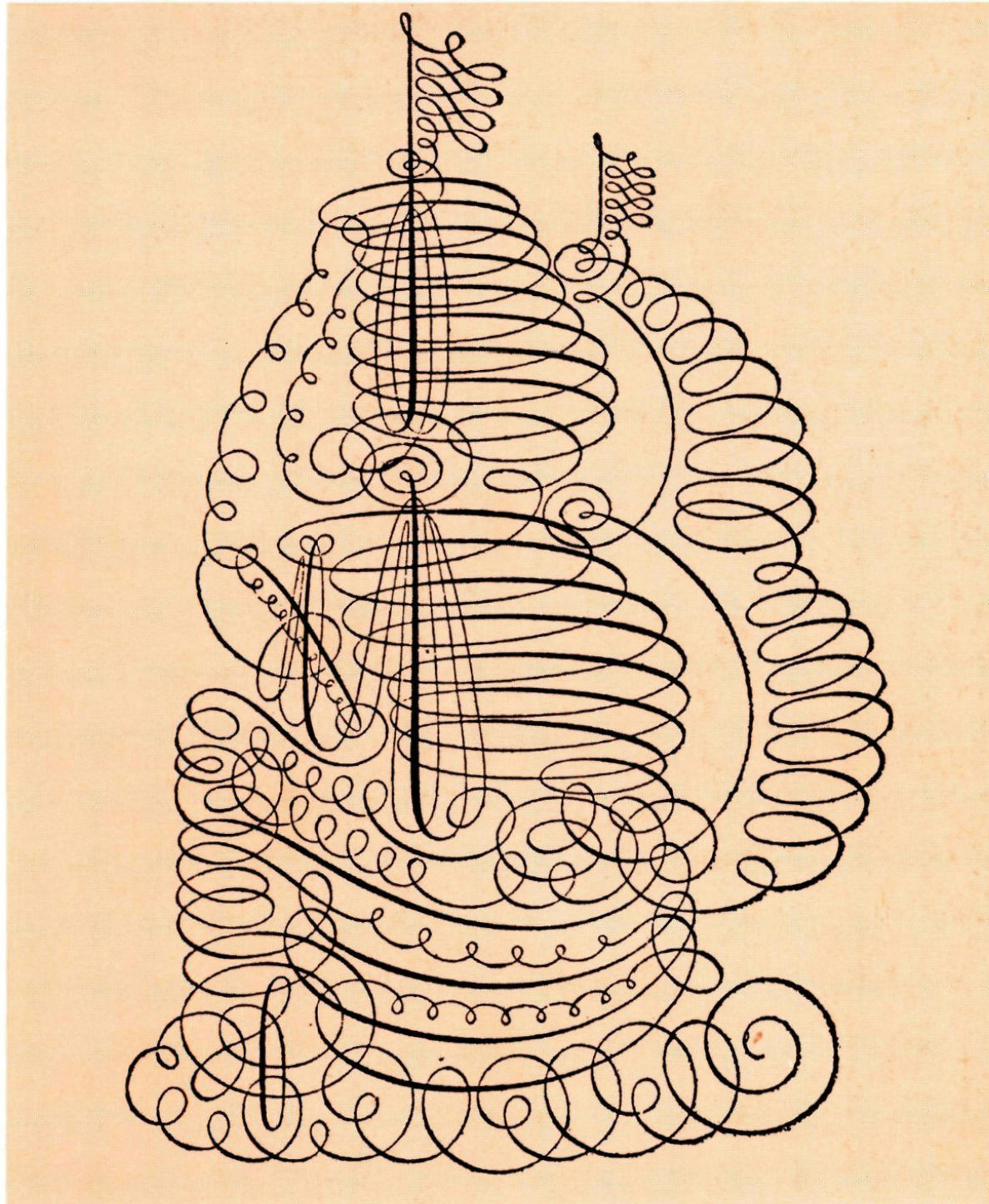




Pythagoras

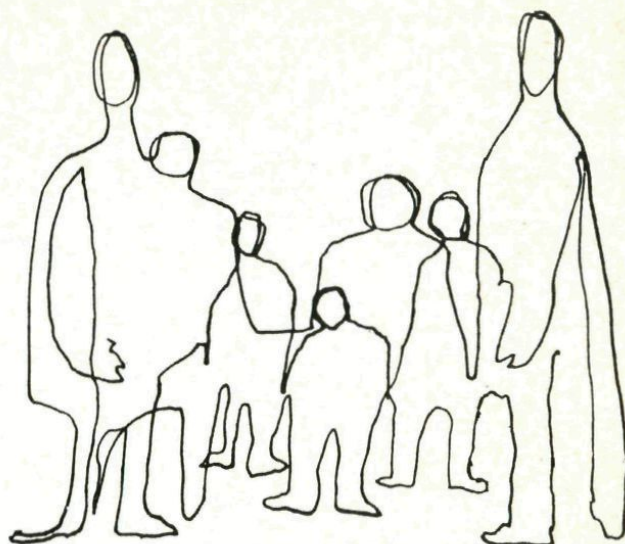


wiskunde tijdschrift voor jongeren

stichting ivio

30e jaargang
nummer 4
mei 1991

IN ÉÉN LIJN



○ Je hebt vast wel eens zo'n knappe tekenaar aan het werk gezien die iemands portret zo maar in één haal kon tekenen, zonder het potlood één keer van het papier los laten.

Op de omslag vind je van een dergelijke techniek nog een fraai voorbeeld. De Rotterdammer Jan van de Velde tekende dit schip in één haal in 1605.

Zonder er nu op te letten of de tekening artistiek is, komt de vraag op: kun je één bepaalde figuur als een lijn trekken of uit hoeveel aaneengesloten lijnen is de figuur minstens opgebouwd? Of deze lijnen nu krom of recht zijn is voor ons nu onbelangrijk.

Cirkel, vierkant, ster

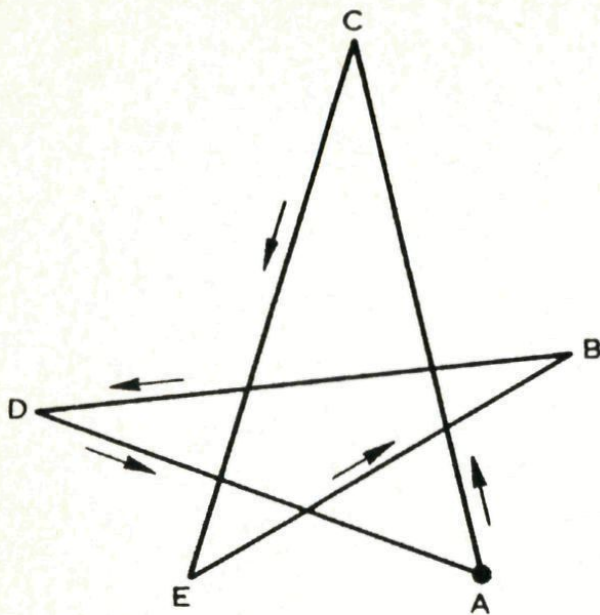
Zo kun je een cirkel in één haal trekken, maar een vierkant ook. Je slaat in een plankje 5 spijkertjes (fig. 1) en gaat met garen een 5-puntige ster spannen. Dat lukt met een doorlopende draad. Je neemt deze volgorde: ACEBDA. Het kan ook anders, maar het lukt met één draad.

We tekenen een driehoek met de 3 zwaartelijnen (fig.2). Hoeveel aaneengesloten gebroken lijnen hebben we nu nodig? Het zijn er minstens 3, bijvoorbeeld CABCF, AD en BE. Je kunt het ook anders

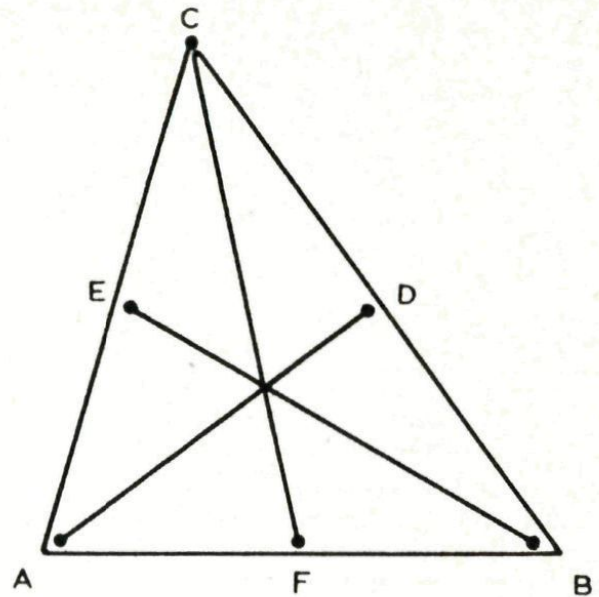
doen, maar met minder dan 3 lukt niet. Waarom eigenlijk? Is een dergelijk aantal te voorspellen?

Even en oneven punten

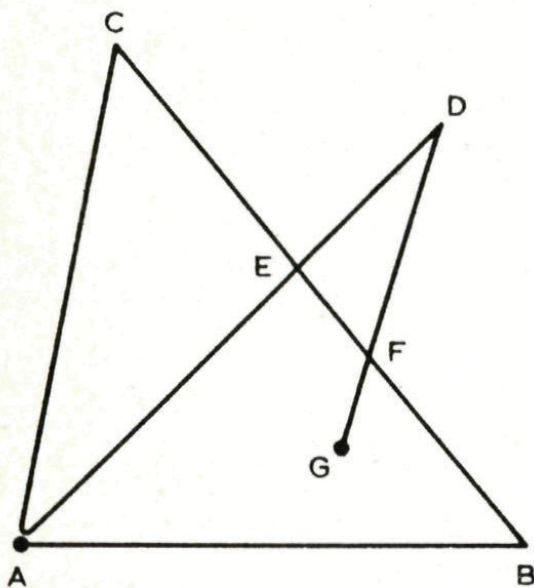
Een tekening is opgebouwd uit een aantal kromme of rechte lijnstukken waarvan de eindpunten in knooppunten bij elkaar komen. Figuur 3 is in één haal te tekenen als men tenminste bij punt A of G begint. Waarom? Bij punt G komt één lijnstuk uit; bij B, C en D 2 stuks; bij A 3 stuks; bij E en F 4 stuks. Je ziet gemakkelijk in dat de punten B, C en D geen problemen



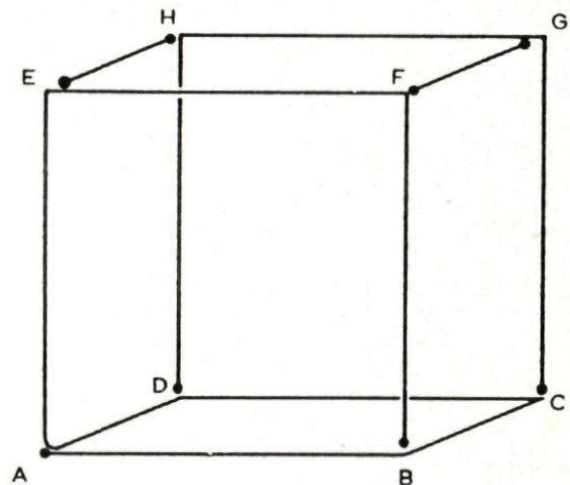
Figuur 1. 5-puntige ster met een doorlopende draad.



Figuur 2. 3-hoek met 3 zwaartelijnen uit 3 aaneengesloten stukken.



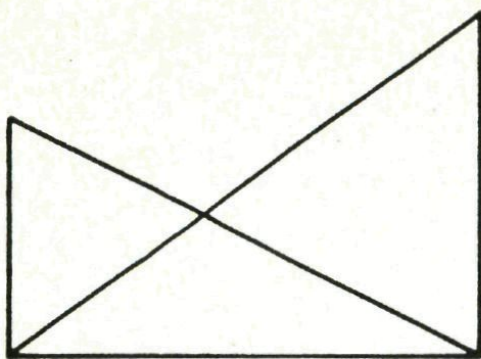
Figuur 3. In een haal tekenen.



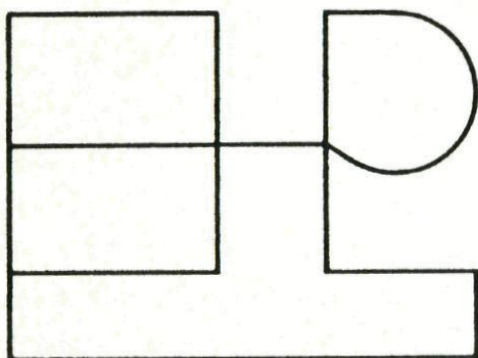
Figuur 4. Voor het maken van een kubus zijn minstens 4 draadstukken nodig.

geven. Je gaat hier gewoon verder. Als daar in de tekening gebogen lijnen waren in plaats van de aanwezige knikken dan zouden we B en C zelfs niet eens noemen. E en F geven ook geen problemen. Ook daar ga je altijd gewoon recht door. Punten waar een even aantal

lijnstukken bij elkaar komen geven eigenlijk nooit problemen. We zullen zulke punten 'even punten' noemen. Als je al tekenend een dergelijk punt kunt bereiken kun je het ook weer verlaten. De moeilijkheden komen bij A en G ('oneven punten'). Als je A als beginpunt



Figuur 5.



Figuur 6.

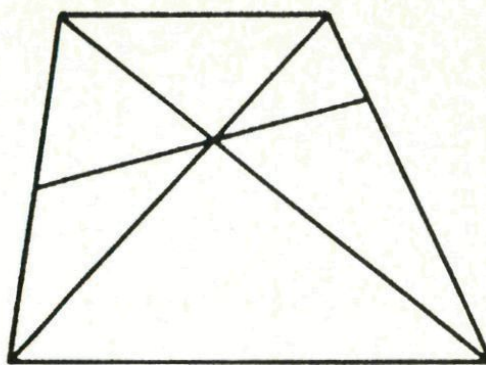
van je tekening neemt, kun je punt A nog een keer extra passeren. Je eindigt dan bij G. Je kunt natuurlijk ook bij G beginnen en bij A eindigen.

Regel

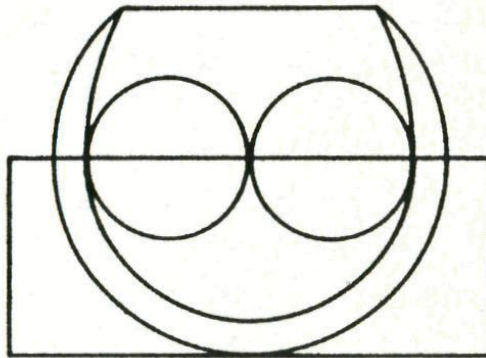
De regel is deze: zijn er in de tekening geen oneven punten dan kun je deze altijd in één haal tekenen zoals in figuur 1.

