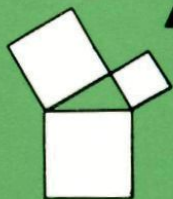




Pythagoras



wiskunde tijdschrift voor jongeren

stichting ivio

30e jaargang
nummer 5
juli 1991

Hoe krom is een gekromd oppervlak?

○○ Bij een rechte lijn is de kromming nul, bij een cirkel constant. Bij een ellips is de kromming maximaal bij de punten op de einden van de lange as en minimaal op de einden van de korte as.

Als je een scherpe bocht maakt, is de straal van de draaicirkel klein en de kromming dus groot.

Als we in een punt van een vlakke kromme de kromming willen bepalen, moeten we eerst de kromtestraal kennen. Dat is de straal van de cirkel die het dichtst aansluit bij de loop van de kromme in dat punt. Het blijkt dat daarvoor drie samenvallende punten noodzakelijk zijn.

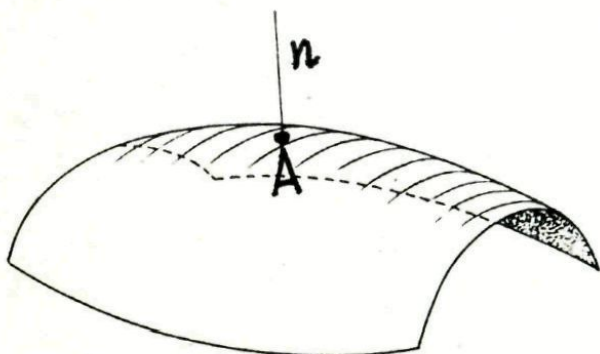
Zo hoort bij elk punt van een kromme een raaklijn, een normaal loodrecht daarop, een kromtemiddelpunt op die normaal en een overeenkomstige kromtestraal.

De kromming ρ is nu gedefinieerd als het omgekeerde van de kromtestraal dus $\rho = \frac{1}{r}$.

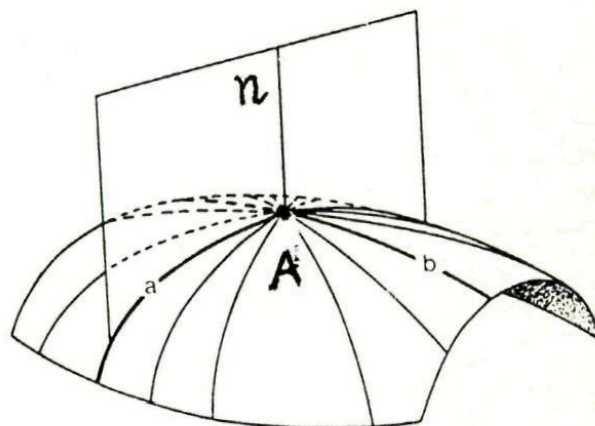
Bij een kromme is de vraag hoe krom hij is niet in het algemeen te beantwoorden, maar wel voor elk punt van een kromme afzonderlijk. Bij een gebogen oppervlak is zelfs dat laatste niet zonder moeilijkheden, zoals we zullen zien. Bekijk figuur 1. In het punt A van het oppervlak is een zogenaamde normaal n getekend, die loodrecht op het oppervlak staat. Wacht even, wat is loodrecht op een oppervlak? “Daar komen de

definities alweer”, hoor ik je verzuchten. Om het verhaal niet te saai te maken, slaan we deze definitie maar over. Je denkt maar aan een vlaggemast, opgericht op ons aardoppervlak, dat tenslotte ook gebogen is. Goed, de normaal in A dus.

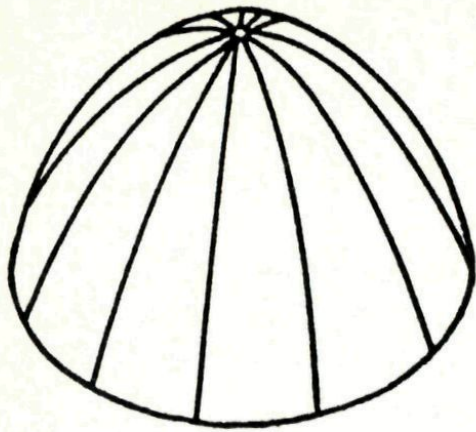
Een willekeurig vlak door deze normaal zal het oppervlak volgens een vlakke kromme snijden. In figuur 2 zijn een aantal van deze snijkrommen getekend in



Figuur 1.

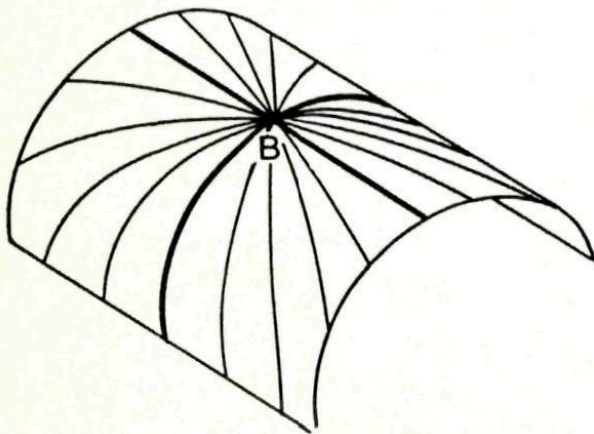


Figuur 2.

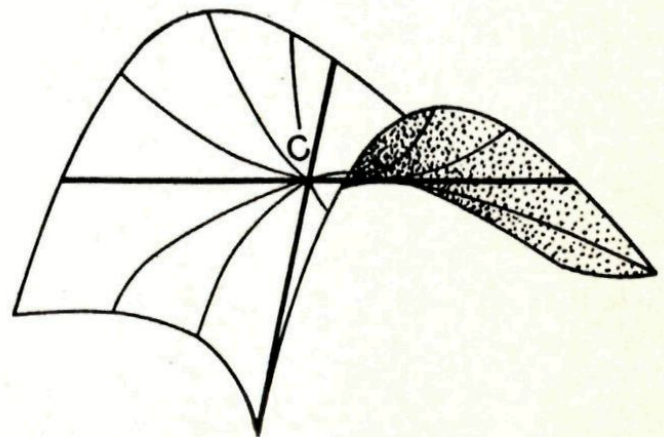


Figuur 3.

verschillende richtingen door A. Elk van deze exemplaren heeft in A een bepaalde kromming. Maar zijn deze krommingen alle gelijk? Dat is niet waarschijnlijk. Het is voor te stellen, dat de kromme a uit figuur 2 in A een grotere kromming heeft dan de kromme b. Wat is nu de kromming van het oppervlak in het punt A? Moeten we als antwoord geven: de kromming varieert van zoveel tot zoveel? Of een soort gemiddelde hiervan? Dit laatste doet men



Figuur 4.



Figuur 5.

inderdaad vaak en wel als volgt. Men zoekt de snijkromme door A met de grootste kromming ρ_1 en die met de kleinste kromming ρ_2 . In figuur 2 zouden dat de krommen a en b kunnen zijn. Men noemt nu $\rho_1 + \rho_2$ de *middelbare kromming* van het oppervlak in A.

Soms wordt een andere maat voor de kromming aangehouden, namelijk de zogenaamde *totale kromming* $\rho_1 \cdot \rho_2$.

Geen van beide afspraken zal ons gevoel volledig bevredigen.

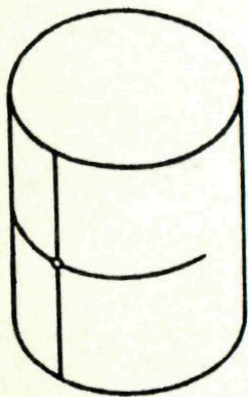
Een bijzonder geval willen we eerst bekijken, namelijk een punt waarbij alle snijkrommen in dat punt dezelfde kromming hebben. Een dergelijk punt wordt *navelpunt* genoemd (fig. 3). Of deze naam biologisch juist is wordt door sommige betwijfeld!

Een ei heeft twee navelpunten, je kunt wel raden welke. Columbus beweerde dat hij een ei op zijn navelpunt kon laten staan. Er zijn ook oppervlakken die uit louter navelpunten bestaan. Raad maar eens welke twee dat zijn.

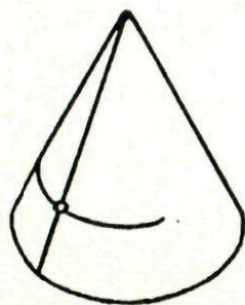
Drie soorten punten op een oppervlak

De voorgaande beschouwingen stellen ons in staat om de punten op het gebogen oppervlak in te delen in drie soorten. We veronderstellen hierbij stilzwijgend, dat de oppervlakken niet te lelijk zijn, geen scherpe vouwen en dergelijke.

1. In figuur 2 is punt A van wat we de eerste soort zullen noemen. Van alle snijkrommen ligt het kromtemiddelpunt aan één en dezelfde kant van het oppervlak. De krommingen van de snijkrommen neemt men in A of alle positief of alle negatief. De *totale kromming* $\rho_1 \cdot \rho_2$ is dan zeker *positief*.
2. In figuur 4 is punt B van de tweede soort. De kromtemiddelpunten liggen weer aan één kant van het oppervlak maar er is één snijkromme (niet noodzakelijk een rechte) die in B een kromming nul heeft; ρ_1 is positief of negatief (afhankelijk van de keuze) maar ρ_2 is dan nul. De *totale kromming* is *nul*.



Figuur 6.



Figuur 7.

Je kunt misschien de indruk krijgen dat een totale kromming gelijk aan nul zou aangeven dat het oppervlak ter plaatse vlak is, wat beslist niet het geval hoeft te zijn. Daarom wordt in dit geval ook de middelbare kromming vaak als maat gebruikt.

3. In figuur 5 tenslotte is C van de derde soort. Hierbij heeft een deel van de snijkrommen de kromtemiddelpunten aan de ene kant, het andere deel deze middelpunten aan de andere kant liggen. De scheiding tussen beide groepen wordt gevormd door twee snijkrommen (weer niet noodzakelijk rechten) met in C een kromming nul. Bij een dergelijk punt is het mogelijk dat de middelbare kromming nul is, als namelijk ρ_1 en ρ_2 elkaars tegengestelde zijn. In dit geval laat de middelbare kromming ons gevoel in de steek. De *totale kromming* is in C *negatief*. C wordt een *zadelpunt* genoemd.

Voorbeelden. Op een bol is elk punt van de eerste soort, zoals je misschien daarnet geraden had. Het enige andere oppervlak dat uit louter navelpunten bestaat is het platte vlak.

Op een eivormig oppervlak is elk punt van de eerste soort.

Op een cilinder is elk punt van de tweede soort (fig. 6).

Op een kegel is elk punt van de tweede soort (fig. 7), de top buiten beschouwing gelaten. □

De kurve van Sierpinski

○ De kurve van Sierpinski heeft enige merkwaardige eigenschappen, en je ziet er nooit een afbeelding van. Wellicht vind je nu in Pythagoras een primeur. Kijk nu niet naar figuur 1 of 2. Of naar de aardige patroontjes van figuur 4 en 5, dat zijn geen afbeeldingen van de kurve van Sierpinski. Het is figuur 6... ja dat zwarte vierkant, dat is de afbeelding van een kurve met de volgende eigenschappen:

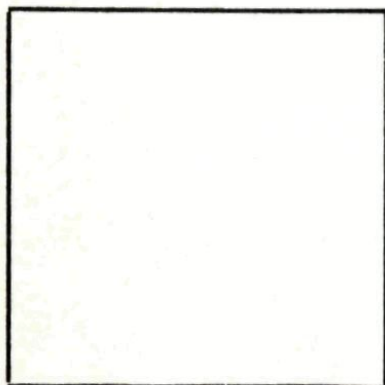
1. Het is een gesloten lijn (je zou kunnen zeggen: het begin- en eindpunt zitten aan elkaar vast).
2. Deze kurve begrenst een oppervlakte die kleiner is dan de helft van het vierkant.
3. De kurve bevat elk punt binnen het vierkant (vandaar dat het hele vierkant zwart is).

Op het eerste gezicht lijkt een kurve met zulke eigenschappen een onbestaanbaar, ondenkbaar iets. Als we echter de achtereenvolgende stappen nagaan waarin we de kurve kunnen tekenen, blijkt het "onmogelijke" mogelijk te worden.

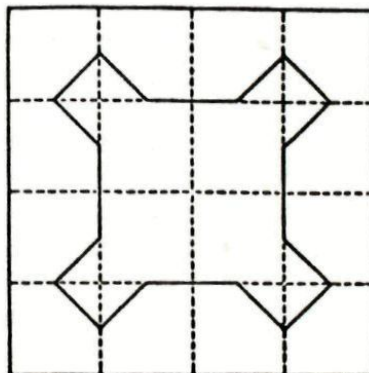
Het vierkant van figuur 1 wordt verdeeld in 16 kleinere vierkanten. Van de 12 vierkanten die langs de rand liggen verbinden we de middens der zijden; welke middens precies zie je duidelijk in de figuur.

Bekijk nu figuur 2. Het oorspronkelijke vierkant is verdeeld in 4 vierkanten. Het vierkant links boven behandelen we op dezelfde manier als figuur 1 (dus verdelen in 16 vierkantjes etc.). Als je dit doet bij alle 4 de vierkanten ontstaat figuur 3.

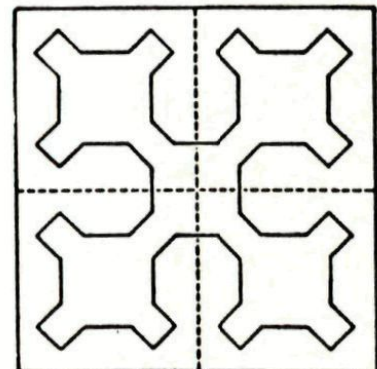
Door het tekenvoorschrift nog twee maal te herhalen krijgen we de figuren 4 en 5. Bij elke volgende herhaling nadert de figuur meer tot figuur 6. Dat de kurve nadert tot een figuur die elk punt binnen het vierkant bevat, is



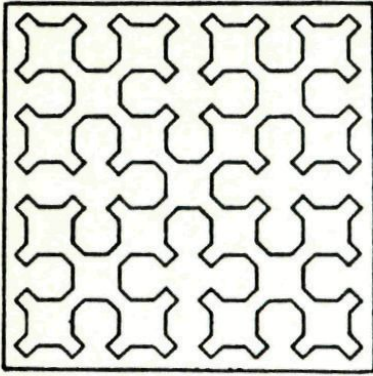
Figuur 1.



