maar Johan bewees nog meer, namelijk:

1. A, P, B, S en M liggen op één cirkel,
2. C, Q, B, R en M liggen op één cirkel,
3. PQ is een *middellijn* van de cirkel door P, Q, R en S,
4. PS, QR en B zijn de hoogtelijnen van driehoek PQM, en gaan dus door één punt.

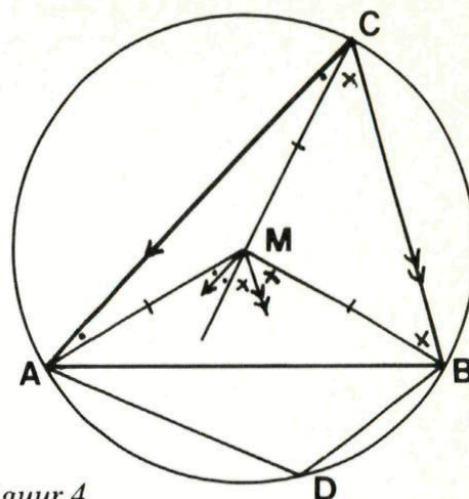
Alle reden dus om Johan hier eervol te vermelden, en om onze lezers uit te dagen dit alles ook te bewijzen.

We ontvingen verdere correcte oplossingen van *Antoine van de Ven*, 6 vwo, Heesch en *Martijn Wubs*, 6 vwo, Hoogeveen. Eén inzending was niet geheel correct. Prijswinnaars: *Antoine van de Ven* en *Johan Derijckere*.

Koordenvierhoek-stelling

Het gereedschap bij de meetkundige bewijzen van deze opgave berust allemaal op eigenschappen van *omtrekshoeken* en *middelpuntshoeken* bij cirkels. We hebben die eigenschap al vaak in Pythagoras behandeld, maar misschien is het goed het hier nog eens te doen, omdat die stof op school meestal niet aan de orde komt.

In figuur 4 zie je een koorde AB van een cirkel met middelpunt M waar nog een derde punt C op ligt. Verder zijn enige gelijke hoeken aangegeven (bedenk dat in een cirkel alle stralen even lang zijn!). Je ziet dus dat de middelpuntshoek AMB twee maal zo groot is als de omtrekshoek ACB . Houd je B vast, en varieer je C over de cirkelboog die door A en B wordt begrensd, dan blijft hoek ACB dus steeds even groot. Passeer je A of B , dan moet je de andere middelpuntshoek nemen, die een grootte heeft van $360^\circ - AMB$, dus de omtrekshoek ADB wordt dan $180^\circ - ACB$. Anders gezegd: als A, D, B, C in



Figuur 4

die volgorde op een cirkel liggen, dan geldt dat de hoeken ADB en ACB samen 180° zijn.

Het omgekeerde geldt ook: als C en D aan weerszijden van de lijn AB liggen en de som van de hoeken ADB en ACB is 180° , dan liggen die vier punten (in die volgorde) op een cirkel. En als C en D aan dezelfde kant van de lijn AB liggen, dan liggen A, B, C , en D op een cirkel wanneer de hoeken ACB en ADB gelijk zijn. Dit alles vormt de inhoud van de zo geheten koorden-vierhoek-stelling. $\square$

Oneindigheid

Een onbereikbaar ideaal

Stel je een hotel voor met oneindig veel kamers. Alle kamers hebben een nummer: 1, 2, 3, 4, ... tot in het oneindige. Zo'n hotel wordt het hotel van Hilbert genoemd, naar de Duitse wiskundige David Hilbert (1862-1943). Stel dat op zekere dag dit hotel helemaal is volgeboekt. Laat in de avond komt echter nog een gast die wil overnachten.

Bij een gewoon hotel zal die gast alle kamers bezet vinden. Hij zal op zoek moeten naar een ander hotel waarin nog een kamer onbezet is. De receptionist van het hotel van Hilbert schrijft de nieuwe gast in, hoewel hij ziet dat alle kamers bezet

zijn. Vervolgens geeft hij alle gasten opdracht te verhuizen naar de volgende kamer. De gast uit kamer 1 gaat naar kamer 2, de gast uit kamer 2 naar kamer 3, enzovoort. Zo komt kamer 1 vrij en is beschikbaar voor de nieuwe gast.

Komt er vervolgens nog een bus met 40 reizigers die willen overnachten, dan zit de receptionist van het hotel van Hilbert daar ook niet mee. Hij geeft alle gasten opdracht te verhuizen naar de kamer waarvan het nummer 40 hoger is. De 40 reizigers kunnen dan hun intrek nemen in de kamers 1 tot en met 40.

Zelfs als er nog weer later een soort superbust komt met oneindig veel genummerde zitplaatsen, zeg maar een hilbertbus, weet de receptionist van het hotel van Hilbert raad. Hij geeft de al aanwezige gasten opdracht te verhuizen naar de kamer waarvan het rangnummer het dubbele is van hun oorspronkelijke kamer. Dus de gast uit kamer 1 gaat naar kamer 2, die uit kamer 2 naar kamer 4, die uit kamer 3 naar kamer 6, enzovoort tot in het oneindige. Hierdoor komen alle kamers met een oneven nummer vrij voor de oneindig passagiers van de hilbertbus. Kortom, het hotel van Hilbert is als het er op aankomt, nooit volgeboekt.

Dit is een van de aardige anekdotes uit het boek 'Oneindigheid, een onbereikbaar ideaal' van Hans Lauwerier. In dit boekje worden op een prettige en luchtige manier allerlei aspecten van het begrip oneindig belicht. Om daar nog een voorbeeld van te geven gaan we de volgende morgen een kijkje nemen in het hotel van Hilbert. De kamers moeten dan worden schoongemaakt. Ook dat is geen probleem. Er hoeft zelfs geen oneindig grote schoonmaakploeg uit te rukken. Een enkele flinke werkster is voldoende voor het hele hotel. En die klaart het hele karwei zelfs in een tijdsduur van twee uur.