In alle andere gevallen: tel het aantal oneven hoekpunten, deel dit aantal door 2 en je hebt het aantal lijnen dat je aaneengesloten minimaal moet hebben om de figuur enkelvoudig te tekenen.

Het typische hierbij is dat het aantal oneven punten zelf altijd even is! Probeer maar eens een tekening te verzinnen met een aantal oneven punten; dus bijvoorbeeld een



Figuur 7.



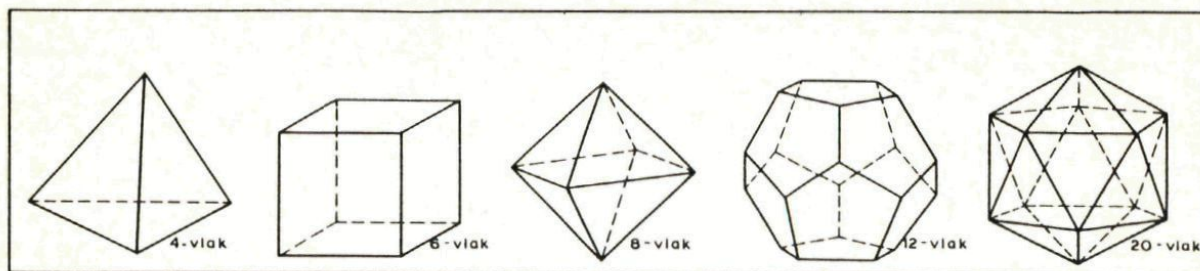
Figuur 8.

figuur met 5 punten waar telkens 3 lijnen bij elkaar komen. Tenslotte: de tekening begint of eindigt altijd bij een oneven punt; dit geldt ook voor elke afzonderlijke lijn.

En nu maar zelf proberen (tellen en tekenen). Figuur 5 kan in één lijn. Figuur 6 ook. Voor figuur 7 zijn 3 lijnen nodig en voor figuur 8 worden het er ... één! Waar moet je dan in figuur 8 beginnen?

Ruimtelijk

Hoe zit de zaak bij ruimtelijke figuren? Is het bijvoorbeeld mogelijke uit ijzerdraad een kubus te solderen gemaakt uit één doorlopende geknikte draad? Er mogen dus geen draadstukken dubbel komen. Als je het serieus probeert, zul je zien dat dit niet lukt (fig. 9). Je hebt er minstens 4 nodig, bijvoor-



Figuur 9. Regelmatige veelvlakken.

beeld aldus: ABCDAEFB, dan CGHD, vervolgens EH en nog GF. Je kunt ook anders combineren maar met minder dan 4 stuks lukt niet. De regel is precies hetzelfde. Het maakt immers niet uit of de figuur ruimtelijk of plat is. Als je een ruimtelijke figuur uit één draad zou kunnen solderen, dan zal dit

platgeslagen nog zo zijn. In de ruimtelijke figuur dien je alleen op te letten dat bijv. EF en DH elkaar niet werkelijk snijden. Een regelmatig 8-vlak (fig. 9c) kun je weer in één haal tekenen. Probeer maar. En met hoeveel het regelmatig 4-vlak, 12-vlak en 20-vlak? Als je telt, vind je 2, 10 en 6. ☐

Verdringingspuzzel

○○ Een kubus van dun blik heeft ribben van 10 cm en een tweede heeft ribben van 8 cm. Beide zijn van boven open en de wanddikte wordt als verwaarloosbaar gesteld. De grote kubus wordt nu half vol water geschonken. Vervolgens drukt men de kleine rechthoekig in de grote omlaag. Hoeveel cm^3 water is er ten slotte in de kleine kubus gelopen, als deze op de bodem van de grote staat? Oplossing: zie pagina 32. ☐

Karresporen

○○ Ergens was een weg pas geasfalteerd. Een kar was er een aantal keren overheen gereden, waarbij de ijzeren wielvelgen in de nog zachte asfaltlaag hun sporen hadden achtergelaten. Zodoende zag je een tiental evenwijdige lijnen met ogenschijnlijk vrij willekeurige onderlinge afstanden, die toch twee aan twee bij elkaar hoorden.

De vraag drong zich op:

- welke sporen horen twee aan twee bij elkaar?
- is het mogelijk uit dit patroon te bepalen de breedte van het karrespoor (afstand van linkerwiel tot rechterwiel)?
- hoe vaak is de kar minimaal gepasseerd?

We gaan dit probleem algemener stellen en dan een oplossing zoeken.

De zaak is het snelst te verkennen met enkele voorbeelden.

1. De tekening geeft een patroon van 6 evenwijdige lijnen die dus volgens een karrespoorschema

twee aan twee bij elkaar horen.

We geven de strepen aan met a, b, c, d, e, f. Het zal je niet moeilijk vallen te ontdekken dat de paren zijn (a, d), (b, e) en (c, f).



Modderplas. M.C. Escher

De breedte van het karrespoor is zodoende de afstand a-d of b-e of c-f. Voor het gemak is in de tekening langs het karrespoor een fictieve meetlat gelegd, zodat we ook de breedte van het karrespoor nu met een getal kunnen aangeven. In dit geval is dus af te lezen dat de spoorbreedte 5 is.

2. Probeer in de nu volgende tekening het antwoord op de vragen: 'welke paren en hoe groot is de spoorbreedte' eerst, zonder verder te lezen, zelf te vinden. Na enig puzzelen zul je wel ontdekken: 4 paren en wel (a, e), (b, f), (c, g) en (d, h), zodat de spoorbreedte 10 is.

Welk systeem zit hier achter? Is er meer in het algemeen iets over te zeggen?

Je zou aldus kunnen redeneren: in het laatste geval zijn er 8 lijnen, dus 4 paren. Elke lijn behoort tot een paar.

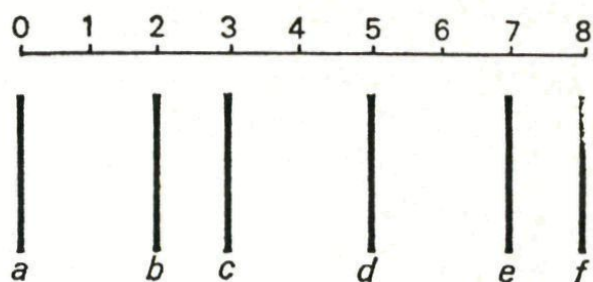
Accoord, maar het is toch ook mogelijk dat het aantal strepen oneven is: in dat geval is de kar toevallig met één wiel tweemaal door hetzelfde spoor gereden ofwel twee lijnen vallen dan samen.

3. In dit voorbeeld zijn er 5 strepen (aantal oneven). Eén spoor is dus dubbel, maar welk? Probeer eerst zelf weer de oplossing te vinden.

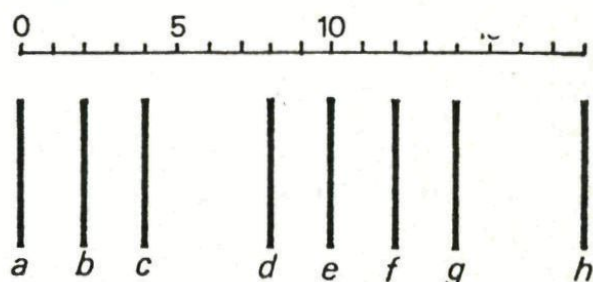
Vind je dan ook: de 3 paren zijn (a, b), (b, d) en (c, e) spoorbreedte is 3, spoor b is dubbel. Tenslotte

is het nog mogelijk dat meer antwoorden mogelijk zijn.

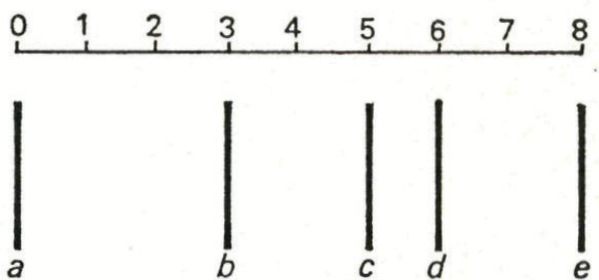
4. In voorbeeld 4 zijn de antwoorden:



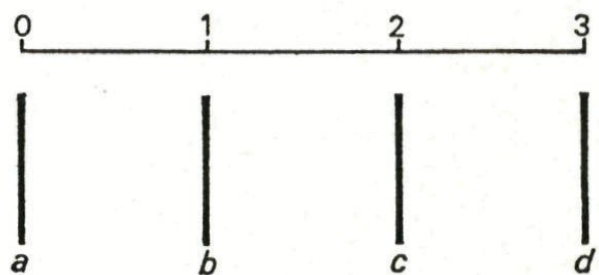
Figuur 1



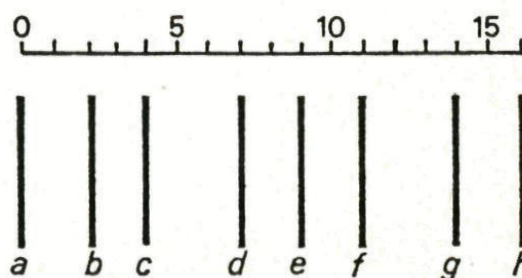
Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4



Figuur 5

paren (a, b) en (c, d) spoorbreedte 1, maar ook paren (a, b), (b, c) en (c, d) spoorbreedte 1 (dus b en c dubbel) tenslotte paren (a, c) en (b, d) spoorbreedte 2.

Systematisch

We zoeken nu naar een meer algemene aanpak van het probleem en gaan daarbij uit van een gecompliceerder voorbeeld.

5 We noteren systematisch de afstand van elke lijn tot elke andere lijn, aldus:

aa 0	ba 2	ca 4	da 7	ea 9	fa 11	ga 14	ha 16
ab 2	bb 0	cb 2	db 5	eb 7	fb 9	gb 12	hb 14
ac 4	bc 2	cc 0	dc 3	ec 5	fc 7	gc 10	hc 12
ad 7	bd 5	cd 3	dd 0	ed 2	fd 4	gd 7	hd 9
ae 9	be 7	ce 5	de 2	ee 0	fe 2	ge 5	he 7
af 11	bf 9	cf 7	df 4	ef 2	ff 0	gf 3	hf 5
ag 14	bg 12	cg 10	dg 7	eg 5	fg 3	gg 0	hg 2
ah 16	bh 14	ch 12	dh 9	eh 7	fh 5	gh 2	hh 0

Overzichtelijker kunnen we ditzelfde aldus noteren:

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	2	4	7	9	11	14	16
b	2	0	2	5	7	9	12	14
c	4	2	0	3	5	7	10	12
d	7	5	3	0	2	4	7	9
e	9	7	5	2	0	2	5	7
f	11	9	7	4	2	0	3	5
g	14	12	10	7	5	3	0	2
h	16	14	12	9	7	5	2	0

Uit dit schema blijkt dat een spoorbreedte 7 een oplossing kan zijn, omdat elke lijn minstens eenmaal een afstand 7 tot een andere lijn heeft. Voor de lijnen d en e geldt dit zelfs tweemaal. Het recept luidt dus: zoek in elk van de kolommen van de afstandstabel naar eenzelfde getal. Het eerst wordt zodoende de spoorbreedte gevonden, daarna kunnen de andere vragen opgelost worden. Hier volgen de antwoorden:

oplossing 1:

de spoorbreedte is 7

de paren zijn: (a, d), (b, e), (c, f), (d, g) en (e, h)

de sporen d en e zijn minstens eenmaal dubbel getrokken, de kar is minstens 5 keer gepasseerd (te vinden als de helft van het aantal lijnen plus het aantal dubbele lijnen). Tevens is mogelijk oplossing 2: de spoorbreedte is 2 de paren zijn: (a, b), (b, c), (d, e), (e, f), (g, h).

spoor b en e zijn dubbel, de kar is minstens 5 keer gepasseerd.

oplossing 3:

de spoorbreedte is 0; gezien het stabiliteitsprobleem van wagens kunnen we deze oplossing alleen wiskundig waarderen. Deze oplossing is altijd aanwezig. □

Kan het nog korter?

○○ Er zijn 4 punten gelegen op de hoekpunten van een vierkant. Stel je voor dat A, B, C en D huizen zijn en we willen wegen leggen om elk huis met elk ander te verbinden. De eenvoudigste oplossing lijkt het vierkant (fig. 2). Je zou ook een 'rondweg' kunnen leggen in de vorm van een cirkel door A, B, C en D (fig. 1). We willen nu proberen om een zo kort mogelijk wegennet te ontwerpen.

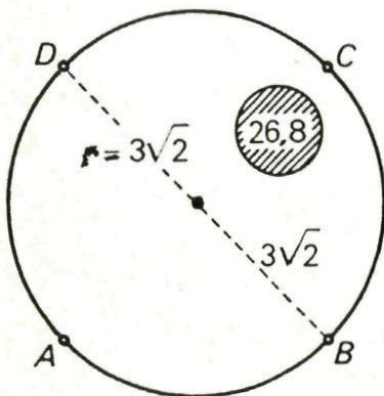
Laten we de zijde van het vierkant 6 stellen. Dat is een gunstig getal; er komen dan weinig breuken in de berekeningen. De totale weglengte in figuur 2 is dan 24. Het is direct duidelijk dat de oplossing in figuur 1 beslist slechter is. Omdat de diagonaal van het vierkant $6\sqrt{2}$ is, wordt de straal van de cirkel $3\sqrt{2}$ en de cirkelomtrek $2\pi(3\sqrt{2})$ of $6\pi\sqrt{2} = 26,8$. Het kan gemakkelijk korter. Uitgaande van het vierkant zou je een zijde weg kunnen laten zoals in figuur 3. De weglengte is nu gedaald tot 18.

Nog gunstiger is de situatie van figuur 4. Trek de beide diagonalen; totale weglengte $4 \times 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2} = 17$. En dat is alweer minder!

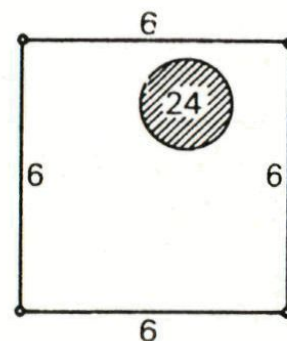
Je zou zo denken: dit is natuurlijk het beste, dat kan niet meer beter.