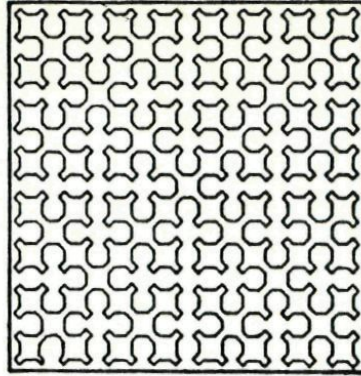
Figuur 2.



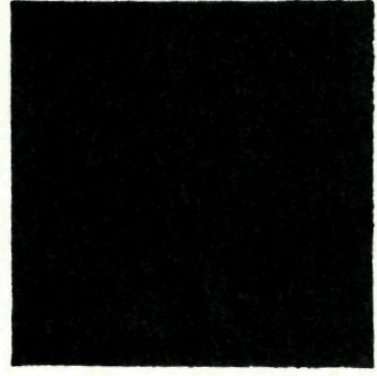
Figuur 3.



Figuur 4.



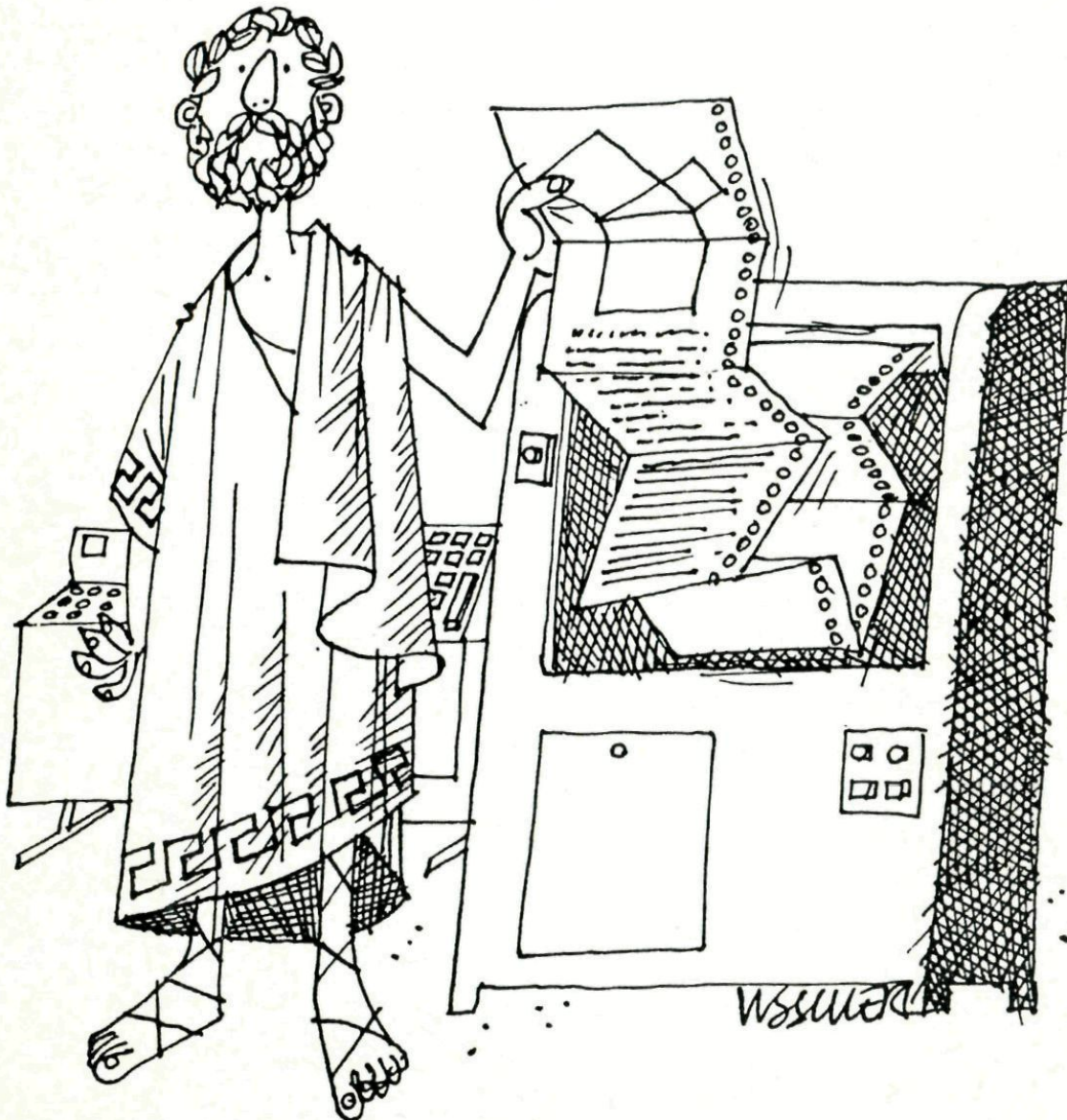
Figuur 5.



Figuur 6.

niet zo eenvoudig te bewijzen. Wel is op eenvoudige manier in te zien dat de lengte van de kromme nadert

tot oneindig, terwijl de oppervlakte nadert tot $\frac{5}{12} a^2$, als a de zijde van het vierkant is. \square



Pythagoras gaat met zijn tijd mee.

Verkeerscapaciteit

○ Het aantal auto's in Nederland neemt dagelijks toe. De wegen moeten een steeds groter aantal auto's verwerken en worden dus steeds drukker. Zou het helpen als de gemiddelde snelheid van auto's werd opgevoerd?

Een automobilist zal zijn doel sneller bereiken, naarmate hij sneller rijdt (binnen zekere grenzen natuurlijk). Meestal kan hij echter niet zo snel rijden als hij zelf wil, maar moet hij zich aanpassen aan het overige verkeer, en dient hij zijn snelheid daarnaar te regelen.

Hoe?

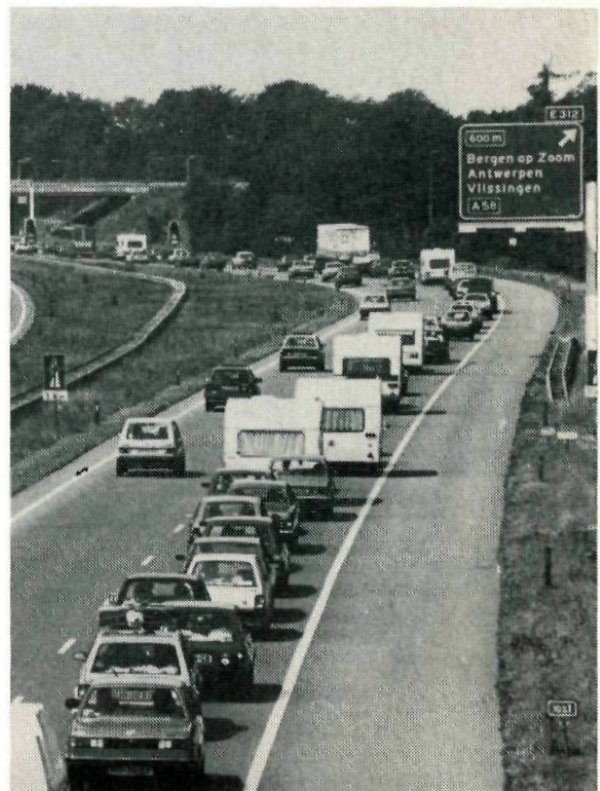
Volgens het wegenverkeersreglement moet je kunnen stoppen binnen de weg die te overzien en vrij is. Dit betekent dat je moet weten hoe snel je kunt stoppen als de auto een bepaalde snelheid heeft. Voor de wet is het voldoende als een auto die 40 km/uur rijdt binnen 16 meter kan stoppen, bij 50 km/uur binnen 25 meter, bij 60 km/uur binnen 36 meter, enz. Nu is het niet nodig een afstand van 36 meter tot je voorbuurman te bewaren als je met een snelheid van 60 km/uur over een autoweg rijdt, tenminste aangenomen dat die voorbuurman ook rijdende is. Ook hij heeft dan immers een

zekere tijd nodig voordat hij kan stilstaan.

De A.N.W.B. adviseert om een afstand te bewaren die in meter de helft is van de snelheid waarmee gereden wordt. Dus bij een snelheid van 60 km/uur moet je een afstand van 30 meter tot je voorbuurman bewaren.

Weggebruik

De bedoeling is dat een zo groot mogelijk aantal auto's tegelijkertijd van de weg gebruik kan maken, dat wil zeggen dat per



Bij de figuur op het omslag

*Bij een te groot verkeersaanbod
ontstaat er een file*

snelheid	afstand	passeertijd	aantal auto's/min
10 km/uur	9 m	3,24	18,5
20	14	2,52	23,8
30	19	2,28	26,3
40	24	2,16	27,8
50	29	2,09	28,7
60	34	2,04	29,4
70	39	2,01	29,9
80	44	1,98	30,3
90	49	1,96	30,6
100	54	1,94	30,9

minuut zoveel mogelijk auto's een bepaald punt van de weg passeren. Laten we aannemen dat je in een file verzeild bent geraakt die zich met een snelheid van 30 km/uur voortbeweegt. De automobilisten houden zich netjes aan de regels en bewaren dus een onderlinge afstand van 15 meter. De auto voor je is net een bepaald punt gepasseerd, je moet dus zelf nog 15 meter plus de lengte van je auto afleggen, voor je ook zover bent. We nemen voor het gemak maar aan dat alle auto's 4 meter lang zijn. Aangezien een kilometer 1000 meters telt en een uur 3600 seconden komt 30 km/uur overeen met $8\frac{1}{3}$ m/sec. De 19 meter leg je dus af in $19 : 8\frac{1}{3} = 2,28$ sec. Dit betekent dat per minuut $60 : 2,28 = 26,3$ auto's het bewuste punt passeren.

Afstand

Maar: plotseling rijdt iedereen 60 km/uur en . . . nu passeren wel 29,4 auto's per minuut een bepaalde plaats. Dat wil zeggen drie hele auto's meer, bij een verdubbeling van de snelheid! Algemeen: bij een snelheid van v km/uur of $\frac{v}{3,6}$ m/s, is de afstand tussen twee voorbumpers $\frac{1}{2}v + 4$ meter. De tijd nodig om deze afstand af te leggen is

$$\frac{3,6}{v} \left(\frac{1}{2}v + 4 \right) = 1,8 + \frac{14,4}{v} \text{ s.}$$

We kunnen hiermee een tabel maken.

Je ziet dat het aantal passerende auto's per minuut maar zeer langzaam toeneemt. Zelfs is het zo dat dit aantal nooit boven de 33,3 kan komen, al ging je vliegend over de weg. □

De supercirkels van Piet Hein

○○ En wie is Piet Hein? Zijn naam is voor ons verbonden aan de zilvervloot en aan de dreun "Zijn daden waren groot". Voor velen in de gehele wereld echter betekent deze naam die van een zeer bekende Deen. Dichter is hij, natuurkundige, wiskundige, bedenker van een aantal spelen en puzzels.

Piet Hein kreeg een gedachte, toen hij de kwadratische vergelijkingen zag van ellipsen en cirkels, deze algemener te maken door de kwadraten te vervangen door andere exponenten en te onderzoeken welke krommen het gevolg van deze verandering zouden zijn.

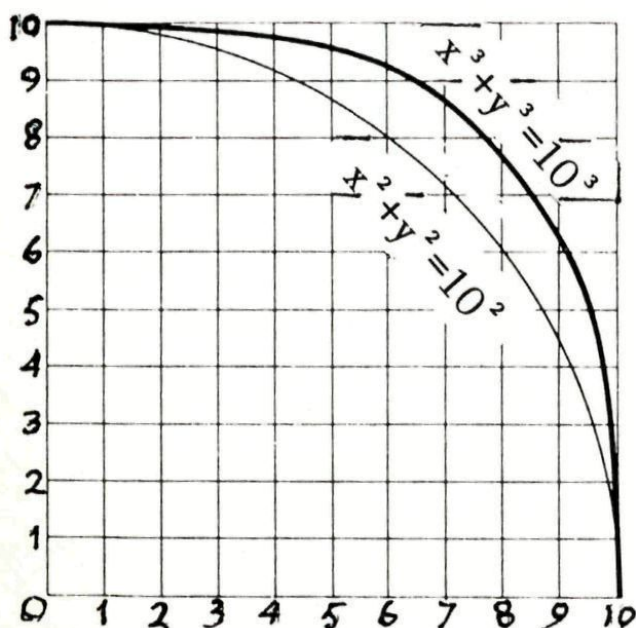
In figuur 1 hebben we naast elkaar getekend een kwart van de cirkel met de vergelijking $x^2 + y^2 = 10^2$ en een kwart van de kromme met de vergelijking $x^3 + y^3 = 10^3$.

De punten van de laatstgenoemde kromme zijn verkregen door bij de waarden 1 tot en met 10 van x telkens de bijbehorende waarden van y te berekenen.

De uitkomsten van die berekeningen vind je in de tabel.

