



Pythagoras



wiskunde tijdschrift voor jongeren

stichting ivio

30e jaargang
nummer 1
december 1990

Redactioneel

Pythagoras verschijnt nu onafgebroken 30 jaar. Bij gelegenheid van het 5-jarig bestaan verscheen er een boekje 'Pythagoras-Festival' waarin de interessantste artikelen uit nummers uit die eerste periode verzameld waren.

Het is dit keer niet de bedoeling een nieuwe artikelenverzameling uit te geven. We willen wél het interessantste uit vorige jaargangen aanbieden en doen dat door in de komende jaargang iets van het beste uit vroegere jaargangen tussen de andere bijdragen te mengen.

Er zijn, zoals U op de omslag ziet, ook enige veranderingen in de redactie. De redactiesecretaris Drs. K. Lakeman heeft besloten ermee te stoppen. Wij danken hem voor de voortreffelijke jaargangen die hij van 1985 tot 1990 verzorgd heeft.

Kunstjes met getallen

Neem een willekeurig getal van drie cijfers. Draai dit om en trek het kleinste van het grootste af.

Bijv. 864

$$\begin{array}{r} 468 - \\ \hline 396 \end{array}$$

Kies nu eens enige andere getallen en voer hiermee dezelfde bewerkingen uit. Wat merk je op?

Je kunt dit als een trucje gebruiken: laat een ander een willekeurig getal opschrijven, omdraaien en het verschil bepalen. Vraag dan naar het eerste (of het laatste) cijfer van de uitkomst. De gehele uitkomst is dan voor je bekend.

Laten we nu eens proberen de gevonden regel te bewijzen:

$$\begin{array}{r} \overline{abc} \\ \overline{cba} - \\ \hline (a-1-c)9(c+10-a) \end{array} \quad (1)$$

Dus

- het middelste cijfer is 9

- de som van het eerste en het laatste cijfer is $(a-1-c)+(c+10-a)=9$
Zoals je waarschijnlijk weet betekent de notatie $\overline{abc}$: het getal bestaande uit de cijfers a, b, c in deze volgorde.

De uitkomst is nog verrassender als je begint met een getal waarvan de cijfers opeenvolgend zijn.

Bijv. 321

$$\begin{array}{r} 123 - \\ \hline 198 \end{array}$$

Voer dit weer uit met verschillende getallen. Je vindt iets zeer opvallends aan de uitkomst. Probeer dit nu eens op de manier van hierboven te bewijzen.

Begin weer eens volgens de eerste manier en tel bij de uitkomst de omgedraaide uitkomst op:

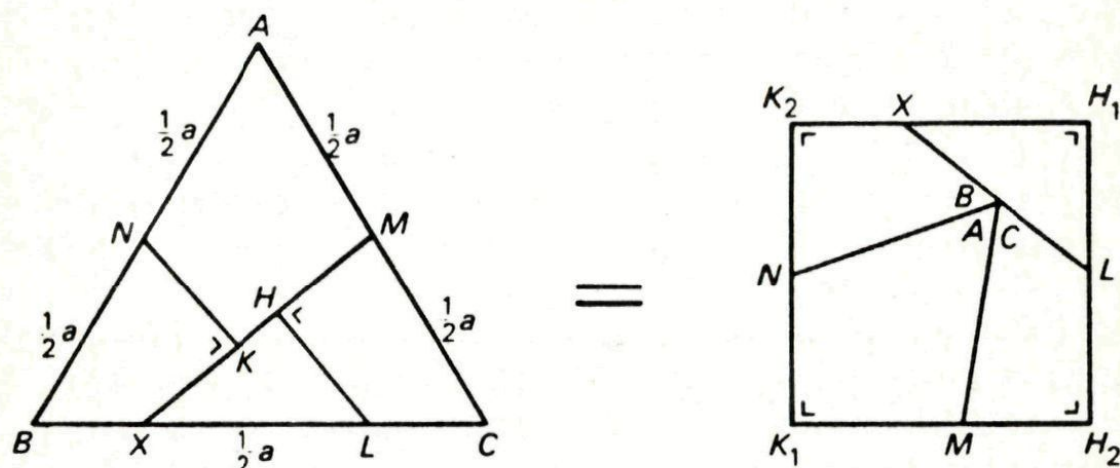
$$\begin{array}{r} 864 \\ 468 - \\ \hline 396 \\ 693 + \\ \hline 1089 \end{array}$$

Om een algemeen patroon te ontdekken, moet je weer een aantal gevallen berekenen. Uitgaande van de 'algemene' uitkomst (1) van het eerste geval kun je dit resultaat

gemakkelijk bewijzen:

$$\frac{(a-1-c)9(c+10-a)}{(c+10-a)9(a-1-c)} + \frac{(9)}{(18)} = 1089$$

Een merkwaardige legpuzzel



Van globe naar landkaart

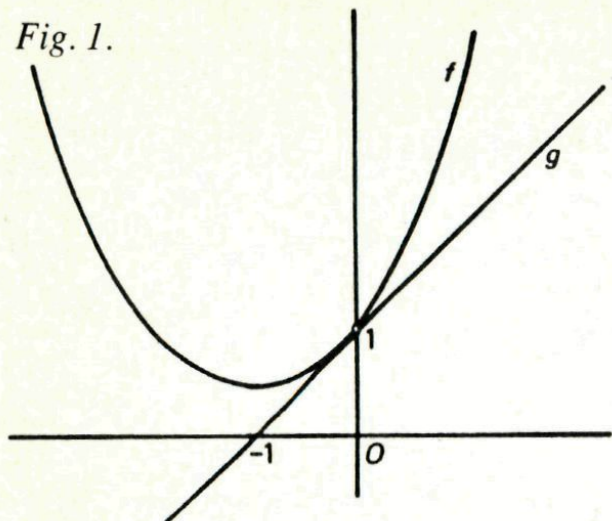
Er zijn vele manieren bedacht om de hele globe of delen ervan op een plat vlak te projecteren zodat een landkaart ontstaat.

Deze projectiemethoden kunnen een niet te groot gebied afbeelden zó dat afstanden bij benadering verhoudingsgetrouw zijn weergegeven. Met verhoudingsgetrouw wordt bedoeld dat de afstanden niet in ware grootte worden afgebeeld, maar op zekere schaal. Bij benadering wil zeggen dat meestal naar de rand van de kaart afstanden en oppervlaktes minder precies worden. Men spreekt wel van een lokale benadering.

Ook in de wiskunde gebruikt men het begrip lokale benadering. Zo kan men de kwadratische functie $f: x \rightarrow x^2 + x + 1$ vervangen door de lineaire functie $g: x \rightarrow x + 1$, wat een goede benadering is voor waarden van x dicht bij nul (fig. 1). Bijvoorbeeld: $g(0,01) = 1,01$ en $f(0,01) = 1,01005$. Zo'n lokale benadering kan een

goede rol vervullen bij problemen die wel met een lineaire functie, maar niet of moeilijk met andere functies op te lossen zijn. Maar zoals uit figuur 1 blijkt zal de benadering minder bruikbaar zijn naarmate waarden van x verder van nul af liggen. Als er waarden van x rond -2 in het geding zijn, kan men natuurlijk een andere benadering

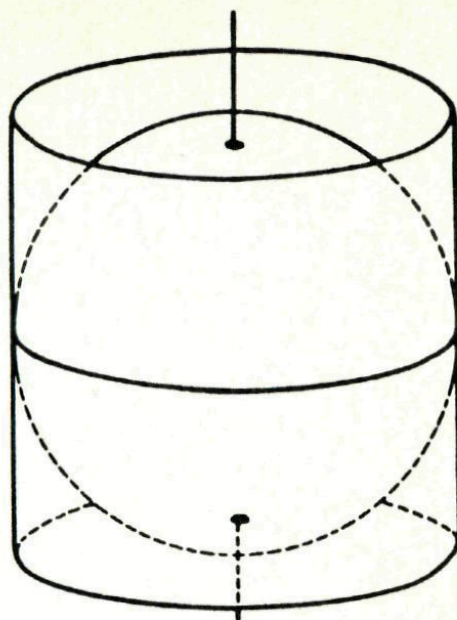
Fig. 1.



(een andere kaart) kiezen: $x \rightarrow -x - 1$. Een bruikbare lineaire benadering voor de functie voor het gehele domein is niet mogelijk. Evenmin is het mogelijk een vlakke weergave van de gehele aardbol te maken waarop afstanden betrouwbaar worden weergegeven. Wel kan men een redelijk resultaat krijgen met kaartdelen die niet aaneengesloten worden afgebeeld. Dit is vergelijkbaar met het benaderen van de parabool van figuur 1 door een gebroken lijn bestaande uit raaklijnstukken in plaats van door één raaklijn.

Toch is het mogelijk om de aardbol oppervlaktegetrouw in het platte vlak weer te geven! Dus eilanden met gelijke oppervlakte op de kaart hebben dat in werkelijk-

Fig. 2.



heid ook. Hoewel de vorm van zo'n eiland op de kaart soms moeilijk te herkennen is. Want van afstands-trouw is bij deze projectiemethode geen sprake. De methode was overigens al bekend aan Archimedes. Stel de wereldbol voor, omgeven door een cilinder door de evenaar en evenwijdig aan de aardas (fig. 2). We vinden de projectie van een punt door hier vanuit eerst een loodlijn neer te laten op de aardas en deze loodlijn in de andere richting te verlengen totdat de cilinder gesneden wordt (fig. 3).