Korter

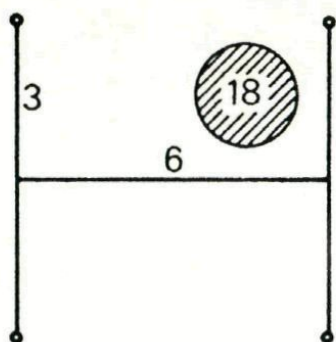
Maar het kan wel, de natuur zelf vindt het voor ons uit. We maken een kubus van ijzerdraad en dompelen die in zeepsop. Als je deze er weer uithaalt kunnen er zeepvliezen gespannen staan zoals in figuur 6. Wat is hier aan de hand? Wel, de vliezen proberen ten gevolge van de oppervlaktespanning een zo klein mogelijke oppervlakte te verkrijgen en construeren zo automatisch de gezochte verbindingen. Midden in de kubus verschijnt een klein vierkant en vandaar worden 8 trapeziumvormige vlakken gespannen naar de betreffende ribben. Bij nader bekijken blijken de hoeken met die vlakken telkens 120° te zijn. Alleen bij deze hoeken kunnen de



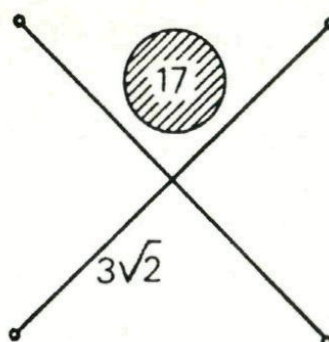
Figuur 1. Rondweg.



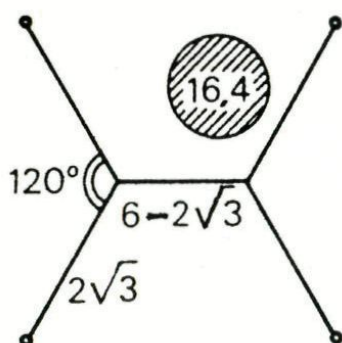
Figuur 2. Vierkantvorm.



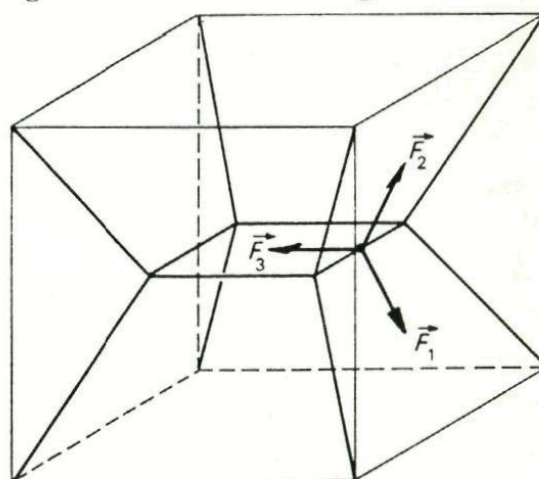
Figuur 3. H-verbinding.



Figuur 4. X-verbinding.



Figuur 5. Gemengde oplossing.



Figuur 6. Zeepvlies binnen een kubus.

oppervlakte-spanningen in de vliezen gelijk worden. In figuur 5 staan 3 gelijke krachtsvectoren telkens onder 120° die zodoende evenwicht met elkaar maken. Je kunt ook zeggen: hun somvector is nul

Ons 'kortste verbindingsprobleem' zou hier wel eens de oplossing kunnen hebben, en wel in de middendoorsnede van de kubus door het punt N .

Rekenen

We rekenen de zaak eens even na. In figuur 7 staat die situatie, waarbij hoek $MAB = 60^\circ$.

Trek de loodlijnen MP en NQ ; $MP = 3$, $AM = 2 \cdot AP$, $AP = \sqrt{3}$ en $AM = 2\sqrt{3}$. Controleer een en ander

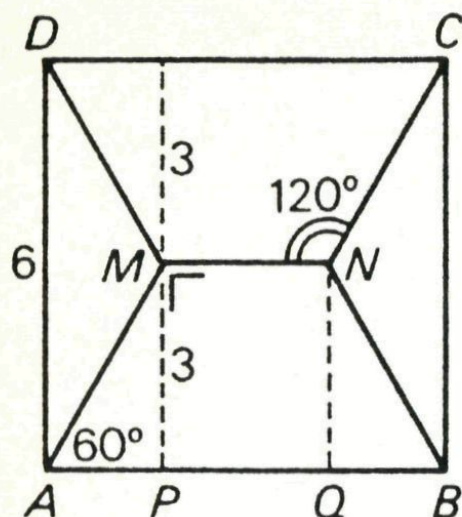
met de stelling van Pythagoras. $MN = AB - 2 \cdot AP = 6 - 2\sqrt{3}$.

De totale weglengte wordt nu:

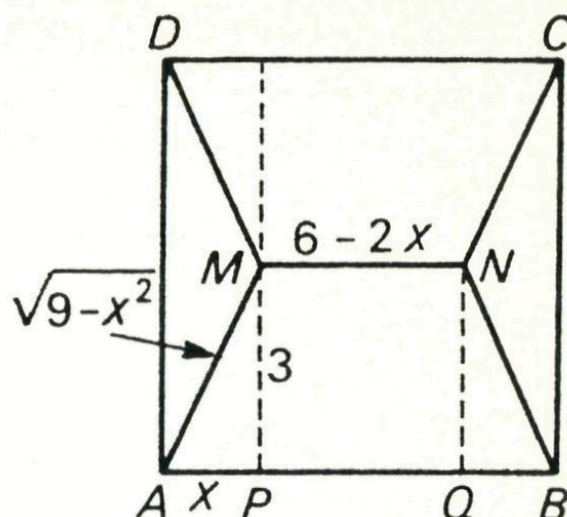
$$\begin{aligned} MN + 4 \cdot AM &= \\ (6 - 2\sqrt{3}) + 4(2\sqrt{3}) &= \\ 6 - 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3} &= \end{aligned}$$

$6 + 6\sqrt{3} = 16,4$ en dat is alweer minder dan in de vorige situatie. Maar zou dit nu werkelijk ook de kortst mogelijke zijn?

Op natuurkundige gronden zou je allang ja moeten zeggen, maar de wiskundige is nooit tevreden met wat zijn zintuigen hem zeggen. Hij wil het op zuiver theoretische grond bewezen zien. Eigenlijk is hij zelfs een beetje kwaad dat zijn ogen eerder iets hebben ontdekt dan zijn verstand.



Figuur 7. Kortste verbinding.



Figuur 8. De verbinding bij een zekere waarde van x .

Bewijs

Laten we proberen een wiskundig bewijs te vinden.

Als het lijnstuk MN eens korter of langer gekozen werd. Laten we eens iets variabel kiezen. We stellen $AP = x$. Merk op dat figuur 6 overgaat in figuur 3 als we $x = 0$ stellen en in figuur 4 als we $x = 3$ stellen.

Hiermee is tegelijkertijd het domein van de functie aangegeven $0 \leq x \leq 3$.

In figuur 8 kun je nu aflezen dat $AM = \sqrt{9 + x^2}$ en $MN = 6 - 2x$.

De totale weglengte wordt zodoende:

$$\begin{aligned} f(x) &= 6 - 2x + 4 \sqrt{9 + x^2} = \\ &= 6 - 2x + 4(9 + x^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

De afgeleide functie wordt dan:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (9 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \\ &= -2 + 4x(9 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$f(x)$ bereikt een extreme waarde als $f'(x) = 0$ dus als

$$-2 + 4x(9 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = 0$$

$$2x(9 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1$$

kwadrateren geeft:

$$4x^2(9 + x^2)^{-1} = 1$$

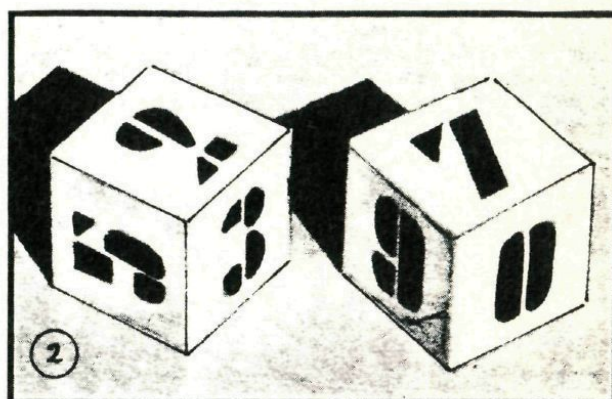
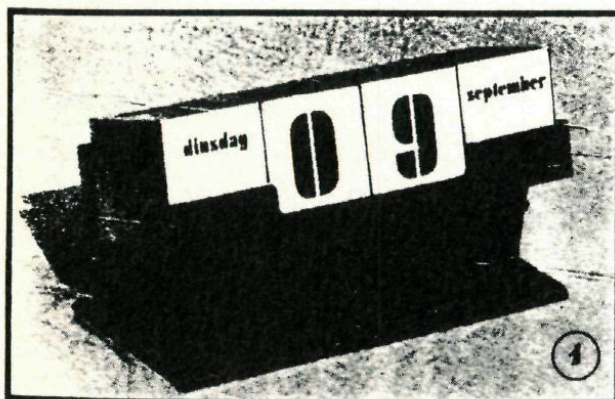
$$\text{of } \frac{4x^2}{9 + x^2} = 1 \text{ dus } 4x^2 = 9 + x^2$$

$$3x^2 = 9 \text{ dus } x^2 = 3 \text{ en } x = \sqrt{3}$$

Dit is nu juist de uitkomst die we in figuur 7 hadden ($AP = \sqrt{3}$). Als je wilt zou je hetzelfde probleem ook ruimtelijk kunnen stellen. De vraag luidt dan: hoe verbindt je de 8 hoekpunten van een kubus met vlakken zo dat hun gezamenlijke oppervlakte zo klein mogelijk wordt. De oplossing volgt natuurlijk uit de zeepvliesproef.

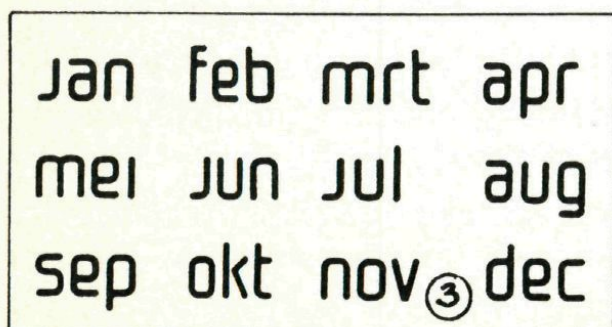
Puzzel datumblokjes

○ Een fabrikant brengt een apparaatje op de markt waarmee het gehele jaar door de juiste dag, datum en maand is aan te geven. Het bestaat uit vier kubusvormige blokjes met de dag- en maandnamen en een aantal cijfers op de zijvlakken (zie fig. 1). Een kubus (met zes zijvlakken) wordt gebruikt voor de twaalf maanden. Op elk zijvlak staan er twee waarvan er steeds een wordt afgedekt. Ook de zeven weekdays staan op één kubus. Hier gaat het ons nu om de manier waarop met de twee overige kubussen de 31 verschillende datumnummers kunnen worden gemaakt. Op elk zijvlak staat een groot cijfer, zie figuur 2. De vraag is: welke cijfers staan er op de niet-zichtbare zijvlakken van beide kubussen? Kunnen er zijvlakken ongebruikt blijven of zijn er tekort? Oplossing: zie pagina 18.



Puzzel maandblokjes

Een stuk moeilijker is het om iets soortgelijks te vinden voor de twaalf maandnamen. Als we drie kubussen gebruiken, met op elk zijvlak een grote letter zijn dan alle drie-letterafkortingen (fig. 3) moge-



lijk?

We zien al snel dat er 20 verschillende letters voorkomen en er zijn maar $3 \times 6 = 18$ zijvlakken. Als je goed kijkt zie je echter vier letterparen bij omkering in elkaar overgaan. Kan het dan toch wel?

We vragen niet naar alle eventuele oplossingen. Als je er één gevonden hebt zul je het, net als wij en een eventuele fabrikant, wel mooi vinden. Aanwijzing: begin met een frequentietabel voor de 16 symbolen; welke twee komen in aanmerking om dubbel te gebruiken?

Worteltrekken zonder worteltoets

○○ Er zijn rekenmachientjes waarmee je alleen maar kun optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Vaak ontbreekt daar de mogelijkheid voor worteltrekking.

Je zou natuurlijk wat kunnen gokken en door kwadrateren kijken in hoeverre de uitkomst bevredigend is.

Als op die manier enige decimalen van de wortel moeten worden gevonden, zijn we wel even bezig.

Er is een methode om, al is het met een paar aanslagen meer, een wortel vrij snel te benaderen en een uitkomst zelfs in 6 decimalen te vinden, zoals de duurdere apparaten ineens produceren.

Neem als voorbeeld $\sqrt{65}$.

In 7 decimalen is de benaderde waarde:

Een handige werkwijze

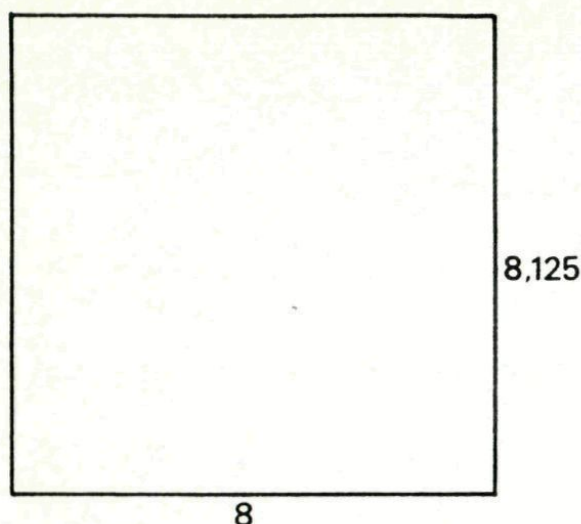
We gaan voor $\sqrt{65}$ als volgt te werk. Maak een eerste ruwe schat-



ting. Voor $\sqrt{65}$ zouden we 8 kunnen nemen. Het is duidelijk dat $\sqrt{65}$ iets meer dan 8 is, immers $8^2 = 64$. Deel nu met behulp van de rekenmachine 8 op 65. Dat geeft 8,125. Omdat $\sqrt{65} = 8$ een te lage benadering is, zal de werkelijke waarde van $\sqrt{65}$ tussen 8 en 8,125 liggen. We nemen nu als nieuwe benadering het gemiddelde van 8 en 8,125 ofwel $\frac{1}{2}(8 + 8,125) = 8,0625$. Als we kijken naar de boven vermelde uitkomst, zien we dat er al 3 decimalen goed zijn. Meestal is die benadering ruim voldoende.

Voor een volgende benadering gaan we hetzelfde proces nog eens uitvoeren. Deel 8,0625 weer op 65. Ons machientje geeft daarvoor: 8,0620155. Neem weer het gemiddelde $\frac{1}{2}(8,0625 + 8,0620155) = 8,0622575$.

Nu zijn al 6 decimalen goed! De benaderingsmethode werkt dus snel.



