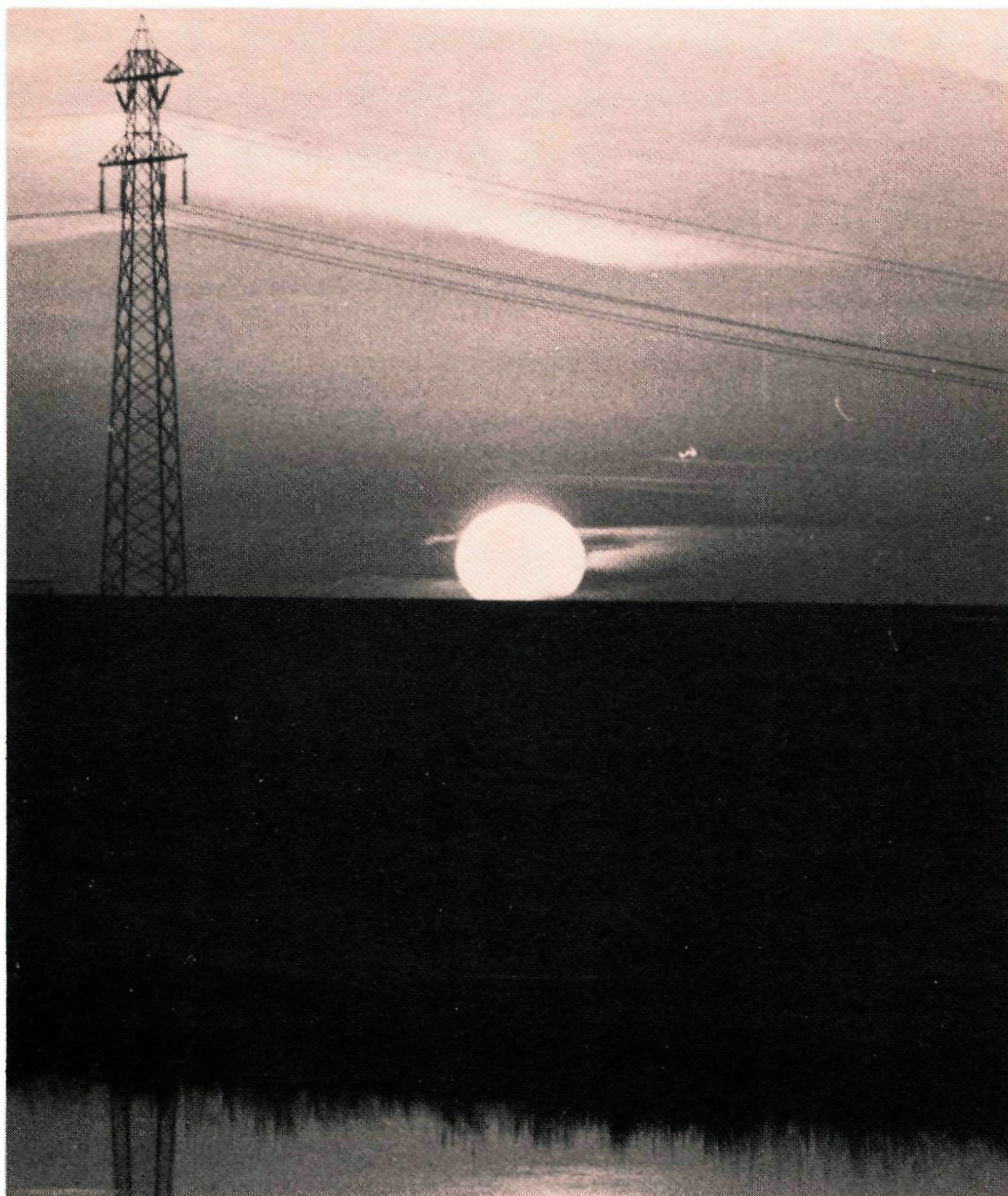




Pythagoras



wiskunde tijdschrift voor jongeren

stichting ivio

30e jaargang
nummer 6
augustus 1991

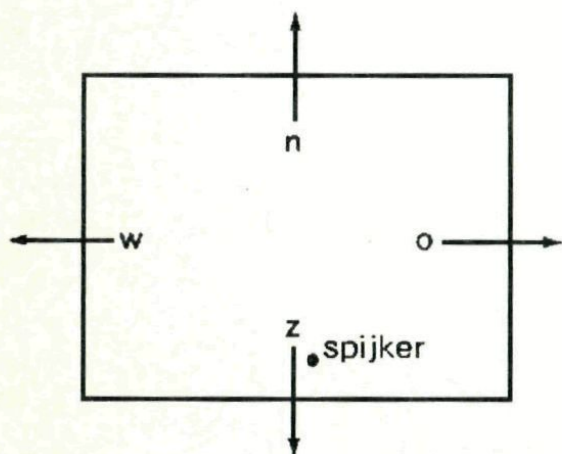
Schaduwen

○○○ In dit artikel gaan we de baan bekijken die de (zonne)schaduw van de punt van een stokje gedurende een hele dag, bijvoorbeeld om het half uur, beschrijft. Dit levert namelijk een aantal gegevens op waarachter wiskundig interessante zaken schuilgaan.