Deze omschrijving geldt niet voor de polen (waarom niet?).

De kaart die ontstaat door het openknippen van de cilinder ziet er ongeveer als volgt uit:



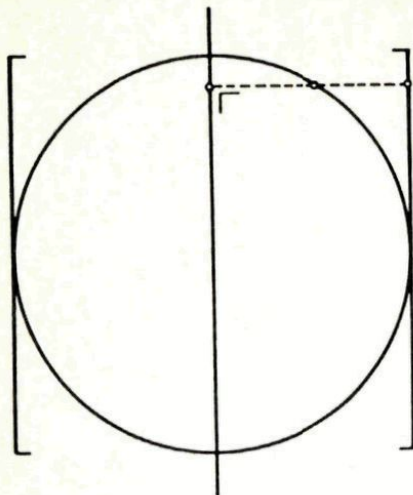


Fig. 3.

Parallelcirkels verschijnen als horizontale lijnen, meridianen als verticale lijnen. Het meest opvallende is dat Midden-Afrika en het Verre Oosten groter overkomen dan bij de gebruikelijke projecties. Misschien dat deze methode de problemen rond de derde wereld in de juiste proporties weet te zetten! Waarom is deze projectie oppervlaktetrouw? Stel je voor dat er twee schilders zijn, waarvan de ene de cilinder en de andere de bol gaat schilderen. Ze spreken af beiden van onderen naar boven te schilderen en wel zo, dat de horizontale grens tussen geverfd en ongeverfd eenparig (snelheid $\vec{V}_1$) naar boven schuift (fig. 5).

Bij de cilinder verandert het geschilderde oppervlak daarmee ook eenparig ($2\pi R |\vec{V}_1|$). Hoe is het met de bol? De snelheid V_2 waarmee de verf-grens verschuift langs een meridiaan is gelijk aan $\frac{R}{P} |\vec{V}_1|$, wegens de gelijkvormigheid van de drie-

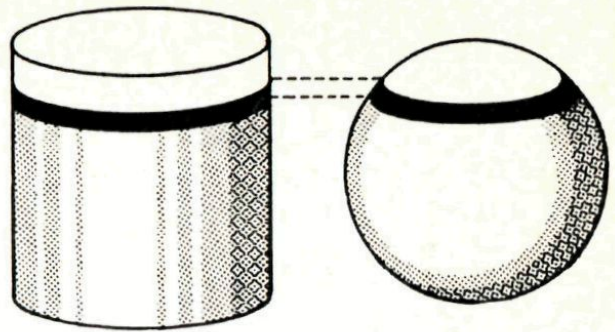


Fig. 5.

hoeken in figuur 6. Het verfwerk gebeurt op de bol over een cirkel met omtrek $2\pi P$, dus verandert het geschilderd oppervlak van

$$2\pi P \times \frac{R}{P} |\vec{V}_1| = 2\pi R |\vec{V}_1| \text{ en dat}$$

komt volledig overeen met de cilinder. Met andere woorden: beide schilders verzetten evenveel verfwerk per tijdseenheid. Bovendien zijn ze op hetzelfde moment begonnen. Nemen we twee momenten in gedachten dan is het tussenliggend verfwerk gelijk: de zwarte ringen in figuur 5. Neemt men daarvan weer een sector, bijvoorbeeld het honderdste deel, dan zijn

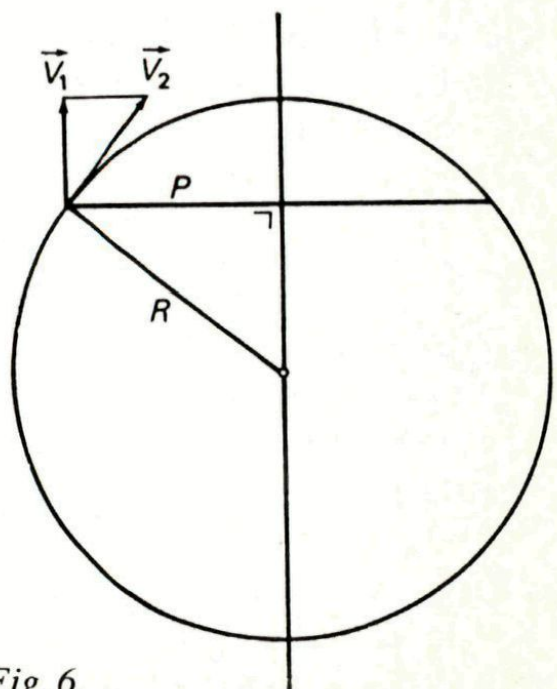


Fig. 6.

die oppervlaktes ook gelijk (fig. 7). Een eiland op de bol kunnen we indelen in kleine vierhoekjes; dan zal ook de projectie ingedeeld

worden met evenveel vierhoekjes van dezelfde oppervlakte. Onze afbeelding is dus oppervlaktetrouw.

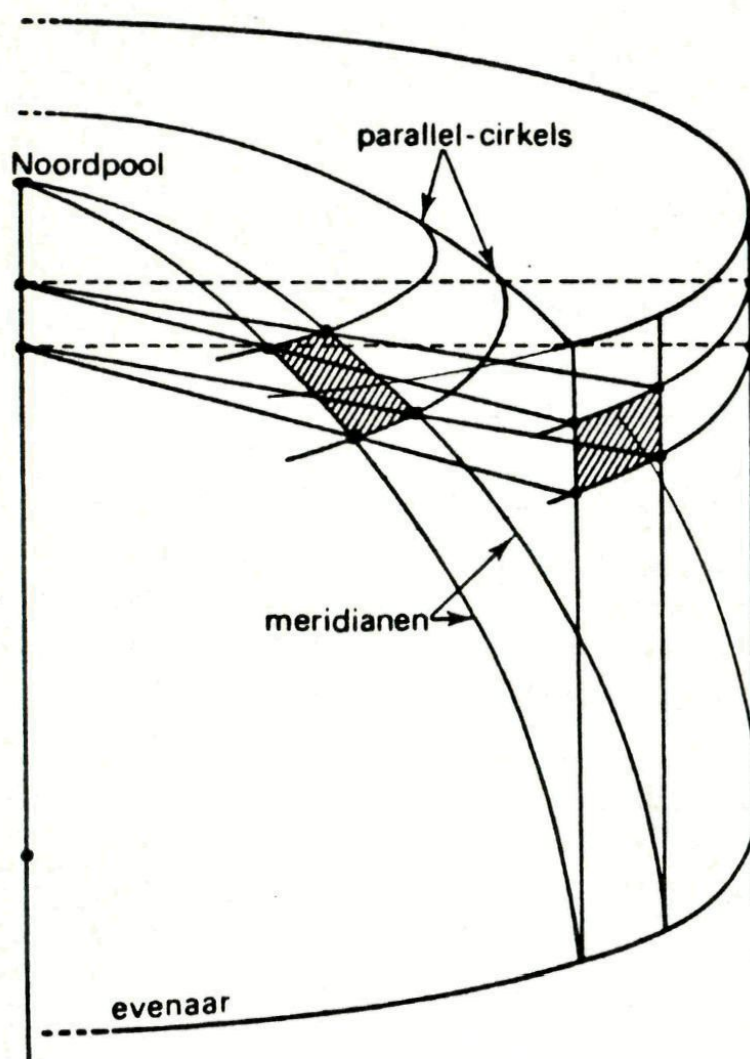


Fig. 7.

Papierformaten

Een kwestie van verhoudingen

Als je een reisbureau binnenstapt en de verzameling folders bekijkt, tref je daar allerlei vormen en afmetingen aan. Toch heeft men sinds vijftig jaar internationale afspraken over modellen en maten van papier.

Reisbureaus willen klanten trekken en daarvoor moet je opvallen. Voor het gewone gebruik van alledag hebben we liever gestandaardiseerde maten. Daar willen we het eens over hebben. Wat heeft men gekozen en waarom?

Een merkwaardige verhouding

We nemen een rechthoekig stuk papier en vouwen het dubbel (fig. 1). De korte zijde van de grote rechthoek (b) wordt nu de lange zijde van de kleine rechthoek. In het algemeen zal de kleine rechthoek niet gelijkvormig zijn aan de grote. Toch zou het wel leuk zijn als dat kon.

Is het mogelijk een vorm te bedenken waarbij dat lukt? Daartoe zou moeten gelden: $2a : b = b : a$ of $b^2 = 2a^2$ of $b = a\sqrt{2}$ of $b : a = \sqrt{2} : 1$. Het lukt dus als we de lange zijde van de rechthoek $\sqrt{2}$ keer de korte zijde kiezen.

En zo is het afgesproken!

Als men uit papier kleinere formaten snijdt, gaat er zo ook geen papier verloren.

Neem een velletje typepapier.

Meet hoogte en breedte op. Vind je ook 210×297 ?

Dat is heel correct de verhouding $1 : \sqrt{2}$.

Vouw het vel in tweeën. Nu zijn de maten 148×210 en dat is opnieuw de verhouding $1 : \sqrt{2}$.