Figuur 1

Meetkundige verklaring

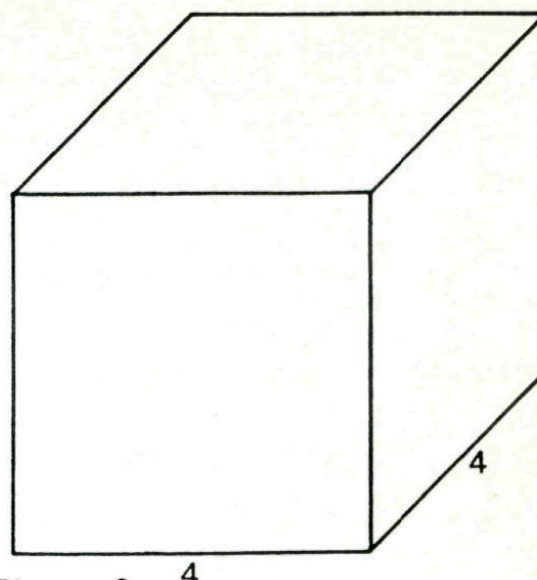
Je kunt het bepalen van $\sqrt{65}$ opvatten als het zoeken van de zijde van een vierkant met oppervlakte 65. De eerste benadering is 8. Denk nu aan een rechthoek met zijde 8 en oppervlakte 65 (fig. 1). Aan de afmetingen zie je, dat deze rechthoek geen vierkant is. De breedte is te klein en dus de lengte te groot. Het is aannemelijk dat het rekenkundig gemiddelde van die twee dicht bij de waarheid ligt. Dus nu een rechthoek met breedte 8,0625. Enzovoort.

Wil je alvast eens nadenken over de volgende twee vragen?

1. We zijn in het voorbeeld met 8 begonnen. Gaat het met elke beginwaarde goed?
2. Hoe kun je weten hoeveel decimalen er 'goed' zijn?

De derdemachtswortel

Op een dergelijke manier kun je ook $\sqrt[3]{65}$ benaderen: zoek de ribbe van de kubus met inhoud 65. Onze eerste schatting is 4, want $4^3 = 64$ ligt weer dicht in de buurt. Stel je



Figuur 2

nu een blok voor met inhoud 65, waarvan we als grondvlak een vierkant met zijden 4 nemen (fig. 2). De hoogte blijkt

$$\frac{65}{4 \times 4} = 4,0625.$$

De waarheid ligt weer ergens tussen 4 en 4,0625. Laten we ook nu weer rekenkundig middelen en wel de drie afmetingen van de balk:

$$\frac{1}{3} (4 + 4 + 4,0625) = 4,0208333$$

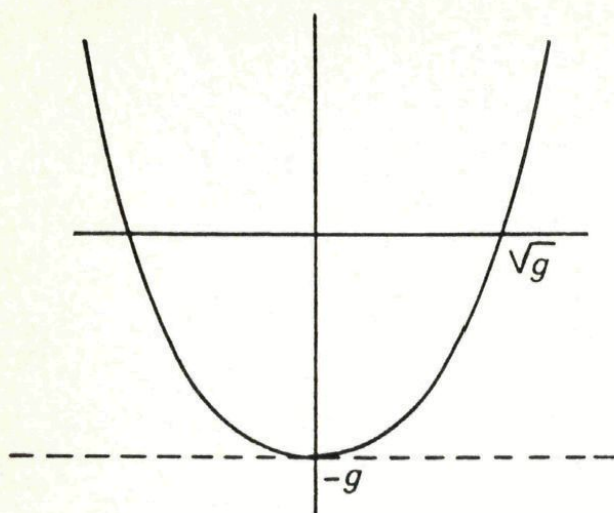
Een tweede benadering. Neem nu weer een balk met als grondvlak een vierkant met de tweede benadering als zijde en inhoud 65 en bereken de hoogte.

Enzovoort. We krijgen zo het lijstje:

4
4,0208333
4,0207256
4,0207256

Benaderingsformules

Zo langzamerhand willen we van het voorbeeldgetal 65 afstappen en wat algemener vastleggen welke wijze van berekenen we hierboven



Figuur 3

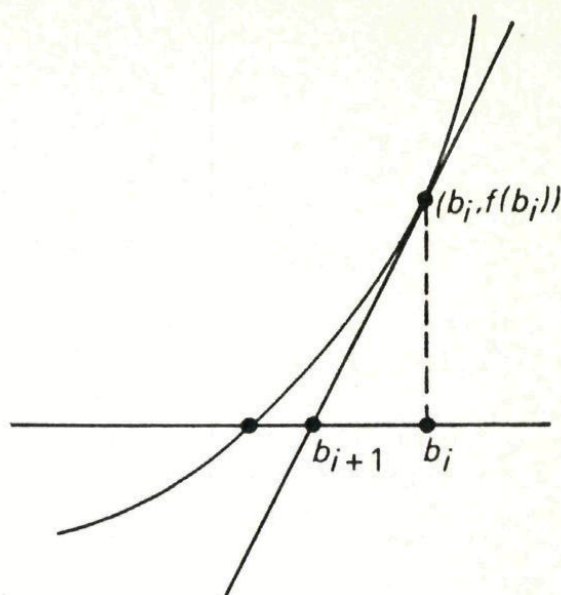
hebben toegepast. Met opzet spreken we hier niet van een berekening, maar van een rekenwijze:

- kies een beginwaarde;
- bereken een volgende benadering;
- herhaal de voorgaande regel totdat het resultaat voldoende nauwkeurig is.

Zo'n rekenwijze noemen we ook wel een *algoritme*. Deze algoritme heeft nog wat vaagheden, die eigenlijk verbeterd dienen te worden.

Wat is in het algemeen een goede beginwaarde? Hoe weten we wanneer het resultaat voldoende nauwkeurig is? Misschien heb je je over de beginwaarde al wel een mening gevormd. We gaan eerst kijken naar de tweede regel van de algoritme.

Je kunt uit het voorgaande afleiden dat voor het benaderen van $\sqrt{g}$ je een nieuwe benadering b_{i+1} berekent met behulp van de voorgaande be-



Figuur 4

nadering b_i volgens de volgende regel:

$$b_{i+1} = \frac{b_i + \frac{g}{b_i}}{2}$$

Wat ook geschreven kan worden als:

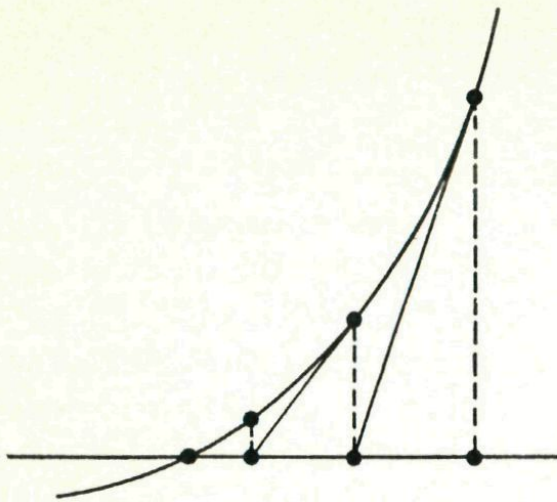
$$b_{i+1} = b_i - \frac{b_i^2 - g}{2b_i}$$

Aan de laatste formule kunnen we goed zien wat van b_i moet worden afgetrokken om b_{i+1} te krijgen. Deze verandering wordt kleiner naarmate $b_i^2 - g$ kleiner wordt, dus als b_i dichter bij $\sqrt{g}$ komt. En dat verbaast ons niet.

Op dezelfde wijze kunnen we een regel opstellen voor het benaderen van $\sqrt[3]{g}$ (probeer dat eens):

$$b_{i+1} = b_i - \frac{b_i^3 - g}{3b_i^2}$$

Voor de vierdemachtswortel, hoewel we daarbij geen meetkundige voorstelling kunnen maken, kom je op dezelfde manier redenerend op:



Figuur 5

$$\sqrt[4]{g} \quad b_{i+1} = b_i - \frac{b_i^4 - g}{4b_i^3}$$

Zou je nu de regel voor bijvoorbeeld de zevendemachtswortel durven opschrijven?

Afgeleide functie

○○○ Als je het begrip differentiëren al kent, geeft het volgende stukje van dit artikel voor jou een andere verklaring van de verkregen formules. Je hebt aan de voorkomende breuken misschien al gezien dat de noemer te maken geeft met de afgeleide van iets wat in de teller staat.

Netter geformuleerd:

$$b_{i+1} = b_i - \frac{f(b_i)}{f'(b_i)}$$

De functie f is voor het benaderen van $\sqrt[4]{g}$ gedefinieerd als $f: x \rightarrow x^4 - g$. Je kent de grafiek van deze functie (fig. 3).

We komen hierin $\sqrt[4]{g}$ weer tegen

als ordinaat van een punt waar de grafiek de X-as snijdt. Het benaderen van $\sqrt[4]{g}$ komt dus overeen met het benaderen van de positieve nulwaarde van f .

Andere methode

De wiskundige Euler bedacht voor het benaderen van een nulwaarde de volgende methode. Neem een benadering b_i .

Vervang nu de grafiek door de raaklijn in het punt $(b_i, f(b_i))$ en bereken het snijpunt van deze rechte met de X-as (fig. 4). Dat laatste gaat altijd gemakkelijk als we de vergelijking van de rechte maar hebben. Welnu, we weten de richtingscoëfficiënt: $f'(b_i)$. We krijgen:

Je controleert gemakkelijk dat

$y - f(b_i) = f'(b_i) \times (x - b_i)$
 $(b_i, f(b_i))$ op deze rechte ligt. We willen nu ook dat $(b_{i+1}, 0)$ hierop ligt dus

$$-f(b_i) = f'(b_i) \times (b_{i+1} - b_i)$$

Als $f'(b_i) \neq 0$ kan dit worden herleid tot

Een bekende regel. Door de proce-

$$b_{i+1} = b_i - \frac{f(b_i)}{f'(b_i)}$$

dure te herhalen krijgen we achtereenvolgende benaderingen (fig. 5). Uit de voorwaarde $f'(b_i) = 0$ zien we ook gelijk een gevaar van de methode: als voor $x = b_i$ de grafiek een horizontale raaklijn heeft gaat het fout. Zo mogen we voor het benaderen van $\sqrt[4]{g}$ nooit nul als beginwaarde nemen, (zie stippellijn in fig. 3).

Bissectrice, lijn van eerlijk delen

○○ Men heeft geprobeerd het gebied van de Noordzee eerlijk te verdelen tussen de naburige landen Engeland, België, Nederland, Duitsland en Denemarken. Dit is gelukt door een aantal deellijnen of bissectrices te trekken, die gevonden worden door de verzameling van middelpunten van cirkels te bepalen, die raken aan de betreffende kustlijnen. In dit artikel willen we bezien hoe dergelijke deellijnen lopen in het geval van eenvoudige kustvormen, zoals lijn en cirkel. In het geval van twee rechte lijnen is de uitkomst wel bekend. De bissectrice wordt daar een rechte (fig. 1). We gaan nu een aantal situaties na, waar de bissectrice een ellips, een hyperbool of parabool gaat worden.

Ellips als snavelbissectrice

In figuur 2 is de bissectrice getekend van een gebied binnen een cirkel en buiten een andere. De snavelbissectrice krijgt hier de vorm van een ellips. Dit volgt uit de definitie ervan. Stel F_1 het middelpunt van de eerste cirkel, F_2 dat van de tweede en P het middelpunt van een cirkel die aan beide raakt. Als de stralen dan respectievelijk R_1 , R_2 en r zijn, geldt zoals in de figuur is af te lezen:

bissectrice

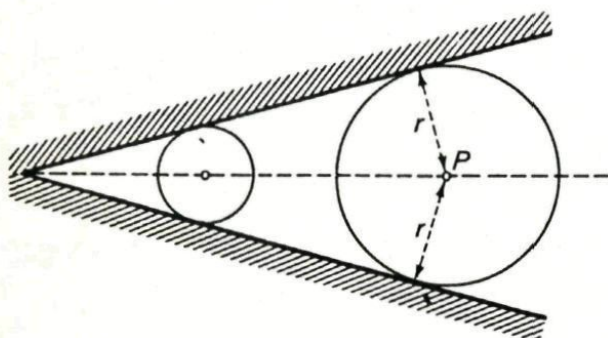
$$\left. \begin{array}{l} F_1P = R_1 + r \\ \text{en } F_2P = R_2 - r \end{array} \right\} \text{ dus } F_1P + F_2P = R_1 + R_2$$

Dus voor elk van de middelpunten P van de dergelijke rakende cirkel geldt: $F_1P + F_2P = \text{constant}$.

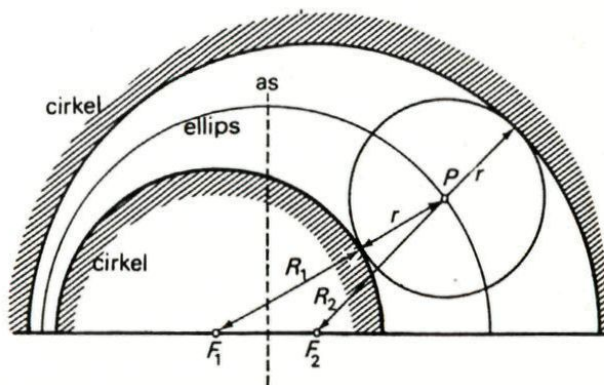
Dan is de verzameling van middelpunten een ellips, waarvan F_1 en F_2 de brandpunten zijn.

Definitie van ellips, hyperbool en parabool

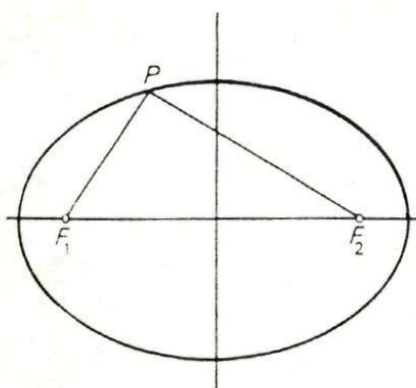
Een ellips is gedefinieerd als een



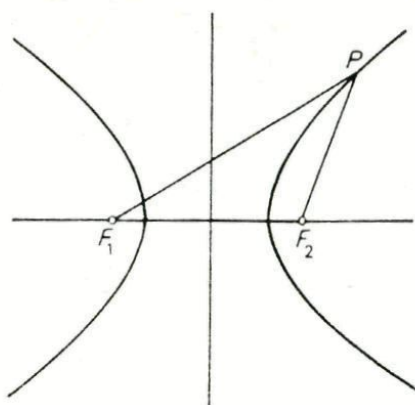
Figuur 1. Bissectrice als deellijn van een gebied begrensd door twee rechten.



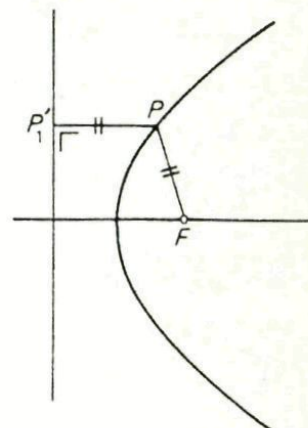
Figuur 2. Ellips als snavelbissectrice.