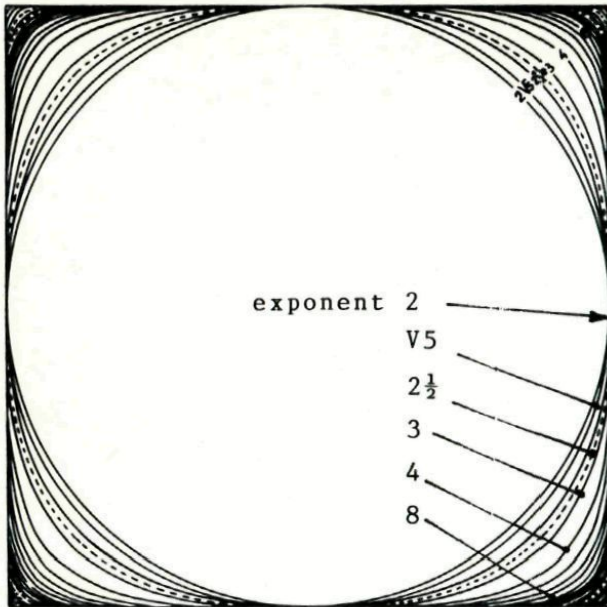
We zien in de tabel hoe langzaam

de rij van y -waarden in het begin daalt. De kromme, die bij de genoemde vergelijking hoort, is dan ook om te beginnen vlakker dan de kwart cirkel. Zo sterk is dat vlakker zijn, dat de eerste punten nog bijna op de zijden van het vierkant liggen. Nog sterker is dat het geval, wanneer we de krommen tekenen met vergelijkingen $x^4 + y^4 = 10^4$ of $x^5 + y^5 = 10^5$, enz. In figuur 2 zien we een aantal van deze supercirkels, geconstrueerd



Figuur 1.

$x^3 + y^3 = 10^3$			
x	$y^3 = 10^3 - x^3$	y^3	y
0	$10^3 - 0^3$	10^3	10
1	$10^3 - 1^3$	999	9,997
2	$10^3 - 2^3$	992	9,973
3	$10^3 - 3^3$	973	9,909
4	$10^3 - 4^3$	936	9,782
5	$10^3 - 5^3$	875	9,565
6	$10^3 - 6^3$	784	9,221
7	$10^3 - 7^3$	657	8,693
8	$10^3 - 8^3$	488	7,873
9	$10^3 - 9^3$	271	6,471
10	$10^3 - 10^3$	0	0



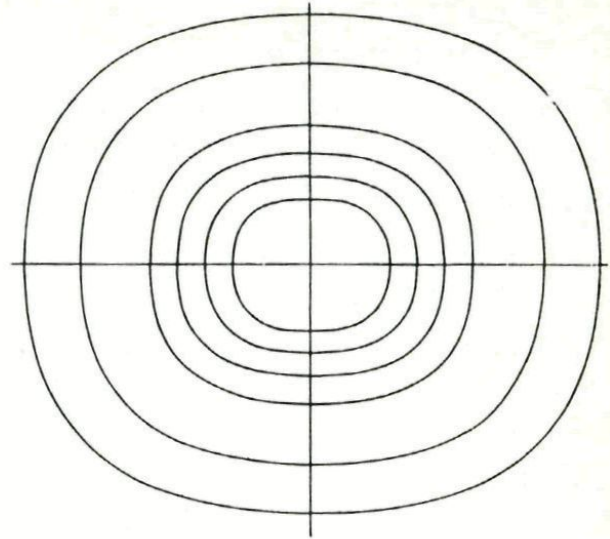
Figuur 2.

door Piet Hein. Als exponenten gebruikte hij onder andere 2 (de cirkel), $\sqrt{5}$, $2\frac{1}{2}$, e ($e \approx 2,78$), 3, 4 en 8.

Enkele opmerkingen over deze krommen

1. De vergelijking van de cirkel is $x^2 + y^2 = 10^2$ als het vierkant een zijde heeft met lengte 20. We mogen echter niet schrijven, dat de vergelijking van één der supercirkels is $x^{2\frac{1}{2}} + y^{2\frac{1}{2}} = 10^{2\frac{1}{2}}$. De betekenis van $x^{2\frac{1}{2}}$ is nl. $\sqrt{x^5}$ en de waarden hiervan zijn alleen maar reëel als x positief is. Willen we dus ook punten met negatieve coördinaten toelaten, dan moeten we in de vergelijking de absolute waarden van x en y schrijven, zodat die dus wordt $|x|^{2\frac{1}{2}} + |y|^{2\frac{1}{2}} = 10^{2\frac{1}{2}}$

2. Je moet door een tabel van tweede- en derde wortels te gebruiken, maar eens trachten de krommen $|x|^{\frac{1}{2}} + |y|^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{2}}$ en $|x|^{\frac{1}{3}} + |y|^{\frac{1}{3}} = 10^{\frac{1}{3}}$



Figuur 3.

te tekenen. En hoe wordt de supercirkel $x^1 + y^1 = 10^1$? Die kun je zeker gemakkelijk construeren.

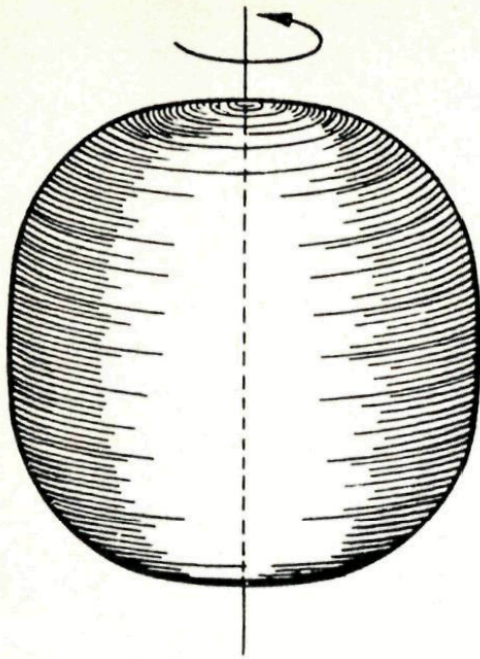
Practische toepassingen

De verbouwing van het stadscentrum van Stockholm vroeg eigenlijk niet om een vierkante cirkel maar om een rechthoekige ellips. Piet Hein koos hiervoor de kromme met de vergelijking

$$\frac{|x|^{2\frac{1}{2}}}{|a|^{2\frac{1}{2}}} + \frac{|y|^{2\frac{1}{2}}}{|b|^{2\frac{1}{2}}} = 1$$

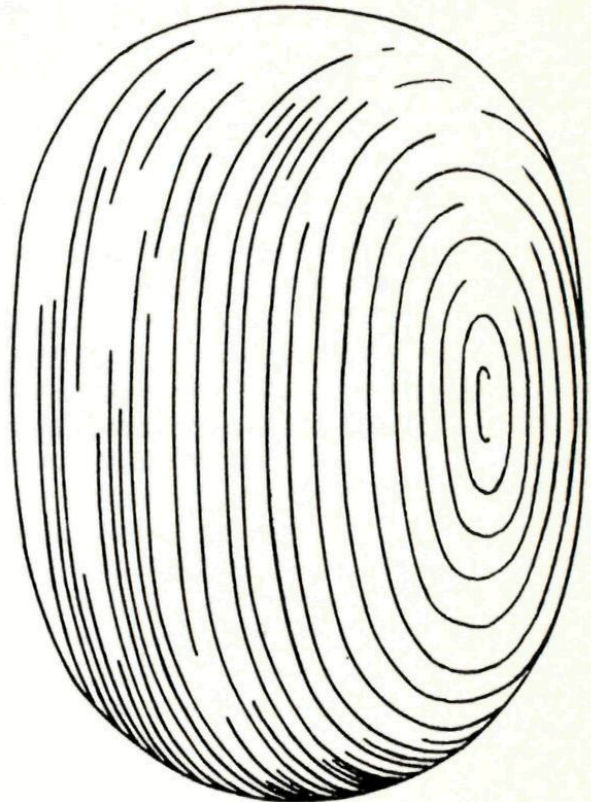
Superellipsen worden nu ook gebruikt voor meubilair, bestek, lichtarmaturen, enzovoort. Vooral voor tafels geven ze een hele serie praktische en mooie vormen.

In figuur 3 zijn een aantal van deze superellipsen voor verschillende waarden van a en b en voor de exponent $2\frac{1}{2}$ afgebeeld.



Figuur 4.

Laten we een supercirkel wentelen om een van zijn spiegelrechten, dan ontstaat een superbol (fig. 4). Een superellipsoïde ontstaat door het wentelen van een superellips (fig. 5). In plaats van superellipsoïde wordt ook wel de naam super-ei gebruikt. Zonder de

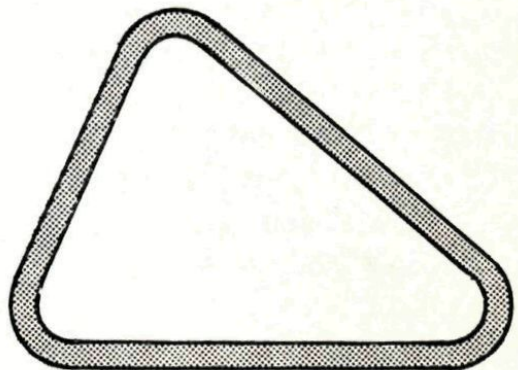


Figuur 5.

truc, die Columbus gebruikte, kan een super-ei op zijn punt staan, zonder om te vallen.

Ring

○○ De hiernaast getekende ring is overal even breed, de bochten zijn cirkelvormig (met gelijke stralen), de buitenomtrek is 21 cm en de binnenomtrek is 19 cm lang. Bereken de oppervlakte van de ring. Oplossing: zie pagina 32.



Vijf studenten en hun hobbies

○○○ In een Duits tijdschrift stond vorig jaar de volgende 'hersenspreker'. Hij is te mooi om hem onze lezers te onthouden. De oplossing kun je vinden op pagina 27.

Aan de Berlijnse universiteit studeren de volgende studenten verschillende vakken; ze hebben verschillende voornamen, verschillende hobbies en verschillende geboortestrekten.

- a Peter, de bouwkundige, de Rijnlander en de bergbeklimmer zijn dikke vrienden.
- b Frans, de Badener (afkomstig uit Baden), de postzegelverzamelaar en de bouwkundige wonen in de studentenflat naast elkaar.
- c De postzegelverzamelaar komt niet uit Württemberg en heet niet Karl.
- d De natuurkundige voelt zich de

gastheer van Frans en van de zanger.

- e De toekomstige arts Karl heeft een zwakke gezondheid en een krakende stem.
- f De heer Beier heeft een hekel aan bouwkunde, aan kaartspelen en aan postzegelverzamelingen.

I Welke hobbies hebben Hans, de Badener en de Jurist?

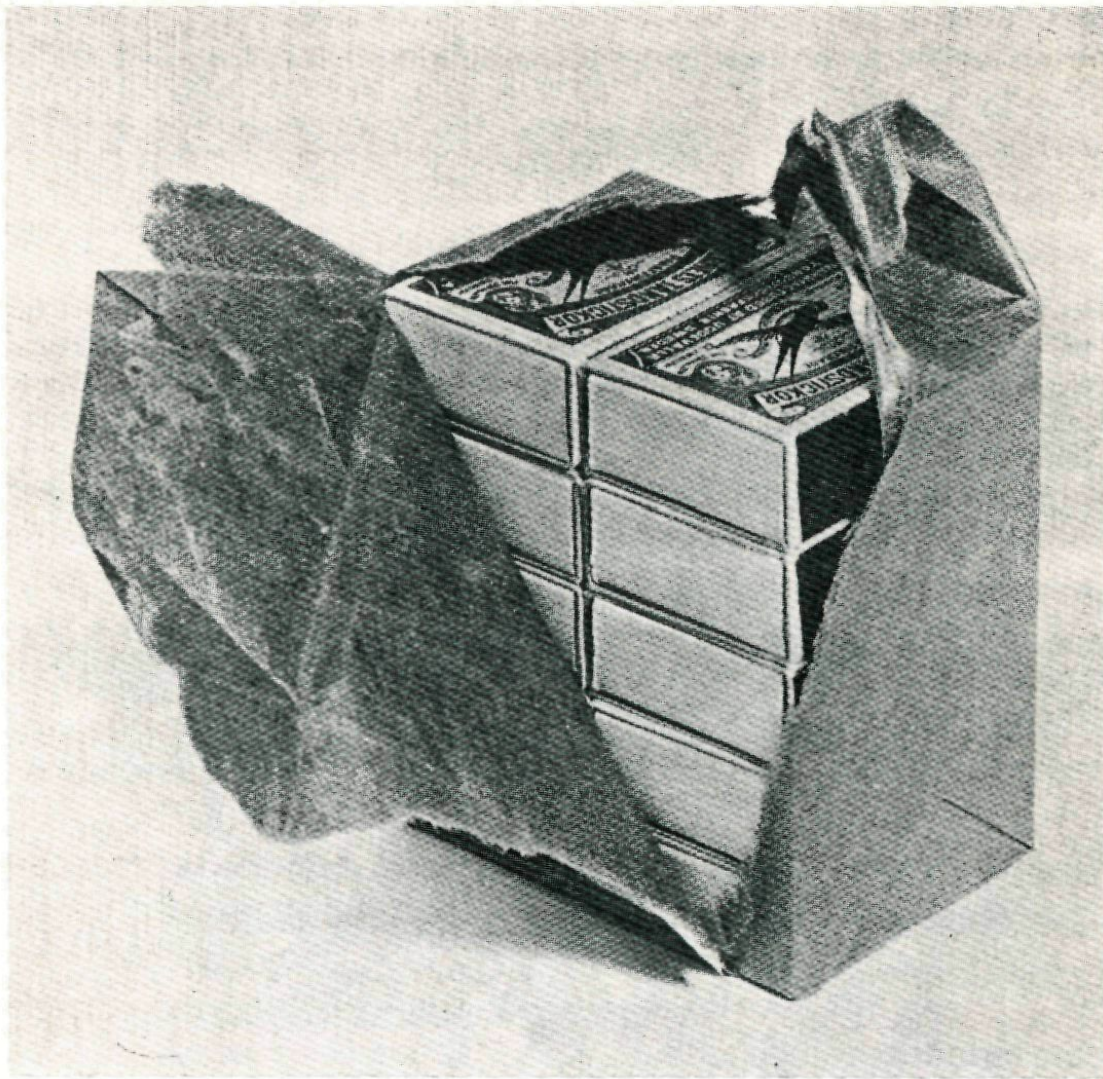
II In welke vakken studeren Helmut, de bergbeklimmer en de Württenberger?