En zo kun je nog wel een tijdje doorgaan.

Op allerlei plaatsen kun je deze formaten aantreffen.

Normaal briefpapier heeft ook deze afmetingen. Als briefpapier overal deze afmeting heeft, kunnen we onze correspondentie gemakkelijker opbergen.

Meet eens de maten van je proefwerkpapier op school, van je schriftpapier, het examenpapier.



De A-formaten

Het formaat papier dat we het meest tegenkomen, heet A-4. Men gaat daarbij uit van formaat A-0. Dit laatste is een groot vel met een oppervlakte van 1 m^2 en verhouding van de zijden $\sqrt{2} : 1$ (fig. 2).

Als we de korte zijde x noemen en de lange zijde $x\sqrt{2}$, moet dus gelden:

$$x \cdot x\sqrt{2} = 1 \text{ m}^2 = 1.000.000 \text{ mm}^2 \text{ of } x^2 = 10^6 : \sqrt{2} = 707107$$

en dus $x = 841 \text{ mm}$ en $x\sqrt{2} = 1189 \text{ mm}$.

En hiermee hebben we de dan de maten van het grootste vel in de serie berekend.

Formaat A-1 ontstaat nu door het eerste formaat te halveren. De korte zijde van A-0 wordt daarbij de

lange zijde van A-1. Zo wordt het formaat A-1 nu: $841 \times 594 \text{ mm}$.

Reken de verdere formaten zelf maar na. Wat is de betekenis van de gestippelde lijn in figuur 2?

In figuur 3 is nog eens aangegeven hoe de formaten uit elkaar ontstaan door voortdurend halveren.

Overige vormen

We zouden de rij A-formaten kunnen voortzetten, maar we moeten wel bedenken dat we dan met A-10 al op $26 \times 37 \text{ mm}$ uitkomen en dat is onderhand postzegelformaat. Het zou wel erg vreemd zijn als ook de papierindustrie geen afwijkende vormen had.

De bekendste zijn *folio* en *kwarto* (fig. 4). Het eerste formaat heeft afmetingen 220 mm breed en 330

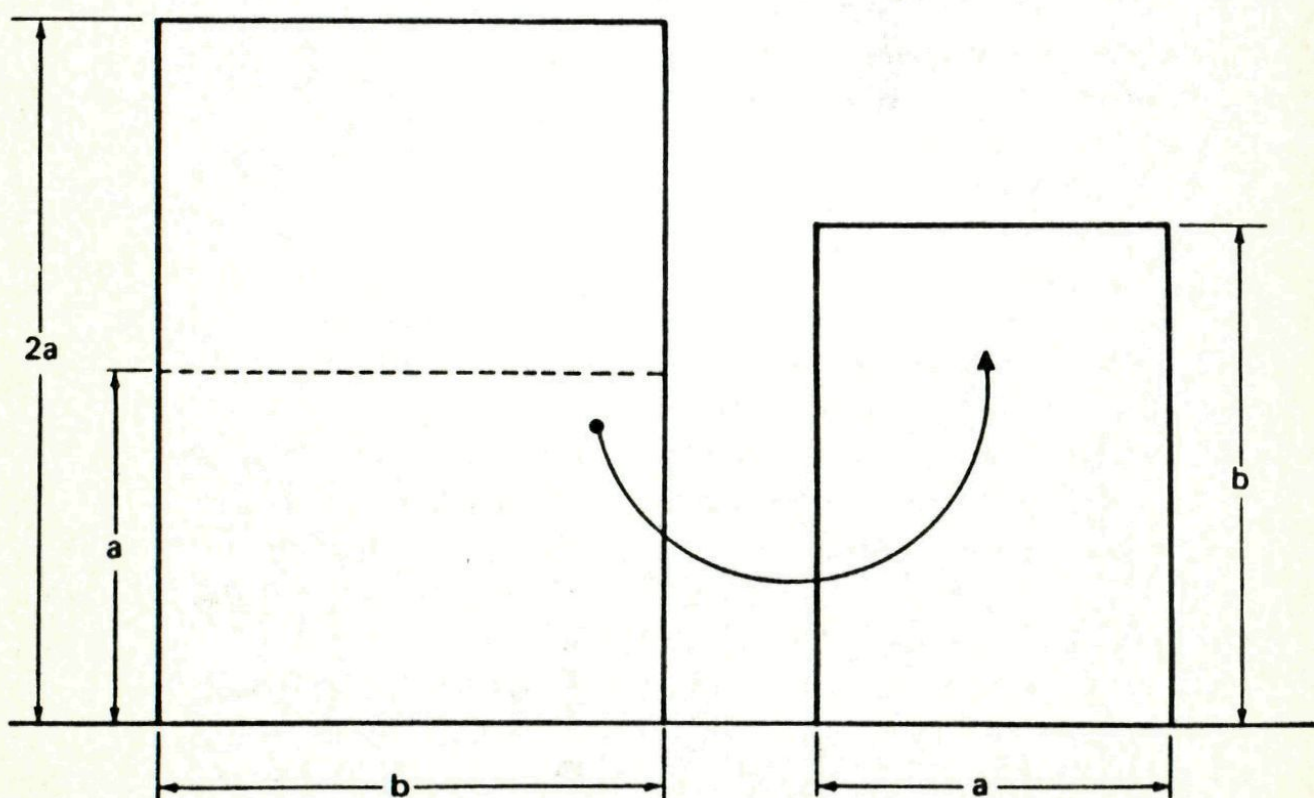


Fig. 1. De halve oppervlakte heeft dezelfde vorm.

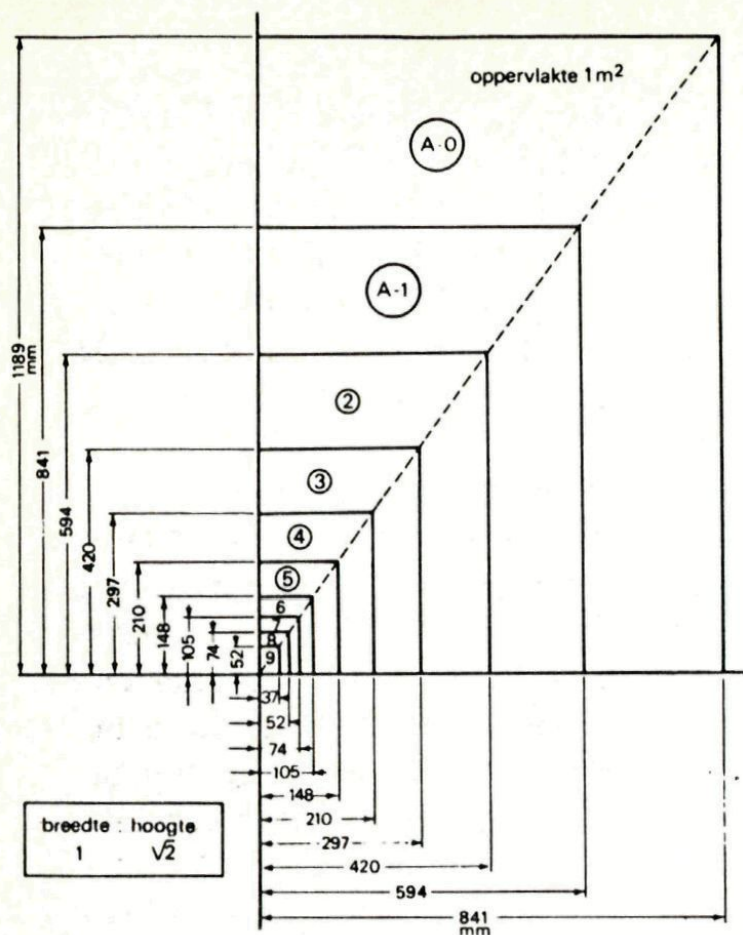


Fig. 2. De verschillende papierformaten.

mm hoog. Dit is het papier waarop je het schriftelijk eindexamenwerk zult maken. De verhouding is 2 : 3. Als je dat dubbel zou vouwen zou de verhouding 3 : 4 worden. Bij weer dubbelvouwen opnieuw 2 : 3 en zo verder.

Een ander bekend formaat is kwarto. Hierop zit uw redacteur nu te typen. Het heeft maten 210 x 280 mm en de verhouding is dus 3 : 4, hetgeen bij dubbel vouwen weer 2 : 3 wordt. Dit formaat is in gebruik als stencilpapier.

Kwarto is iets korter dan A-4; folio in het geheel iets groter dan A-4 (zie stippellijnen in fig. 4).

Beide formaten zijn ontworpen in verband met ons schoonheids-

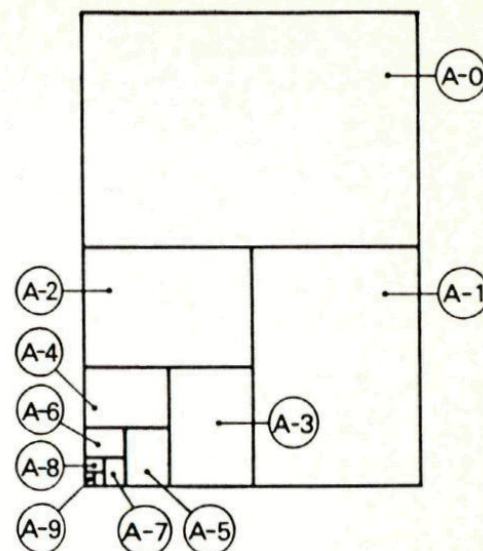


Fig. 3. De maten ontstaan door voortdurend halveren.