Figuur 3a. Ellips.
 $PF_1 + PF_2$ is constant.



Figuur 3b. Hyperbool.
 $PF_1 - PF_2$ is constant.



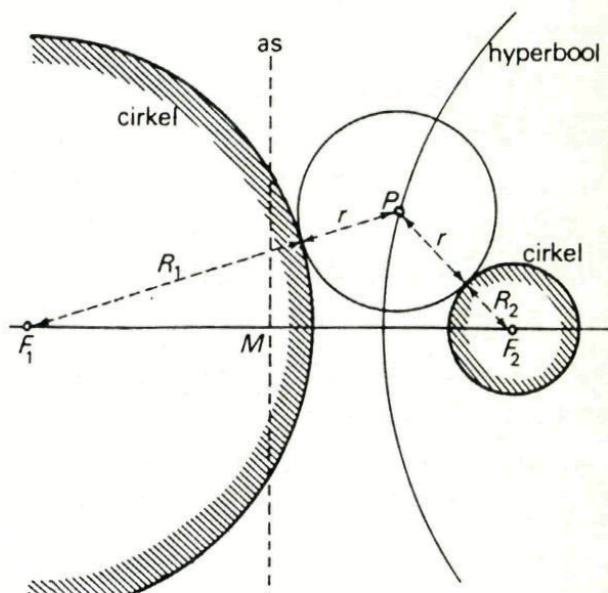
Figuur 3c. Parabool.
 $PF = PP$.

verzameling van punten P , waarbij de som van de beide afstanden van zo'n punt tot twee vaste punten (de zogenaamde brandpunten) constant is (fig. 3a).

Zo is de hyperbool gedefinieerd als de verzameling van dergelijke punten, waarbij het verschil van die beide afstanden constant is (fig. 3b). Ten slotte is de parabool de verzameling punten waarbij de afstand van een dergelijke punt tot een vaste lijn (de richtlijn) steeds gelijk is aan de afstand tot een vast punt (het brandpunt). Dat staat getekend in figuur 3c. Niet alleen de ellips komt als bissectrice voor, maar ook de hyperbool en de parabool.

Hyperbool als bissectrice

In figuur 4 is getekend hoe het gebied buiten twee cirkels 'eerlijk' verdeeld kan worden. Stel dat P weer het middelpunt is van een cirkel die aan beide bovengenoemde cirkels raakt, dan geldt:

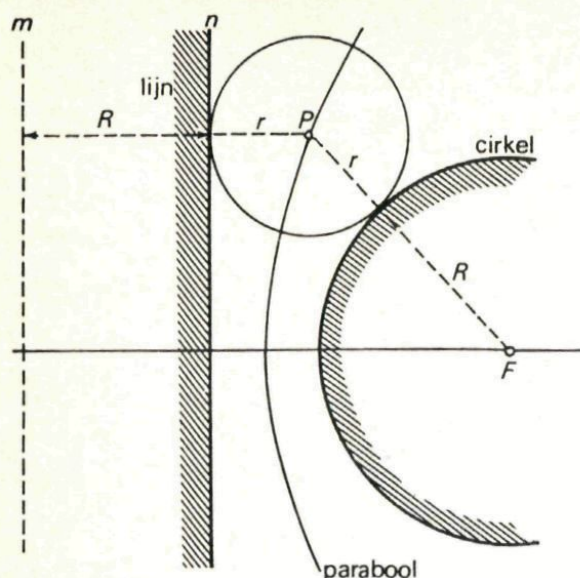


Figuur 4. Hyperbool als bissectrice.

$$\left. \begin{aligned} F_1P &= R_1 + r \\ \text{en } F_2P &= R_2 + r \end{aligned} \right\} \text{ dus } F_1P - F_2P = R_1 - R_2$$
 Aldus geldt voor elk van de middelpunten P van zo'n rakende cirkel: $F_1P - F_2P = R_1 - R_2$ ofwel constant. Dan is deze verzameling middelpunten een tak van een hyperbool, waarbij F_1 en F_2 de brandpunten zijn.

Parabool als bissectrice

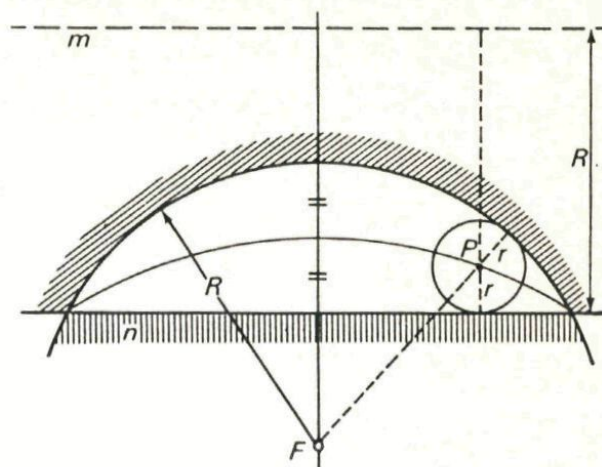
In figuur 5a is het gebied tussen een lijn n en een cirkel (met middelpunt F en straal R) eerlijk ver-



Figuur 5a. Parabool als bissectrice.

deeld. De verzameling middelpunten van rakende cirkels wordt hier een parabool. Het bewijs loopt als volgt.

Trek een lijn door F loodrecht op n en een lijn m , evenwijdig aan n op een afstand R . In de figuur is nu af te lezen dat de afstand van P tot de lijn m gelijk is aan de afstand van P tot het punt F en wel $R + r$. Dus wordt de verzameling een parabool met F als brandpunt en m als richt-



Figuur 5b. Parabool als bissectrice.

lijn.

Ook als we, zoals in figuur 5b getekend is, een binnengebied, begrensd door een cirkel en een lijn, willen halveren, wordt de bissectrice een parabool. Trek, om dat te bewijzen, weer een lijn m evenwijdig aan n op een afstand R . In de figuur is dan weer af te lezen dat de afstand van P tot m even groot is als de afstand van P tot F en wel $R - r$ □

Oplossing: Puzzel datumblokjes

Alle zijvlakken zijn precies nodig. De 6 en de 9 worden door hetzelfde symbool voorgesteld. Op beide blokjes moeten voorkomen 0, 1 en 2, de plaatsing van de andere symbolen doet er niet toe. In figuur 2 staan dus op de linker blokje nog 0, 1 en 4 (of 8) en op het rechter nog 1, 2 en 8 (of 4).

Bij de maandblokjes is het symbool n/u dubbel nodig (voor juni).

Verder blijkt een enkele a/e al snel vast te lopen, dus het symbool a/e moet zeker ook dubbel. Verdelingen met n/u en a/e op dezelfde twee blokjes lopen ook vast. Na wat zoekwerk blijken er toch wel oplossingen mogelijk. Bijvoorbeeld:
 blokje 1: a/e b, c, k, j/r , v;
 blokje 2: a/e , g, m, o, s, n/u ;
 blokje 3: d/p, f, i, l, n/u , t. □

Anders dan anders

○ Artikelen worden vaak verpakt in dozen die in de wiskunde een blok heten. Zo worden schoenen en sigaren verhandeld, koekjes en bonbons. In het geval van de doos bonbons doet men er meestal nog een fraai papiertje omheen en vervolgens een gekleurd lint.

Meestal gaat dat op de manier van figuur 1a, gewoon van midden tot midden, loodrecht over de ribben van het blok. Dat is wel de eenvoudigste methode. Maar het kan ook anders, zoals in figuur 1b. Dat is een stuk artistieker, maar het roept tegelijkertijd bij een wiskundige wel een heleboel vragen op.

hoe wikkel je dat precies?

glijdt het lint er zo niet gemakkelijk af?

zijn er meer mogelijkheden?

kost deze wijze misschien minder lint?

is er een geval mogelijk met minimale lengte?

lopen de lindelen hier en daar evenwijdig?

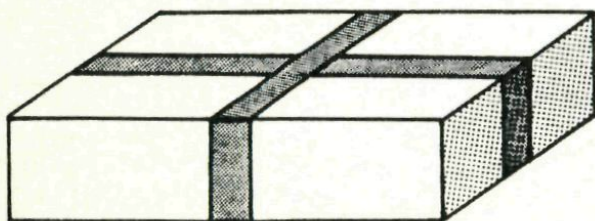
is er symmetrie?

lukt deze methode bij willekeurige afmetingen?

Vooraf stellen we dat er bij de doosranden geen wrijvingskrachten werken. Een direct gevolg daarvan is dat de spanning in het lint overal gelijk is. Als we deze veronderstelling niet maken is er aan het probleem weinig zinnig te werken. Denk maar dat je het lint aan de randen vastplakt; in dat geval is vrijwel van alles mogelijk. Het is zoals bij voetballen: door het stellen van een spelregel wordt de zaak duidelijk.

Anders dan anders

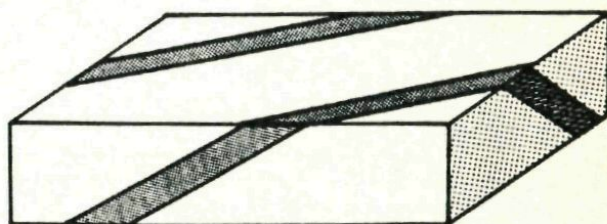
In figuur 2 staat nader getekend hoe het lint om de doos zit. Het vormt een ruimtelijke 8-hoek. Om beurten worden van de zijvlak-



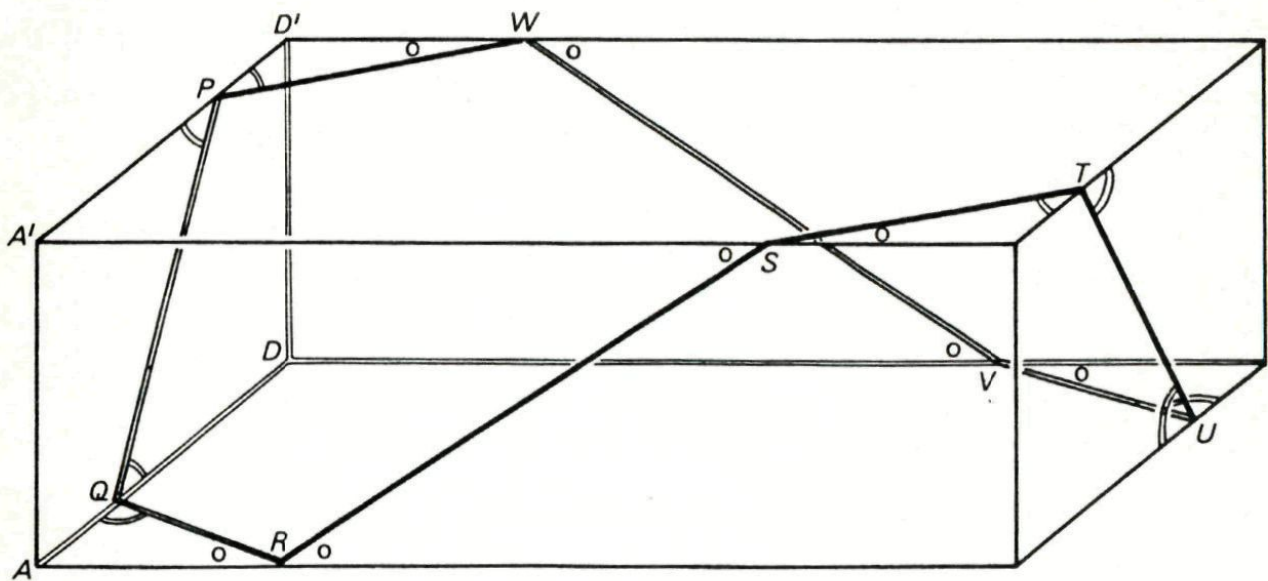
normaal

Figuur 1a. Inpakken van een doos.

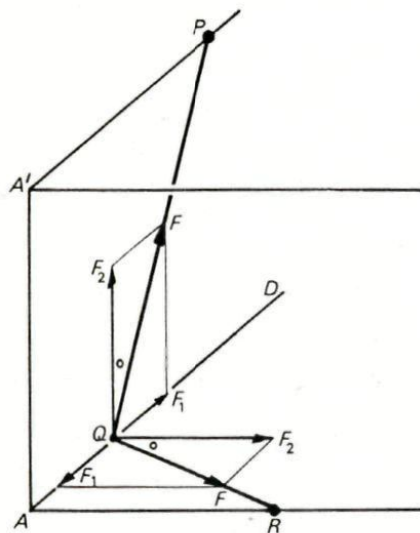
ken van het blok rechthoekige trapezia en rechthoekige driehoeken afgesneden. Hoe passeert het lint eigenlijk een ribbe? In figuur 3a staat de situatie bij 2 opvolgende lintstukken zoals PQ en QR . Stel dat je een elastiekje zou spannen van P naar R , hoe zou dat dan gaan staan? Waar komt dan het punt Q ?



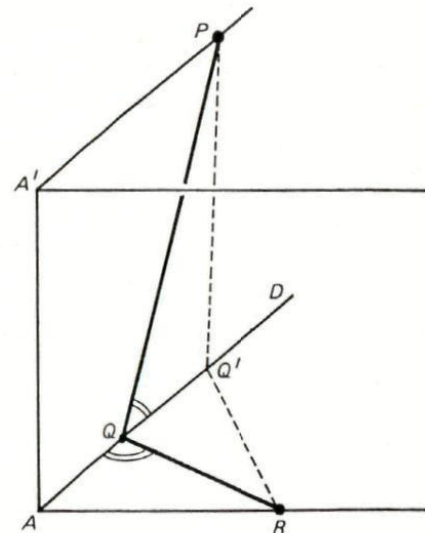
Anders dan anders



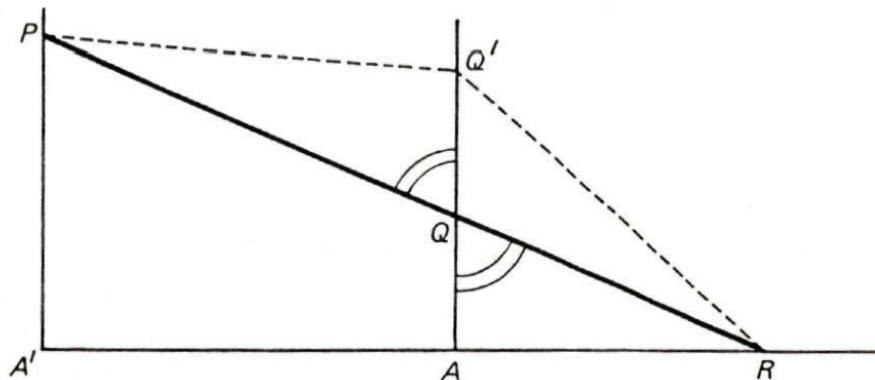
Figuur 2. Doos met omspannend lint.



Figuur 3a. De spanningen in PQ en QR zijn gelijk.