III Hoe heten de Rijnlander, de taalkundige en de postzegelverzamelaar?

IV Uit welke streken komen Frans, de atleet en de jurist?



De goedkoopste verpakking

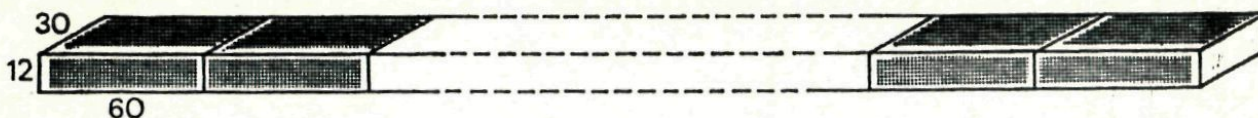


○ Een fabrikant staat voor het volgende probleem: Hij heeft zijn tabletten tot nu toe verkocht in doosjes met de afmetingen $l = 60$ mm, $b = 30$ mm en $h = 12$ mm. Het is wenselijk een grotere eenheid - in de vorm van een rechthoekig blok - bevattende 10 van de genoemde doosjes in de handel te brengen. Bij de verpakking zal onder andere een papieren wikkel worden gebruikt.

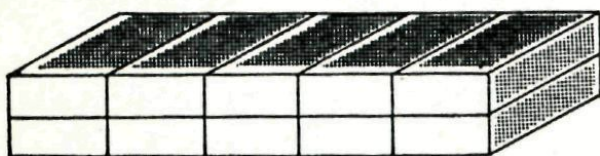
Welke combinatie van de 10 doosjes vereist de kleinste wikkel en is dus het goedkoopst?

Een van de mogelijkheden zie je in figuur 1. De grootste van de wikkel (afgezien van eventuele omslagen) heeft een oppervlakte:

$$\begin{aligned} A &= 2 (600 \times 12 + 12 \times 30 + 600 \times 30) \\ &= 2 (7200 + 360 + 1800) \\ &= 2 \times 25\,560 \\ &= 51\,120 \end{aligned}$$



Figuur 1



Figuur 2

Een andere keuze toont figuur 2.

Nu is de oppervlakte van de wikkel:

$$\begin{aligned} A &= 2(150 \times 24 + 60 \times 24 + \\ &\quad 150 \times 60) \\ &= 2(3600 + 1440 + 9000) \\ &= 2 \times 14\,040 \\ &= 28\,080 \end{aligned}$$

Je ziet dat er een aanmerkelijk verschil in oppervlakte, dus in grootte van de wikkel is. Bij een groot aantal doosjes zal de wijze van verpakken het kostenniveau dan ook sterk beïnvloeden.

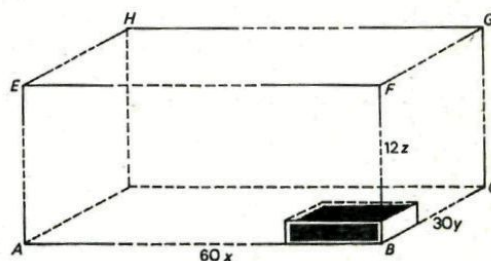
Stel dat het rechthoekig blok van figuur 3 de ideale verpakkingsvorm is.

Langs AB liggen x doosjes met hun lengte 60.

Langs BC liggen y doosjes met hun kant 30.

Langs BF liggen z doosjes met hun hoogte 12.

De inhoud is $x \cdot y \cdot z$ doosjes en uit het gestelde volgt $xyz = 10$.



Figuur 3.

Uiteraard komen voor x , y en z alleen in aanmerking de getallen 1, 2, 5 en 10.

De totale oppervlakte van het pakket in figuur 3 is:

$$\begin{aligned} A &= 2(AB \cdot BC + BC \cdot BF + AB \cdot BF) \\ &= 2(60x \cdot 30y + 30y \cdot 12z + 60x \cdot 12z) \\ &= 2(1800xy + 360yz + 720xz) \end{aligned}$$

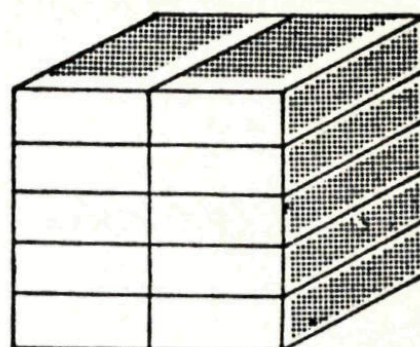
Voor bijvoorbeeld $x = 1$, $y = 1$ en $z = 10$ vinden we de oppervlakte van de wikkel door een eenvoudige substitutie:

$$\begin{aligned} A &= 2(1800 \cdot 1 \cdot 1 + 360 \cdot 1 \cdot 10 + \\ &\quad 720 \cdot 1 \cdot 10) \\ &= 2(1800 + 3600 + 7200) \\ &= 25\,200 \end{aligned}$$

In de onderstaande tabel staan alle mogelijke combinaties van x , y en z met bijbehorende oppervlakten.

Uit de tabel blijkt duidelijk het verschil tussen de grootste en de kleinste wikkel.

x	y	z	oppervlakte
1	1	10	25 200
1	10	1	44 640
10	1	1	51 120
1	2	5	21 600
1	5	2	28 080
2	1	5	25 200
2	5	1	42 480
5	1	2	33 840
5	2	1	44 640



Figuur 4. Het eindresultaat

Het maakt voor de probleemstelling niets uit of de doosjes tabletten bevatten of iets anders.

Neem daarom nu zelf eens doosjes met de afmeting 52, 37 en 17 mm. Deze maten zijn van een lucifer-

doosje.

Wil je een controle?

Welnu, je gaat naar de winkel, koopt een pak lucifers en gaat de inhoud na. Vergelijk die nu maar eens met figuur 4. □

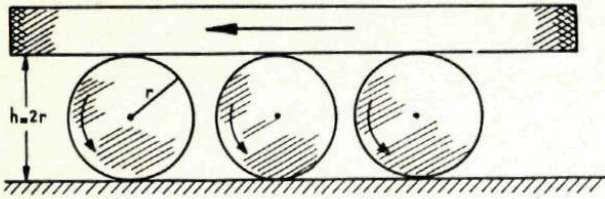
Dat rolt wel

○ Een enkele maal zien we een foto- of televisiereportage van het verrollen van een groot bouwwerk, dat om de een of andere reden verplaatst moet worden. Wanneer het losgemaakt is van de fundamente, wordt het voortgeschoven over cilinders, die er onder door rollen. Telkens komen daarbij achteraan cilinders vrij, die er aan de voorkant weer onder gelegd kunnen worden. Het gebouw blijft daarbij voortduren op gelijke hoogte, de hoogte, die bepaald wordt door de diameter van de cilinders (fig. 1).

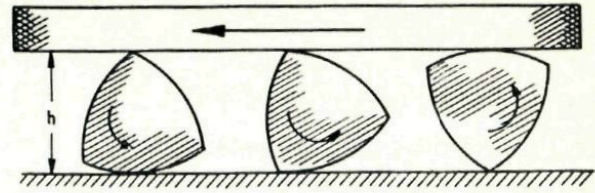
Het is een verrassende ontdekking te bemerken, dat het niet nodig is voor dit doel cilinders te gebruiken. Er zijn verschillende vormen te construeren, die voor dit rollen evengoed gebruikt kunnen worden. Twee daarvan willen we in dit artikel bespreken. De eerste

zie je toegepast in figuur 2.

Wat is nu het kenmerk van deze vorm, die hem voor dit rolwerk geschikt maakt? Het zal duidelijk zijn, dat bij het voortschuiven van het gebouw de hoogte boven de grond constant moet zijn. Dat is inderdaad het geval bij de 'rollen'

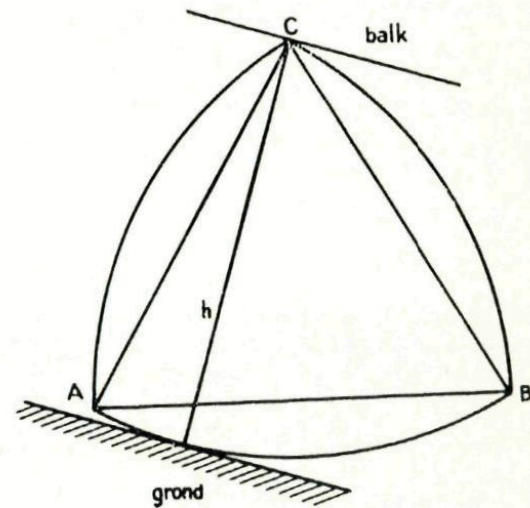


Figuur 1.

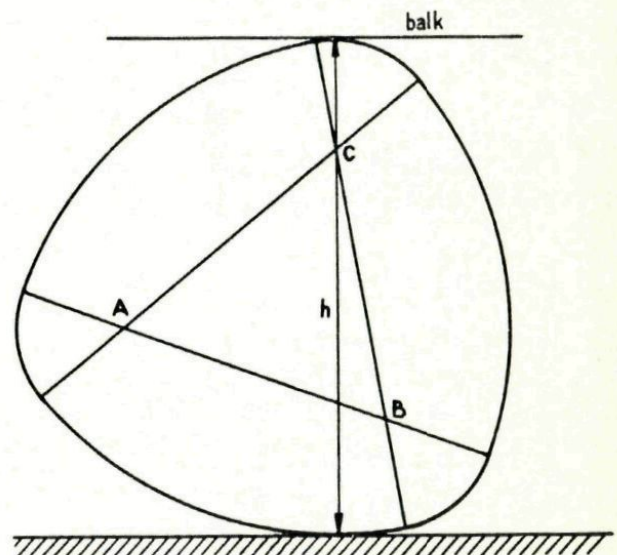


Figuur 2.

van figuur 2. Je ziet misschien wel hoe ze geconstrueerd zijn. Kijk anders maar naar figuur 3. ΔABC in deze figuur is gelijkzijdig. De hoekpunten zijn de middelpunten van de bogen. Zolang boog AB ergens de grond raakt in een punt tussen A en B, is de hoogte van C boven de grond gelijk aan de zijde van ΔABC . De balk rust dan bij C op de 'rol'. De balk is daardoor constant op de hoogte h boven de grond. Zodra A op de grond komt gaat de 'rol' zodanig om A draaien, dat de balk ergens op boog BC komt te rusten. Voortdurend is dan weer de afstand van de balk tot de grond gelijk aan h . Je ziet dat deze rollen precies hetzelfde presteren als de cilinders. Let echter eens op de baan, die het middelpunt van elk der cirkels in figuur 1 doorloopt bij het rollen. Dat is een rechte evenwijdig met de grond. Hoe beweegt het middelpunt van de 'driekantige' rol van figuur 2 zich? In figuur 4 zie je nog een manier om een rol te maken, die niet cilindrisch is, maar toch de



Figuur 3

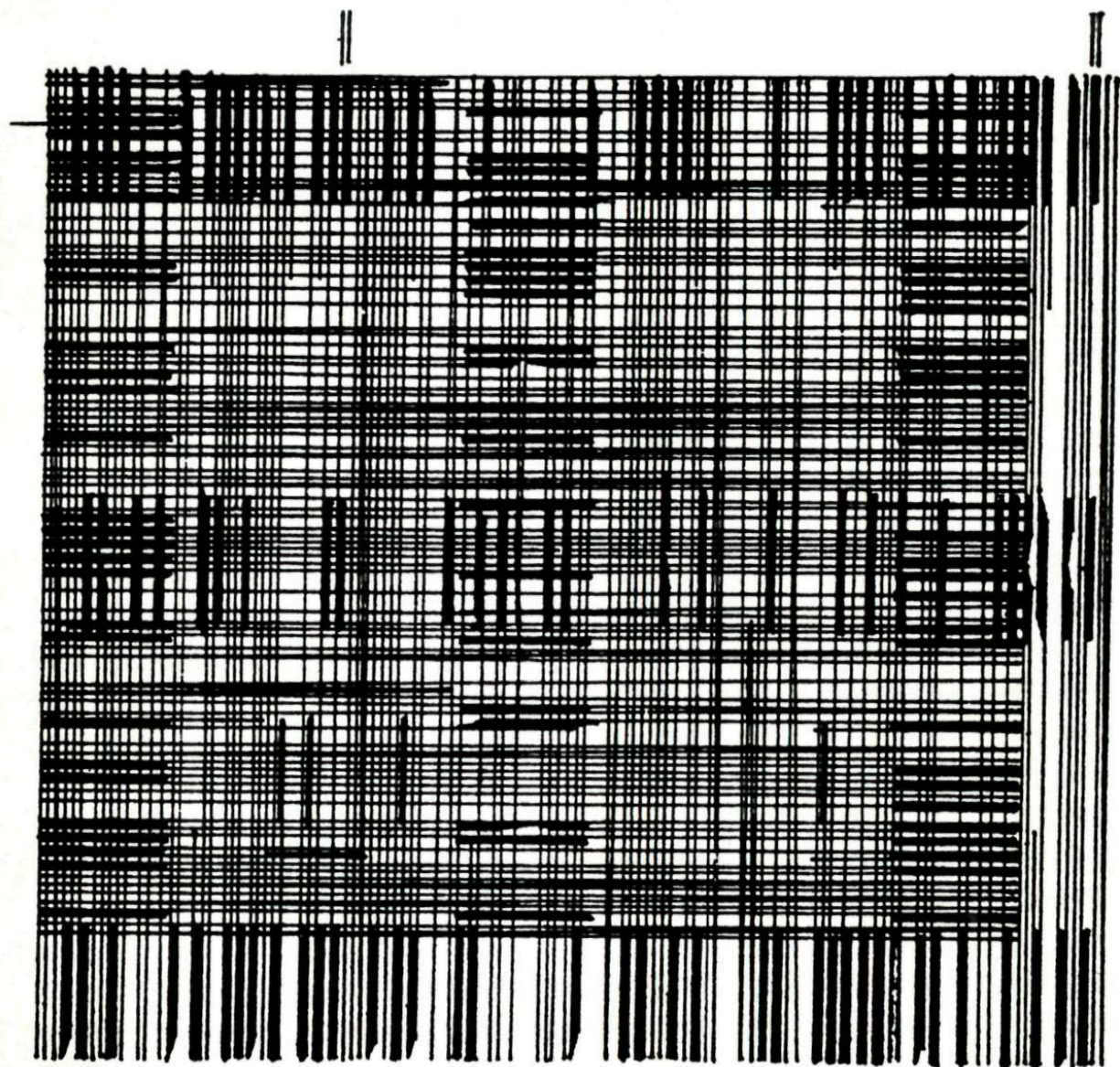


figuur 5.

eigenschap heeft, dat er een constante afstand is tussen zijn hoogste en laagste punt. En als dat in orde is, dan rolt het wel. \square

Pi in code

○ Hieronder vind je in geheimschrift de eerste 23 decimalen van het getal π . Dit fraaie en betekenisvolle weefsel werd ons gezonden door de heer. Woortman uit Hoofddorp. Test je scherpzinnigheid en probeer de code te decoderen. Mocht het je niet gelukken: de sleutel vind je op bladzijde 27 van dit nummer.



pi in 23 decimalen

De sneeuwvlok-kurve van Von Koch

○ De oppervlakte van een dubbeltje is ongeveer, 1 cm^2 . De omtrek van het dubbeltje is groter dan die van een cirkel met dezelfde middellijn, want het dubbeltje is gekarteld. De omtrek van het ongekartelde dubbeltje is ongeveer 47 mm.