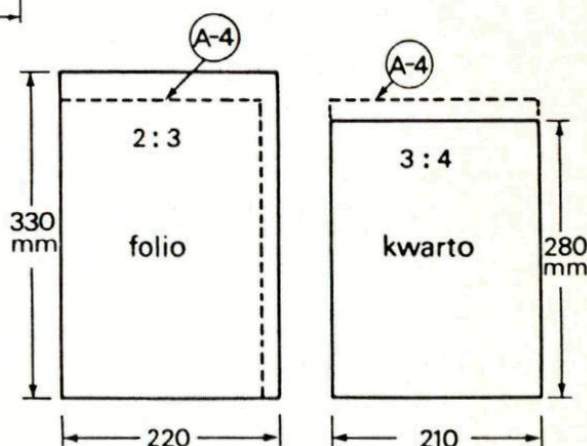


Fig. 4. Afwijkende vormen.

gevoel, dat erg staat op eenvoudige verhoudingen.

De verhoudingen 2 : 3 en 3 : 4 komen dan wel het eerst in aanmerking.

En laat dat nu juist voorkomen bij het formaat van dit tijdschrift.

Het uitgevouwen boekje heeft de verhouding 4 : 3 en het dichtgeslagen boekje de verhouding 3 : 2.

De vier kubussen van professor X

Tenminste twee keer per jaar kom ik bij professor X thuis omdat we ons beiden interesseren voor postzegels met wiskundige onderwerpen. We tonen elkaar onze nieuwe aanwinsten en ruilen zegels die we dubbel hebben. Meestal maakt professor X dan ook van de gelegenheid gebruik om met me te discussiëren over een van zijn laatste vondsten op 't gebied van onmogelijke figuren. Vorige maand liet hij me een tekening zien waaraan ik op het eerste gezicht niets vreemds of interessants kon ontdekken (fig. 1).

Professor X: "En, wat zie je?"

Toen ik niet snel genoeg reageerde, kwam er iets ongeduldigs in zijn stem: "Zeur niet, zeg gewoon wat je ziet, het is echt geen strikvraag."

"Vier kubussen."

Professor X: "Klopt. Kijk, ik zal het even opnieuw schetsen en de kubussen nummeren: I, II, III en IV. Welke kubussen staan op de grond?"

"I en IV," zei ik prompt.

Professor X: "Goed, dan beweer ik dat je nu kijkt naar een ding waarvan je onmogelijk kunt zeggen hoe lang, hoe breed en hoe hoog het is."

"Een onmogelijke figuur dus?!"

Professor X: "Als je die onmogelijke term wilt blijven gebruiken, goed... dan is het een onmogelijke figuur."

"Mag ik even? Waarom is dat zo'n onmogelijke term? Iedereen die in dat soort figuren geïnteresseerd is, weet wat ermee bedoeld wordt en zal zelf ook die term gebruiken."

Professor X: "M'n beste jongen, natuurlijk mag iedereen ze noemen zoals hij wil, maar de combinatie van de woorden onmogelijk en figuur is onzinnig: ze spreken elkaar tegen. Ik heb deze figuur op papier getekend, die figuur is er, hij bestaat en dus kan hij uiteraard niet onmogelijk zijn. Het voorwerp dat jij je voorstelt als je naar de figuur kijkt, is onmogelijk. Een term die de logica geen geweld aandoet, is onmogelijk voorwerp of onmogelijk object. Je weet overigens dat de eersten die iets over zulke figuren publiceerden, vader en zoon Penrose in 1958, hun artikel de titel 'Onmogelijke objecten, een bijzonder soort optische illusie' meegaven."

"Goed, ik weet hoe u erover denkt en hoewel ik het er niet mee eens ben, zal ik uw spraakgebruik overnemen. U zegt dus dat dit onmogelijke object geen vaste lengte, breedte en hoogte heeft. Wat moet ik me daarbij voorstellen?"

Professor X: "Precies wat ik zeg."

"Nou, de lengte ligt in ieder geval wèl vast, want als ik op de grond het aantal vierkanten tel, dan kom ik tot vier." En ik schreef er 1, 2, 3 en 4 bij.

Professor X: "Maar het zou net zo goed drie kunnen zijn."

"Hoezo?"

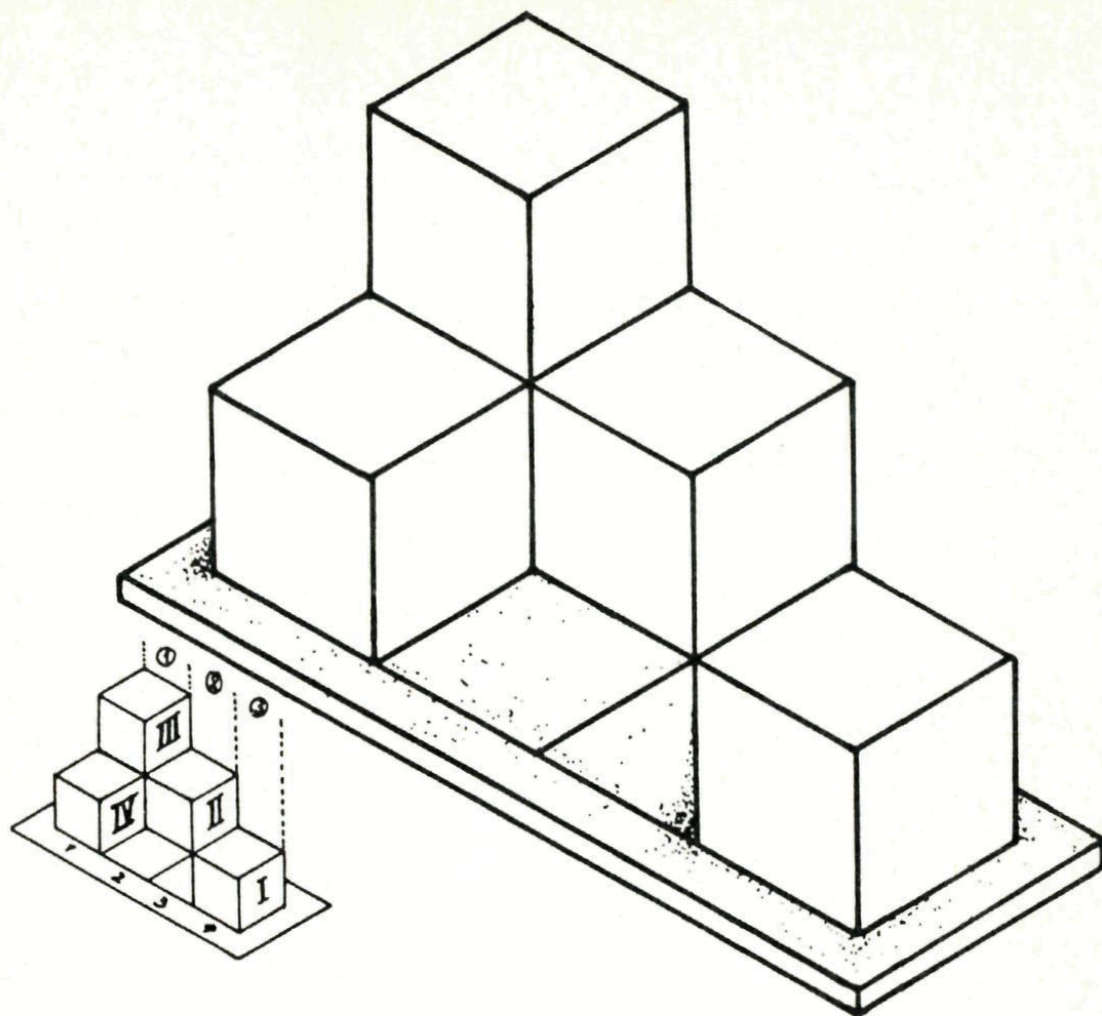


Fig. 1. Een stapeling van vier kubussen: de lengte, breedte en hoogte van het geheel zijn onbepaald.

Professor X: "Kijk maar."

Mijn vriend de professor tekende wat verticale stippellijnen naar boven en nummerde de tussengelegen stukken met ①, ②, en ③. Ik moest toegeven dat zijn manier van tellen even redelijk was als de mijne.

Professor X: "En dan de breedte, zeg het maar."

"Nu, alles staat op een smal plankje dat net even iets breder is dan één vierkant, ik zou dus zeggen dat de breedte één vierkant is."

Professor X: "Dan kijk je zeker naar de voorkant. Maar bekijk nu eens de blokken III en IV achteraan."

"Ja, zo bekeken moet de breedte daar wel twee vierkanten zijn, maar toch loopt er niets schuin! Ik dacht eerst dat de figuur - pardon, het object - niet zo bijzonder was, maar het heeft toch heel aardige eigenschappen."

Professor X: "Het aardigste en opvallendste, namelijk datgene wat aanleiding was om deze tekening te maken, heb je nog niet genoemd. Kijk eens hoe het met de hoogte is gesteld."