Figuur 3b. PQ en QR maken gelijke hoeken met de ribbe.



Figuur 3c. In de uitslag wordt PQR een rechte.

Je zou het kunnen onderzoeken met fysische middelen. De kracht in het stuk PQ moet gelijk zijn aan die in het stuk QR . Ontbind nu beide krachtsvectoren met grootte F in één vector F_1 in de richting van ribbe AD en één vector F_2 loodrecht op AD . Als er nu geen wrijving langs de ribbe werkt, moeten de beide vectoren F_1 even groot en tegengesteld zijn. Maar dat betekent dat PQ en QR gelijke hoeken maken met ribbe AD (fig. 3b).

Hetzelfde resultaat kun je ook vinden met een meer wiskundige redenering. Je kunt stellen dat het punt Q zo gelegen moet zijn dat de totale lente van $PQ + QR$ zo klein mogelijk wordt. Klap nu vlak $AA'PQ$ in het verlengde van het grondvlak AQR . Als lijn PQR zo kort mogelijk moet worden, zal het geen gebroken lijn zoals $PQ'R$ moeten zijn, maar een rechte zoals PQR . Omdat overstaande hoeken dan gelijk worden, zal hoek PQD even groot zijn als hoek AQR .

Hoe nu verder?

○○ Deze eigenschap van gelijkheid van hoeken geldt nu bij het passen van elke ribbe. Wat dat betekent zie je in figuur 2. Je treft hier nog twee verschillende hoeken aan die elkaars complement zijn. Deze hoeken zijn aangegeven met $(($ en o . Dit heeft onder andere tot gevolg dat het lint bodem en deksel van de doos passeert volgens paren even-

wijdige lijnen.

Hoe gaat het lint precies de doos rond? Je zou dat het beste kunnen bestuderen in een uitslag. In figuur 4 staat de uitslag van een doos met maten a , b en c . In de uitslag is de loop van het lint getekend en we zijn met de uitslag net zo lang doorgegaan tot het lint rond is. Het lint wordt dan een doorlopende rechte lijn.

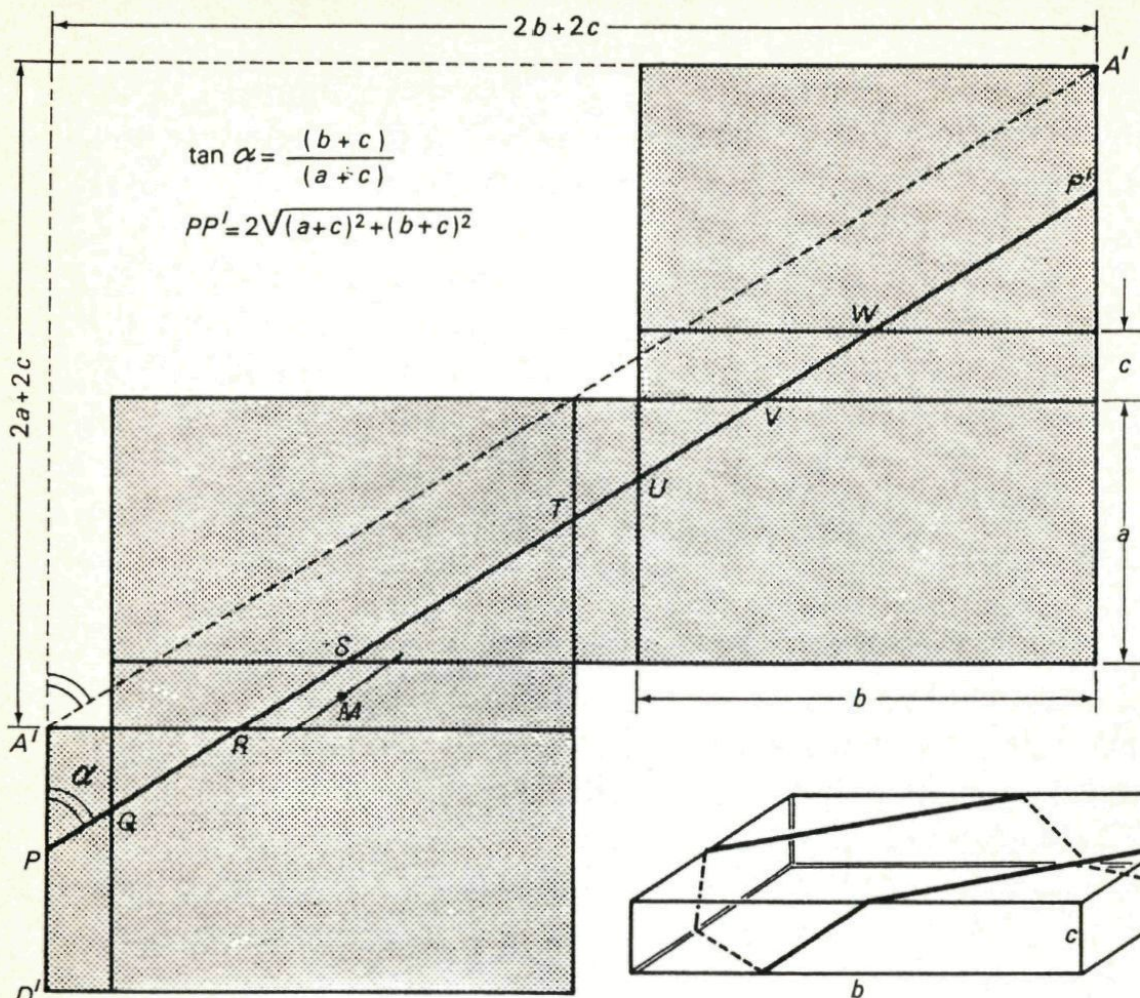
Een spannende vraag wordt dan: als we volgens deze spelregel met het lint de doos rondgaan, komen we dan wel op ons vertrekpunt P terug? Of wat is de voorwaarde daarvoor?

Wel, als we inderdaad rond willen komen, moet het beginpunt van ge-noemde rechte samen vallen met het eindpunt. Dat betekent dat de afstand van P tot A even groot moet zijn als van P' tot A' . Maar dat betekent weer dat de lijn $PQRSTUVWP'$ in een bepaalde richting de uitslag moet kruisen. Verder kun je zien dat het lint van-uit die stand evenwijdig opgescho-ven kan worden en dat daarbij de totale lengte gelijk blijft.

We schuiven het lint nu naar die gestippelde stand $A'A'$. De hoek α die de lijn maakt met de ribbe $A'D'$ volgt uit:

$$\tan \alpha = \frac{b + c}{a + c}$$

Als het lint dus onder deze hoek de ribbe passeert, is het mogelijk rond te komen en op het uitgangspunt terug te keren.



Figuur 4. Uitslag van een doos met omspannend lint.

De totale lengte

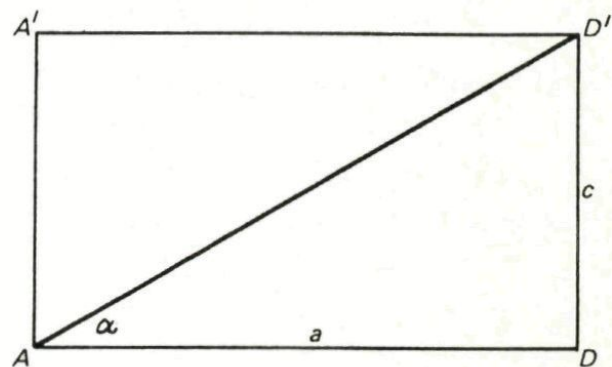
In dezelfde figuur kun je nu ook gemakkelijk de totale lengte van het lint aflezen. Die is dan altijd bij een bepaalde doos hetzelfde.

Uit de stelling van Pythagoras volgt:

$$PP' = 2\sqrt{(a+c)^2 + (b+c)^2}$$

Bij het passeren van bodem en deksel worden paren congruente driehoeken afgesneden, hetgeen rotatiesymmetrie veroorzaakt.

De beste manier om het lint om de doos te leggen is die waarbij het lint middens van zijvlakken passeert zoals punt M in figuur 4. In dat geval worden alle 4 de afgesneden driehoeken congruent. Die situatie stond juist in figuur 2.

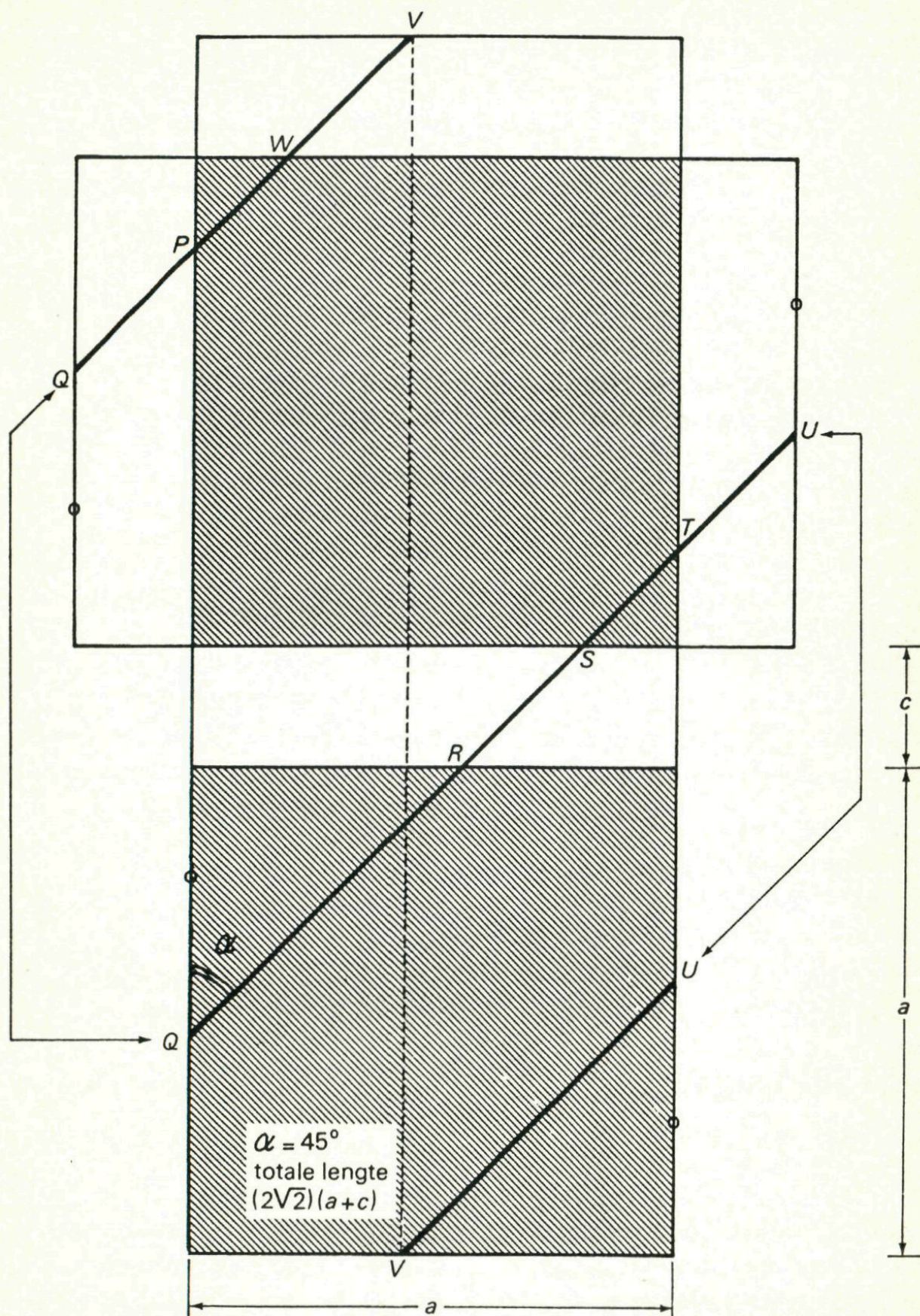


Figuur 5. Uiterste stand voor het lint.

Een voorwaarde

Je zou de vraag kunnen stellen: is er altijd wel een dergelijke wikkelmogelijkheid aanwezig?

Een uiterste stand voor het lint, in zoverre dit het zijvlak $ADD'A'$ passeert, staat getekend in figuur 5.



Figuur 6. Uitslag van een vierkante doos.

Een uiterste waarde voor hoek α volgt uit: $\tan \alpha = c/a$. In werkelijkheid moet het lint dus steiler passeren, ofwel $\tan \alpha > c/a$.

Maar omdat $\tan \alpha = \frac{b+c}{a+c}$ volgt voor realisatie van de omwikkeling:

$$\frac{b+c}{a+c} > \frac{c}{a} \quad \text{ofwel} \quad a(b+c) > c(a+c)$$

$$ab + ac > ac + c^2$$

$$\text{ofwel} \quad ab > c^2$$

en dat is dan de voorwaarde.

Voor platte dozen waar c voldoende klein is, zijn er geen moeilijkheden. Maar voor een geval zoals bij $a = 9$, $b = 25$ en $c = 15$ zitten we juist aan de grens. Het lint zou dan telkens precies over hoekpunten moeten lopen. Ook bij een kubus zou zulks het geval worden.

Maar dozen worden meestal zo gemaakt dat de hoogte beduidend kleiner is dan de beide andere maten.

Vierkante dozen

Bekijk eens het bijzondere geval van een vierkante doos, waarbij dus geldt: $a = b$. Zo'n uitslag staat in figuur 6. Daarbij wordt

$$\tan \alpha = \frac{a+c}{a+c} = 1 \quad \text{dus} \quad \alpha = 45^\circ.$$

In dit geval wordt de totale lintlengte $(2\sqrt{2})(a+c)$. Nu lopen ook de lijnen boven en onder evenwijdig aan de diagonalen. Dat is in het algemeen echter niet het geval. In figuur 4 is het duidelijk te zien. Overigens, bij erg platte dozen, waarbij $c \ll a$ en $c \ll b$, volgt uit dezelfde figuur 4 dat dan $\tan \alpha$ ongeveer gelijk wordt aan b/a en dan loopt het lint toch ongeveer evenwijdig met een diagonaal boven of onder.

Duur of goedkoop?

Ten slotte deze vraag: spaart deze wijze van omwikkelen materiaal uit of juist niet?

Bekijk het geval van de vierkante doos. De totale lintlengte wordt daar $(2\sqrt{2})(a+c)$; bij de normale manier van figuur 1a wordt dat $4a + 4c$ of $4(a+c)$. Dat scheelt in verhouding $\sqrt{2} : 2$ of $1,42 : 2$ of $0,7 : 1$.