Als we ons nu eens een karteling voorstellen als in de staande figuur 1a, dan wordt de omtrek daardoor ongeveer $\sqrt{2}$ maal zo groot. Dat kartelen helpt dus om de omtrek groter te maken. Hierdoor aangemoedigd zou je verder kunnen gaan met kartelen (figuur 1b en 1c). Maar bij even nadenken zie je wel in dat de omtrek daardoor niet meer groter wordt.

Nu zijn er figuren te bedenken, die een bepaalde oppervlakte hebben, bijvoorbeeld 1 cm^2 , en een oneindig grote omtrek.

Von Koch heeft enige fraaie figuren voorgesteld die de genoemde eigenschappen bezitten. Eén ervan zullen we hier wat ander bekijken. In figuur 2 zie je vier figuren, waarvan elke volgende op dezelfde wijze uit de voorgaande verkregen is. De gesloten figuur die ontstaat zullen we gemakshalve een kurve noemen. De uitgangskurve (C_0) is hier een gelijkzijdige driehoek. We

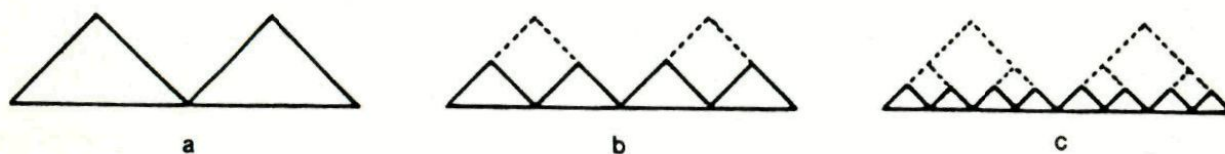
verdelen elke zijde in drie gelijke stukken en construeren op de middelste stukken weer gelijkzijdige driehoeken; zo ontstaat figuur C_1 . Daarna verdelen we alle zijden weer in drie gelijke stukken, construeren wéér op de middelste stukken gelijkzijdige driehoeken en krijgen kurve 2 (C_2). Bij een volgende herhaling ontstaat C_3 . Als we hier een oneindig aantal malen mee doorgaan ontstaat de kurve van Von Koch. Wat technischer uitgedrukt: de limiet waartoe C_n nadert als n nadert tot oneindig is de kurve van Von Koch: C .

Nog korter:

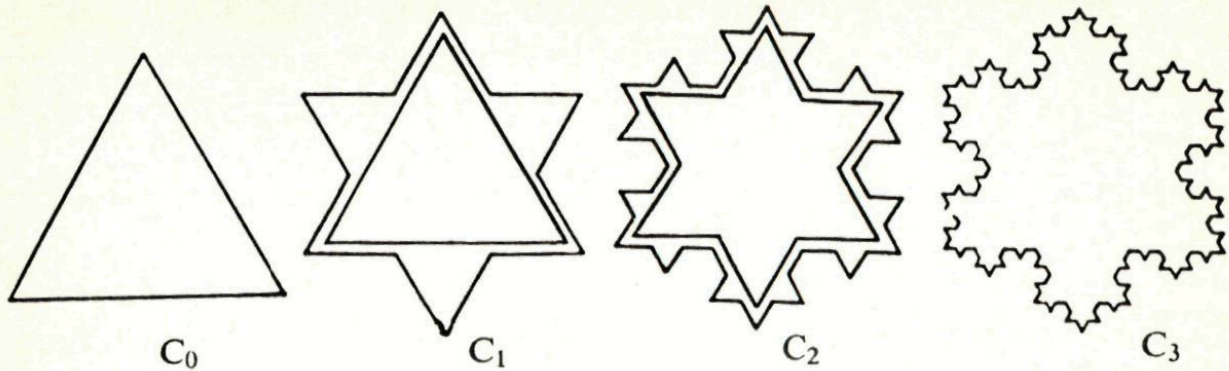
de kurve van Von Koch:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n.$$

Misschien kun je je voorstellen dat het uiterlijk van C niet zo heel veel verschilt van C_3 . Zes boogjes naar buiten en zes naar binnen, maar alles gladder dan bij C_3 .



Figuur 1.



Figuur 2.

○○ We kunnen oppervlakte en omtrek van C uitrekenen. het aantal zijden van C_0 is 3. Door het constructievoorschrift wordt het aantal zijden in elke volgende figuur 4 maal zo groot als in de voorgaande. Zo heeft C_1 $4 \cdot 3$ zijden, en C_n heeft er $4^n \cdot 3$. De lengte van de zijden van een volgend figuur is telkens $\frac{1}{3}$ van de zijden van de voorafgaande figuur. De lengte van de zijden van C_n is dus $\left(\frac{1}{3}\right)^n a$, als a de lengte van de zijde van C_0 is. De som van alle zijden van C_n , dus de *omtrek* van

$$C_n \text{ is dus } 4^n \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot a$$

$$\text{of } 3a \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Omdat $\frac{4}{3} > 1$ wordt $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ groter naarmate n groter wordt en nadert tot oneindig als n nadert tot oneindig. In de figurenreeks C_0, C_1, C_2, \dots wordt de oppervlakte telkens vergroot met een steeds groeiend aantal driehoekjes. Deze driehoekjes worden echter ook

kleiner naarmate we verder in de reeks komen. Noemen we V de oppervlakte van C_0 , dan is de oppervlakte van één klein driehoekje dat in C_1 erbij gekomen is $\frac{1}{9} V$. Er zijn echter 3 driehoekjes bijgekomen, dus de oppervlakte van C_1 is $V + 3 \cdot \frac{1}{9} V$.

De oppervlakte van de toegevoegde driehoekjes in C_2 is $\left(\frac{1}{9}\right)^2 V$; het aantal van deze driehoekjes is echter 4 maal zo groot als wat er in de vorige figuur bijgekomen is. De oppervlakte van C_2 is dus: $V + 3 \cdot \frac{1}{9} V + 4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 V$. Zo komen we tot de volgende som van termen voor de oppervlakte van C_n die we nog wat omrekenen:

$$\begin{aligned} \text{Opp} &= V + 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)V + 4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 V + \\ & 4^2 \cdot 3 \left(\frac{1}{9}\right)^3 V + \dots + \\ & 4^{n-1} \cdot 3 \left(\frac{1}{9}\right)^n V \\ &= V + 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)V \left[1 + 4 \cdot \frac{1}{9} + \right. \\ & 4^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 4^3 \left(\frac{1}{9}\right)^3 \dots + \\ & \left. 4^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right] \\ &= V + \frac{1}{3} V \left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \right. \\ & \left. \left(\frac{4}{9}\right)^3 \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right] \end{aligned}$$

Dit laatste is bekend : de som van de termen van een meetkundige rij

$$(oneindig, afdalend) \text{ is } S = \frac{a}{1-r}$$

Wat tussen haken staat nadert dus tot :

$$\frac{1}{1 - 4/9} = 9/5.$$

Zodat de oppervlakte van de sneeuwvlokcurve

van Von Koch wordt:

$$V + 1/3 V \cdot 9/5 = 1^{3/5} V.$$

□

Het recht trekken van een cirkelboog

○○ Het berekenen of construeren van een lijnstuk waarvan de lengte gelijk is aan die van een gegeven boog, noemen we rectificatie van die boog. Bij een cirkelboog is de berekening van de lengte eenvoudig als de middelpuntshoek en de straal gegeven zijn. De constructie van een lijnstuk dat even lang is als die boog is met behulp van passer en liniaal niet uitvoerbaar. We moeten dus volstaan met een benaderingsconstructie. Een eenvoudige en voldoende nauwkeurige benaderingsconstructie van een lijnstuk, waarvan de lengte gelijk is aan die van een gegeven halve cirkel is de constructie van Kochansky.

Kochansky was een Pools wiskundige uit de 17de eeuw.

De middellijn $AB = 2r$ en M is het middelpunt van de cirkel.

$DB \perp AB$ en $CA \perp AB$

$\angle BMD = 30^\circ$ en $CA = 3r$

en $DE \parallel AB$.

Nu is: $DE = 2r$ en $AE = BD = \frac{1}{3}r\sqrt{3}$

In $\triangle DEC$ geldt:

$$CD^2 = 4r^2 + (3 - \frac{1}{3}\sqrt{3})^2 r^2 =$$

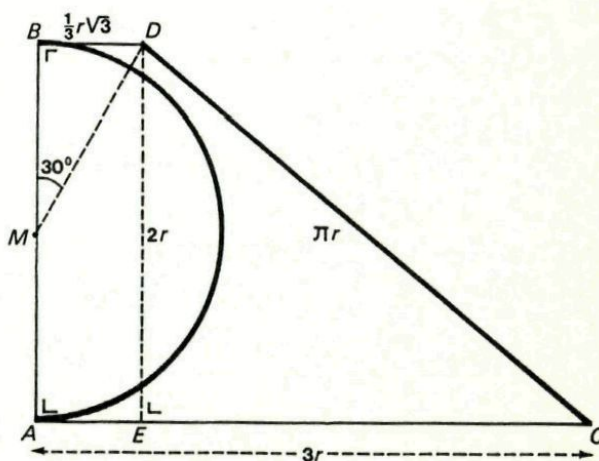
$$(13\frac{1}{3} - 2\sqrt{3})r^2$$

$$CD = r\sqrt{(13\frac{1}{3} - 2\sqrt{3})} = r\sqrt{9,869232}$$

$= 3,14153 r$
Omdat $\pi = 3,14159$ blijkt hieruit: □

CD verschilt slechts ongeveer $0,00006 r$ van πr .

Bij een cirkel met een straal van 1 meter is de fout slechts ongeveer $0,06 \text{ mm}$. □



Een formule voor volumebepaling

○○ De eerste inhoudsformule die je geleerd hebt luidt:

$V = l \times b \times h$, waarbij l , b en h de lengte, breedte en hoogte van het betreffende voorwerp voorstellen.

Maar wat doe je met deze formule als je het volume moet kennen van een bal of een wijnvat of een emmer?

We kunnen de formule wat algemener maken door te bedenken dat in plaats van $l \times b$ ook G of wel de oppervlakte van het grondvlak geschreven kan worden.

Dus $V = G \times h$

Terwijl de eerste formule enkel geldt voor een rechthoekig (dus ook vierkant) grondvlak, geldt de tweede uitkomst bij elke vorm van het grondvlak.

De enige voorwaarde is echter nog dat we een lichaam hebben waarbij doorsneden evenwijdig met het grondvlak steeds even groot in oppervlakte zijn.

Dus de formule geldt wel voor een cilinder maar niet voor een kegel. Eenvoudiger gezegd: het vat moet overal even wijd zijn.

En daarmee hebben we dus voor een heleboel lichamen nog geen uitkomsten.

Hoe moet het nu bij een kegel, een emmer en dergelijke? Toen men lang geleden houten vaten en met name wijnvaten ging maken, was het een heel probleem om het volume ervan te berekenen.

Grondvlak en bovenvlak waren evenwijdig en meestal even groot

maar in het midden zit een buik en is de doorsnede aanzienlijk groter.

Wanneer we met grondoppervlak \times hoogte zouden werken, werd de uitkomst veel te klein.

Het middenvlak speelt hier een rol die zelfs veel belangrijker is dan die van het grond- en bovenvlak.

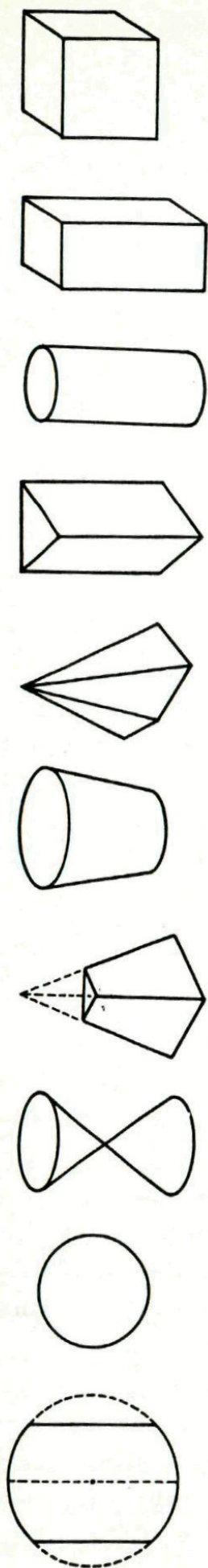
Voor dergelijke gevallen is een volumeformule ontworpen van de volgende vorm:

$$\frac{1}{6}h(G + B + 4M)$$

h stelt de hoogte van het lichaam voor, G de oppervlakte van het grondvlak, B van het bovenvlak en M van het middenvlak.

Je ziet hier dat G en B even belangrijk zijn, maar M vier maal zo gewichtig is.