"Ja natuurlijk, om bovenop kubus III te komen zijn drie stappen nodig als je rechts begint, en maar twee als je van links komt. Het

object is dus twee of drie kubussen hoog, al naar gelang de richting van waaruit je het bekijkt... Toch heb ik het gevoel dat ik dit object met vier kubussen zou kunnen maken."

Professor X: "Het object zoals je je dat voorstelt beslist niet, want dat is echt een onmogelijk object. Je zou wel een model met kubussen kunnen maken, dat vanuit een bepaald gezichtspunt op het onmogelijke object lijkt; je weet dat dit met vrijwel alle onmogelijke objecten het geval is. Ik heb het nog niet geprobeerd met kubussen, maar een bekende van mij heeft het heel ingenieus opgelost met

een minimum aan knutselwerk. Hier heb je een een foto van zijn model. Het is nog niet volmaakt, want het is perspectivisch wat vertekend, maar dat is te verhelpen."

Ik stond perplex.

Professor X: "Hou de foto maar; ik heb nog een afdruk. Bestudeer hem goed, dan kun je de lezers van Pythagoras wellicht uitleggen hoe deze foto gemaakt is."

De foto is afgedrukt op de omslag van dit nummer.

(Bron: Bruno Ernst, Nieuwe Avonturen met Onmogelijke Figuren. Aramith, Bloemendaal 1990).

Parabolen uit cirkels en rechten

Een figuur is opgebouwd uit concentrische cirkels en evenwijdige rechten.

Van deze parabolen zijn echter alleen een aantal punten aanwezig als snijpunten van de cirkels met de rechten. Als we de snijpunten met elkaar verbinden, zoals in figuur 1, dan ontstaan twee groepen parabolen: één groep, die naar boven open is en de tweede groep (waarvan er maar één is getekend), die naar beneden openstaat. Elk exemplaar uit de ene groep snijdt alle parabolen van de andere groep loodrecht.

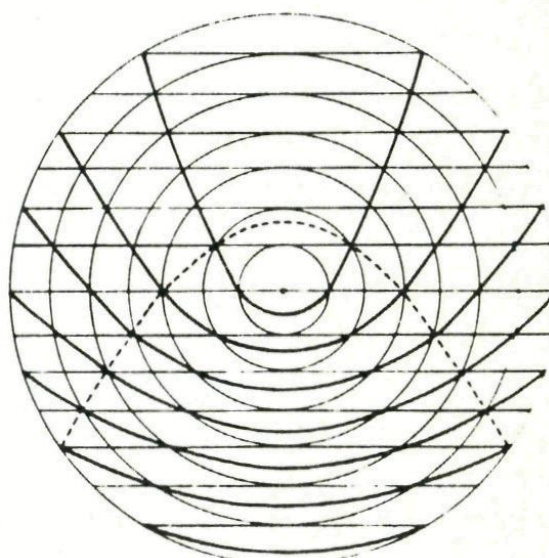


Fig. 1.

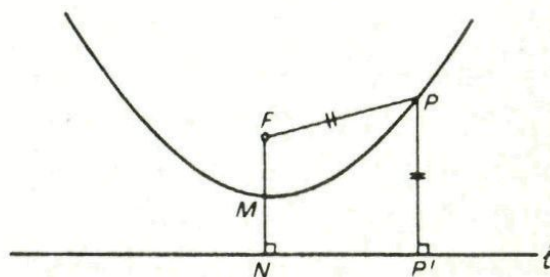


Fig. 2.

Is het lastig te bewijzen dat de krommen door de snijpunten in figuur 1 parabolen zijn? Dat ligt eraan hoe je de parabool definieert. We kunnen een parabool omschrijven als de verzameling van alle punten die gelijke afstanden hebben tot een vast punt F (het brandpunt) en een vaste lijn l (de richtlijn van de parabool); zie figuur 2. Uitgaande van deze definitie is er nauwelijks meer iets te bewijzen; figuur 3 toont duidelijk, dat de keuze der snijpunten zodanig is, dat ze voldoen aan de gegeven definitie. Wellicht heb je nog nooit van deze definitie gehoord, en is voor jou een parabool de grafiek van een kwadratische functie, bijvoorbeeld van $y = ax^2$.

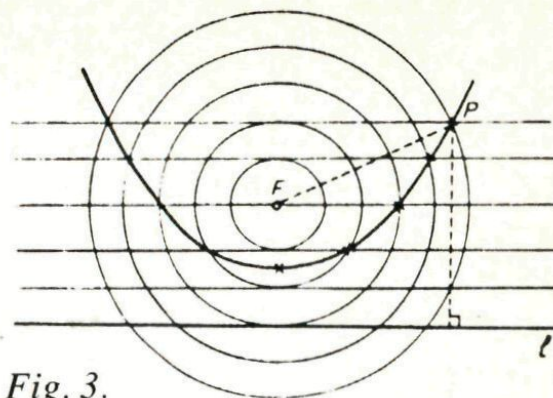


Fig. 3.

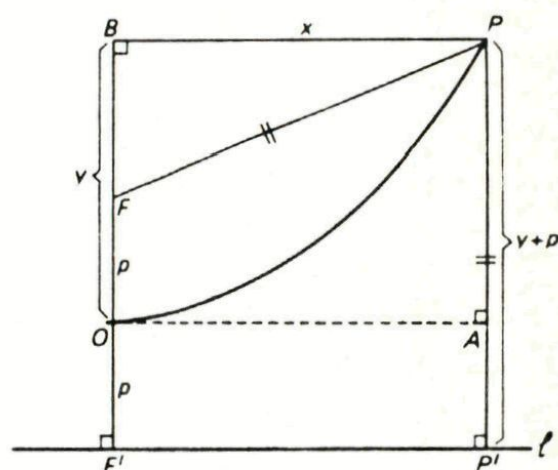


Fig. 4.

In dat geval zal het niet moeilijk voor je zijn de volgende afleiding te volgen (fig. 4), waarin we laten zien, dat bovenstaande definitie leidt tot de kwadratische functie. We schrijven de stelling van

Pythagoras op voor driehoek BFP , waarin $BF = y - p$, $BP = x$ en $FP = PP' = y + p$. Dit geeft:

$$x^2 + (y^2 - 2py + p^2) = y^2 + 2py + p^2$$

$$\rightarrow x^2 = 4py \rightarrow y = \frac{1}{4} px^2$$

Een hoogst merkwaardige wortel

$\sqrt[3]{125} = 5$ want $5^3 = 125$. Dat lijkt nogal duidelijk.

Moeilijker wordt het als we willen weten: hoeveel is $\sqrt[2]{125}$? We willen dan het getal weten dat in het kwadraat 125 zal opleveren. We kunnen zelf al verzinnen dat de uitkomst ruim 11 zal zijn, want $11^2 =$

121. Gelukkig hebben we tegenwoordig voor zulk werk een rekenmachientje. Dat geeft snel en vrij correct: $\sqrt[2]{125} = 11,180339$. Is het wel zo correct? Als je het apparaat 11,180339 laat kwadrateren, krijg je als uitkomst 124,99998. Hieruit blijkt dan wel dat je zelfs machientjes niet geheel kunt vertrouwen.

Eigenlijk wisten we zelf ook al dat $\sqrt{125}$ niet door een breuk met een eindig aantal decimalen is aan te geven. We zeggen dan ook: $\sqrt{125}$ is irrationaal.

We nemen nog even wat voorbeelden om de betekenis van macht- en wortel exponenten na te gaan.

$$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5^{\frac{3}{3}} = 5^1 = 5$$

$$\sqrt[2]{125} = \sqrt[2]{5^3} = 5^{\frac{3}{2}} = 11,180339$$

Zo kunnen we ook aan $\sqrt[1]{5}$ een betekenis toekennen en wel 5^1 of 5.

Ga na dat op die manier $\sqrt[1/2]{5}$ hetzelfde wordt als 5^2 of 25.

We zouden elk positief rationeel getal wel als wortel- of machtexponent kunnen toelaten.

In het algemeen betekent dan $\sqrt[p]{a^q}$ hetzelfde als $a^{q/p}$ en daarmee bedoelen we dat we een getal a in de q -de macht moeten zetten en daar dan weer de p -de machtswortel uit moeten trekken. Als we die bewerkingen in omgekeerde volgorde uitvoeren, blijft het resultaat hetzelfde.

$$\sqrt[x]{x}$$

We gaan nu een heel merkwaardige wortel onderzoeken en wel die waarbij het grondtal gelijk is aan de wortel exponent.

We schrijven dat als $\sqrt[x]{x}$.

Welke waarden krijgen dergelijke uitkomsten?

We zoeken er enkele op en laten ons rekenmachientje daarbij het zware werk opknappen.

$$\sqrt[1]{1} = 1,00000 \quad \sqrt[2]{2} = 1,41421$$

$$\sqrt[3]{3} = 1,44225 \quad \sqrt[4]{4} = 1,41421$$

$$\sqrt[5]{5} = 1,37973 \quad \sqrt[6]{6} = 1,34801 \text{ enz.}$$

Het valt al snel op dat de uitkomsten voor stijgende waarden van x , eerst toenemen en daarna weer afnemen. Zou er een maximale uitkomst in de rij zitten? Het is niet moeilijk in te zien dat voor erg grote waarden van x de uitkomst van de wortel steeds kleiner zal worden, maar... toch altijd groter dan 1 zal blijven.