De 'anders dan anders' methode geeft zodoende 30% besparing. Het is dus niet alleen artistieker maar ook nog voordeliger! ☐

Handig wegstrepen

$$\frac{16}{64} = \frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$$

1. Ga na dat de ongebruikelijke manier van 'wegstrepen' in het bovenstaande voorbeeld toch het goede antwoord geeft. Bij welke breuken (met zowel teller als noemer < 100) geeft dit diagonaal

wegstrepen nog meer een correct resultaat?

$$\frac{166666}{666664} = \frac{1\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}}{\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$$

2. Ook een herhaalde 6 in teller en noemer blijkt weggestreept te mogen worden. Geldt dit voor elk aantal zessen? En geldt het ook bij de andere in de vorige vraag gevonden breuken? ☐

De verkortingsrij

○○ Wie een serie bomen langs een weg in perspectief ziet, kan constateren, dat de afstanden tussen deze bomen kleiner worden, naarmate ze verder weg staan. Hetzelfde zien we bij cementlagen in tegelmuren, biels bij spoorrails, spijlen van hekken, ramen in flatblokken en randen van treden, zoals bij de afbeelding van de trap.

In werkelijkheid staan de bomen en liggen de treden even ver van elkaar; door perspectief werking zien we de afstanden steeds korter. Er dringen zich bij het zien van een dergelijke afbeelding direct een aantal vragen op, meetkundige en algebraïsche ofwel constructieve en rekenkundige.

Meetkundige constructie

Stel, dat we een aantal verticale palen a, b, c , enz. hebben, zoals in figuur 1. Alle palen zijn even groot en staan op gelijke afstanden van elkaar.

In figuur 2 zien we, hoe ze in een perspectivische figuur afgebeeld worden. De rechthoeken in figuur 1 zijn in figuur 2 trapezia geworden. Het is niet de bedoeling om in dit artikel de theorie van de perspectivische afbeelding te gaan bespreken, maar een paar feiten, die je uit ervaring wel kent (je ziet ze in tekeningen en foto's) willen

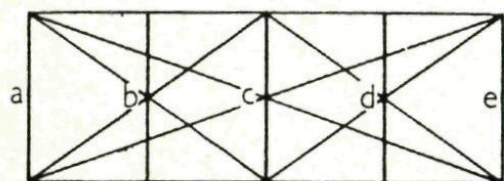
we vermelden:

a. Verticale lijnen worden als verticale lijnen afgebeeld.

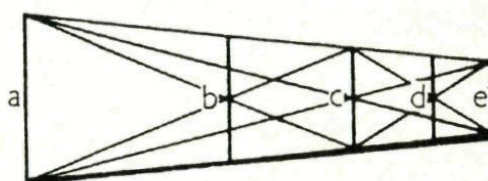
b. Wanneer een verticale lijn b door het snijpunt gaat van de diagonalen in een rechthoek begrensd door o.a. a en c (fig. 1), dan gaat het beeld van b door het snijpunt van de diagonalen in het trapezium, dat het beeld is van de genoemde rechthoek. Zo gaat ook c door het snijpunt der diagonalen in de rechthoek, die begrensd wordt o.a. door a en e en we zien, dat nu het beeld van c weer door het snijpunt der diagonalen in het trapezium gaat.

We kunnen nu een perspectivische figuur, als figuur 2 op twee manieren opbouwen, nl. door "interpolatie" of door "extrapolatie".

Interpolatie wil zeggen, dat we uitgaan van twee gegeven lijnstukken en een tussenliggende lijn construeren. Teken bijvoorbeeld de evenwijdige lijnstukken a en e



Figuur 1.



Figuur 2.

dan c . Daarna kun je weer met diagonalen b en d construeren. Extrapolatie betekent, dat we uitgaan van twee lijnstukken en er daarbuiten gelegen lijnstukken bij construeren (fig. 3). We kiezen bijvoorbeeld a en b ($a > b$). De diagonalen in het trapezium dat onder andere door a en c begrensd wordt, snijden elkaar in het midden van b . Construeer dus dat midden en trek daardoor deze diagonalen. Zet je deze constructie voort, dan zul je opmerken, dat de middens der lijnstukken a, b, c , enz. alle op een rechte liggen, die evenals de schuine zijden der trapezia door het verdwijnpunt O gaat.

2. Nu het rekenkundig aspect

Op welke manier nemen de lengten der verticalen of de afstanden van hun voetpunten af? In het trapezium $ACC'A'$ in figuur 4 geldt:

$$\frac{\frac{1}{2}b}{a} = \frac{l}{l+k} = \frac{c}{c+a} \quad (a > b)$$

dus $2ac = ab + bc$, zodat

$$c = \frac{ab}{2a-b} = \frac{ab}{a+(a-b)}$$

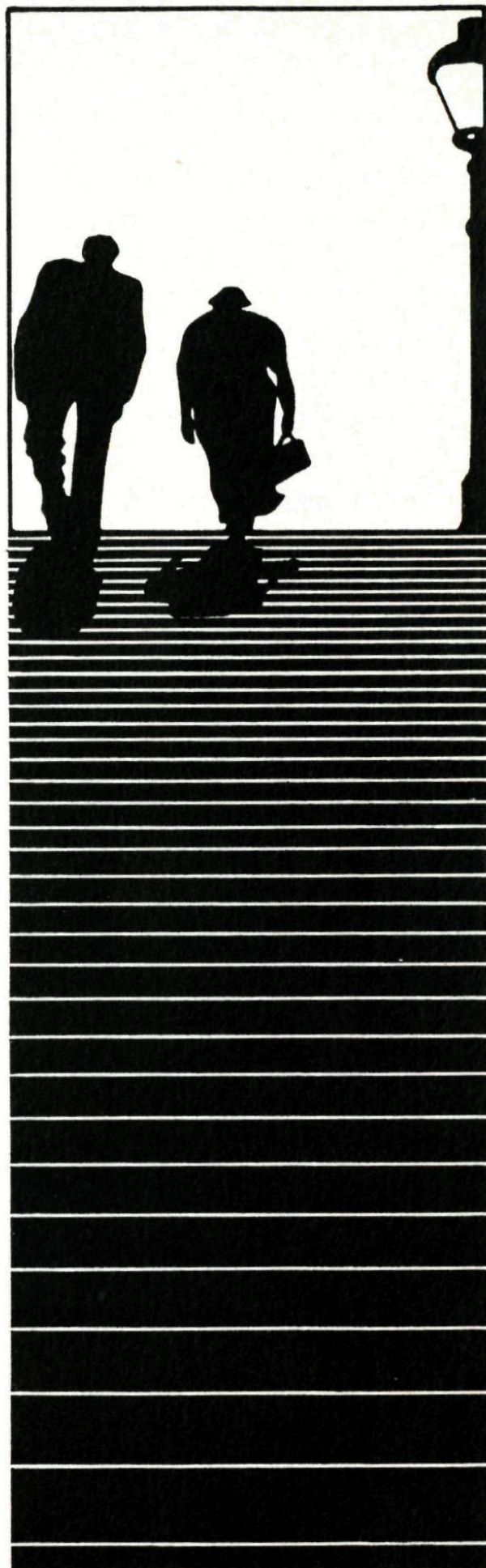
Evenzo vinden we in trapezium $BDD'B'$

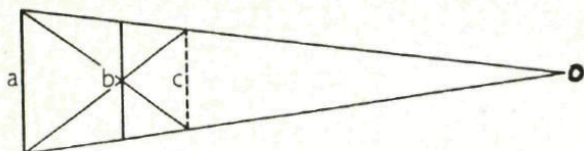
$$d = \frac{bc}{2b-c}$$

Substitueren we hierin de zojuist gevonden waarde van c , dan vinden we

$$d = \frac{ab}{3a-2b} = \frac{ab}{a+2(a-b)}$$

Op dezelfde manier vinden we

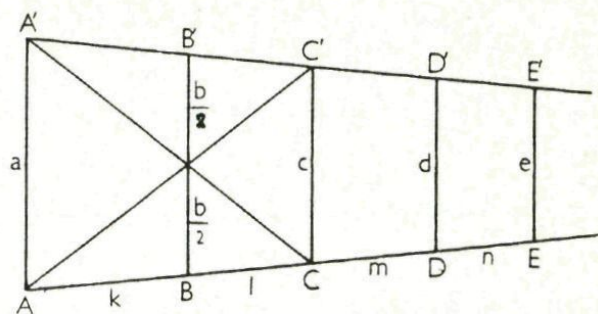




Figuur 3

$$e = \frac{ab}{4a - 2b} = \frac{ab}{a + 3(a - b)}$$

We zien dat er regelmaat in deze waarden zit. Elk der verticalen is gelijk aan een breuk met de constante teller ab , terwijl bij elke breuk de noemer $a - b$ groter is,

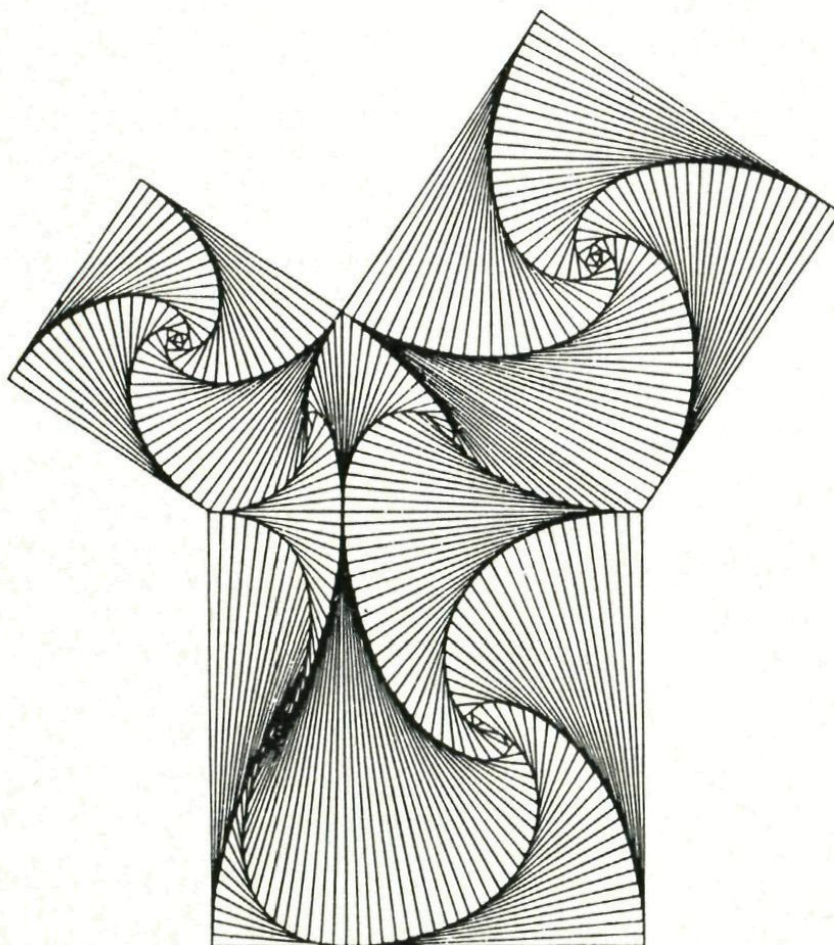


Figuur 4

dan de noemer van de voorgaande breuk.

We kunnen daarom ook zeggen, dat de omgekeerden van de lengten der verticalen een rekenkundige rij vormen met het verschil gelijk aan

$$\frac{a - b}{ab}$$

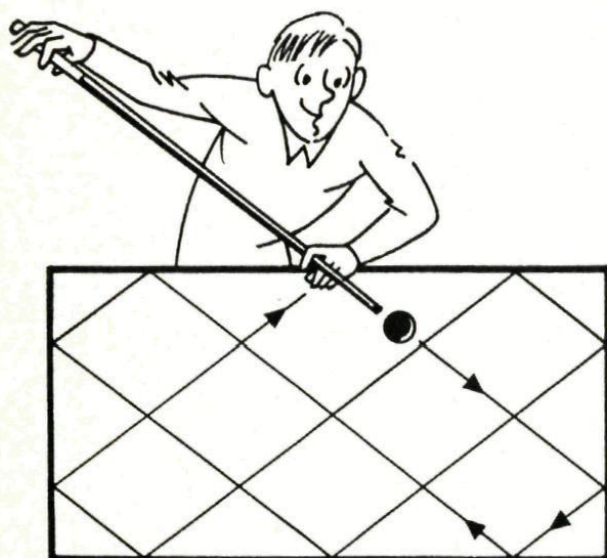


Dit fraaie lijnenspel speelt zich af binnen een welbekende figuur: een uitbeelding van de stelling van Pythagoras.

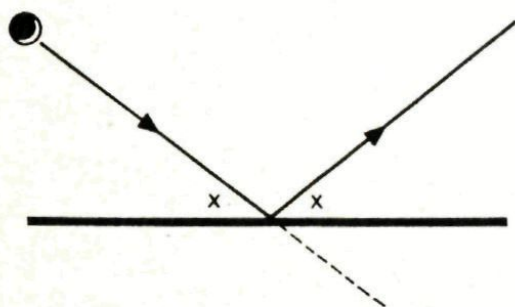
Biljarten met een bal

○○ Geen bal aan? Dat is nog te bezien. Een spel staat en valt met de spelregels. Bij normaal biljarten werken we met 3 ballen en 4 banden. We stoten daarbij tegen een bal en proberen rechtstreeks of via banden de beide ander ballen te raken.

We verzinnen nu een nieuw wiskundig biljartspel met slechts een bal, die we puntvormig stellen. We moeten nu zo tegen de ene bal aanstoten dat deze na treffen van alle 4 de banden ... tegen zichzelf aanbotst of anders gezegd precies op zijn uitgangspunt terugkeert. We



Figuur 1. Een 10 banden-stoot.



Figuur 2. De hoeken bij de botsing zijn gelijk.

stoten daarbij zonder effect te gebruiken. In figuur 1 zie je zo een 10-bandenstoot, waarbij de bal terugkeert en er aldus een gesloten figuur wordt beschreven.

Als een wiskundige zoiets ziet, komen er een heleboel vragen bij hem op.

Hoe moet je mikken om zoiets klaar te krijgen?

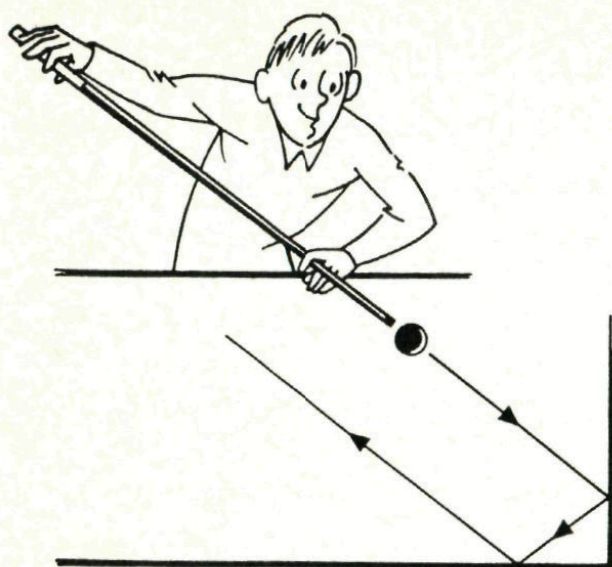
Hoe is de baan op papier te construeren?

