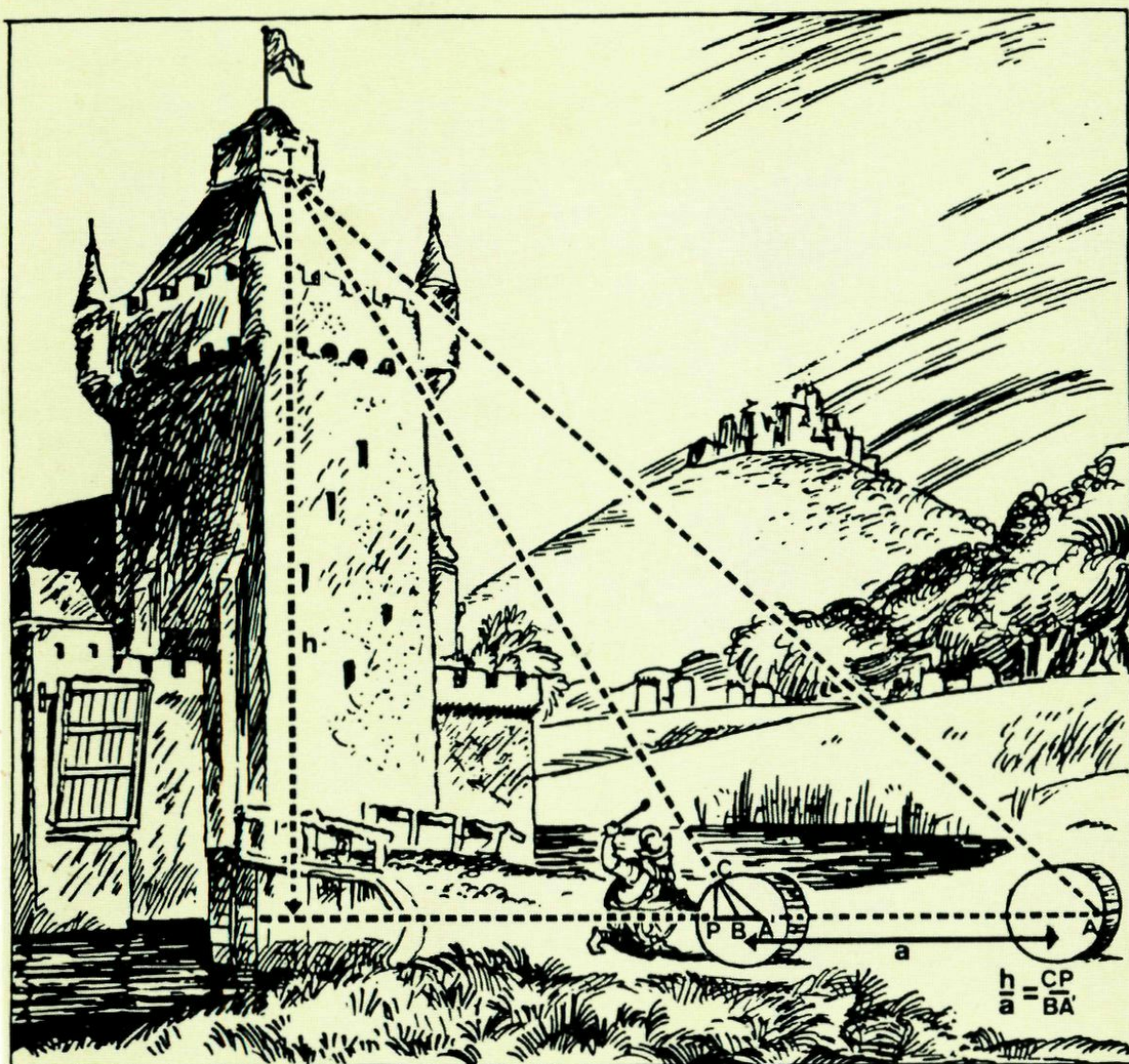




Pythagoras



wiskunde tijdschrift voor jongeren

stichting ivio

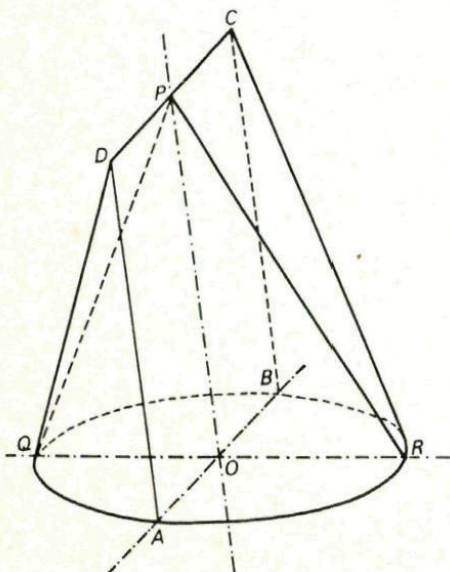
30e jaargang
nummer 2
maart 1991

De wig van Wallis en een koffiefilter

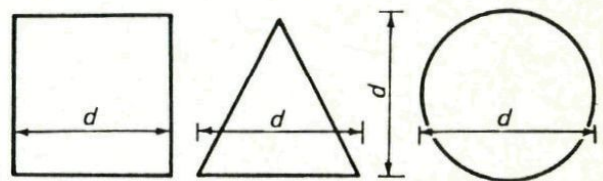
Een ruimtelijk lichaam ziet eruit als een vierkant in de x-richting, in de y-richting als een driehoek en in de z-richting als een cirkel (fig. 1). Dat lijkt een vreemde toestand! Kan zoiets? Welzeker, we bedoelen de wig van Wallis (fig. 2). Die zit als volgt in elkaar.

Neem als grondvlak een cirkel met middellijn AB . Zet loodrecht op het vlak van de cirkel een vierkant $ABCD$. Breng vervolgens vlakken aan, loodrecht op AB , die CD in P en de cirkel in Q en R snijden. De lijnen PQ en PR noemen we beschrijvenden van het lichaam en ze vormen de mantel.

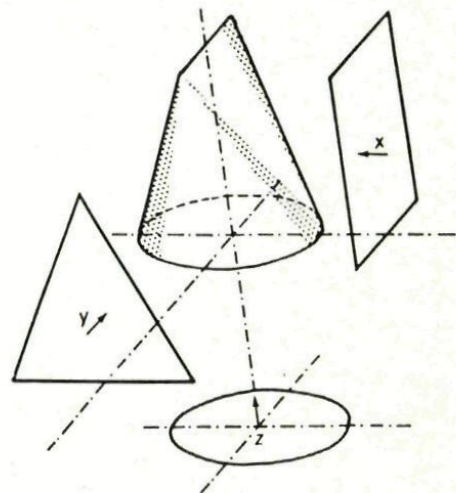
Ga zelf na dat het aanzicht in de drie richtingen vierkant, driehoek en cirkel wordt. We noemen zo'n oppervlak ook wel een *regeloppervlak*. Daarbij wordt de mantel altijd gevormd door rechten te trekken die punten van twee vlakke figuren of rechten met elkaar te verbinden.



Zo is ook een cilinder een regeloppervlak. En ook een kegel. De wig van Wallis is een soort kegel, niet met een toppunt, maar met een topréchte. Daarbij is de toprechte even lang als de middellijn van de cirkel.



Figuur 1. Drie aanzichten van eenzelfde lichaam.



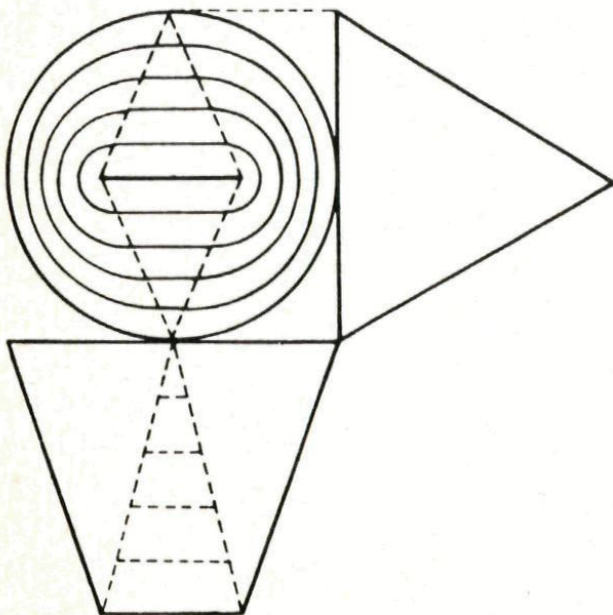
Figuur 2. De wig van Wallis in drie richtingen.

Een koffiefilter

Bij een koffiefilter is de toprechte korter dan de middellijn van de richtcirkel (fig. 3).

Als we op de drie zijaanzichten letten, zien we weer een cirkel en een driehoek, maar het vierkant is vervangen door een trapezium.

We krijgen ook een goede indruk van deze alternatieve kegel, als we het filter rechtop zetten, de gaatjes sluiten en er water ingieten (fig. 3). Zo zien we de hoogtelijnen in het dalgebied van een berglandschap. De oeverbegrenzing van zo'n waterplas benaderen we door een rechthoeksfiguur, afgesloten door twee halve cirkels. Daartoe denken we het filter opgebouwd uit twee halve kegels (fig. 4) en daartussen een viervlak. We hebben vijf doorsnijdingen ingetekend en we hebben daarvoor de totale hoogte in vijf gelijke delen verdeeld.



Figuur 3. Een koffiefilter met 'hoogtelijnen'.

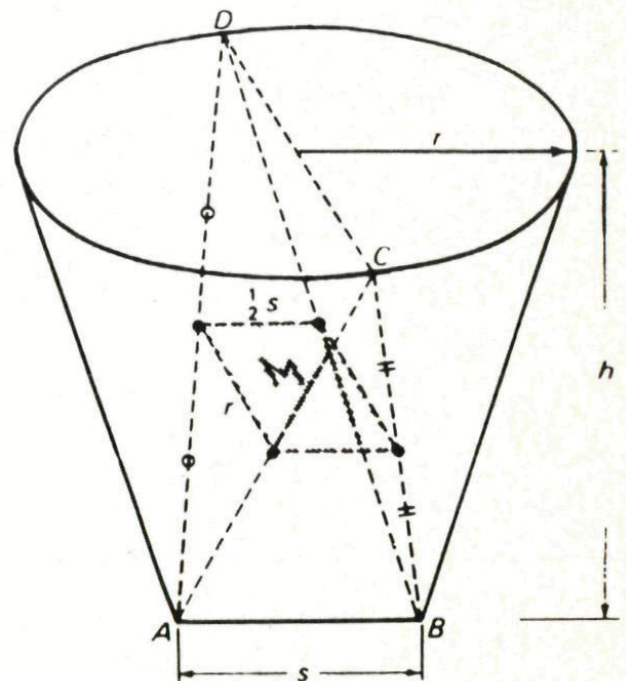
Het volume van het filter

Uitgaande van twee halve kegels en een tussenliggend viervlak zijn we ook in staat de inhoud van zo'n filter te berekenen. Het totale volume is dan de som van de drie deelinhouden.

We gaan uit van de volgende maten:

- de straal van de cirkel is r
 - de lengte van de toprechte is s
 - en de hoogte van het filter is h .
- Voor een kegel geldt dat het volume gelijk is aan een derde deel van het produkt van grondoppervlakte en hoogte.

Meer moeite hebben we met het viervlak. Het volume daarvan gaan we bepalen met een zeer merkwaardige formule.



Figuur 4. Twee stukken kegel en een viervlak.

De regel van Simpson

Er is een inhoudsformule, bekend als de regel van Simpson. Deze geldt alleen voor lichamen, waarbij alle hoekpunten zich bevinden in twee onderling evenwijdige vlakken.

Dat is hier voor ons viervlak het geval. Immers door AB en CD (fig. 4) zijn twee zulke vlakken te denken.

De formule luidt nu:

$V = \frac{1}{6}h (G + B + 4M)$. Hierin stelt h de afstand van die evenwijdige vlakken voor, G de oppervlakte van het grondvlak, B de oppervlakte van het bovenvlak en M die van het middenvlak.

Onder M verstaan we de figuur die ontstaat als we het lichaam halverwege de evenwijdige vlakken doorsnijden.

In ons geval geldt: $G = 0$, $B = 0$ en $M = \frac{1}{2}rs$.

Zo vinden we voor het volume van het viervlak:

$$\frac{1}{6}h (4 \cdot \frac{1}{2}rs) \quad \text{of} \quad \frac{1}{3}hrs$$

De totale inhoud

Als we de drie volumina (twee halve kegels en een vierkant) optellen, krijgen we de totale inhoud.

Daarvoor vinden we:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \pi r^2 \right) h + \frac{1}{3} hrs \quad \text{of} \\ V = \frac{1}{3} \pi r h \left(r + \frac{s}{\pi} \right)$$

Als $s = 0$ gaat deze formule over in $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ en dat is de bekende uitkomst voor een hele kegel.

Als we stellen: $s = 2r$ begint het filter te lijken op de wig van Wallis.

Dan wordt het volume:

$\frac{1}{3} \pi r^2 h \left(1 + \frac{2}{\pi} \right) = 0,55 \pi r^2 h$ en dat is ongeveer de helft van het volume van omschreven cilinder van het koffiefilter.

Bij de officiële wig van Wallis is de inhoud precies de helft van de omschreven cilinder. Maar daar hebben we geen tussenliggend viervlak (zie de beschrijving in het begin).

Controle

We hebben de maten opgemeten van een koffiefilter en gevonden: $r = 6$, $h = 10$ en $s = 5$ cm.

Dan zou de inhoud moeten worden:

$$\frac{1}{3} \pi \cdot 6 \cdot 10 \left(6 + \frac{5}{\pi} \right) = 477 \text{ cm}^3$$

En dat was uitstekend na te meten door het filter aan de lange zijde af te plakken, te vullen met water en dat uit te gieten in een maatbeker.