Laten we nog eens wat uitrekenen voor grotere waarden van x . We zoeken op:

$$\sqrt[10]{10} = 1,25893$$

$$(\text{controle: } 1,25893^{10} = 10,0004)$$

$$\sqrt[100]{100} = 1,04713$$

$$\sqrt[1000]{1000} = 1,00693$$

$$\sqrt[10000]{10000} = 1,00092$$

Om enig idee te krijgen hoe nauwkeurig dergelijke uitkomsten zijn hebben we ook opgezocht:

$$1,00091^{10000} = 8919,54$$

$$1,00092^{10000} = 9857,62 \text{ en}$$

$1,00093^{10000} = 10894,4$. Het eerste is duidelijk te laag en het laatste te hoog.

Al met al zien we erg duidelijk hoe voor grotere waarden van x (element

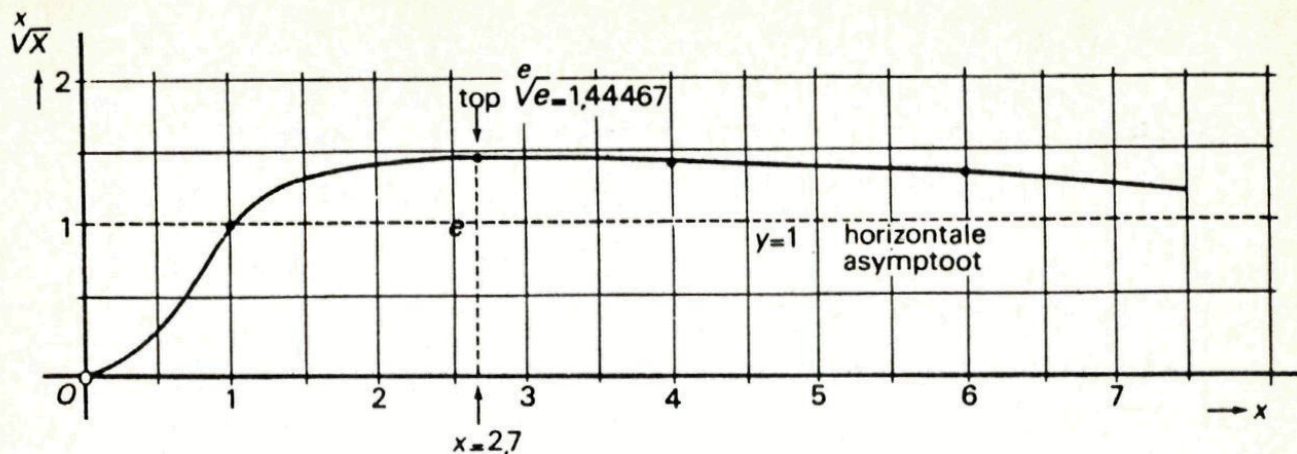


Fig. 1 Grafiek van de functie $x \rightarrow \sqrt[x]{x}$.

van de natuurlijke getallen) de uitkomst van $\sqrt[x]{x}$ van boven nadert tot 1.

Voor waarden van x onder 1

Wat gaat er gebeuren met de uitkomsten van $\sqrt[x]{x}$ voor waarden van x tussen 0 en 1?

Uit enkele voorbeelden kan dat snel duidelijk worden.

$$\sqrt[1/2]{1/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt[0,1]{0,1} = (0,1)^{10} = 10^{-10} \text{ enz.}$$

Zo zien we dat de wortel, voor x naderend van boven tot nul, tot nul nadert. In figuur 1 is de grafiek van de wortelfunctie getekend.

Het domein van 2 tot 4

In het gebied voor waarden van x tussen 2 en 4 loopt de kromme uiterst vlak. Toch is wel zichtbaar dat er een maximum optreedt in de buurt van 3. Voor welke waarde van x treedt dat precies op en hoe groot is dat maximum?

Al snel blijkt dat het voor een waarde van x onder 3 is.

We zoeken het gebied verder af.

$$\begin{aligned} \sqrt[2,9]{2,9} &= 1,44361 & \sqrt[2,8]{2,8} &= 1,44442 \\ \sqrt[2,7]{2,7} &= 1,44466 & \sqrt[2,6]{2,6} &= 1,44413 \end{aligned}$$

enz.

De top ligt bij $x = 2,7!!$

Misschien dat sommige lezers de zaak al doorzien. Er is een wonderlijk getal in de wiskunde. We noemen het: het getal van Euler en het symbool is e . De waarde van e is 2,718281828459045... Het is een irrationaal getal. En, inderdaad, het blijkt juist deze waarde voor x te zijn, die de wortelvorm maximaal maakt. Zeer merkwaardig!!

Die hoogste waarde wordt dan $\sqrt[e]{e} = 1,44467!$

Voor wie enig bewijs wil zien, het volgende.

Voor wie het precies weten wil

De grafiek van $y = \sqrt[x]{x}$ heeft in de buurt van 2,7 een maximum.

Het punt is precies te berekenen door de functie te differentiëren. Dat lijkt een beetje moeilijk.

Het is mogelijk de wortelvorm als een e-macht te schrijven. Zo kun je in plaats van x ook schrijven $e^{\ln x}$. In ons geval: $\sqrt[x]{x} = x^{1/x} = e^{\ln x^{1/x}} = e^{1/x \ln x}$

De afgeleide daarvan wordt:

$(1 - \ln x) x^{\frac{1}{x}-2}$ en die functie kan alleen nul worden voor $x = e$. Daar ligt dan ook de top.

Pythagoras en de Amerikaanse president

We hebben in ons tijdschrift, genoemd naar de meest bekende wiskundige aller tijden, al op velerlei manieren bewijzen aangevoerd voor zijn bekende stelling. Het zal menigeen bekend zijn dat de Amerikaanse staatsman Benjamin Franklin met een vlieger in een onweersbui zat, om de bliksem-afleider uit te vinden. Dat een Amerikaanse president in zijn vrije tijd een origineel bewijs voor de stelling van P. bedacht, zal weinigen bekend zijn.

Een beetje rekenen

De bedoelde president is Garfield, die in 1882 de stelling aldus bewees.

We nemen een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden a en b en schuine zijde c . Neem vervolgens nog zo'n driehoek en schuif die 90° gedraaid ten opzichte van de eerste, daar tegen aan (fig. 1). De tussenliggende driehoek, die ontstaat door een extra verbindingslijn te trekken, is gelijkbenig en rechthoekig.

De totale figuur heeft nu de vorm gekregen van een rechthoekig trapezium met een oppervlakte gelijk aan de hoogte keer de gemiddelde lengte van de evenwijdige zijden. Deze oppervlakte is dan weer gelijk aan de drie oppervlakten van de drie rechthoekige driehoeken samen, aldus:

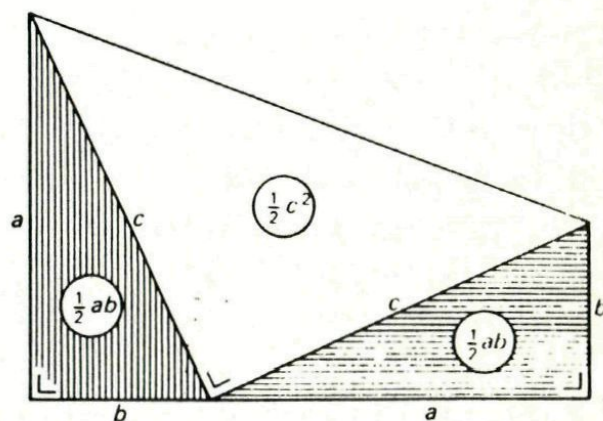
$$\frac{1}{2}(a+b)(a+b) = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$$

Verdubbeling links en rechts en uitwerking geeft:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

of $a^2 + b^2 = c^2$

en zo zijn Pythagoras en de president het roerend met elkaar eens geworden.



Een presidenteel bewijs voor de stelling van Pythagoras.

Een wiskundeprobleem bij een gezellig onderonsje

Je zult misschien denken: Dat is een steentje in het krentenbrood. Wie begint er nu over wiskunde bij zo'n gelegenheid. Toch heb je vrijwel altijd grote aandacht als je beweert: Ik kan bewijzen, dat een stompe hoek even groot is als een rechte hoek.

Je neemt potlood en papier en tekent, zonder passer en liniaal, figuur 1:

Lijnstuk $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ en $\overline{BD}$ zó, dat de hoek bij A stomp is en de hoek bij B recht.

Verbind C en D.

Te bewijzen: $\angle A$ en $\angle B$ zijn gelijk.

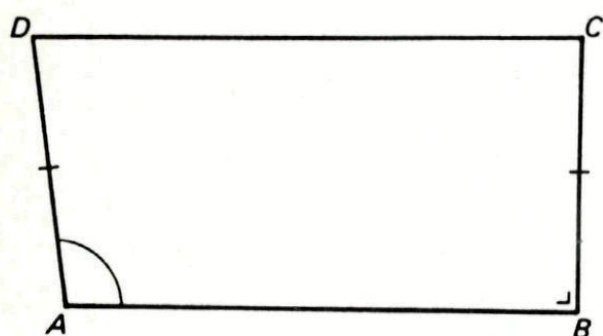


Fig. 1.