Om 10 uur verzoekt de receptionist alle gasten hun kamer te verlaten en naar de kamer met het daaropvolgende nummer te gaan. Kamer 1 komt vrij en daarin kan de werkster aan de slag.

Om 11 uur herhaalt de receptionist zijn verzoek, om 11.30 uur herhaalt hij het weer, om 11.45 opnieuw, enzovoort. Van 10 tot 11 uur maakt de werkster dus kamer 1 schoon, in het volgende half uur kamer 2, in het dan volgende kwartier kamer 3, enzovoort.

Zie je niet in dat ze om 12 uur het hele hotel schoon heeft? De methode die wordt gebruikt bij het schoonmaken berust op de bekende meetkundige reeks

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots\dots\dots$$

en daarvan is de som 2. Deze en andere reeksen komen ook in het boekje aan de orde. De schoonmaakmethode zelf helaas niet.

'Oneindigheid, een onbereikbaar ideaal' door Hans Lauwerier, Aramith Uitgevers, Bloemendaal (ISBN 90 6834 055 7; prijs f 32,50/BEF 650). □

Redactioneel

Helaas verschijnt dit nummer veel later dan gepland. Net toen het er op ging lijken dat we de lopende jaargang ruim voor de zomervakantie zouden hebben afgerond, kregen we te maken met druktechnische redenen. Vervelend, ook voor de redactie daar we meer dan voldoende artikelen in voorraad hebben.

Onder andere vanwege de wat latere verschijningsdata hebben we de oorspronkelijke opzet van dit en het komende nummer iets veranderd. Zo vind je in dit nummer niet het aangekondigde artikel 'Punt van Fermat' waarmee antwoord wordt gegeven op de stukjes 'De kortste weglengte', 'Waar komt de knoop?' en 'De regelmatige driehoeken driehoek' uit het vorige nummer. Dat artikel komt in een volgend nummer.

In het laatste nummer van deze jaargang komen zeker de oplossingen van de Tweede Ronde 1989 van de Nederlandse Wiskunde Olympiade en de opgaven van de Internationale Wiskunde Olympiade 1989. Ook wordt in het komende nummer de parelsnoerformule afgeleid en als toepassing van (cirkel-)inversie wordt een schaakbord binnenste buiten gekeerd. ☐

Uitgave onder toezicht van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Lay-out: Klaas Lakeman, Amsterdam.

Tekenwerk: Hans van Kuyk, Amsterdam.

Foto's en andere illustraties: Hans de Rijk, Utrecht (Omslag, blz. 1, 2, 3); B. de Jongste, Den Haag (blz. 4); Klaas Lakeman, Amsterdam (blz. 6, 7, 13, 14, 16, 19, 23); Theo Scheele, Middelburg (blz. 9); J.B. Ebbinge, Delft (blz. 10); Hessel Pot, Woerden (blz. 12); Hans Lauwerier, Amsterdam (blz. 18); Alpha, Oost-Duitsland (blz. 24); Jan van de Craats, Oosterhout (NB) (blz. 26, 27, 28, 29, 30).

©1990 Redactie Pythagoras / Stichting IVIO - ALLE RECHTEN VOORBEHOUDEN, NADruk OF WEERGAVE, GEHEEL OF GEDEELTELIJK, IN WELKE VORM DAN OOK, ZONDER TOESTEMMING VAN DE REDACTIE VERBODEN.

Pythagoras wiskunde tijdschrift voor jongeren

Redactie: Jan van de Craats, Klaas Lakeman, Hans de Rijk.

Medewerkers: Popke Bakker, Gerard Bäuerle, F. van der Blij,
Niels M. Buizert, Hans Lauwerier, Hessel Pot.

Redactiesecretariaat: Klaas Lakeman, Cornelis Krusemanstraat 60^{II},
1075 NS Amsterdam (NL).

Inhoud jaargang 29, nummer 5

De vierkantenkrans / 1

Hans de Rijk

Een boer verdeelt zijn
land / 3

Klaas Lakeman

Uit het meetkundeboek
van de boer / 7

Geodeet of landmeter / 8

Theo Scheele/J.B. Ebbinge

Geschiedenis van de
wiskunde / 11

Het parelsnoer / 12

Klaas Lakeman

Over op coördinaten / 22

1990 / 24

Pythagoras Olympiade / 25

Jan van de Craats

Oneindigheid / 30

Redactioneel / 32

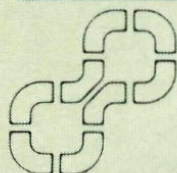
Pythagoras verschijnt zesmaal per
schooljaar; opgave van abonneemen-
ten bij de uitgever (zie onder).

Abonnementen zijn doorlopend, tenzij
voor 1 september schriftelijk bij de uit-
gever is opgezegd.

Bij tussentijdse abonnering ontvangt
men ook de reeds verschenen num-

mers. Betaling per acceptgirokaart.

Tarieven	NLG/BEF
Abonnement Pythagoras	23,—/430
Luchtpost-toeslag	10,—
Inclusief Archimedes	40,—/750
Luchtpost-toeslag	20,—
Losse nummers	5,—/ 90



stichting ivio

Postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL.)

Tel. 03200-76411

educatieve uitgeverij - instituut voor buitenschools

onderwijs - wereldschool - AO-reeks - leerprojecten

Postgiro Nederland: 287934

Postcheck België: 000-0130850-94