Is het aantal stoten tegen de banden te berekenen?

Bestaat er altijd een oplossing?

Direct zijn er al 2 zaken op te merken. Vooreerst: bij stoten zonder effect, zal een bal zo tegen een band terugstuiten dat de beide hoeken gelijk worden (fig. 2). De baan na weerkaatsing kan door middel van spiegeling gemakkelijk geconstrueerd worden.

Vervolgens: als je de bal de hoek van het biljart instuurt, komt hij terug in een richting evenwijdig aan de eerste richting (fig. 3). Je kunt dat gemakkelijk zelf bewijzen met de wet van gelijkheid van hoeken. Hieruit volgt tevens dat een



Figuur 3. De bal komt uit de hoek evenwijdig terug.

bal die precies in de hoek terecht komt, langs dezelfde weg terugkomt.

Een vierkant biljart

Maar nu gaat het moeilijker worden. Als een probleem te ingewikkeld lijkt, wordt het tijd vereenvoudigingen aan te brengen.

Een cafebiljart heeft afmetingen 210 bij 105 cm; een tafelbiljart bijv. 140 bij 70. Elk biljart is een rechthoek met zijden die zich verhouden als 2 : 1.

We gaan ons spel nu eerst analyseren bij een vierkant biljart.

Je ziet in figuur 4 dat als je vanuit het midden van een zijde (punt B) de bal onder 45° stoot er een gesloten vierkant beschreven wordt. Twee zaken lijken belangrijk voor het welslagen van de stoot.

Vanuit welk punt mik je?

Onder welke hoek wordt gestoten?

Als je vanuit punt A in dezelfde richting stoot, heb je ook succes. De figuur wordt nu een rechthoek. Zelfs als je vanuit 0 onder 45° stoot, lukt het nog. De bal beschrijft dan tweemaal de diagonaal. Van de 4 lijnstukken zijn er nu 2 stuks nul lang geworden. Uit dit alles blijkt dat de keuze van het vertrekpunt weinig belangrijk is. Wel de richting waaronder de bal wordt weggestoten!

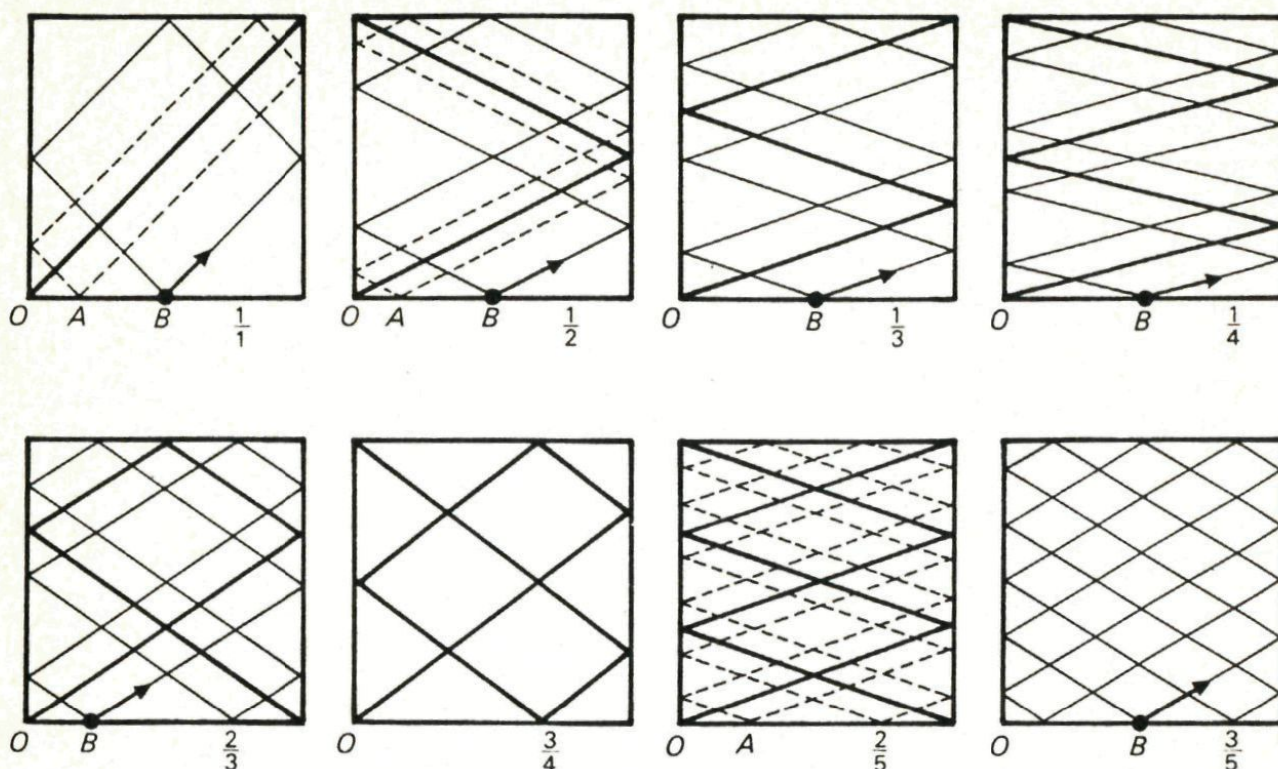
Andere richting

We gaan nu de richting variëren.

We geven de richting aan met de zogenaamde richtingscoëfficiënt, zijnde de tangens van de hellingshoek. In figuur 5 is het vierkante biljart getekend, waarbij de bal vanuit 0 in diverse richtingen wordt weggeschoten. Elke richting wordt gekarakteriseerd door een niet-vereenvoudigbare breuk, zoals: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}$.

Bij elk van die stoten ontstaat een gesloten figuur.

Zo wordt in de tweede tekening van figuur 4 gestoten vanuit 0 onder een hoek met richtingscoëfficiënt . Als je vertrekt vanuit het midden van de zijde (punt B), ontstaat een 8-vormige figuur. Vertrek je vanuit A onder dezelfde hoek dan verschijnt een variatie. Telkens is de figuur gesloten. Opmerkelijk is dat er telkens 3 typen figuren ontstaan: een dichte figuur



Figuur 4. Gesloten banen bij verschillende richtingen.

0 (in dit geval V-vormig), een open figuur B (hier 8-vormig) en verder tussenvormen A. Bij de verhouding $\frac{1}{1}$, waren dit: lijnstuk, vierkant en rechthoek.

Bij de verhouding $\frac{1}{3}$, begint het met een S-vormige figuur als gesloten type enzovoort.

Zo behoort bij elke soort een zeker verhoudingsgetal.

In figuur 4 zijn toestanden uitgebeeld met verhoudingsgetallen:

$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ en $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$.

Zo kun je einde-loos doorgaan.

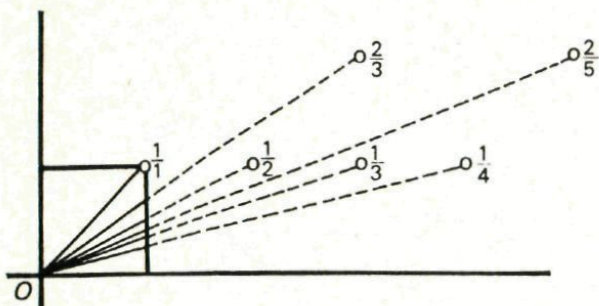
Wat valt er verder nog te ontdekken?

○○ Als je een beetje speurzin hebt zul je ontdekken dat uit de karakteristieke breuk direct het

aantal trefpunten op de zijkanen van het biljart en het totaal aantal lijnstukken, waaruit de figuur is opgebouwd, is af te lezen.

Neem bijvoorbeeld het geval met richtingscoëfficiënt $\frac{2}{3}$.

Op de band in de x-richting treden 2 botsingen op en op die in de y-richting 3 botsingen. Totaal zijn er 10 botsingen en bestaat de figuur dus uit 10 lijnstukken. De figuur die in 0 start geldt als een limietstand: sommige lijnstukken vallen nu samen, anderen zijn tot 0 gereduceerd. In het algemeen kun je stellen dat bij stoten onder een hoek met richtingscoëfficiënt m/n er een gesloten figuur beschreven wordt, nadat de bal $2(m+n)$ keer tegen



Figuur 5. Constructie van de richtingen.

een band heeft gebotst. De figuur bestaat dan tevens uit $2(m + n)$ lijnstukken.

Verder valt het op dat bij de dichte figuur de eindpunten soms op de einden van een diagonaal, soms op de einden van een zijde liggen.

Ook daarvoor is een regel te vinden: als het verschil van n en m even is, dan liggen de eindpunten op een diagonaal; is dit verschil oneven, dan op een zijde. Controleer deze stelling zelf maar in figuur 4. Misschien heb je nu de indruk dat de figuur altijd wel gesloten is en de bal dus op zijn uitgangspunt terugkeert. Dit alles wel in de veronderstelling dat hij geen bewegingsenergie verliest door wrijving of onelastisch botsen. Toch is die indruk niet juist. Stel de zaak maar eens anders. Wat gebeurt er bijvoorbeeld als je de bal stoot onder een hoek van 16° ?

In de tabel vind je nu voor de richtingscoëfficiënt:

$$\tan 16^\circ = 0,287 = 287/1000.$$

De bal zal dan volgens de eerder ontwikkelde theorie totaal $2(287 + 1000)$ ofwel 2574 keer tegen een band botsen alvorens de figuur rond is. De figuur zal dan wel knap ingewikkeld geworden zijn. Hij bestaat dan immers uit 2574 lijnstukken. Het hele vierkant is dan vrijwel volgeschreven. Maar nu moet je wel bedenken dat $\tan 16^\circ = 0,287$ nog slechts een benadering is. In werkelijkheid zijn er immers oneindig veel decimalen. Dan snap je de rest ook wel. Als de figuur ooit gesloten zou worden, zou deze ook oneindig veel zijden moeten krijgen. Je kunt dan ook beter zeggen: bij een stoothoek 16° komt de bal niet meer op zijn uitgangspunt terug.

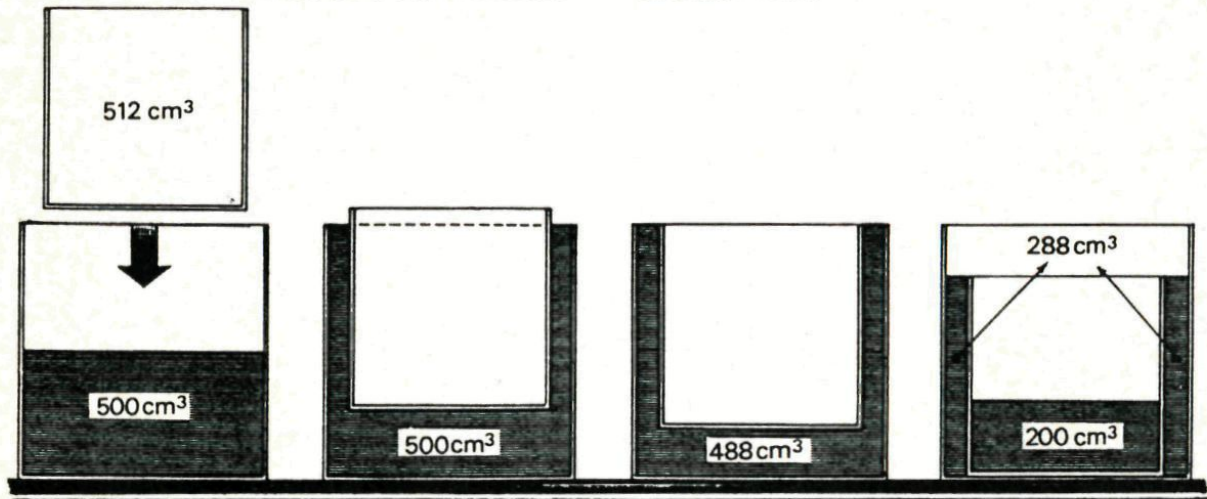
Het rechthoekige biljart

Keren we nu weer terug naar de 10-bandenstoot op het rechthoekige biljart van figuur 1. Deze figuur is dezelfde als die van figuur 4 met verhouding , en wel het open type. Door ten opzichte van de x -as een lijnvermenigvuldiging toe te passen met een factor 2, en de rechthoek dan nog 90° te draaien, ontstaat figuur 1. $\square$

Oplossing: verdringingspuzzel

De grote kubus heeft een inhoud van 1000 cm^3 . De kleine 512 cm^3 . Bij neerdrukken loopt er 12 cm^3 water uit het vat. Er blijft dan nog 488 cm^3 water over. Als het kleine

vat op de bodem van het grote staat is er tussen de wanden nog ruimte voor $800 - 512$ of 288 cm^3 water; de rest 200 cm^3 gaat in het kleine vat. □



EERSTE SCHOOLDAG: "En Liesje, hoeveel jaartjes ben jij al?.."

Pythagoras wiskunde tijdschrift voor jongeren

Redactie: Henk Huysmans, Henk Mulder

Medewerkers: Prof. H. Dupane, B. de Jongste, Thijs Notenboom,
Hans Oomis, F. Roos

Redactiesecretariaat: Henk Mulder
Geersbroekseweg 27
4851 RD Ulvenhout.

Eindredacteur: Henk Huysmans

Inhoud jaargang 30, nummer 4

In een lijn / 1	Oplossing: puzzel datumblokjes / 18
Verdringingspuzzel / 4	Anders dan anders / 19
Karresporen / 5	Handig wegstrepen / 24
Kan het nog korter / 8	De verkortingsrij / 25
Puzzel: datumblokjes / 11	Fraai lijnenspel / 27
Worteltrekken zonder worteltoets / 12	Biljarten met één bal / 28
Bissectrice, lijn van eerlijk delen / 16	Oplossing: verdringingspuzzel / 32

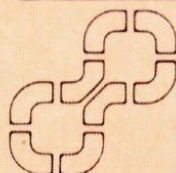
Pythagoras verschijnt zesmaal per schooljaar; opgave van abonnementen bij de uitgever (zie onder).

Abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 september schriftelijk bij de uitgever is opgezegd.

Bij tussentijdse abonnering ontvangt men ook de reeds verschenen num-

mers. Betaling per acceptgirokaart.

Tarieven	NLG/BEF
Abonnement Pythagoras	25,-/450
Luchtpost-toeslag	10,-
Inclusief Archimedes	45,-/800
Luchtpost-toeslag	20,-
Losse nummers	5,-/ 90



stichting ivio

Postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL.)

Tel. 03200-76411

educatieve uitgeverij - instituut voor buitenschools

onderwijs - wereldschool - AO-reeks - leerprojecten

Postgiro Nederland: 287934

Postcheck België: 000-0130850-94