Je redeneert nu heel exact:
 AB en CD zijn niet evenwijdig en de middelloodlijnen p en q dus ook niet. p en q snijden of precies op $\overline{AB}$, of boven $\overline{AB}$ of onder $\overline{AB}$. We kiezen de ligging N boven $\overline{AB}$ (zie fig. 2).

$$\begin{aligned} N \in p &\Rightarrow \overline{AN} = \overline{NB} \\ N \in q &\Rightarrow \overline{CN} = \overline{DN} \\ &\quad \overline{AC} = \overline{BD} \end{aligned}$$

$$\stackrel{zzz}{\Rightarrow} \triangle NAC \cong \triangle NBD$$

$$\Rightarrow \angle NAC = \angle NBD$$

$$AN = NB \Rightarrow \angle NAB = \angle NBA$$

optellen

$$\implies \angle CAB = \angle DBA$$

Zonodig bestrijd je het wantrouwen met figuur 3. Daarmee bewijs je op vrijwel dezelfde manier 'stomp is

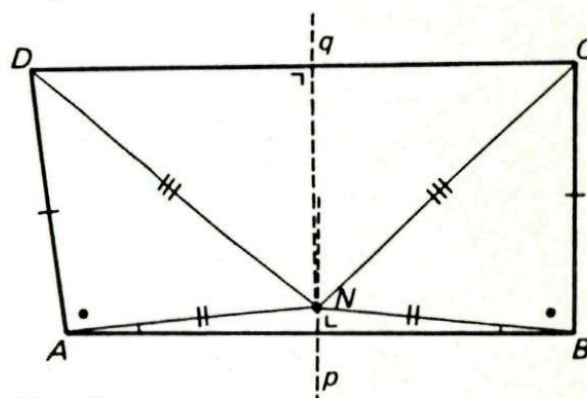


Fig. 2.

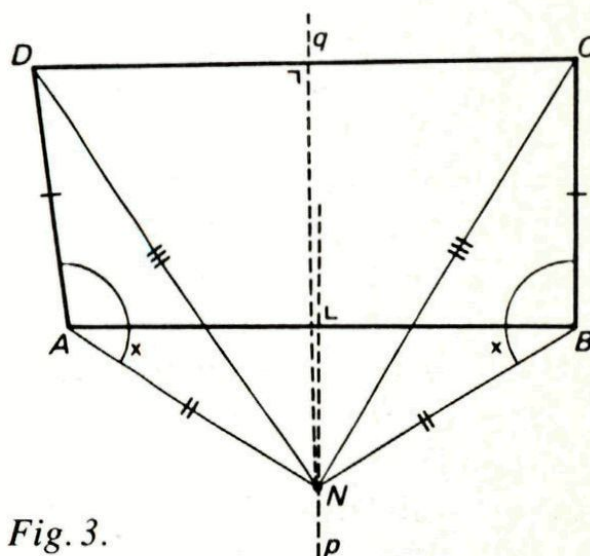


Fig. 3.

recht'. Er is geen speld tussen te krijgen. De bewijsvoering is exact.

Overtuigd?

Toch niet? Denk er eens over na voor je verder leest.

De oplossing

Ieder voelt, dat ergens de logica geweld wordt aangedaan. Waar? Wie echter de tekening als juist accepteert en daarna zoekt in de bewijsvoering, speelt tevergeefs. De angel zit in de ligging van punt N . Zie figuur 4. Daarmee is de situatie geheel veranderd en er is geen sprake meer van stompe is recht.

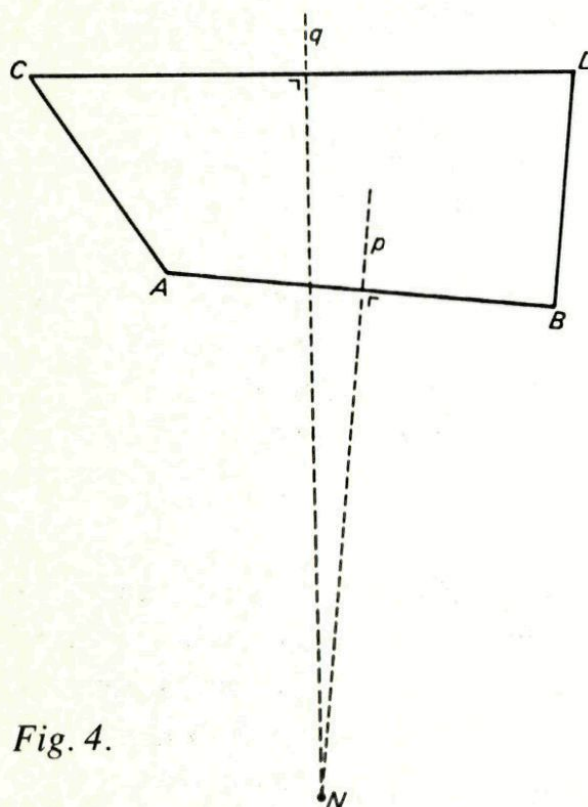


Fig. 4.

De afgepaste stompe hoek bij A en de rechte hoek bij B zijn nog wel betrokken bij een relatie.

In figuur 5 is $\overline{AE} = \overline{BD}$ en $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$

$\triangle NBD \cong \triangle NAE$ (zzz)

$\triangle NAE \cong \triangle NAC$ (zzz)

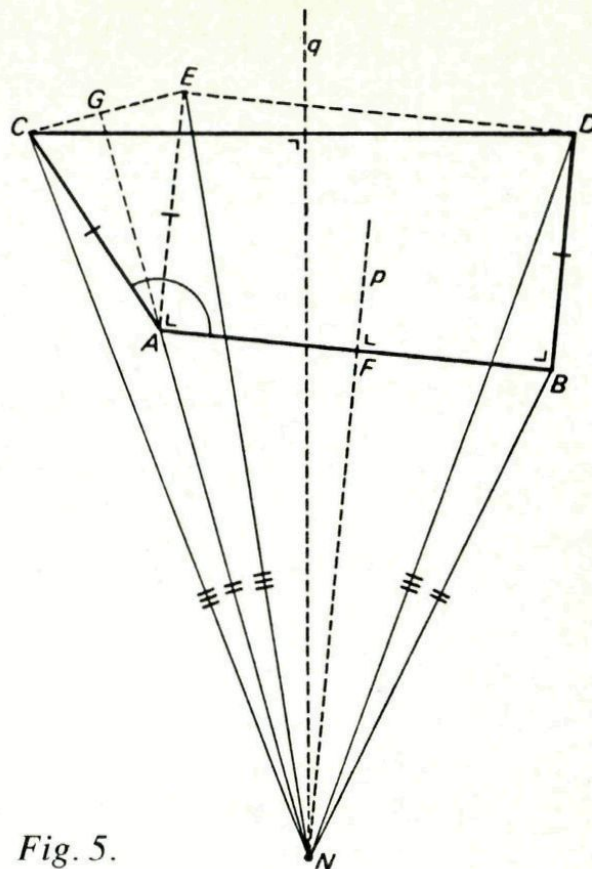


Fig. 5.

Er geldt:

$$\triangle NBD \xrightarrow{\text{Sp. in } p} \triangle NAE$$

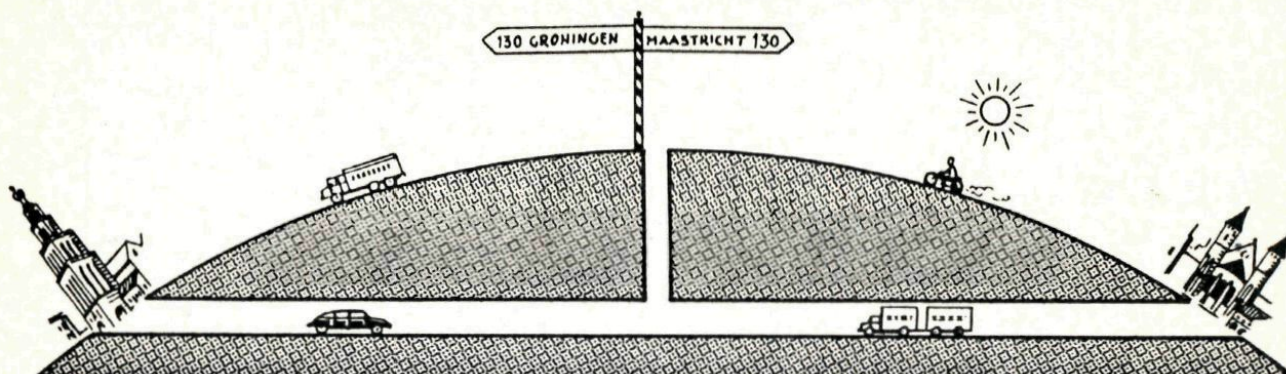
$$\triangle NAE \xrightarrow{\text{Sp. in } NA} \triangle NAC$$

$$\Rightarrow \triangle NBD \xrightarrow{R_N, \angle BNA} \triangle NAC$$

$$\begin{aligned} \angle BNA &= 2 \angle FNA = 2(\angle ANE + \angle AEN) = 2 \angle GAE = \angle EAC = \\ &= \angle CAB - \angle EAB = \angle CAB - \angle DBA \Rightarrow \end{aligned}$$

De rotatiehoek is gelijk aan het verschil van de bij A afgepaste stompe hoek en de bij B geplaatste rechte hoek.