Werken met een onbereikbaar punt

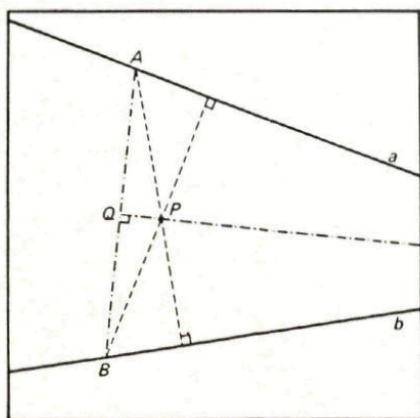
Is het je nooit overkomen, dat je bij een tekening of constructie je tekenblad moest vergroten omdat je een lijn moest trekken naar een snijpunt dat buiten het tekenvlak lag? Bij de constructie van de uurlijnen van een zonnewijzer komt dit veel voor en eveneens bij perspectivische tekeningen, als het verdwijnpunt van een aantal in werkelijkheid evenwijdige lijnen buiten het tekenblad valt.

Het gebruiken van enorm grote tekenvellen is niet zo handig, ofschoon dit in de praktijk wel gebeurt. Er zijn echter constructiemogelijkheden, waarbij niet buiten het tekenpapier gewerkt hoeft te worden. We geven hier twee veelgebruikte methoden en misschien kun je zelf nog wel andere methoden bedenken.

De hoogtelijnmethode

In figuur 1 zijn de lijnen a en b getekend en hun snijpunt S ligt buiten het tekenblad. Gevraagd: teken een lijn die het gegeven punt P met het snijpunt van A en B verbindt.

De hele truc is nu, dat we zorgen



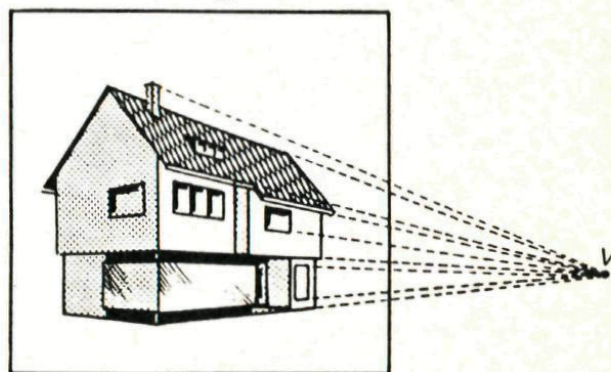
Figuur 1. De hoogtelijnmethode.

dat P het hoogtepunt wordt van een driehoek, waarvan de zijden op a en b liggen, en waarvan het onbereikbare snijpunt S de tophoek is.

Trek daarvoor door P loodlijnen op a en b (gestippeld in fig. 1). Trek de lijn AB en laat vanuit P een loodlijn PQ neer op AB . Het verlengde van PQ zal nu door het onbereikbare snijpunt S gaan, omdat de loodlijnen van $\triangle ABS$ door een punt gaan.

De verdwijnpuntliniaal

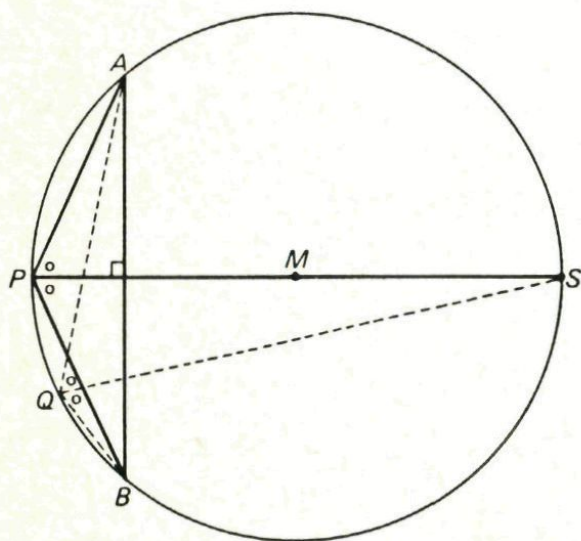
Bij perspectiefconstructies is deze methode onhandig, omdat daar meestal een groot aantal lijnen



Figuur 2. De verdwijnpunten van de meeste perspectivische tekeningen liggen buiten het tekenblad.

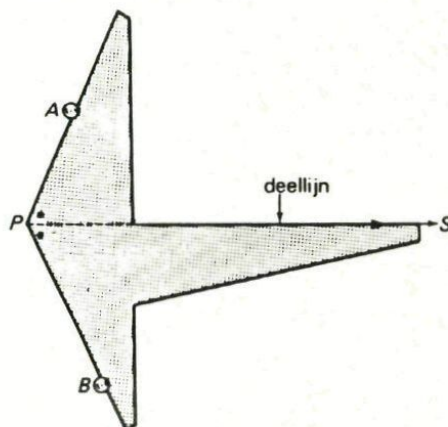
door het onbereikbare verdwijnpunt getekend moeten worden, zoals voor het tekenen van figuur 2. Met de hoogtelijnmethode zouden we steeds weer nieuwe hoogtelijnen moeten trekken en steeds andere punten A en B op a en b krijgen. Dit is tijdrovend en het tekenblad wordt ontsierd door talloze hulplijnen.

We maken dan gebruik van een zogenaamde verdwijnpuntliniaal. Om te begrijpen hoe die werkt, kunnen we het beste uitgaan van een gelijkbenige driehoek APB (fig. 3), waarvan de hoekpunten op een cirkel liggen. De deellijn van $\angle P$ gaat door M en snijdt de cirkel in S . Nemen we nu een punt Q en verbinden we dit met A en B , dan zullen $\angle P$ en $\angle Q$ gelijk zijn en QS is de deellijn van $\angle Q$. Dit berust allemaal op een stelling uit de meetkunde: de omtrekshoek is gelijk aan de helft van de boog waarop hij staat.

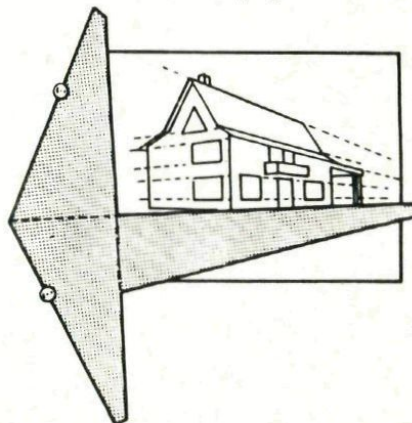


Figuur 3. $\angle P = \angle Q$.

Als we de stompe hoek met zijn deellijn kunnen 'materialiseren', hebben we een instrument waarmee we lijnen kunnen trekken, die altijd door een zelfde punt S gaan. In figuur 4 zien we hoe dat kan. De stompe hoek en zijn deellijn zijn uit karton geknipt of gemaakt van plastic of hout. A en B zijn punaises die in de tekenplank geprikt worden, zo, dat de benen van de hoek erlangs kunnen schuiven. In elke stand van de verdwijnpuntliniaal, zal de deellijn steeds door hetzelfde punt gaan, als de benen van de hoek maar tegen de punaises rusten. In figuur 5 zie je hoe de verdwijnpuntliniaal gebruikt wordt.



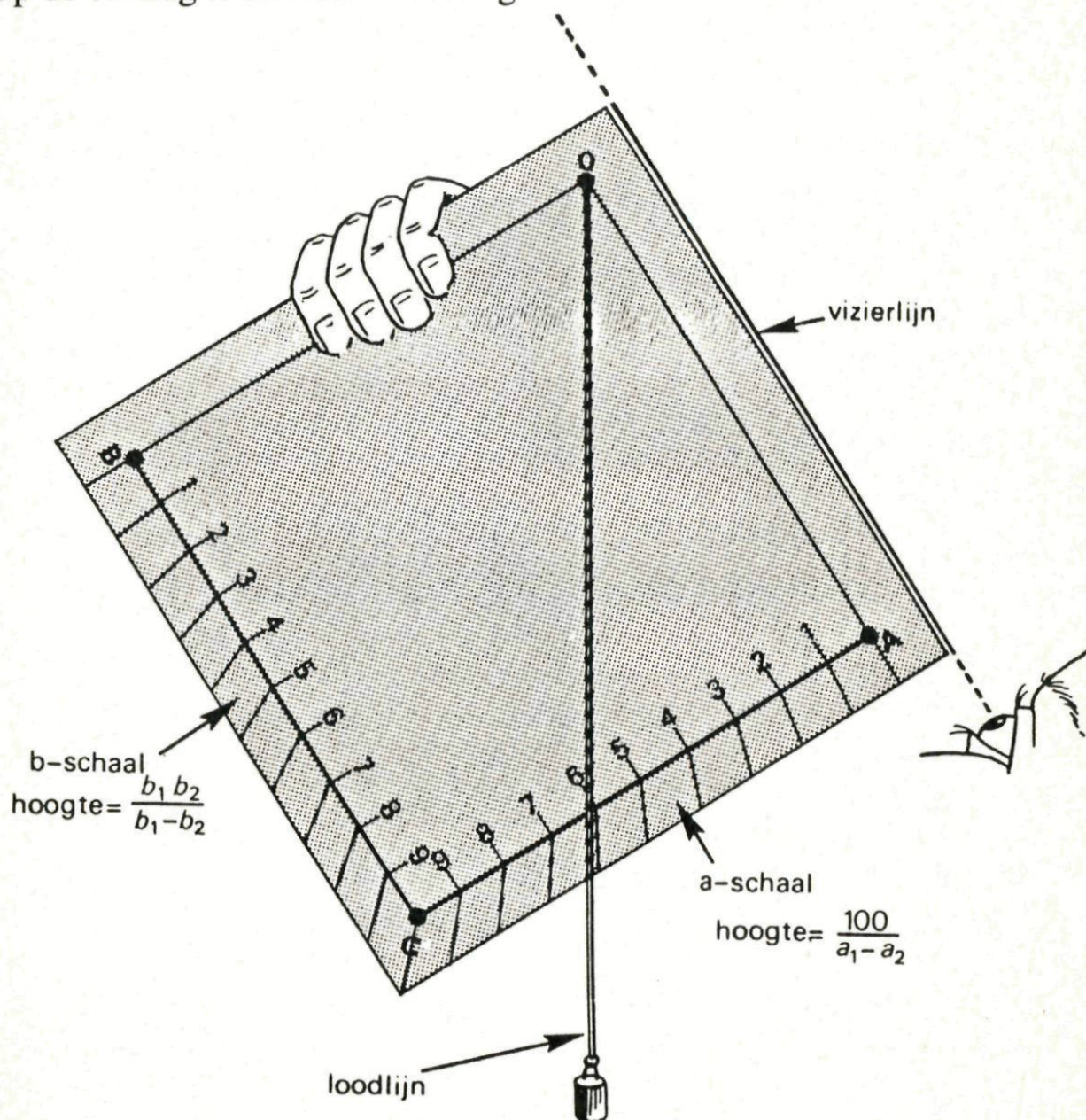
Figuur 4. De verdwijnpuntliniaal.



Figuur 5. Zo wordt de verdwijnpuntliniaal gebruikt.

Hoogten meten met een geometrisch kwadrant

Als je zelf hoogten wilt gaan meten van gebouwen of bomen in je omgeving, kun je dat vaak handig doen met een instrument dat daar vroeger eeuwenlang voor in gebruik geweest is, maar nu in de vergetelheid is geraakt. Het hulpmiddel (eigenlijk is het ding té simpel om het een instrument te noemen) blijkt zo vernuftig te zijn, dat de uiteindelijke berekening beperkt blijft tot één deling, ofwel tot één vermenigvuldiging en één deling. Op de omslag is dit fraai in beeld gebracht.



Figuur 1.

Het maken van het kwadrant

- Zaag uit een plankje of snijd uit een stevig stuk karton een vierkant van ongeveer 12 bij 12 cm. Zeker één rand (de *vizier-lijn*) moet mooi recht afgewerkt zijn.
 - Op het vierkant teken je twee maatverdelingen. Als dit op het hout moeilijk gaat, plak je er eerst een stuk tekenpapier op. Je maakt het jezelf nog makkelijker als je er millimeterpapier voor neemt.
- Begin met een zuiver vierkant van 10 bij 10 cm, met één zijde evenwijdig aan de vizierlijn. Langs twee andere zijden komt een maatverdeling in centimeters, oplopend genummerd van *A* tot *C* (de *a-schaal*) en van *B* tot *C* (de *b-schaal*). Zie figuur 1. De schuine maatlijntjes buiten het getekende vierkant zijn allemaal gericht op hoekpunt *O*.
- Sla precies door *O* een klein spijkertje of prik een gaatje en bevestig daaraan een stukje garendraad met een gewichtje.
- Klaar!

Hoe er mee te werken

In figuur 2 staan we in de buurt van een watertoren *TT'* waar we de hoogte van willen bepalen. Je houdt het kwadrant verticaal, met punt *O* naar boven, en richt het zó dat je met één oog juist de top *T* van de toren langs de vizierlijn ziet (in de tekening positie 1). Met je andere hand druk je op het omlaag hangende 'lood-lijntje' tegen de *a*-

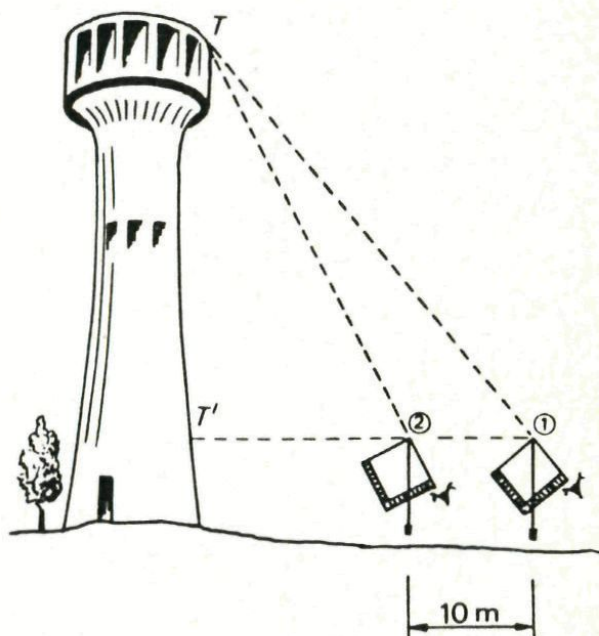
schaal, en lees je af: 7,5 cm.