Deze interessante formule blijkt een grote mate van bruikbaarheid te bezitten.



Hier volgen een aantal gevallen:

1. *kubus* hier geldt $B = G = M$

$$V = \frac{1}{6}h(G + B + 4M)$$

$$= \frac{1}{6}h(6G) = Gh$$

2. blok evenzo
 3. cilinder evenzo
 4. prisma evenzo
 5. kegel, hier geldt:

$$M = \frac{1}{4}G \text{ en } B = 0$$

$$V = \frac{1}{6}h(G + 0 + G)$$

$$= \frac{1}{6}h(2G) = \frac{1}{3}Gh$$

6. piramide evenzo
 7. afgeknotte kegel (emmer)
 als het grondvlak een straal a
 heeft en het bovenzvlak een
 straal b dan heeft het midden-
 vlak een straal $\frac{1}{2}(a + b)$, zodat

$$G = \pi a^2 \text{ en } B = \pi b^2 \text{ en}$$

$$M = \frac{1}{4} \pi(a + b)^2$$

$$\text{ofwel } M = \frac{1}{4}(\pi a^2 + \pi b^2 + 2\pi ab)$$

$$= \frac{1}{4}(G + B + 2\sqrt{GB})$$

$$V = \frac{1}{6}h(G + B + G + B + 2\sqrt{GB}) \text{ of } \frac{1}{3}h(G + B + \sqrt{GB})$$

8. afgeknotte piramide evenzo
 9. 'diabolo' (twee kegels met de
 punt op elkaar; $M = 0$)

$$\text{volume: } \frac{1}{6}h(G + G + 0) =$$

$$\frac{1}{6}h(2G) = \frac{1}{3}Gh$$

10. bol met straal R hier geldt

$$G = B = 0$$

$$\text{en } h = 2R \text{ en } M = \pi R^2$$

$$\text{volume: } \frac{1}{6} \cdot 2R(0 + 0 + 4\pi R^2)$$

$$= \frac{3}{4}\pi R^3$$

11. de formule is ook bruikbaar voor veelvlakken waarvan alle hoekpunten gelegen zijn in twee evenwijdige vlakken en G , B en M gemakkelijk te bepalen zijn.

In de voorbeelden 5 en 10 bleek dat ook voor $G = 0$ en $B = 0$ de formule bruikbaar blijft.

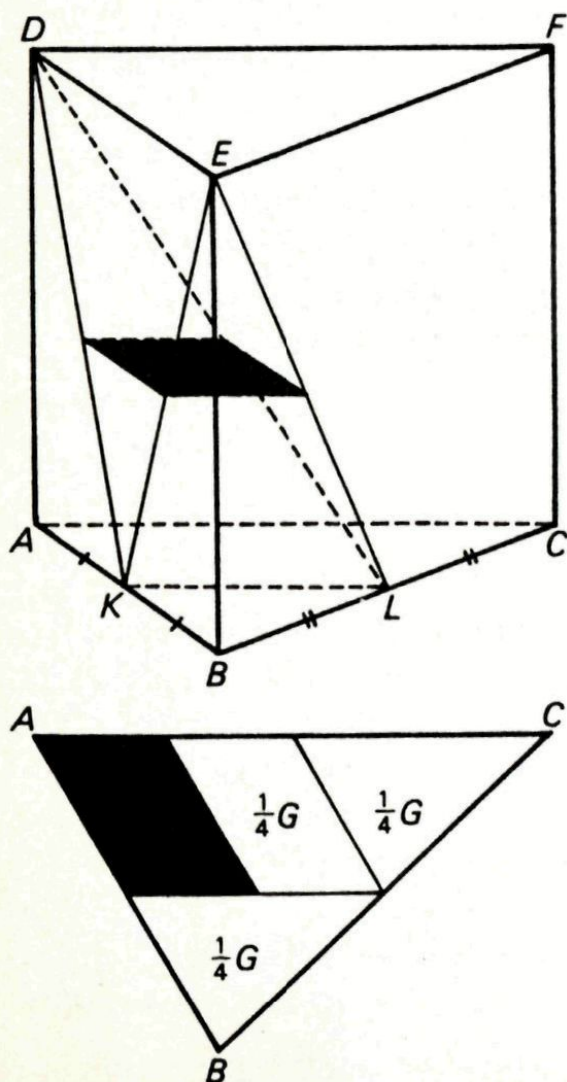
Hier volgt nog een voorbeeld van een dergelijke toepassing.

In een prisma is een viervlak getekend. Welk deel is de inhoud van het viervlak van het totale prisma?

Oplossing:

stel $(ABC) = G$ en $AD = h$

dan volume prisma: Gh



Breng bij het viervlak het middenvlak aan.

Dit middenvlak heeft de vorm van een parallellogram. Geprojecteerd op het grondvlak zie je dat de oppervlakte van dit middenvlak $\frac{1}{4} G$ wordt.

Dus volume $(DEKL) =$

$$\frac{1}{6} h(0 + 0 + 4 \cdot \frac{1}{4} G) = \frac{1}{6} Gh.$$

Het volume van DEKL is dus een zesde van het volume van het prisma.

12. Tenslotte het eerstgenoemde geval van het wijnvat. Het volume van een vat wordt primair bepaald door de grootte van de bodem en de hoogte, verder door de doorsnede van de bovenkant maar ook door de vorm van het vat. Dit laatste wordt in hoge mate bepaald door de doorsnede halverwege. Bij nadere bestudering van de formule blijkt dat een doorsnijding door de hartlijn van de ton begrensd wordt door gebogen lijnstukken, die als cirkel-delen worden opgevat.

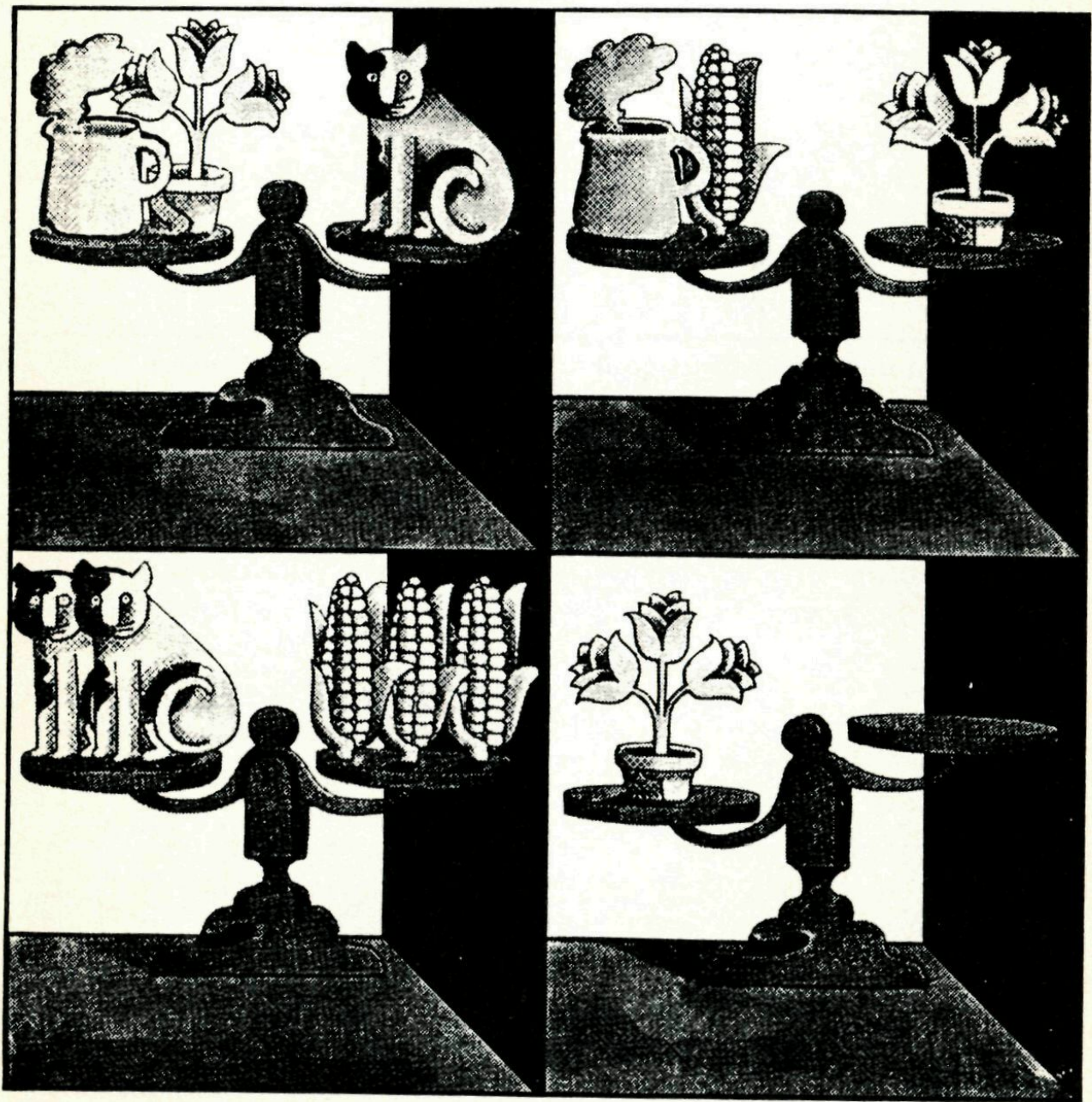
Een voorbeeld daarvan is een bol waarvan aan weerszijden evenwijdig twee even grote segmenten worden afgesneden. Wat je dan overhoudt lijkt op een wijnvat.

Berekening van het volume met formules voor bolsegmenten of ineens toepassing van de 'all-round formule' geeft dan een gelijk resultaat. □

Katten, kroezen, bloempotten en maiskolven

○○ Hoeveel kroezen moeten we op de rechterschaal van de laatste weegschaal zetten om evenwicht te krijgen?

Oplossing op bladzijde 32



Van rotsblok naar scharnier en verder



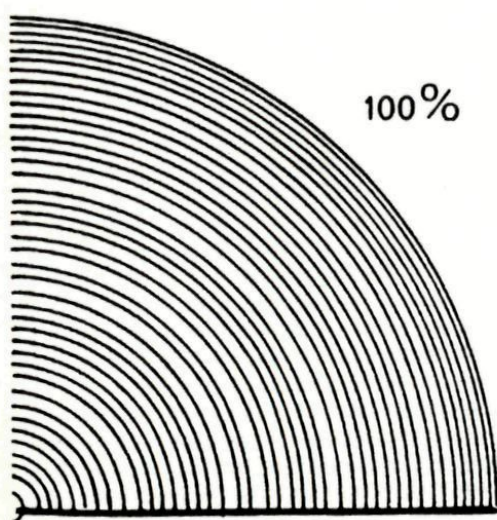
○ In de verhalen van de Griekse dichter Homeros lees je hoe de cycloop zijn hol met een rotsblok afsloot. Wij doen dat iets minder inspannend met een deur, die door middel van een scharnier dichtdraait.

Tegenwoordig is men alweer op zoek naar nieuwe methoden. Je ziet wel garagedeuren die uit de verticale stand omhoog gedraaid worden naar een horizontale stand langs het plafond.

Een dergelijke schuifbeweging werkt aanzienlijk ruimtebesparend. Ook bij bussen en trams wordt dit toegepast. Speciaal was ik getroffen door de kromme, die daardoor op de vloer gekrast werd.

Wij zullen proberen de beweging te analyseren en de ruimtebesparing te berekenen.

We gaan uit van een deuropening met de breedte a . Normaal is het één scharnierende deur aan te brengen met breedte a (fig. 1). Als we echter twee halve deuren met breedte a nemen, hebben we al 50% ruimtebesparing (fig. 2).

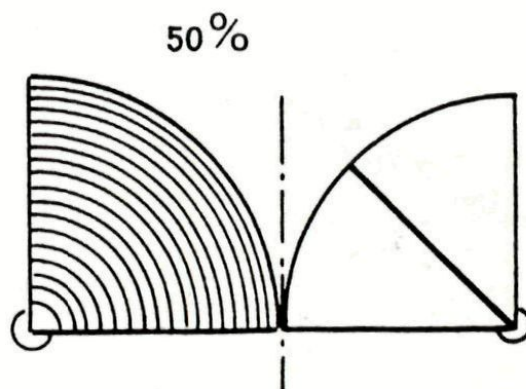


Figuur 1.

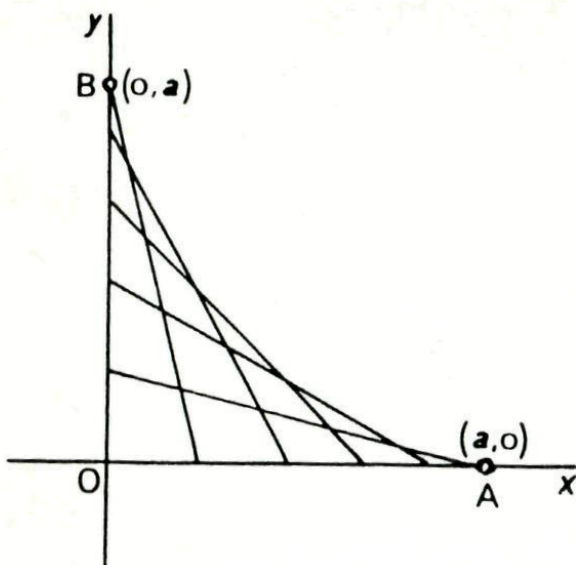
Maar we gaan nog verder.

Denk de deur (lijnstuk a) in de stand OA langs de x -as (fig. 3).

We verplaatsen nu de deur zo dat het ene eind A steeds verder over de x -as glijdt in de richting van O en het andere eind vanaf O over de y -as naar B . In figuur 3 zie je de deur getekend in 7 standen. Het zal je opvallen dat er een interessante



Figuur 2.



Figuur 3.

kromme ontstaat, die de omhullende is van al deze deurstanden. Een dergelijke kromme heeft de eigenschap dat elk van de getekende lijnstukken aan deze kromme raakt.