Voor de inrichting van de 'waarnemingspost' doen we de volgende simpele suggesties. Voor wie dat wil, kan het natuurlijk perfecter. Neem een plaatje triplex of multiplex van bijvoorbeeld 30 x 40 cm. Sla daarin bij de rand loodrecht een spijker; de spijker functioneert als schaduwstok. Geef de wind-richtingen op de plank aan.

Met behulp van een kompas wordt de plank buiten georiënteerd. Om het uur (of om het half uur) wordt nu de zonneschaduw van de spijker op de plank getekend. Telkens wordt bij de uitgetekende schaduw het tijdstip van vastleggen genoteerd.

De uit de waarnemingen verkregen gegevens kunnen op verschillende wijzen verwerkt worden. Op twee manieren gaan we hierop nader in.

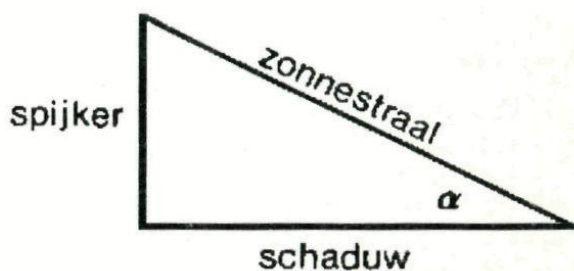


Figuur 1.

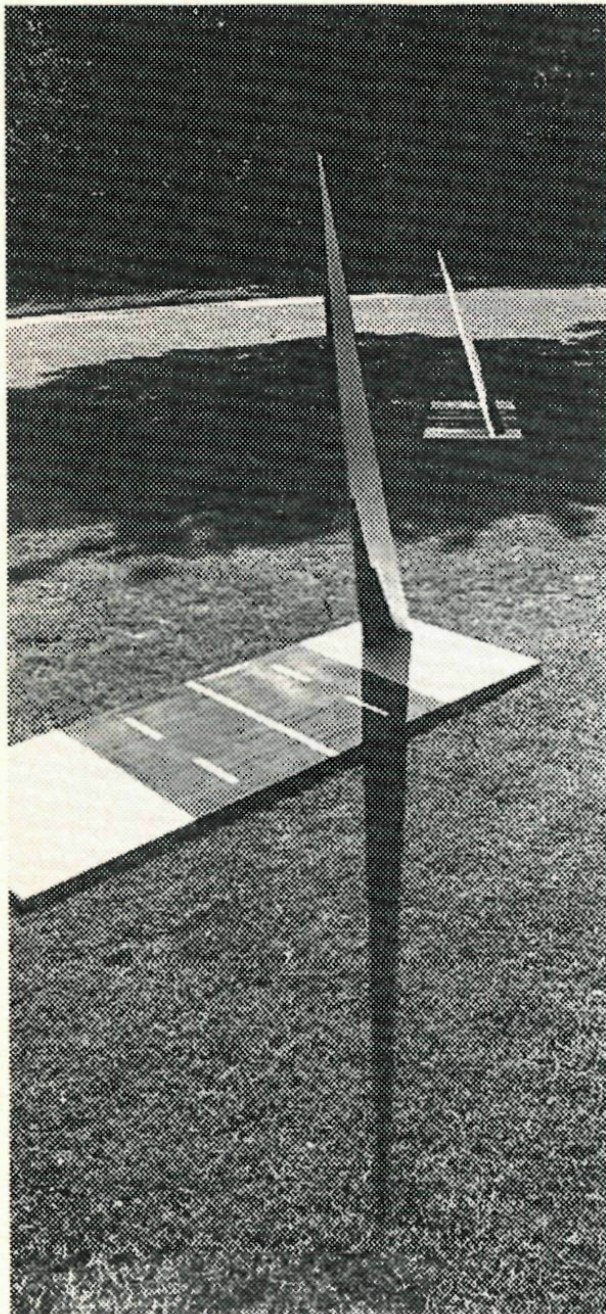
Grafieken

De zonnestraal, die telkens nog juist het topje van de 'schaduwstok' passeerde, vormde samen met de spijker en de schaduw steeds een rechthoekige driehoek waarvan de rechthoekszijden bewaard zijn gebleven. Met behulp van die rechthoekszijden kunnen de rechthoekige driehoeken voor de verschillende tijdtippen eenvoudig gereconstrueerd worden, en hiermee de hoogte van de zon op de verschillende waarnemingsmomenten uitgedrukt in de hoek (fig. 2). Hetzelfde is te bereiken met behulp van het begrip tangens en berekenen met behulp van een rekenmachine.