We lopen 10 meter naar de toren toe (tien flinke passen), en 'viseren' nogmaals op *T*. Het touwtje hangt nu langs 5 cm. De gezochte hoogte krijg je tenslotte uit de simpele berekening:

$$\frac{100}{(7,5 - 5)} = 40 \text{ m.}$$

Werken met de b-schaal

Bovenstaande methode gaat alleen goed voor meetplaatsen 'in de buurt' van de toren. Als je er meer dan 40 meter vandaan bent, valt het draadje in het kwadrant niet meer over de *a-schaal*. Je kunt dan twee dingen doen.



Figuur 2. Voor de bepaling van de hoogte zijn twee metingen nodig, op een afstand van bijvoorbeeld 10 m van elkaar.

Eén mogelijkheid is om een ander kwadrant te maken: niet vierkant, maar rechthoekig met de a-schaal een heel stuk langer dan de b-schaal.

Toch kun je ook het vierkante ding blijven gebruiken, nu af te lezen op de b-schaal. Stel dat je daar een draadstand vindt op 8 cm, en 10 meter verder van de toren lees je $6\frac{2}{3}$ cm af. Met iets meer rekenen dan in het eerste geval vind je een torenhoogte van:

$$\frac{8 \times 6\frac{2}{3}}{8 - 6\frac{2}{3}} = 40 \text{ m.}$$

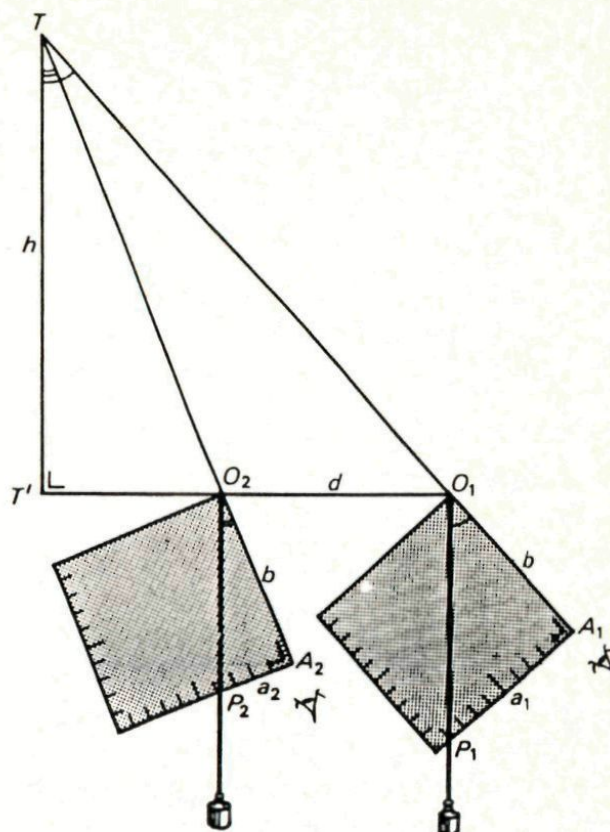
Waarom werkt het

Met een klein beetje meetkunde-kennis kun je inzien waarom de twee berekeningsmethoden hier het juiste resultaat geven.

Als je geen zin hebt om er zelf wat aan te puzzelen, kun je proberen onze uitleg te volgen, aan de hand van figuur 3. De situatie is dezelfde als in figuur 2, alleen zijn de kwadranten nog een stuk groter getekend. De figuur laat zien dat de driehoeken $O_1A_1P_1$ en $TT'O_1$ gelijkvormig zijn (via een spiegeling); evenzo de driehoeken $O_2A_2P_2$ en $TT'O_2$.

Dit geeft de evenredigheden

$$\frac{T'O_1}{h} = \frac{a_1}{b} \quad \text{en} \quad \frac{T'O_2}{h} = \frac{a_2}{b}$$



Figuur 3. Deze afbeelding van de meetsituatie in figuur 2, laat twee paar (spiegel-)gelijkvormige driehoeken zien.

En na aftrekken, met $T'O_1 - T'O_2 = d$

$$\frac{d}{h} = \frac{a_1 - a_2}{b} \quad \text{of} \quad h = \frac{b}{a_1 - a_2} \cdot d \quad (1)$$

Het tweede geval, met aflezing op de b-schaal (b_1 cm), is te verklaren aan de hand van figuur 4. We denken ons eenvoudig het kwadrant zóver vergroot, dat het lood-lijntje toch een aflezing op de verlengde a-schaal geeft (a_1 cm). Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken waarin de zijden a_1 en b_1 voorkomen, volgt $a_1 = ab/b_1$. (2)
Op een plaats d meter verder van

de toren geeft de b-schaal een aflezing b_2 cm, met evenzo een denkbeeldige waarde op de a-schaal $a_2 = ab/b_2$. (3)

Invullen van (2) en (3) in de 'a-schaal-formule' (1) geeft voor de hoogte van de toren

$$h = \frac{b}{\frac{ab}{b_2} - \frac{ab}{b_1}} \cdot d \quad \text{ofwel}$$

$$h = \frac{b_1 b_2}{a(b_1 - b_2)} \cdot d \quad (4)$$

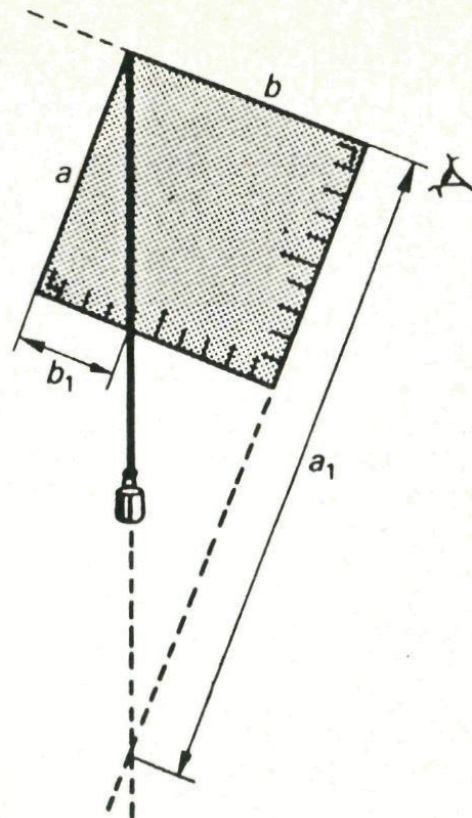
Voor het overgangsgeval, met één aflezing op de a-schaal en één op de b-schaal, zul je nu zelf de formule kunnen vinden. Figuur 5 geeft een situatie waarin dit zeker van toepassing is.

Ter vermindering van het rekenwerk kiezen we in (3) en (4) voor a , b en d mooie waarden:

$a = b = 10$ cm, en $d = 10$ m.

Bij aflezing van a_1 , a_2 , b_1 en b_2 in centimeter vinden we dan de hoogteformules zoals ze in de voorbeelden gebruikt werden:

$$h = \frac{100}{a_1 - a_2} \text{ meter en } h = \frac{b_1 b_2}{b_1 - b_2} \text{ meter.}$$



Figuur 4. Uit een aflezing b_1 op de b-schaal is een denkbeeldige aflezing a_1 op de a-schaal te berekenen, omdat geldt: $a_1 : b = a : b_1$.

Maak het ding, en probeer het uit! Door achter elkaar een aantal keer de hoogte van dezelfde toren te meten, krijg je een idee van de nauwkeurigheid van deze methode.



Figuur 5.

Gaatjes boren, moeilijker dan je denkt

Vaak worden er in platen gaatjes geboord.

Soms is dat om materiaal te besparen, om de zaak lichter te houden: soms is het om iets door te laten.

Een boardplaat onder een matras moet kunnen ventileren, de kop van een telefoon moet geluidsgolven kunnen doorlaten en een putdeksel op straat water.

Bij dat boren willen we een regelmatig patroon krijgen: dat werkt beter en staat netter.

Wanneer zo'n plaat rechthoekig is, lijkt de opgave niet moeilijk. We zetten de gaatjes in rijtjes en kolommen naast en achter elkaar op de plaatsen waar zich bij grafiekpapier de roosterpunten bevinden.

Wanneer de vorm geen rechthoek, maar bijvoorbeeld een cirkel is, liggen de zaken niet meer zo eenvoudig.

Hoe zouden de gaatjes geboord moeten worden in een ronde stoelzitting?

We zouden het in het wilde weg kunnen doen, maar dat is niet bepaald fraai.

Als we naar een goed ontwerp streven, moeten we eerst onze wensen voldoende exact formuleren. Wat willen we eigenlijk?

We zouden het zo kunnen stellen: de middelpunten van naburige gaatjes moeten onderling zo veel mogelijk gelijke afstanden hebben. Verder willen we een regel om het ontwerp in radiale richting uit te breiden.

De vraag wordt dan: waar komen de middelpunten?

Regelmatische verdeling bij veelhoeken

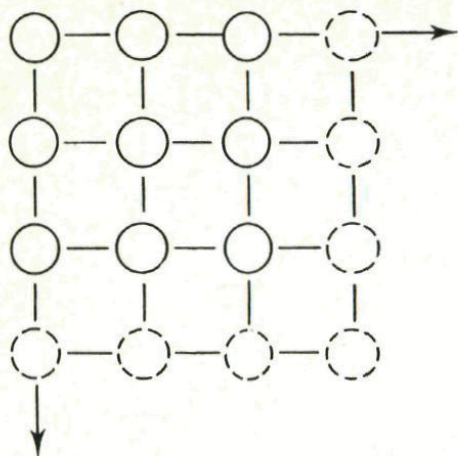
Bij een vierkant zetten we de middelpunten van de gaatjes op onderling loodrechte lijnen op onderling gelijke afstanden (fig. 1). Zo'n patroon is gemakkelijk uit te breiden. De regelmaat blijft dan gehandhaafd. Bij een gelijkzijdige driehoek wordt de verdeling als figuur 2. Ook hier liggen middelpunten van naburige gaatjes steeds op gelijke afstanden.

Bij een vijfhoek mislukt een dergelijk schema.

Verdeling bij een cirkel

Wat ons meer interesseert is hoe de verdeling bij een ronde plaat zou moeten gaan. Het vierkantenpatroon geeft daar een onbevredigend resultaat.

In figuur 3 staat de verdeling zoals we die hebben aangetroffen bij het inwendige van de microfoondoo's

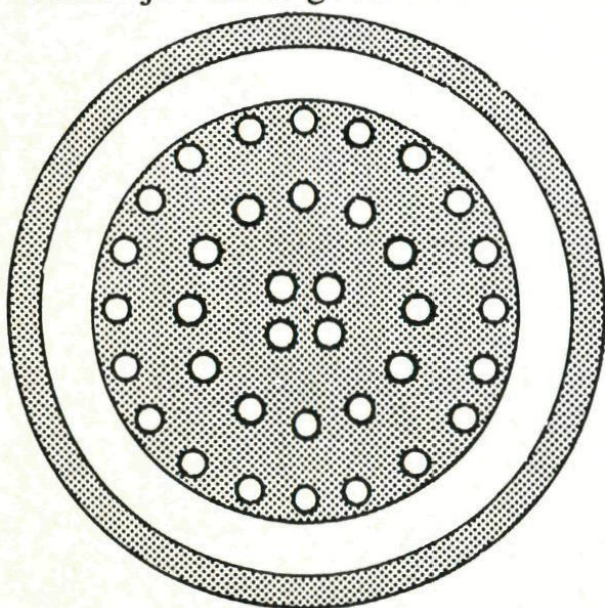


Figuur 1. Verdeling bij een vierkant.

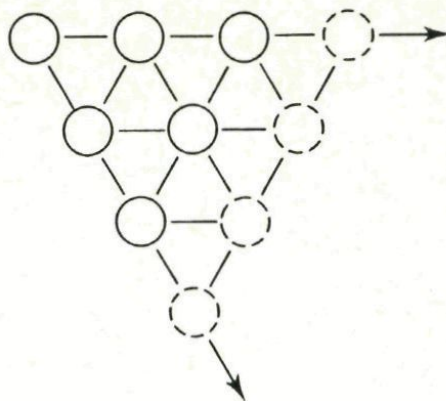
van ons telefoontoestel. Dat start met een vierkant van gaatjes omringd door 2 cirkels met 12 en 20 gaatjes.

De verhouding van de middellijnen van beide cirkels is hier 19 mm : 33 mm en dat is ongeveer de verhouding 12 : 20, zodat de gaatjes op de cirkels ongeveer even ver van elkaar liggen. Wiskundig blijft het eindresultaat wat rommelig. Het zou beter kunnen.

In figuur 4 staat de verdeling zoals we die thuis zagen in de keuken bij het zeefje van de gootsteen.



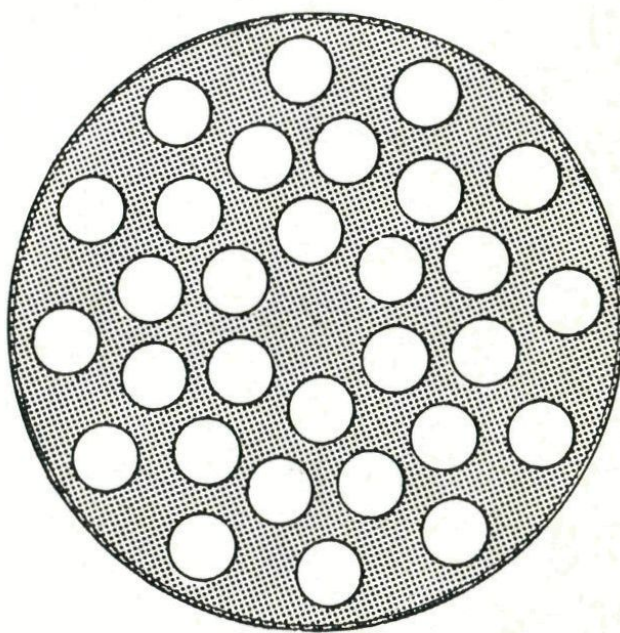
Figuur 3. Microfoondoos.