Het was deze kromme, die ik in de vloer van een Haagse tram gekrast zag.

○○○ Het kost nogal wat wiskundige arbeid om deze kromme te identificeren. Dit wordt de uitkomst:

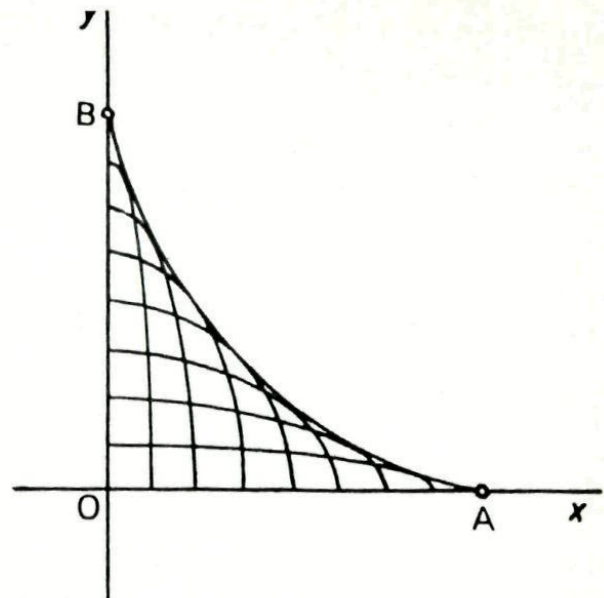
$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$$

Als je de geloofwaardigheid wil testen, kun je bedenken:

1. de kromme gaat door $(a, 0)$ en $(0, a)$
2. de kromme gaat door $(\frac{1}{4}a\sqrt{2}, \frac{1}{4}a\sqrt{2}) \dots$
3. de kromme heeft de bissectrice van het eerste kwadraat als symmetrieas (x en y zijn verwisselbaar)
4. punten, waarvoor geldt: $|x| > a$ of $|y| > a$, behoren niet tot de kromme.

Deze kromme heeft identieke takken in de andere drie kwadranten (voor ons nu minder interessant).

Welke baan beschrijft elk punt van de



Figuur 4

deur, terwijl deze openschuift?

Als je voldoende ver in de analytische meetkunde gevorderd bent, kun je bewijzen dat deze banen kwart delen van ellipsen worden. In figuur 4 zijn er enkele getekend. Gemakkelijker is te bewijzen dat het midden van de deur een kwart cirkel beschrijft met straal $\frac{1}{2}a$. Een cirkel is een ellips met gelijke assen. Er zijn zelfs twee ellipsen waarbij een as de lengte nul heeft. Kun je die vinden?

De bovengenoemde omhullende raakt ook aan deze ellipsen.

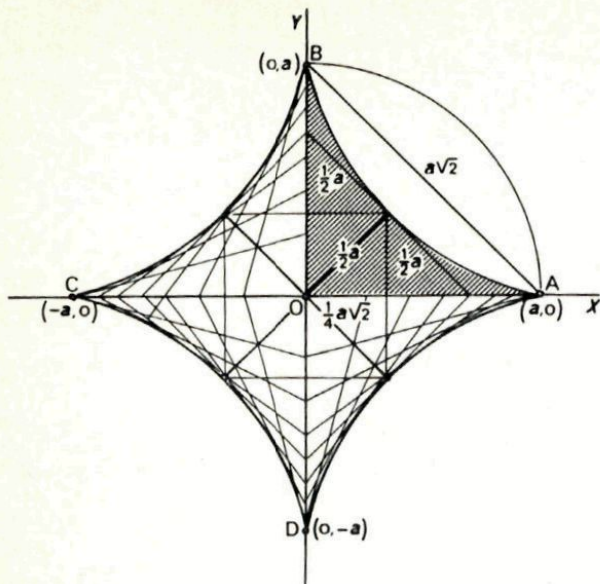
Ruimtelijke winst

We willen nu nog nagaan hoeveel ruimtelijke winst we met deze deur (nieuwe stijl) bereikt hebben.

Daartoe moeten we de oppervlakte van de kwartcirkel OAB vergelijken met de oppervlakte van het stuk begrensd door de omhullende en de beide assen (fig. 5).

De uitkomst voor de kwart cirkel wordt $\frac{1}{4} \pi a^2$ ofwel $\frac{8}{32} \pi a^2$.

De uitkomst voor de andere opper-

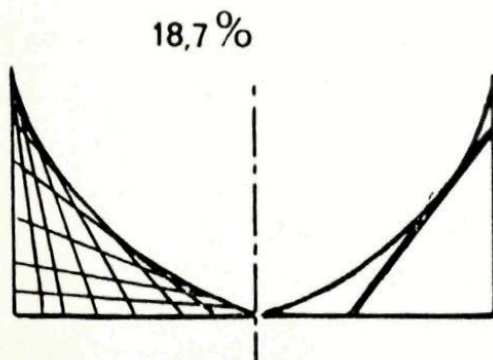


Figuur 5.

vlakke is te vinden door een vrij moeilijke integratie, waarbij de uitkomst $\frac{3}{32} \pi a^2$ wordt.

Als we letten op de verhouding, zien we dat dit laatste $\frac{3}{8}$ deel is van de kwart cirkel, zodat er $\frac{5}{8}$ deel van de ruimte met deze nieuwe methode bespaard wordt of $62\frac{1}{2}\%$ winst. Je ziet dat is niet gek.

Ze hadden het overigens bij die tram nog handiger ingericht. Let maar eens op de laatste serie tekeningen.



Figuur 6.

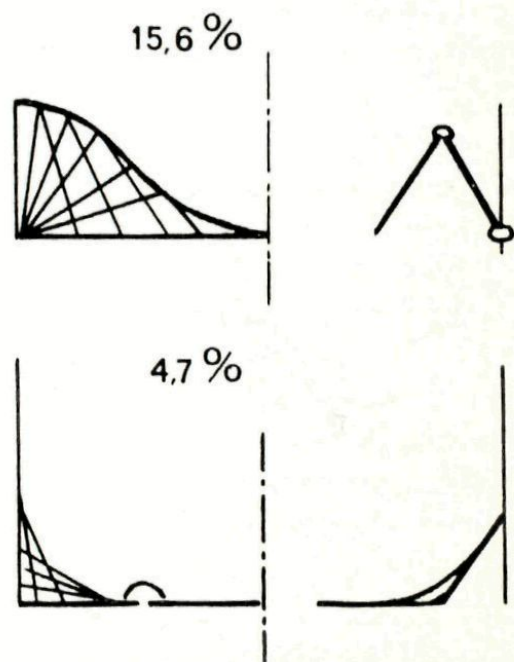
Nog anders

In figuur 1 is één draaideur geplaatst in een opening met breedte a . De bestreken vloeroppervlakte wordt gesteld op 100% (kwart-cirkel).

In figuur 2 nemen we twee halve draaideuren met breedte $\frac{1}{2} a$ (twee kwartcirkels).

De bestreken oppervlakte wordt nu de helft (50%).

In figuur 6 volgen we met deze beide halve deuren de nieuwe schuifmethode en vinden een oppervlakte die $\frac{3}{8}$ deel van de laatste uitkomst is, dus 18,7% van de oorspronkelijke kwartcirkel. In de onderste tekening van (fig. 7) vind je tenslotte de werkelijke uitvoering bij de bedoelde tram. De halve deuren zijn daar weer in twee gelijke delen verdeeld, die scharnierend met elkaar verbonden zijn. Ze schuiven achter elkaar langs een half zo grote kromme



Figuur 7.

met een oppervlakte die weer 4 x kleiner is ofwel 4,7% van de kwart cirkel. Dit betekent ongeveer 1/20 deel van de eerste oppervlakte.

Voorwaar in afgeladen trams een voortreffelijk idee!

In de bovenste tekening van (fig. 7)

vind je nog een methode, toegepast in sommige bussen; tweemaal twee halve deurtjes scharnierend verbonden. De winst is daar echter niet zo groot als in de tram die ons inspireerde tot dit artikel.

De sleutel van Pi in 23 decimalen

Draai de pagina een kwartslag linksom en kijk schuin, bijna vlak, over het papier, zodat alle lijnen sterk verkort gezien worden. Je leest dan een deel van een oud-Hollands versje. Het tweede deel van dit versje kun je lezen, als je de bladzijde weer een kwart slag terug draait.

WIE U EENS PI HEEFT
VERZONNEN IN ALOUDE
TIJDEN WAS NOOIT
BEGONNEN

INDERDAAD SPOEDIG
GEËINDIGD ALS HIJ HAD
VOORZIEN WELK GEZEUR DE
CIJFERS BIËN

Elk woord stelt nu een cijfer voor, namelijk het cijfer dat gevonden wordt door het aantal letters van het woord te tellen. Er is één uitzondering: voor het woordje Pi moet het cijfer 1 worden ingevuld. In 23 decimalen: $\pi = 3,14159$
26535 89793 23846 264.

Vijf studenten en hun hobbies

Oplossing:

Naam	studie	geboortestreek	sport
Peter	natuurkunde	Berlijn	postzegelverzamelaar
Karl	medicijnen	Baden	kaartspeler*
Frans	taalkunde	Beieren	bergbeklimmer
Hans	bouwkunde	Württemberg	atletiek
Helmut	rechten	Rijnland	zanger

* Iemand met een zwakke gezondheid is geen atleet of bergbeklimmer

Dominostenen op een schaakbord

Een schaakbord bestaat uit 64 velden. Met 32 dominostenen, die elk precies twee velden bedekken, kun je het gehele schaakbord vullen. Met één steen minder blijven er altijd twee velden over. Zou je die 31 stenen zo kunnen neerleggen dat de twee hoekvelden a 1 en h 8 onbedekt blijven (fig. 1) ? Je kunt lang of kort proberen zo'n bedekking te maken, maar het zal je niet lukken!

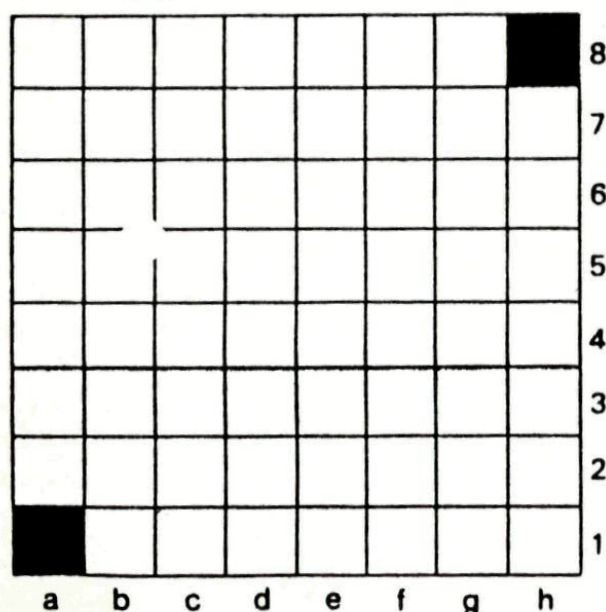
Bij elke mogelijke bedekking neemt elke steen namelijk precies één zwarte en één wit veld in beslag. De twee open velden zijn dus altijd verschillend van kleur. De velden a 1 en h 8 zijn echter beide zwart, dus ze kunnen niet allebei onbedekt blijven!

Is dit resultaat al tamelijk verrassend, nog verrassender is het feit dat het altijd mogelijk is de 31 stenen zo neer te leggen dat twee willekeurig gekozen velden van verschillende kleur onbedekt blijven! De Amerikaanse wiskundige Ralph Gomory gaf hiervoor een buiten-

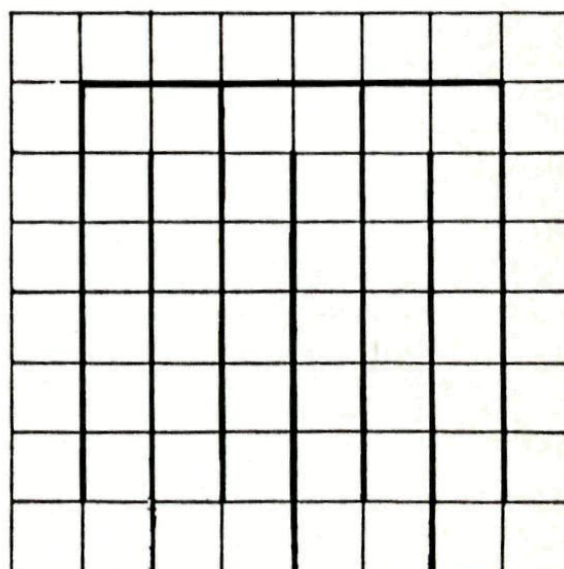
gewoon fraai en erg eenvoudig bewijs.

Hij rangschikte de velden als een soort 'kralensnoer', zoals aangegeven in figuur 2. Denk je maar in dat het bord is opengesneden langs de dikke lijnen. Laat je nu twee willekeurige velden van verschillende kleur weg, dan breekt het snoer in twee stukken, die elk een even aantal velden bevatten. Elk van die stukken kun je dus precies met dominostenen opvullen. Ook bij 'omslaan van een hoek' kom je niet in moeilijkheden.

Deze methode is zo eenvoudig dat



Figuur 1.



Figuur 2.

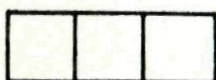
je haar gemakkelijk kunt onthouden en uitvoeren.

Verbaas je familieleden en vrienden er maar eens mee!

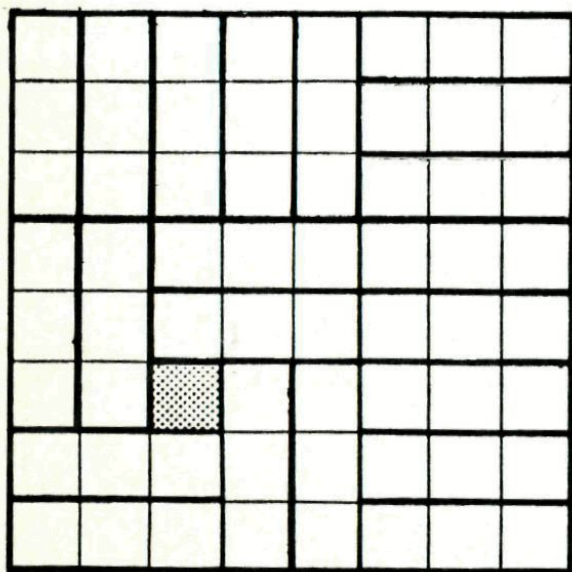
Het wordt indrukwekkender als je ze niet toont hoe je het doet, maar alleen het resultaat laat zien.