Tussen krom en recht



De aarde is een bol. Als we ons van A naar B willen begeven, voert de kortste weg ons langs een grootcirkel van die bol. Maar... eigenlijk is er nog een kortere weg: dwars door de aarde heen langs een rechte lijn! Heb je er enig idee van hoeveel het in afstand zou schelen als je, laten we zeggen van Groningen naar Maastricht, door een rechte tunnel kon rijden? In dit geval is de afstand over land langs de grootcirkel 260 km. Welke van de volgende afstanden benadert dit verschil het dichtste: 2 m, 20 m, 200 m, 2 km, 20 km?

En als we halverwege, bij Dieren in Gelderland, een gat zouden maken dat bij de tunnel uitkomt, hoe diep zouden we dan moeten graven: 1 m, 10 m, 100 m, 1 km, 10 km?

Als je in beide gevallen een schatting hebt aangestreept, probeer dan ook na te gaan waar je op uitkomt met wat meetkunde en rekenwerk. Neem daarbij voor de straal van de aarde 6365 km (Preciezer: 6378,.. km langs de equator en 6356,.. km bij de polen, het is geen zuivere bol).

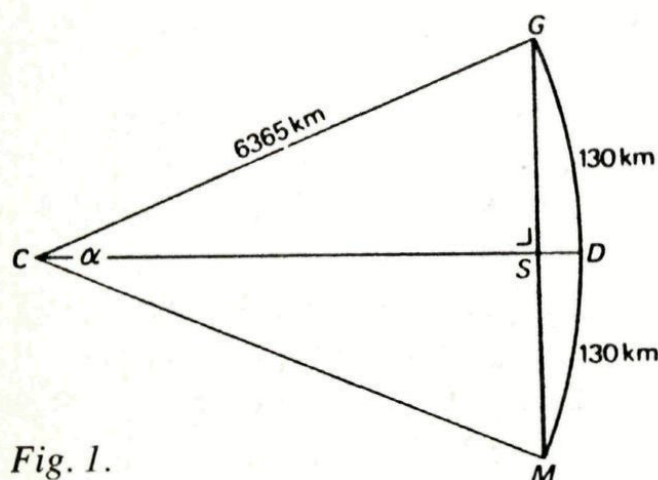


Fig. 1.

Voor wie er niet uitkomt

In figuur 1 is een doorsnede getekend door Groningen (G), Maas-

tricht (M) en het middelpunt C van de aarde. Een maat voor de middelpuntshoek α (in radiaal) krijgen we door de lengte van de boog GM te delen door de aardstraal GC. Voor de tunnellengete kunnen we dan schrijven:

$$GM = 2GS = 2GC \sin \frac{\alpha}{2} =$$

$$= 2GC \sin \left(\frac{\text{boog } GD}{GC} \right) = 259,982.. \text{ km.}$$

(Vergeet niet om voor de sinus je rekendoosje op radiaal in te stellen).

De winst uit de tunnelweg blijkt dus niet meer dan... 18 m. Ofwel 0,007%.

De diepte van het gat bij Dieren zal dan ook wel niet veel voorstellen. Toch maar even rekenen. Met behulp van de stelling van Pythagoras in driehoek CSG vinden we:

$$DS = DC - SC = GC - \sqrt{GC^2 - SG^2} = 1,3... \text{ km!}$$

Verassend? Is er echt geen rekenfout gemaakt? We bekijken dit nog even nader.

Sterk verschillende verschillen

Figuur 2 geeft de helft van figuur 1, met de raaklijn DE in D . We vragen eerst: is DE langer dan de weg langs boog DG ?

Dit is inderdaad zo, maar het is niet direct zo duidelijk te zien omdat het moeilijk is om op het oog te schatten hoeveel lengte er in de kromming van de boog gaat zitten.

Bekijk daarom figuur 3, waarin behalve het raaklijnstuk DE ook een wat betere benadering van de cirkelboog door de gebroken haarklijn $DE_1E_2E_3G$ getekend is. Trekken we stralen vanuit C door alle knik- en raakpunten E_i en R_i , dan geldt overal hetzelfde als in de grijze sector: $E_2R_2 < E'_2R'_2$. Elke knikraaklijn die binnen de vorige ligt, is dus weer korter. En de limiet waar deze kleiner wordende lengten toe naderen is juist per definitie de lengte van de cirkelboog. Dus $DE > \text{boog } DG$. Hiermee

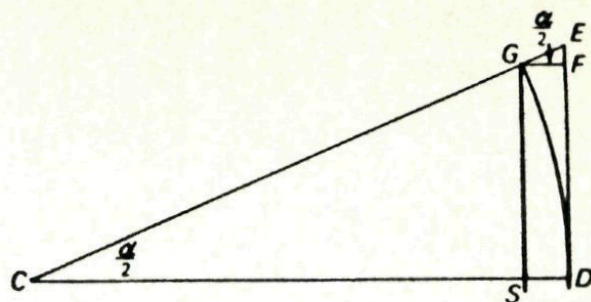


Fig. 2.

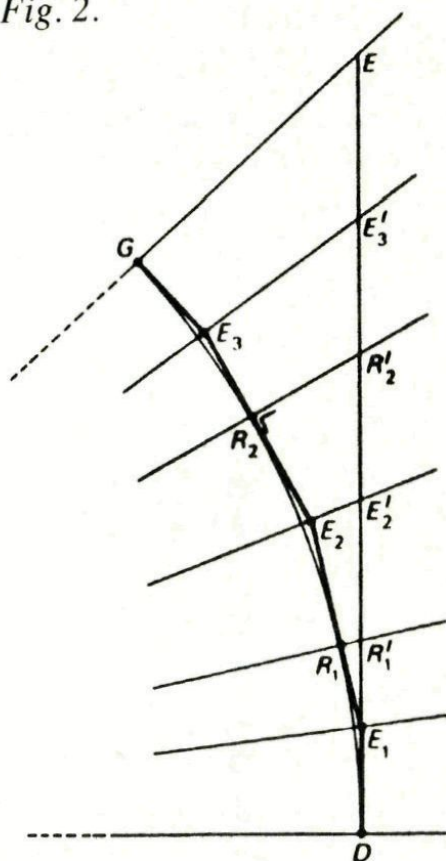


Fig. 3.

geldt in driehoek EFG (fig. 2):

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{EF}{FG} = \frac{ED - FD}{DS} > \frac{\text{boog } GD - GS}{DS}$$

De tangens gaat voor kleine α naar nul, dus de (kleinere, maar wel positieve) breuk rechts gaat dan zeker naar nul. Hieraan zien we dan dat het (halve) wegverschil (boog $GD - GS$) voor kleine α een orde kleiner is dan de gatdiepte DS . Dit klopt dus met de 18 m en de 1,3 km uit bovenstaande berekeningen.

**Uitgave onder toezicht van de Nederlandse Onderwijscommissie voor
Wiskunde.**

**©1990 Redactie Pythagoras / Stichting IVIO - ALLE RECHTEN VOORBEHOUDEN, NADruk OF WEERGAVE,
GEHEEL OF GEDEELTELIJK, IN WELKE VORM DAN OOK, ZONDER TOESTEMMING VAN DE REDACTIE
VERBODEN.**

Pythagoras wiskunde tijdschrift voor jongeren

Redactie: Hans de Rijk, Henk Mulder.

Medewerkers: Popke Bakker, Gerard Bäuerle, F. van der Blij,
Niels M. Buizert, Hans Lauwerier, Hessel Pot.

Redactiesecretariaat: Hans A.F. de Rijk
Stationsstraat 114
3511 EJ Utrecht

Inhoud jaargang 30, nummer 1

Redactioneel/ 1	Een hoogst merkwaardige wortel/ 12
Kunstjes met getallen/ 1	Pythagoras en de Amerikaanse president/ 15
Een merkwaardige puzzel/ 2	Een wiskundeprobleem bij een gezellig onderonsje/ 16
Van Globe naar landkaart/ 2	Tussen krom en recht/ 19
Papierformaten/ 5	
De vier kubussen van professor X/ 9	
Parabolen met cirkels en rechten/ 11	

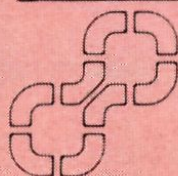
Pythagoras verschijnt zesmaal per schooljaar; opgave van abonnementen bij de uitgever (zie onder).

Abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 september schriftelijk bij de uitgever is opgezegd.

Bij tussentijdse abonnering ontvangt men ook de reeds verschenen num-

mers. Betaling per acceptgirokaart.

Tarieven	NLG/BEF
Abonnement Pythagoras	25,-/450
Luchtpost-toeslag	10,-
Inclusief Archimedes	45,-/800
Luchtpost-toeslag	20,-
Losse nummers	5,-/ 90



stichting ivio

Postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL.)

Tel. 03200-76411

educatieve uitgeverij - instituut voor buitenschools

onderwijs - wereldschool - AO-reeks - leerprojecten

Postgiro Nederland: 287934

Postcheck België: 000-0130850-94