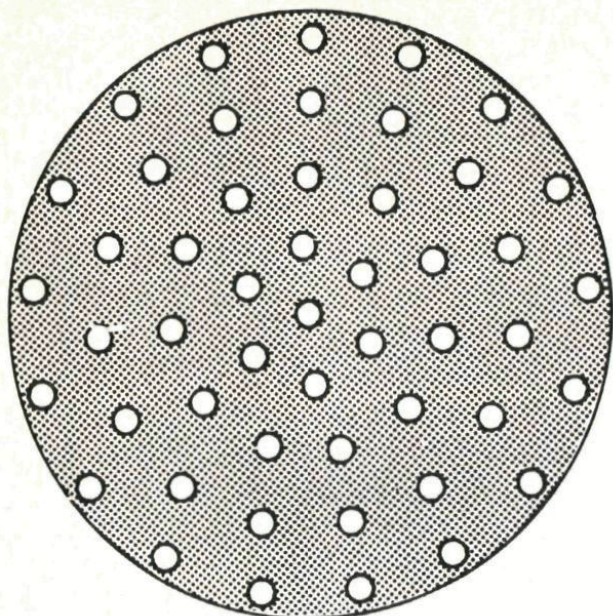
Figuur 2. Bij een gelijkzijdige driehoek.

Het bevredigt ons meer. Speciaal de start in het midden met een zeshoek lijkt bij een cirkelvormige plaat de meest geschikte.

In figuur 5 is de verdeling aangegeven zoals we die hebben aangetroffen bij de schuimspaan. Het lijkt een goede start met behulp van een zeshoek, maar, bij nader inzien is de afwerking bepaald slecht te noemen. Als aantallen gaatjes tellen we 1, 6, 11, 15 en 17.



Figuur 4. Gootsteenzeefje.

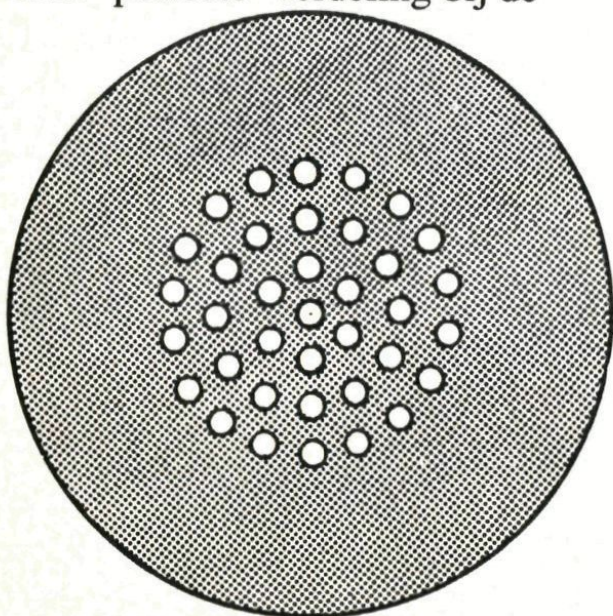


Figuur 5. Schuimspaan.

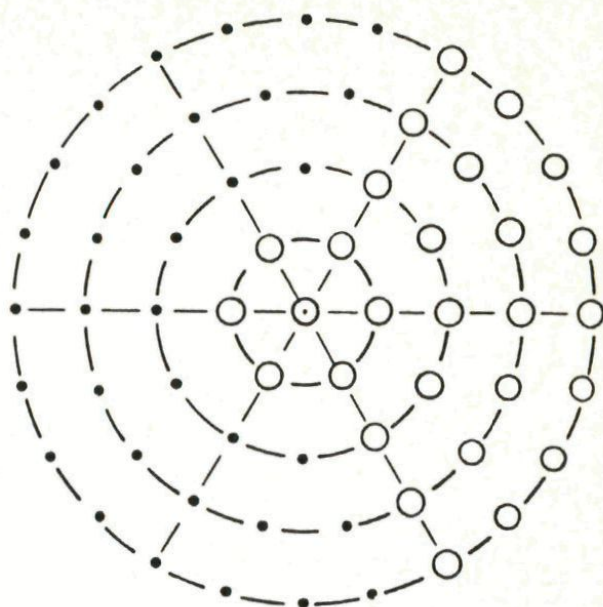
Beginnen met een zeshoek

Kunnen we niet, uitgaande van de zeshoek, tot een beter verdeelvorschrift komen?

De oplossing staat in figuur 6. Als de straal van de eerste cirkel r is, dan is de straal van de tweede $2r$, van de derde $3r$ enzovoort. Als aantallen gaatjes kiezen we dan: 1, 6, 12, 18 enzovoort. We vonden deze 'perfecte' verdeling bij de



Figuur 7. Telefoonkop.



Figuur 6. Ideale verdeling uitgaande van een regelmatige zeshoek.

afdekdop van het telefoongedeelte van de telefoonhoorn (fig. 7).

Na enig rekenen blijkt de afstand van de gaatjes van een cirkel op de duur enigermate toe te nemen, al is het niet veel.

De omtrek van de n -de cirkel is $2\pi nr$. Hierop liggen $6n$ gaatjes, zodat de afstand van 2 van die gaatjes bij benadering wordt: $(2\pi nr) : (6n) = 2\pi r : 6 = 1,04 r$.

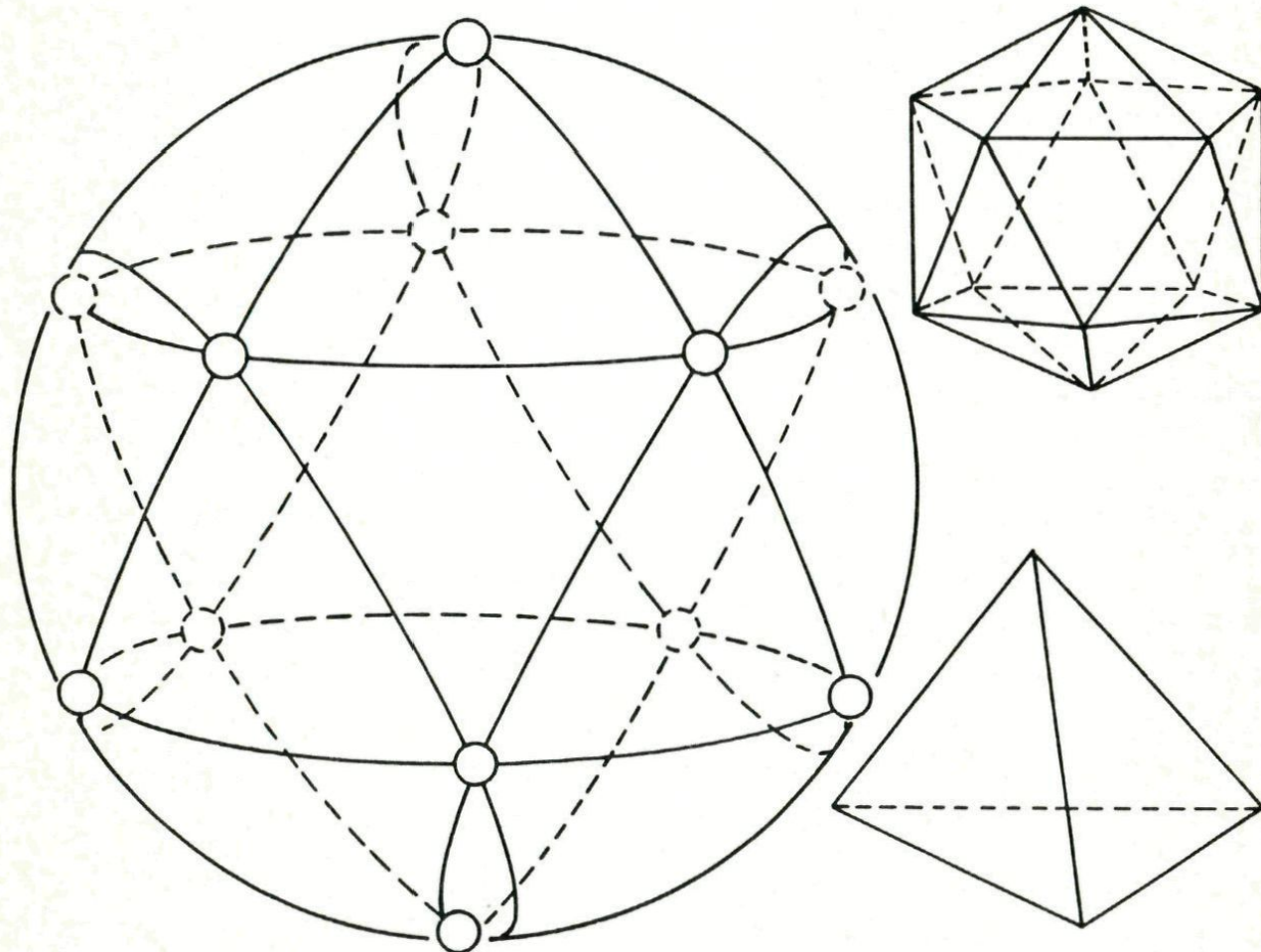
De afstand tussen de middelpunten van de gaatjes neemt op de duur dus maximaal ... 4 % toe. Immers de gaatjes op de eerste cirkel hebben een onderlinge afstand r .

Verdeling bij een bol

Datzelfde probleem, van de regelmatige verdeling, komen we ook tegen bij bolvormige oppervlakken. Hoe moeten gaatjes geboord worden in een vergiet, een theezeeffe, de bolvormige kop van een gieter?

Als het een klein deel van het boloppervlak betreft, kunnen we zo'n deel als vlak beschouwen en de eerder aangegeven methode benutten.

Bij de verdeling van een volledige bol, komen we uit bij regelmatige veelvlakken. In figuur 8 staat bijvoorbeeld getekend hoe we, regelmatig verdeeld over het aardoppervlak, een net van relaisstations kunnen plaatsen. De gezochte punten zouden geschikt kunnen liggen op de hoekpunten van een regelmatig viervlak of, indien een groter aantal gewenst wordt, op de hoekpunten van een regelmatig twintigvlak.



Figuur 8. Regelmatig net bij een bol.

De verdraaide doos van professor X

Professor X kennen we al uit het vorige nummer van Pythagoras. Hij begon met de tekening van een doos, maar het was kennelijk de bedoeling om mij alles voor te schotelen wat hij bedacht had over onmogelijke tweebalken, driebalken en vierbalken.

Verdraaide doos en onmogelijke tweebalk

Professor X liet mij een tekening zien van een doos die hij gisteren bedacht had en vroeg me:

“Hoeveel kubussen zouden erin passen?”

“Sorry, maar ik zie er helemaal geen doos in.” (fig. 1).

Professor X: “O, dan zal ik je laten zien hoe ik er op kwam. Eerst had ik een lange kist. Daar heb ik van achteren twee kubussen afgezaagd” (fig. 2).

“Nu zie ik het: het is een vreemde vorm. Het ziet er gedraaid uit. Een verdraaid vreemd ding; de voorkant is horizontaal en de achterkant vertikaal!”

Professor X: “Zelfde vraag: hoeveel kubussen?”

Na enig gepeins vroeg ik: “Kunt u ook tekenen hoe dat ding er van achteren uit ziet?” (fig. 3).

Professor X tekende zijn volgende figuur. “Alstublieft graag nog een laatste aanwijzing. Hoe ziet het er van de zijkant uit?” (fig. 4).

Professor X, geduldig als altijd, maakte een nieuwe tekening. “Ik denk dat de inhoud meer dan vier kubussen is. Maar wat is het juiste

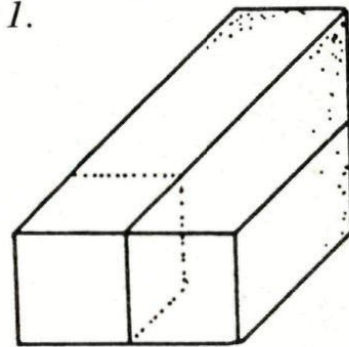
antwoord?”

Professor X: “Precies vijf!”

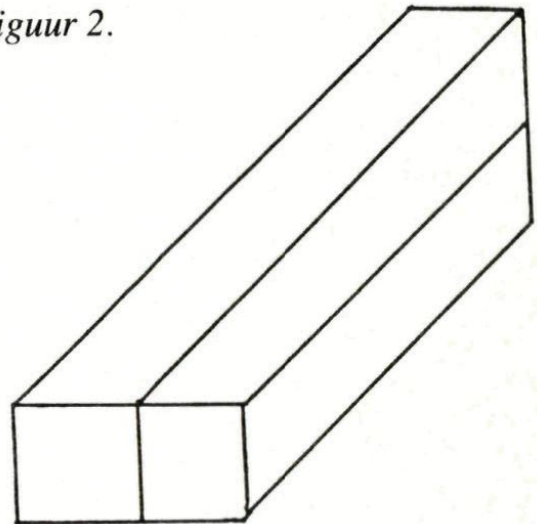
“Kunt u me dat uitleggen?”

Professor X antwoordde glimlachend: “Nog niet.”

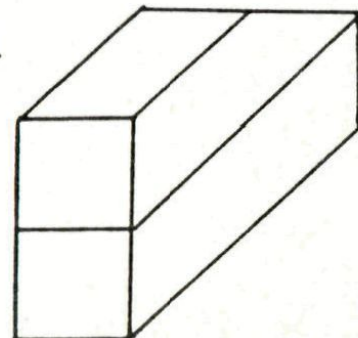
Figuur 1.



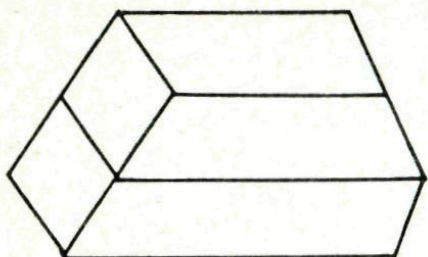
Figuur 2.



Figuur 3.