Helaas bestaat het dominospel slechts uit 28 stenen, dus je zult er drie bij moeten maken. Je kunt ook op een kleiner bord werken. Bij 6 x 6 velden gaat het net zo, en ook bij een rechthoekig bord van 8 x 7 velden werkt de methode (maak de tanden van de 'hooivorken' maar één veld korter).

Hoe zit het echter met een 7 x 7 borden? Er zijn nu niet meer evenveel witte als zwarte velden. Van de ene kleur, zeg zwart, is er één veld méér. Bij een maximale bedekking blijft er dus altijd één zwart veld over.



Figuur 3.



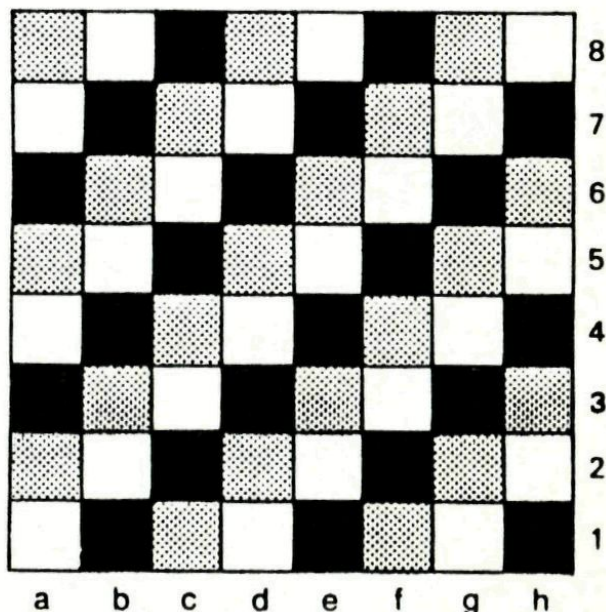
Figuur 4.

Kan elk zwart veld ook openblijven? Jazeker! Ga dit zelf maar eens na!

'Driemino's'

We gaan nu proberen het normale 8 x 8 schaakbord te vullen met wat je zou kunnen noemen rechte 'driemino's': stenen die precies drie velden op een rijtje beslaan (fig. 3). Er zijn $64 = 3 \cdot 21 + 1$ velden, dus er blijft altijd minstens één veld onbedekt.

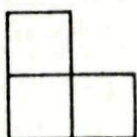
In figuur 4 zie je een bedekking met 21 driemino's. Veld c3 is opengebleven. Door draaiing kun je hieruit bedekkingen maken die f3, f6 of c6 onbedekt laten. Het verrassende is nu dat dit de enige velden zijn die bij een bedekking met 21 rechte driemino's open kunnen blijven! Dit is in 1954 ontdekt door de Amerikaan Solomon Golomb. Ook zijn bewijs is erg mooi. Hij kleurt de velden van het bord niet met twee, maar met drie kleuren, zoals aangegeven in figuur 5. om druktechnische redenen hebben we



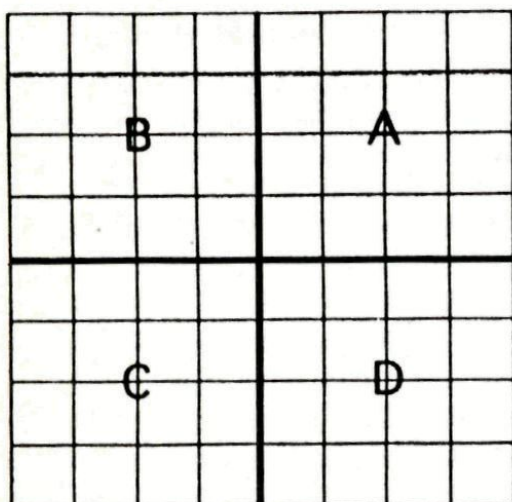
Figuur 5.

hier de 'kleuren' grijs, wit en zwart genomen. Deze kleuring is zo gemaakt, dat hoe je ook een driemino neerlegt, hij altijd één grijs, één wit en één zwart veld bedekt. Er zijn 21 grijze, 22 witte, en 21 zwarte velden. Het veld dat openblijft moet dus wit zijn. Niet alle witte velden kunnen openblijven, want zou er een bedekking

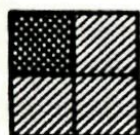
L-vormige driemino's



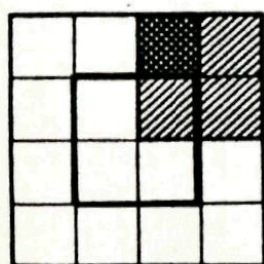
Figuur 6.



Figuur 7.



Figuur 8.



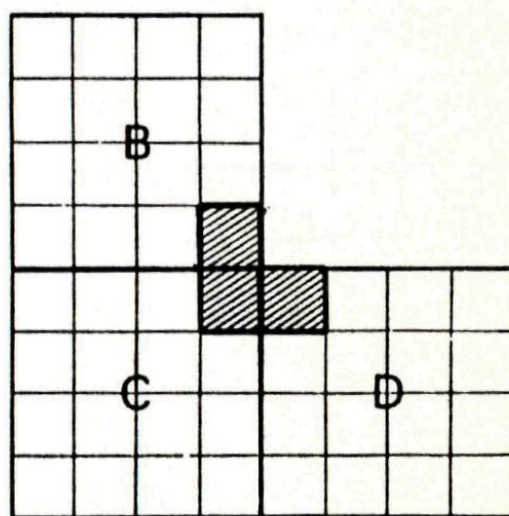
Figuur 9.

bestaan die bijvoorbeeld alleen veld b5 onbedekt zou laten, dan zou je door de bedekking een kwartslag te draaien een bedekking hebben verkregen die veld d2 open laat. Dit veld is echter grijs, dus zo'n bedekking kan niet bestaan. De enige witte velden die door draaiing van het bord over 90 (een kwartslag) overgaan in witte velden, zijn c3, c6, f3 en f6, en dit zijn dus de enige velden die open kunnen blijven!

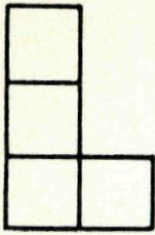
Ten slotte nog iets over 1-vormige driemino's (fig. 6).

Ook hiervan passen er hoogstens 21 op een schaakbord, waarbij dan één veld onbedekt blijft. Zijn er weer speciale velden die als enige onbedekt kunnen blijven? Het zal je wel verbazen dat in dit geval elk veld als enige open kan blijven! Om dit te bewijzen verdelen we het schaakbord eerst in vier gelijke vierkanten kwadranten, die A, B, C, en D zullen noemen (fig. 7). Elk kwadrant bevat 16 velden.

Ieder kwadrant wordt weer in 4



Figuur 10.



Figuur 11.

deelkwadranten van vier velden verdeeld. Kies nu een willekeurig veld, dat als enige open moet blijven. Het ligt in een van de vier grote kwadranten, zeg in A. Het deelkwadrant van A waarin ons uitverkoren veld ligt, vullen we verder op met een driemino (fig. 8). Vervolgens vullen we de andere drie deelkwadranten van A met vier driemino's (fig. 9). Nu laten we uit de drie kwadranten B, C en D het veld weg dat het dichtst bij het centrum van het bord ligt (fig. 10). De rest van zo'n kwadrant kunnen we dan op dezelfde manier met driemino's opvullen als we dat met kwadrant A hebben

gedaan. De rol van het open veld wordt hier gespeeld door het veld dat het dichtst bij het centrum ligt. Ten slotte leggen we onze laatste driemino op de drie nog onbedekte velden in het midden!

Er is over dit soort bedekkingen met do-, drie-, vier- en meermينو's nog veel meer bekend. Ook over het analoge probleem in de ruimte, het vullen van rechthoekige dozen met blokjes die bestaan uit een aantal kubusjes aan elkaar, is veel onderzocht en geschreven. We besluiten dit verhaal met het volgende vraagstuk.:

Is het mogelijk een dambord (van 10 x 10 velden), te bedekken met 251-vormige viermino's van de vorm van figuur 11?

Wie van onze lezers vindt hiervoor een oplossing?



Oplossing: Ring

De drie bochten vormen samen juist een complete cirkelvormige ring. Verder zijn er nog drie rechte stukken met een totale lengte x . Stel verder de straal van de buiten-cirkel R en van de binnencirkel r . De totale buitenomtrek is dan $2\pi R + x = 21$ en de totale binnenomtrek $2\pi r + x = 19$.

Aftrekking geeft:

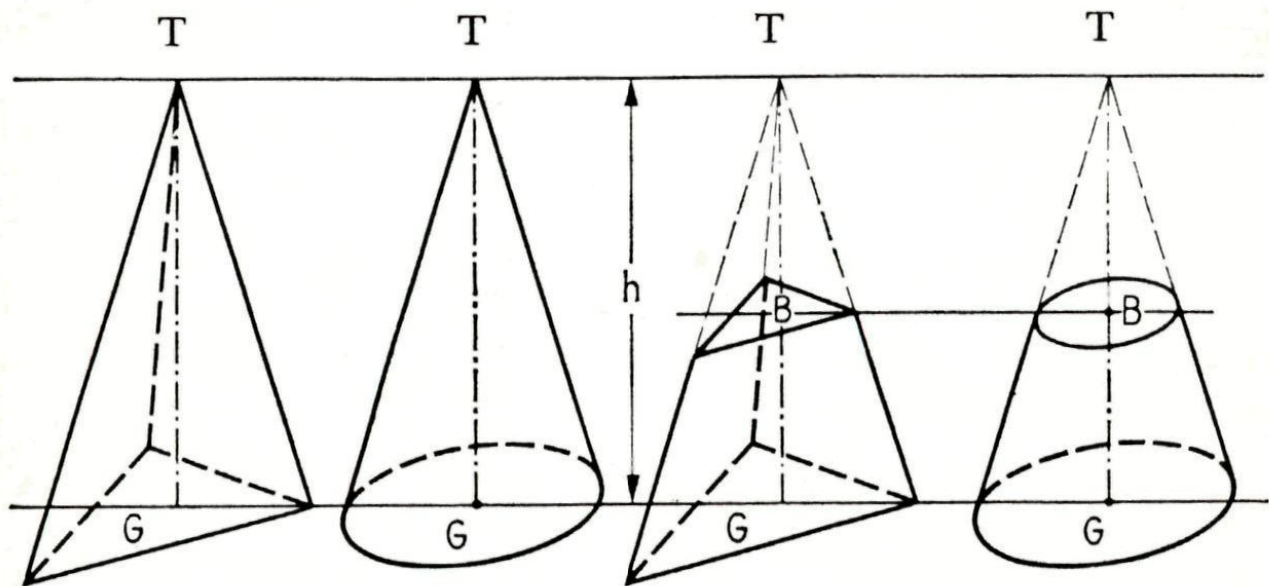
$$R - r = \frac{1}{\pi}$$

En dat is dan de breedte van de ring.

De gemiddelde lengte van de ring is $\frac{19+21}{2} = 20$, zodat $A = 20 \times \frac{1}{\pi} = \frac{20}{\pi}$ □

Oplossing: katten, kroezen, bloempotten en maiskolven

Er moeten, om evenwicht te krijgen, op de rechterschaal vijf kroezen worden geplaatst. □



*gelijke grondoppervlakte + gelijke hoogte + gelijke doorsnee
= gelijk volume*

*Foto omslag: Filevorming bij Bergen op Zoom
Johan van Gurp*

Pythagoras wiskunde tijdschrift voor jongeren

Redactie: Henk Huysmans, Henk Mulder

Medewerkers: Prof. H. Duparc, B. de Jongste, Thijs Notenboom,
Hans Oomis, F. Roos

Redactiesecretariaat: Henk Mulder, Geersbroekseweg 27,
4851 RD Ulvenhout.

Eindredacteur: Henk Huysmans

Inhoud jaargang 30, nummer 5

Hoe krom is een gekromd oppervlak? / 1

De kurve van Sierpinski / 4

Verkeerscapaciteit / 6

De supercirkels van Piet Hein / 8

Ring / 10

Vijf studenten en hun hobbies / 11

De goedkoopste verpakking / 12

Dat rolt wel / 14

Pi in code / 16

De sneeuwvlok-kurve van

Van Koch / 17

Het recht trekken van een cirkel-
boog / 19

Een formule voor volume-
bepaling / 20

Katten, kroezen, bloempotten en
maiskolven / 23

Van rotsblok naar scharnier en
verder / 24

De sleutel van Pi in
23 decimalen / 27

Vijf studenten en hun hobbies:
oplossing / 27

Dominostenen
op een schaakbord / 28

J. van de Craats

Oplossing: ring / 32

Oplossing: katten enz. / 32

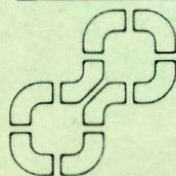
Pythagoras verschijnt zesmaal per
schooljaar; opgave van abonnementen
bij de uitgever (zie onder).

Abonnementen zijn doorlopend, tenzij
voor 1 september schriftelijk bij de
uitgever is opgezegd.

Bij tussentijdse abonnering ontvangt
men ook de reeds verschenen num-

mers. Betaling per acceptgirokaart.

Tarieven	NLG/BEF
Abonnement Pythagoras	25,-/450
Luchtpost-toeslag	10,-
Inclusief Archimedes	45,-/800
Luchtpost-toeslag	20,-
Losse nummers	5,-/ 90



stichting ivio

Postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL.)

Tel. 03200-76411

educatieve uitgeverij - instituut voor buitenschools
onderwijs - wereldschool - AO-reeks - leerprojecten

Postgiro Nederland: 287934

Postcheck België: 000-0130850-94