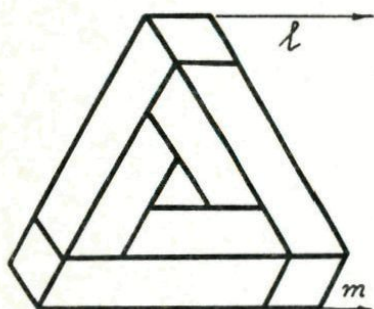
Figuur 4.



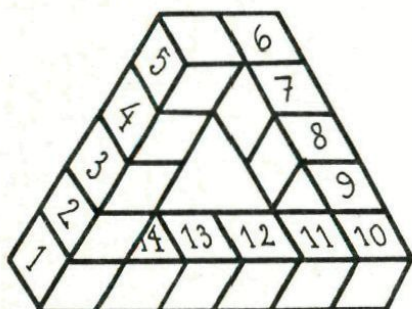
Van onmogelijke driebalk naar onmogelijke vierbalk

Professor X tekende een onmogelijke driebalk en verschoof toen de rechterbalk langs de lijnen l en m , zoals hieronder te zien is (fig. 5 en fig. 6).

Na even kijken zag ik dat deze vierbalk ook onmogelijk was. Leuk, maar ik vroeg me wel af hoe hij op deze manier weer bij zijn malle doos terecht zou komen. Professor X: "Zo kun je uit een onmogelijke driebalk een onmogelijke vierbalk laten ontstaan."



Figuur 5.



Figuur 6.

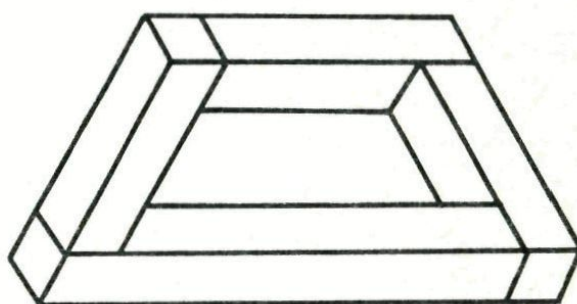
Ik knikte van ja en hield andere opmerkingen voor me, omdat ik zo gauw mogelijk wilde weten waarom Professor X zo stellig kon beweren dat zijn doos een inhoud van vijf kubussen had.

Professor X: "De volgende figuur is ook zo'n vierbalk, de zijbalk is nog maar een kubus opgeschoven en ik nummer de kubussen (het zijn er veertien) zodat je precies kunt volgen wat er gebeurt. Nu haal ik de twee bovenste kubussen weg. En om het gat te dichten voeg ik er een tussen. Volg je me?" (fig. 7 en 8).

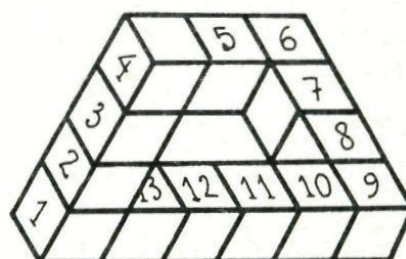
"Ja, we hebben nu één kubus minder."

Professor X: "Goed zo. Ik doe nu nog eens hetzelfde."

"Dan zullen er twaalf kubussen overblijven." Mijn opmerking belette Professor X niet om alle



Figuur 7.



Figuur 8.

kubussen rustig te nummeren (fig. 9).

Professor X: "Je begint het al door te krijgen, maar ik ga verder. Zie je dat op deze manier een onmogelijke tweebalk ontstaat? Ik zet geen cijfers meer, maar je zult ongetwijfeld beamen dat die uit elf kubussen bestaat. Steeds twee eraf halen en weer een toevoegen.

Ik was blij dat ik de monoloog van professor X kon onderbreken met een schrandere opmerking: "Nu zie ik het, dat is de kist die u gebruikte om de verdraaide doos te maken" (fig. 10).

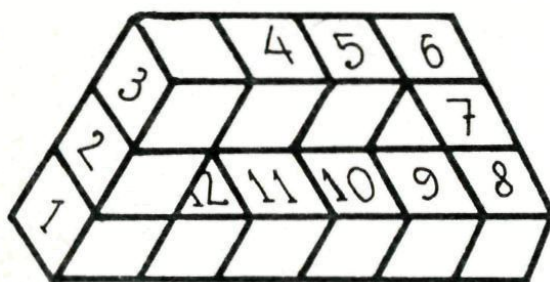
Professor X: "Fijn, ik merk dat je

me nog steeds kunt volgen. Nu ga ik de zes kubussen aan de rechterkant weghalen."

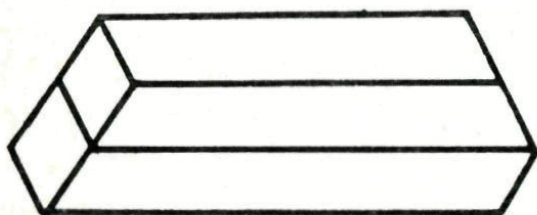
"En daar verschijnt uw verdraaide doos," zei ik triomfantelijk. "En nu zie ik ook waarom de inhoud daarvan vijf kubussen is: elf min zes, en je houdt er vijf over."

"Geen slechte prestatie voor een kind van zes," zei professor X sarcastisch. "En vertel me nu niet, dat je nog een kleinere doos kunt tekenen met een inhoud van drie kubussen. Dat weet ik, maar de meeste mensen zien het dan niet meer als een doos" (fig. 12).

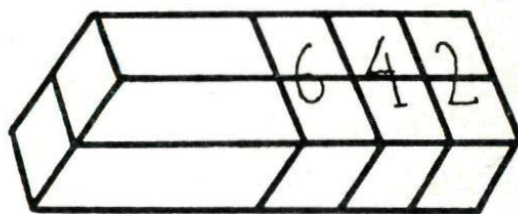
Figuur 9.



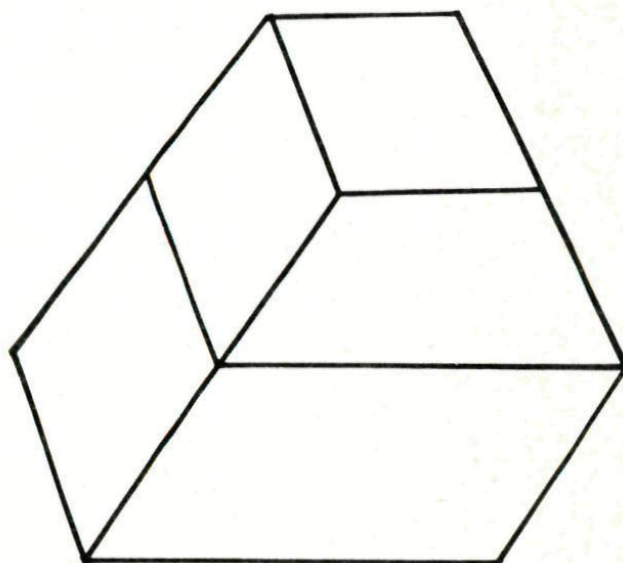
Figuur 10.



Figuur 11.



Figuur 12.



De sleepkromme

Denk op een horizontaal vel papier twee loodrechte assen getekend. Een potloodje staat rechtop in een punt A van de X -as, op een afstand a rechts van de oorsprong. Dicht boven de punt zit om het potlood een dun draadje geknoopt, dit draadje volgt de X -as en eindigt in de oorsprong.

We verplaatsen nu dit draadeind langs de Y -as omhoog, waarbij het potlood over het papier getrokken wordt (we hebben het potlood verboden om te vallen!). Op het papier ontstaat zo een kromme lijn die we de 'sleepkromme' zullen noemen. We bekijken wat er over die kromme te zeggen valt.

Wat voor kromme?

Om de beschrijving van wat er gebeurt te vereenvoudigen duiden we de punt van het potlood aan met P , en het andere draadeind met Q .

In het begin, als Q nog niet ver van de oorsprong vandaan is, zal P zich nog weinig van A verwijderen.

Later komt P wat meer op gang.

Het potlood wordt voortdurend getrokken in de richting van Q ; de richting van de kromme die getekend wordt, wijst dus op elk moment in de richting van Q . De afstand tussen P en Q blijft daarbij steeds gelijk aan de oorspronkelijke afstand a . Wat volgt hieruit voor de vorm van de kromme?

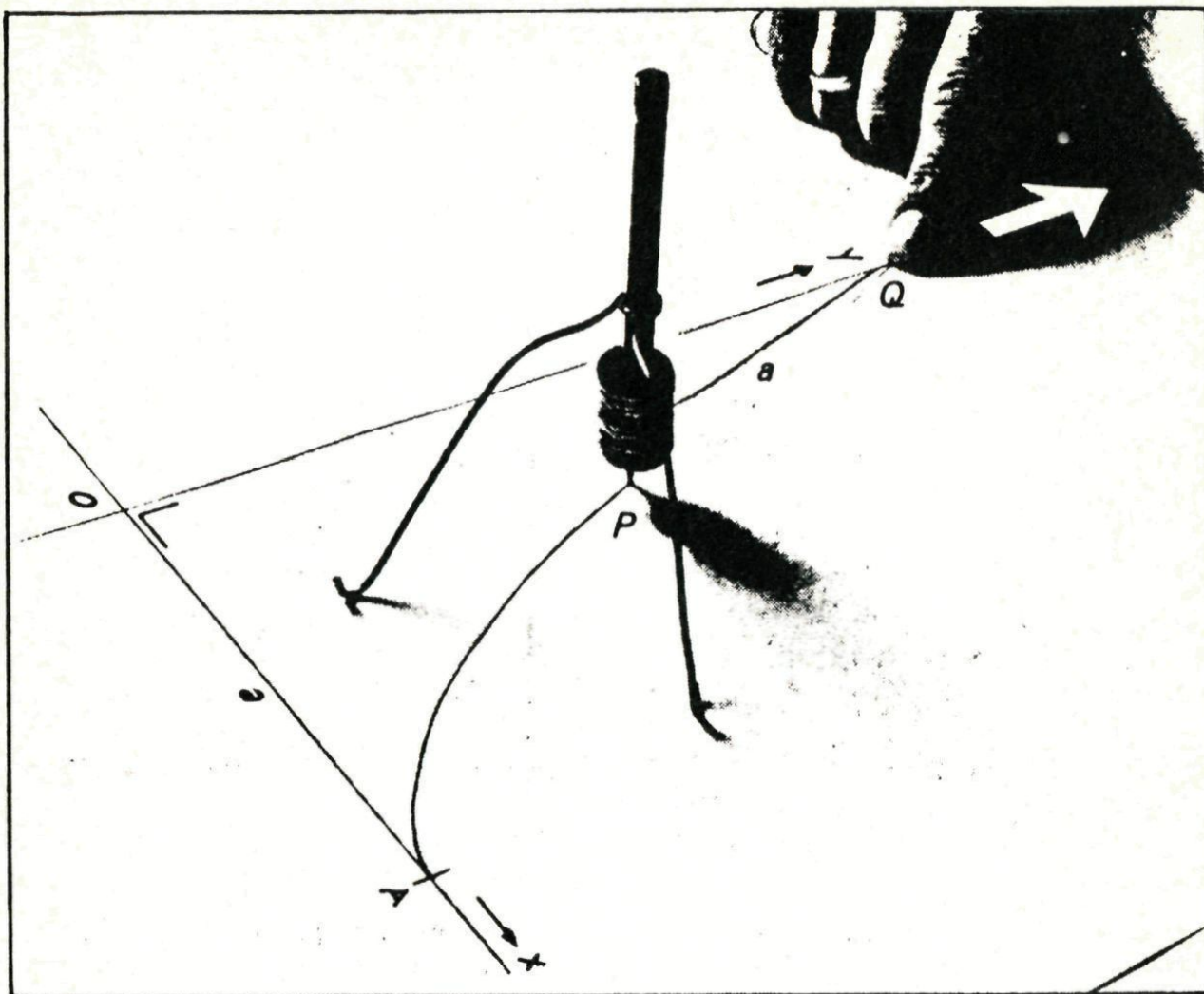
Punt P beweegt zich steeds naar links en omhoog. Eerst minder steil, later met steeds toenemende steilheid. De Y -as wordt daarbij steeds dichter genaderd maar in geen enkel punt volledig bereikt. De Y -as is dus een asymptoot van de kromme.

Moeilijker is het om in te zien wat

de vorm is in de buurt van A . Wordt de kromme daar door de X -as vloeiend geraakt, of vertrekt de kromme direct onder een eindige hoek met de X -as? En hoe groot is dan wel die hoek?

Denk hier eerst over na. Wat vind je?

Punt P begint pas echt goed en wel te bewegen als Q al op enige afstand van O af is. En op dat moment verloopt de baan ook onder een eindige hoek schuin omhoog. Van de andere kant kan je intuïtie je toch aan het twijfelen brengen: waarom zou de beginhoek wél bijvoorbeeld 2° of 12° zijn, en waarom níét 1° of 10° ? Als er één hoek als speciale voorkeurshoek uit de bus moet komen, denk je in eerste instantie waarschijnlijk toch aan 0° dus met een grafiek die raakt aan de X -as. Andere 'mooie' hoeken als 30° of 45° , komen duidelijk niet in aanmerking.



Figuur 1. Het tekenen van een sleepkromme. (De ijzeren ringetjes onder aan het potlood zorgen ervoor dat de wrijving van de twee steunpoten over het papier klein is t.o.v. die van de schrijvende potloodpunt.)

In plaats van zoals hierboven op ons gevoel te blijven redeneren, zoeken we wat wiskundig gereedschap uit de kist. In de hoop dat dát ons wat meer macht zal geven. We zagen al dat punt P steeds naar links boven beweegt. Dat wil zeggen dat elke verticale lijn tussen O en A juist éénmaal door P wordt gepasseerd. En dat wil weer zeggen dat de kromme lijn is op te vatten als de grafiek van een functie. En wel een functie van de horizontale coördinaat, de x , met

als domein het interval $< 0, a]$.

We kunnen nu zoeken naar het formule-voorschrift voor die functie. En dááruit kan met behulp van weer een ander instrument, de differentiaalrekening, iets gezegd worden over de raaklijnrichtingen van de grafiek.

In de wiskunde-tang

De gegevens die we tot nu toe over de sleepkromme hebben, zijn nog eens weergegeven in figuur 3. We geven de naam f aan de functie die

de sleepkromme als grafiek heeft. Omdat we weten dat de waarde van de afgeleide functie f' , gelijk is aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn, volgt uit deze figuur

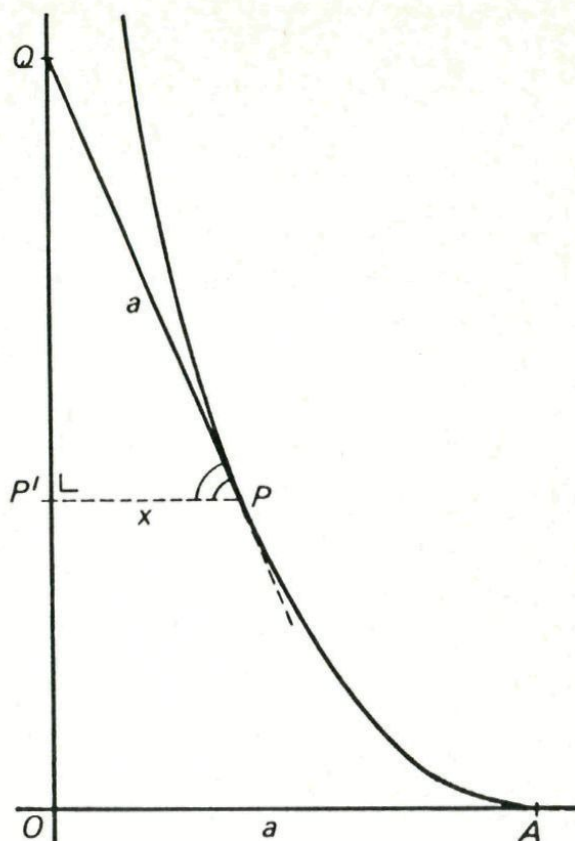
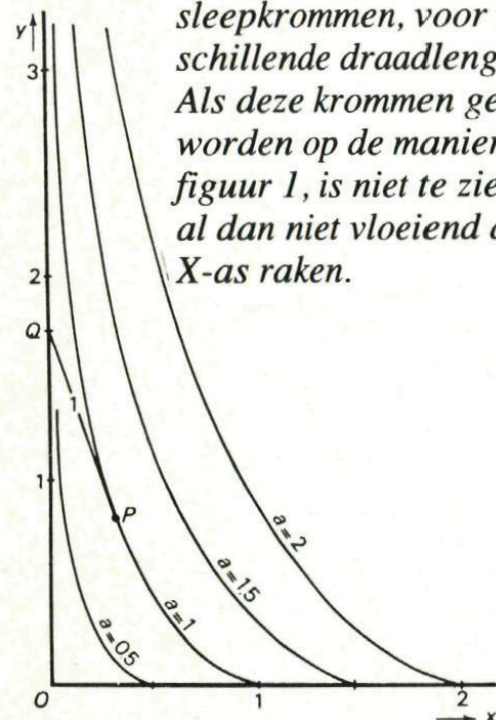
$$f'(x) = -\frac{QP'}{PP'} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \quad (1)$$

Om nu ook f zelf te vinden, moeten we deze functie f' primitiveren. Je hebt misschien al eens ervaren dat deze techniek in het algemeen veel minder soepel verloopt dan het omgekeerde, het differentiëren. We laten hier dan ook niet alle trucjes en foefjes zien die leiden tot een uitdrukking voor f . Het resultaat is:

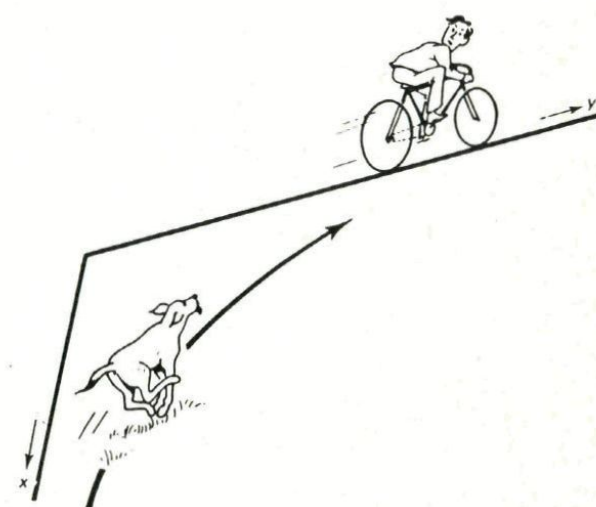
$$f: x \rightarrow \sqrt{a^2 - x^2} + a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

De vwo-bovenbouwers mogen proberen dit te controleren door terug-differentiëren.

Figuur 2. Een viertal (gelijkvormige) sleepkrommen, voor verschillende draadlengten a . Als deze krommen getekend worden op de manier van figuur 1, is niet te zien of ze al dan niet vloeiend aan de X-as raken.



Figuur 3.



Figuur 4. De hond die vanuit het veld de op het rechte pad rijdende fietser achterna gaat, volgt ook een 'sleepkromme'. Aangenomen dat het de fietser lukt om de hond op een constante afstand van zich af te houden.

Het vierkleurenprobleem

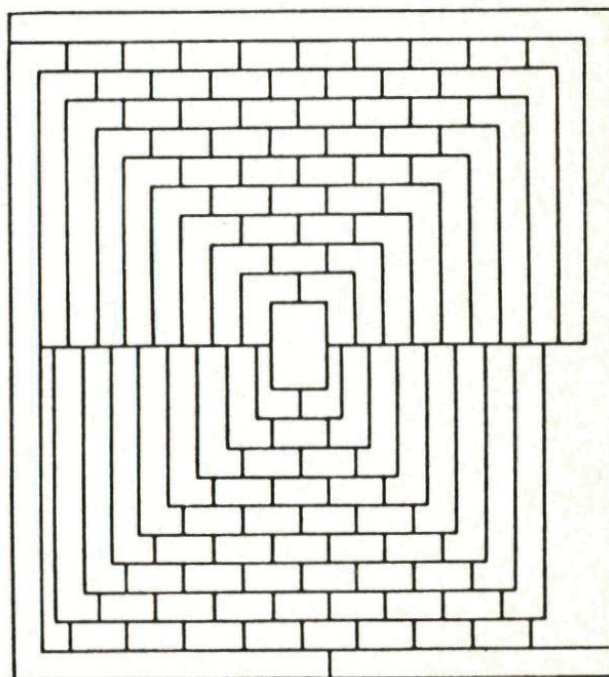
Op een landkaart worden landen of provincies soms verschillend gekleurd om de gebieden duidelijk van elkaar te kunnen onderscheiden. Engelse kartografen wisten reeds lang geleden, uit ervaring, dat men daarvoor nooit meer dan vier kleuren nodig had.

Rond 1850 zag een wiskundestudent (Francis Guthrie) hierin een interessant wiskundig probleem: waren er in elke mogelijke situatie niet meer dan vier kleuren nodig? In 1878 vestigde de beroemde wiskundige Cayley de aandacht op dit probleem. Tot op heden heeft men nog niet kunnen bewijzen, dat bij kaarten op een plat vlak in alle gevallen met vier kleuren kan worden volstaan om buurgebieden van elkaar te kunnen onderscheiden. Als je maar één geval kunt tekenen waarbij beslist vijf kleuren nodig zijn, dan is daarmee al aangetoond, dat het vermoeden, dat men met vier kleuren altijd uitkomt, onjuist is.

De afgelopen 100 jaar hebben vele wiskundigen geprobeerd te bewijzen dat de stelling: met vier kleuren kunnen volstaan al dan niet juist was. Vorig jaar werd in *Scientific American* een landkaart gereproduceerd, waarvan beweerd werd, dat er vijf kleuren nodig waren om buurgebieden van elkaar te onderscheiden (fig. 1). Het was een aprilgrap. Er kwamen veel reacties op van mensen die de

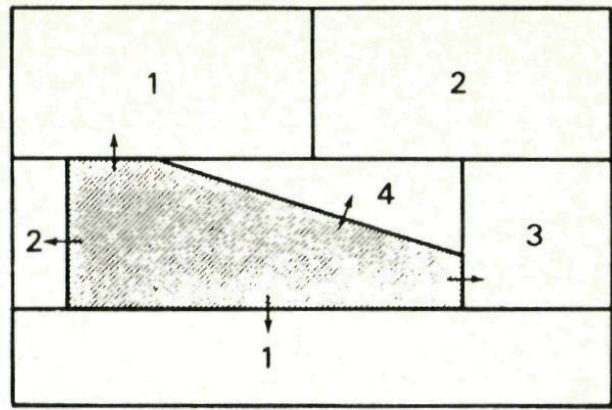
landkaart netjes volgens de spelregels ingekleurd hadden met slechts vier kleuren.

In figuur 2 is een landkaart getekend. De kleuren hebben we genummerd: 1, 2, 3 en 4. In het midden blijft een gearceerd gebied over, dat nog geen kleur heeft, maar omdat het grenst aan gebieden van elke gebruikte kleur, moeten we het wel een andere een vijfde! kleur geven. Of zie je kans om ook hier met vier kleuren uit te komen?

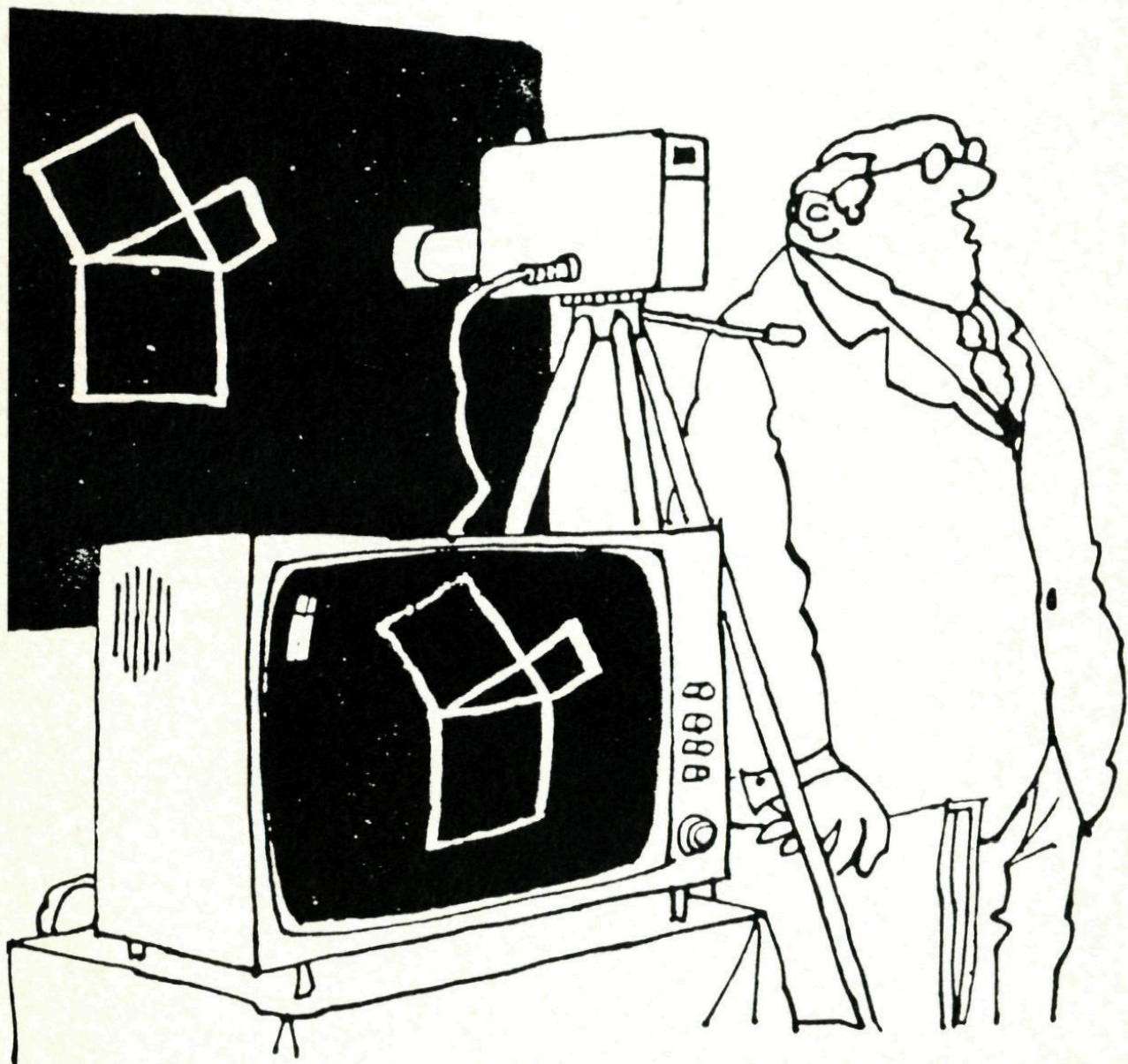


Figuur 1. De landkaart van W. McGreor

Ook voor het boloppervlak heeft nog niemand kunnen bewijzen dat er meer dan vier kleuren nodig zijn om buurgebieden van elkaar te onderscheiden. Het is heel frappant dat men wèl voor ingewikkelder vlakken heeft kunnen bewijzen, dat men voor het scheiden van buurgebieden nooit meer dan 7 kleuren nodig heeft!



Figuur 2.



De band van Möbius

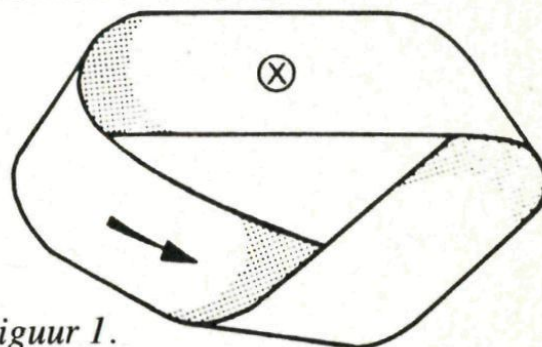
De kunstenaar M.C. Escher heeft een oud symbool voor de eeuwigheid verwerkt: de slang die zichzelf in de staart bijt. Het eindeloze wordt benadrukt door een band zonder einde. Nu kunnen we ons een band zonder einde wel eenvoudiger voorstellen door de cilindrisch gevormde band van figuur 2. Is figuur 1 alleen maar een ingewikkelde manier om de band van figuur 2 weer te geven of is er een echt verschil? En dan is altijd nog de vraag volgens welke regels we een verschil echt zullen noemen en wanneer niet. We gaan eerst maar eens op ontdekking uit en zullen daarna eens kijken of we spelregels kunnen bedenken.

Maar één kant!

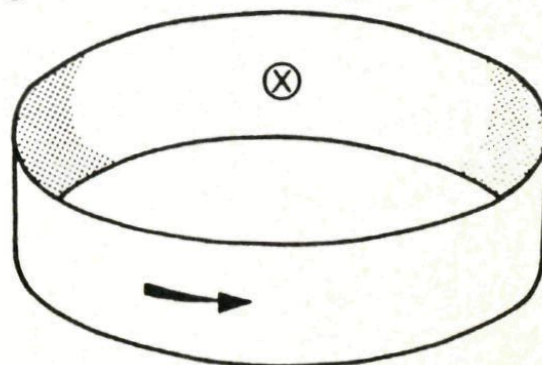
Een mier loopt in de richting van de pijl en probeert het merkteken te bereiken. Lukt hem dat bij band 1? En bij band 2? Ook al vervormen we band 2 tot figuur 3, dat helpt de mier niets. Tenzij we A en B naar elkaar toebuigen en daar een verbinding aanbrengen. Bij de band van figuur 1 is het voor de mier mogelijk om elk punt te bereiken zonder over de rand heen te hoeven kruipen. Het is een oppervlak dat eigenlijk maar één kant heeft. Stop, zegt de wiskundige nu, waar praat je over? Oppervlak, kant, rand, punt, ..., heb je die gedefinieerd? We stoppen niet, maar veronderstellen dat deze grondbegrippen aan een ieder duidelijk zijn.

Brengen we in de band van figuur 1 een knip aan (fig. 4), dan is het onmogelijk geworden om van pijl naar merkteken te komen zonder

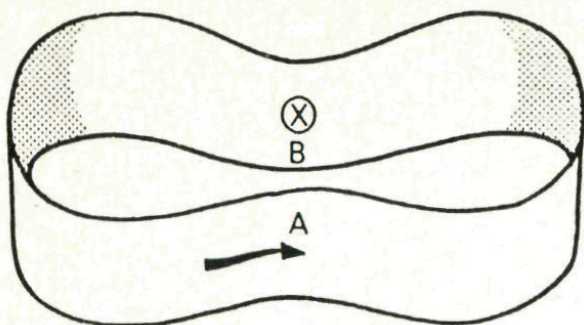
over de rand te stappen. Het oppervlak is tweekantig geworden. We kunnen nu een verschil aangeven tussen de oppervlakken van de figuren 1 en 2. De eerste heeft één kant, de tweede twee. We staan hierbij toe dat het oppervlak vervormd wordt, maar knippen of plakken is verboden.



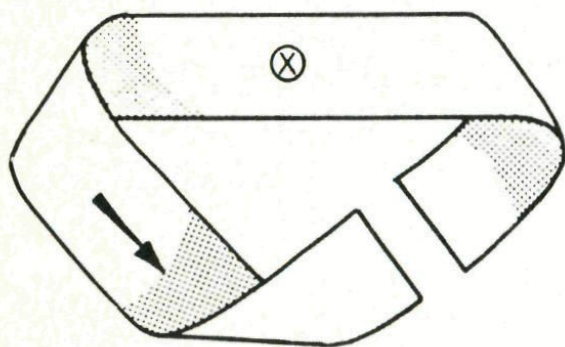
Figuur 1.



Figuur 2.



Figuur 3.



Figuur 4.

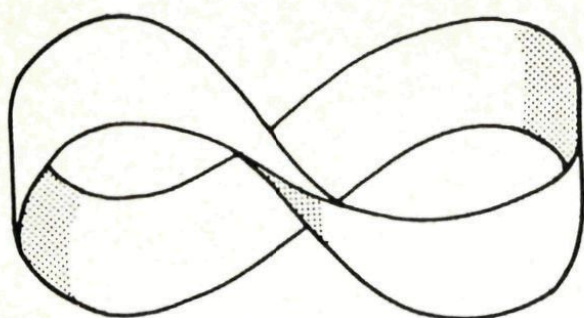
Meetkunde zonder meten

De éénkantige band wordt Möbius-band genoemd, naar de Duitse wis- en sterrenkundige August Ferdinand Möbius (1790-1868). We zijn dus kennelijk toch van de kunst in de wiskunde beland, hoewel begrippen als vorm en lengte, die ons uit de meetkunde zo vertrouwd zijn, hierbij blijkbaar verwaarloosd worden. We mochten immers vervormen en bij het zoeken naar verschillen hebben we geen moment gelet op de lengte of de breedte van de banden. Dit onderdeel van de wiskunde heet topologie. Ze onderzoekt de eigenschappen die blijven bestaan bij vervormingen waarbij de samenhang niet verbroken wordt (plaatsleer, vergelijk *topografie* = *plaatsbeschrijving*).

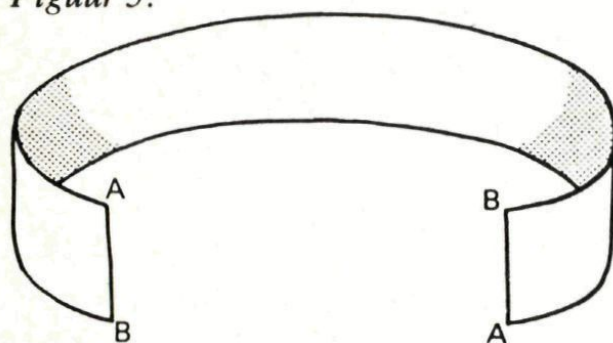
Het Instituut Ontwikkeling Wiskunde-Onderwijs heeft als embleem de band van figuur 5. Is dit ook een Möbiusband? Zo ja, gelijk aan die van figuur 1, dat wil zeggen door vervorming daaruit te verkrijgen?

Om dit te onderzoeken, bekijken we hoe we de banden in werkelijkheid zouden kunnen maken. We zeggen 'in werkelijkheid', omdat we tot nu toe eigenlijk alleen in gedachte bezig waren. Neem een strook papier en plak de uiteinden aan elkaar, maar zo, als in figuur 6 aangegeven, A aan A en B aan B. Dat betekent dat we in de band ten minste één slag moeten maken. Figuur 7 is dan gemakkelijk te vervormen tot het embleem van figuur 5. Het blijkt dat we drie slagen moeten maken (fig. 8), om tot de Möbiusband van figuur 1 te komen. En hoe we deze ook vervormen, het wordt nooit meer een band met één slag.

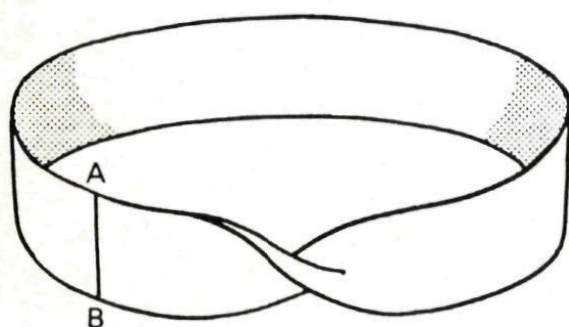
Je zult misschien protesteren tegen het vastplakken van de uiteinden van het lint, terwijl eerder in het verhaal knippen en plakken verboden werd. Het verschil zit 'm in het onderzoek van een bestaand oppervlak tegenover het construeren van een model. Nu we toch aan het knutselen zijn, maken we als volgt een nieuw oppervlak. Neem de band van figuur 7 en knip hem in de langsrichting helemaal door. Wat krijg je? We verklappen het antwoord niet. Doe het maar eens.



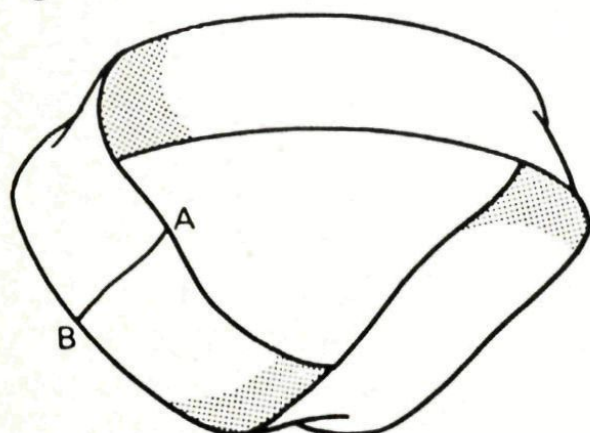
Figuur 5.



Figuur 6.



Figuur 7.



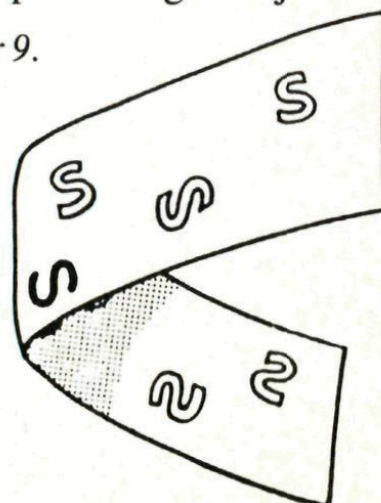
Figuur 8.

Wat moeilijker is: beredeneer vooraf wat je krijgt. Wat heeft dit met de omslagprent te maken?

Nog een ander experiment. Stel je voor, dat je een stempel hebt, waarmee je een gat in het papier kunt ponsen in de vorm van de letter s. Het oppervlak van figuur 9 is daarmee zo te behandelen, dat er een kant is waar de letters goed staan en een kant met uitsluitend letters in spiegelschrift. Het is net als met het opschrift op het raam van een kapperszaak. Je kunt altijd weten of je binnen of buiten bent. Je kunt je oriënteren aan de hand van het wel of niet leesbaar zijn van de tekst zonder hulp van een spiegel. Een dergelijk oppervlak heet oriënteerbaar. Probeer het eens met de band van figuur 7. Je kunt deze bijvoorbeeld maken van dun papier en met viltstift de letters zo dik schrijven, dat ze van weerskanten leesbaar zijn. Of mogen we eigenlijk niet spreken van weerskanten?

Neem nog eens een Möbiusband ter hand en strijk vanaf een bepaald punt met een vinger langs de rand. Je zult merken dat als je op dat punt terug bent je alle rand

Figuur 9.

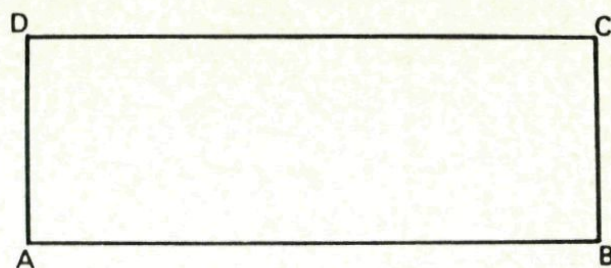


hebt bestreken. De Möbiusband heeft dus maar één rand.

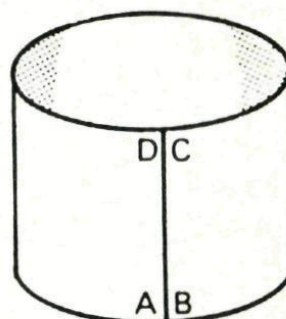
Andere mogelijkheden

We gaan nu eens na welke oppervlakken we kunnen vormen uitgaande van een rechthoekig stuk $ABCD$ (fig. 10). We doen dat weer in gedachte, omdat we in werkelijkheid zelden kunnen beschikken over materiaal dat alle vervormingen toelaat die we wensen.

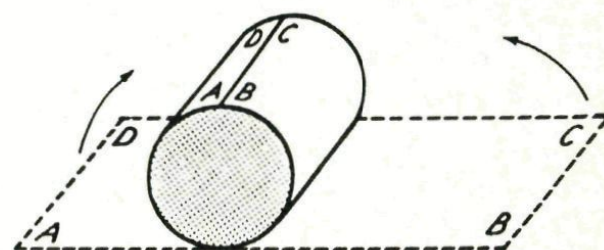
1. Bevestig AD aan BC , zodat A aan B en D aan C komt (fig. 11). We krijgen een cilindrische band met twee randen en twee kanten. Een even aantal slagen in de band is toegestaan. Hetzelfde geldt voor AB bevestigd aan DC .
2. Bevestig AD aan CB na een oneven aantal slagen: Möbiusband. Eén rand aan één kant. Hetzelfde geldt voor AB bevestigd aan CD .
3. Bevestig AD aan BC en AB aan DC , zonder slagen. De eerste las levert ons weer een cilinder en voor het maken van de tweede bevestiging denken we de cilinder voldoende uitgerekt om de uiteinde elkaar te laten bereiken. Er ontstaat een holle ring holle torus zonder rand maar met twee kanten.
4. Bevestig AB aan DC zonder slag en AD aan CB met slag, (fig. 14).
5. Bevestig AB aan CD en AD aan CB beide met een slag, (fig. 15 en 16).



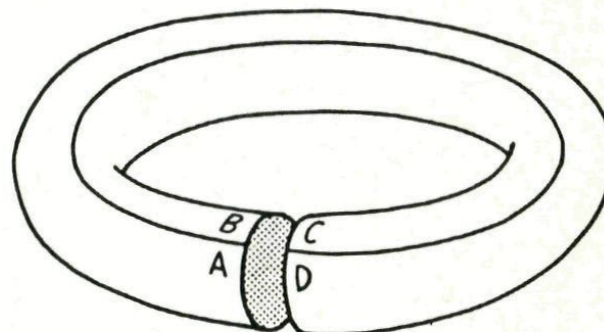
Figuur 10.



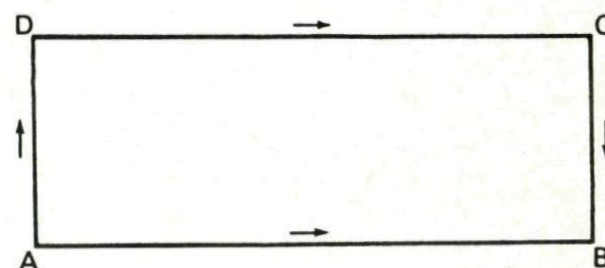
Figuur 11.



Figuur 12.

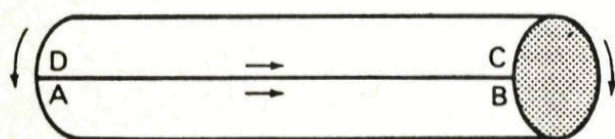


Figuur 13.

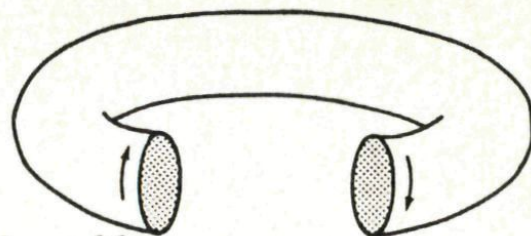


Figuur 14.

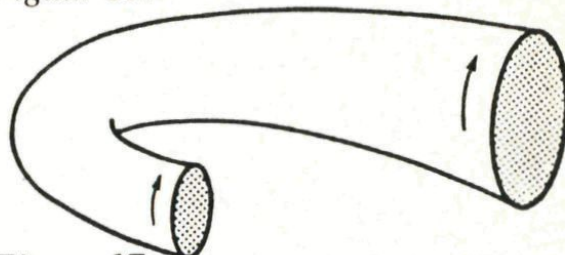
De laatste twee gevallen kunnen we ons moeilijk indenken. Een gedachtenvoorstelling van geval 4 is de fles van Klein, een van geval 5 het projectieve vlak. Het laatste zou ons in dit artikel te ver voeren, hoewel ons voorstellingsvermogen wel op de proef wordt gesteld. De pijltjes in de figuren 14, 15 en 16 geven aan hoe de aansluiting moet plaatsvinden. Als we denken een torus te kunnen maken, merken we dat de pijltjes niet corresponderen. Om dat goed te krijgen, verwijderen we één uiteinde van de cilinder (fig. 17), halen het andere uiteinde naar binnen, zodat de beide cirkel-einden nu gelijkgerichte pijltjes vertonen (fig. 18). De uiteinden kunnen nu wel worden gelast. Je zult nu wel protesteren tegen figuur 19: de dunne slurf is zowel buiten als binnen het dikke gedeelte. En dat, terwijl we geen opening in de wand willen knippen. In onze driedimensionale wereld is dat niet mogelijk. Als we toch aannemen dat oppervlakken elkaar kunnen doorsnijden zonder gemeenschappelijke punten te hebben, krijgen we figuur 19 die bekend staat als de fles van Klein (Felix Klein, 1849-1925). De fles van Klein heeft één kant en geen rand!



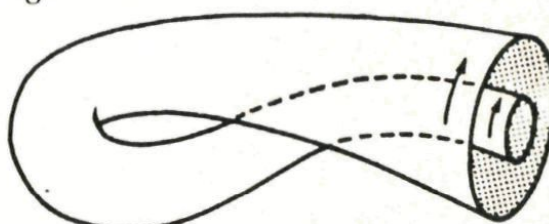
Figuur 15.



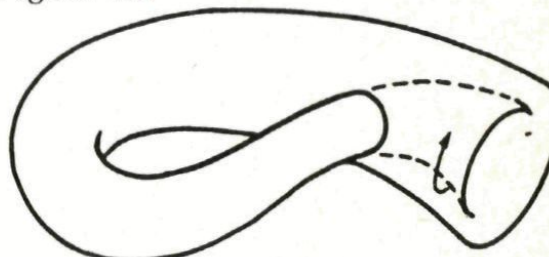
Figuur 16.



Figuur 17.

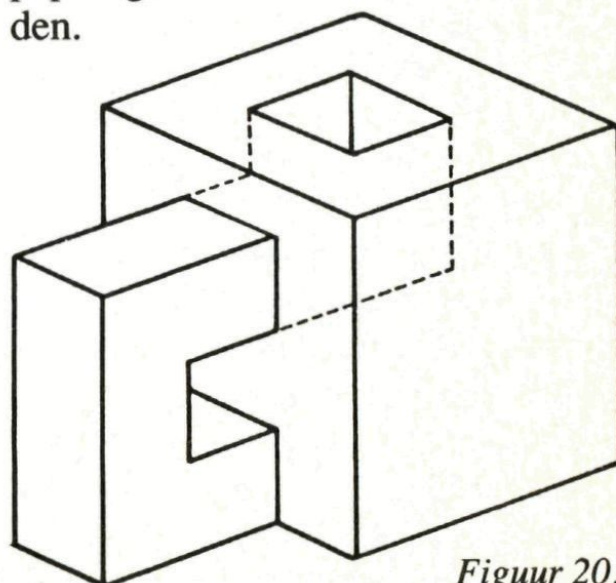


Figuur 18.



Figuur 19.

Figuur 20 ten slotte geeft ook een fles van Klein, maar nu wat hoekiger uitgevoerd, zodat hij van papier gemaakt zou kunnen worden.



Figuur 20.

Een boekenrekpuzzel

Een boekenserie, bestaande uit negen van rugnummers voorziene delen, staat in een kastje, verdeeld over twee planken. Op een keer staan ze zoals op de tekening is te zien. Een puzzelaar zal direct opmerken dat het bovenste "getal" hier juist het dubbele is van het onderste. Ofwel, met de plankrand als breukstreep $\frac{3458}{6729} = 2$. Is dit uniek, of bestaan er nog andere rangschikkingen met dezelfde eigenschap?

Probeer zelf een systeem te vinden om efficiënt te zoeken. Dus niet alle $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15.120$ variaties voor de teller elk apart delen door de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ bijpassende noemers. Met zo'n systeem is het niet al te moeilijk om alle *twaalf* oplossingen te vinden.

Drievouden

We stappen nu van de tweevouden over naar de drievouden. Is er een breuk, geschreven met de negen cijfers 1 tot en met 9, waarbij de teller het drievoud van de noemer is?

En als we hier het antwoord op hebben: welke getallen kunnen nog meer worden voorgesteld (en op hoeveel manieren) door een breuk waarin de cijfers 1 tot en met 9 elk juist éénmaal voorkomen? Het lijkt verstandig om deze vragen maar verder aan de computer over te laten. Misschien wil je er eens over nadenken hoe je dat een beetje handig zou kunnen programmeren. Het blijkt dat er voor de getallen tot en met negen steeds dergelijke breukvormen te vinden zijn (zelfs

steeds meer dan één).

Boven de negen komen er "gaten" (10 en 11 kunnen niet). En boven de 80 hoeven we helemaal niet te zoeken zolang we er niet in slagen om zes boekdelen in het bovenste vak te persen. (Waarom?)

Resultaten

In het volgende staatje (afgeleid uit door Guus Vonk verkregen computer-resultaten) geven we alleen de *aantallen* oplossingen: 2 (12) betekent dat er 12 breuken van ons soort gelijk zijn aan 2. Zie je enige regelmaat in de voorkomende uitschieters?

2 (12)	16 (3)	35 (5)
3 (2)	17 (27)	37 (1)
4 (4)	18 (1)	38 (2)
5 (12)	19 (2)	43 (1)
6 (3)	22 (1)	44 (5)
7 (7)	23 (3)	46 (1)
8 (46)	24 (2)	52 (1)
9 (3)	26 (9)	53 (4)
12 (4)	27 (4)	59 (1)
13 (4)	28 (1)	62 (2)
14 (8)	29 (2)	66 (1)
15 (2)	32 (1)	68 (1)

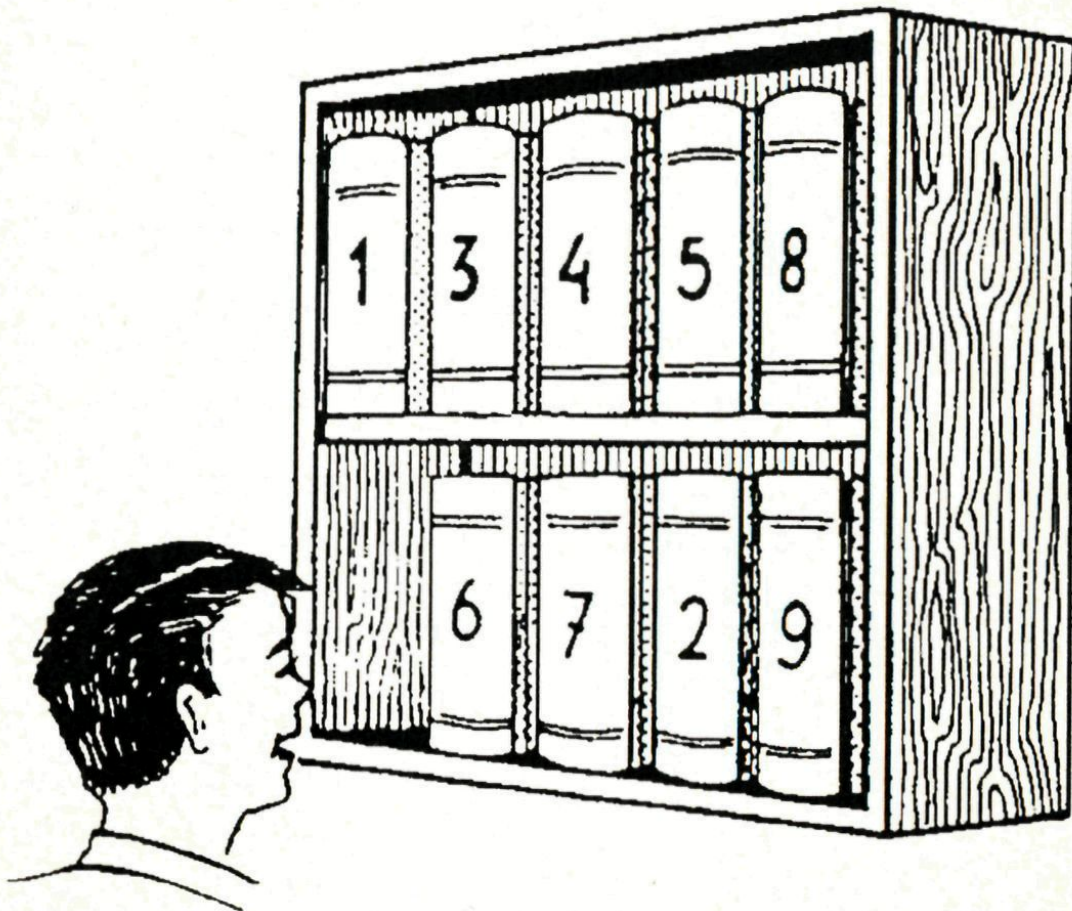
Enkele van de oplossingen zelf
vind je hieronder.

$$\begin{aligned}
 2 &= \frac{13458}{6729} = \frac{13584}{6792} = \frac{13854}{6927} = \frac{14538}{7269} = \frac{14586}{7293} = \frac{14658}{7329} = \frac{15384}{7692} = \frac{15846}{7923} = \\
 &= \frac{15846}{7923} = \frac{15864}{7932} = \frac{18534}{9267} = \frac{18546}{9273} = \frac{18654}{9327} \\
 3 &= \frac{17469}{5823} = \frac{17496}{5832}
 \end{aligned}$$

Alleen de oplossingen met de laagste teller en noemer:

$$4 = \frac{15768}{3942} ; \quad 5 = \frac{13485}{2697} ; \quad 6 = \frac{17658}{2943} ; \quad 7 = \frac{16758}{2394} ; \quad 8 = \frac{25496}{3187} ; \quad 9 = \frac{57429}{6381} .$$

De grootste breuk van dit soort met 5 cijfers in de teller is $\frac{98765}{1234} = 80,03....$



Pythagoras wiskunde tijdschrift voor jongeren

Redactie: Hans de Rijk, Henk Mulder, Henk Huysmans

Medewerkers: Popke Bakker, Gerard Bäuerle, F. van der Blij,
Niels M. Buizert, Hans Lauwerier, Hessel Pot.

Redactiesecretariaat: Hans A.F. de Rijk
Stationsstraat 114
3511 EJ Utrecht

Inhoud jaargang 30, nummer 2

De wig van Wallis en een
koffiefilter/ 1

Werken met een onbereikbaar
punt/ 4

Hoogten meten met een geometrisch
kwadrant/ 6

Gaatjes boren, moeilijker dan je
denkt/ 10

De verdraaide doos van
professor X/ 14

De sleepkromme/ 17

Het vierkleurenprobleem/ 20

De band van Möbius/ 22

Boekenrekpuzzel/ 27

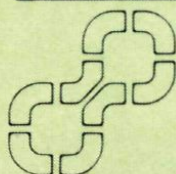
Pythagoras verschijnt zesmaal per
schooljaar; opgave van abonnementen
bij de uitgever (zie onder).

Abonnementen zijn doorlopend, tenzij
voor 1 september schriftelijk bij de
uitgever is opgezegd.

Bij tussentijdse abonnering ontvangt
men ook de reeds verschenen num-

mers. Betaling per acceptgirokaart.

Tarieven	NLG/BEF
Abonnement Pythagoras	25,-/450
Luchtpost-toeslag	10,-
Inclusief Archimedes	45,-/800
Luchtpost-toeslag	20,-
Losse nummers	5,-/ 90



stichting ivio

Postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL.)

Tel. 03200-76411

educatieve uitgeverij - instituut voor buitenschools

onderwijs - wereldschool - AO-reeks - leerprojecten

Postgiro Nederland: 287934

Postcheck België: 000-0130850-94