Uit deze gegevens kan nu een hoogte/tijdgrafiek voor de zon op een zekere dag worden samengesteld. Omdat onze waarnemingen een deel zijn van een



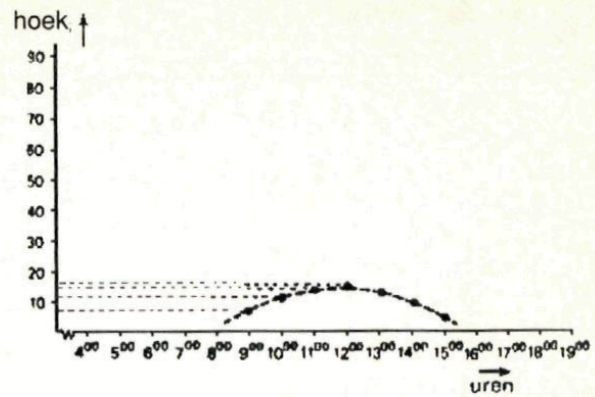
Figuur 2.



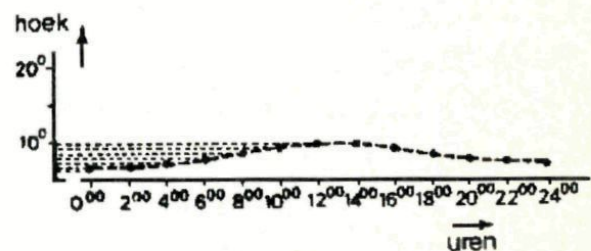
doorlopend proces, mogen we de grafiek doorlopend veronderstellen en dus de punten, die in de grafiek onze waarnemingen weergeven, onderling verbinden.

Aan dergelijke grafieken kun je omgekeerd heel wat informatie ontleen, bijvoorbeeld uit figuur 3:

- tijdstippen bepalen van zonsopkomst en ondergang;
- bij de hoogste stand staat de zon slechts op 15° , dus nogal laag.



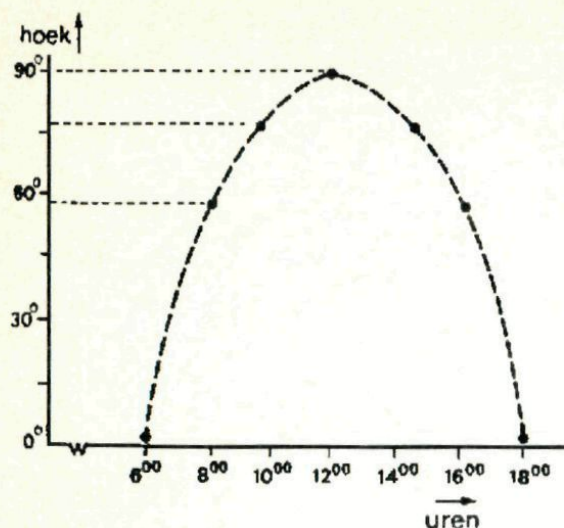
Figuur 3.



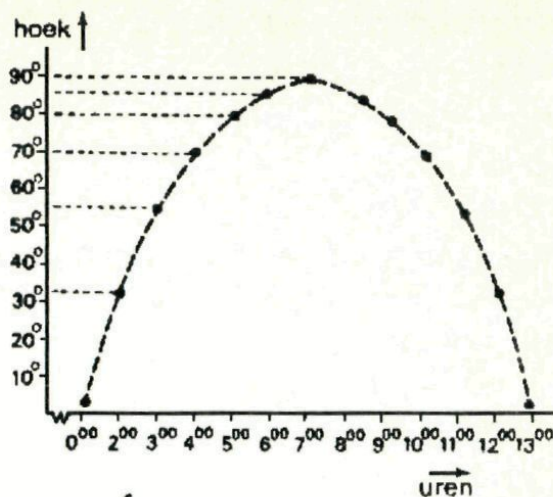
Figuur 4.

Als er bij vermeld wordt dat de grafiek voor Nederland geldt, kunnen we concluderen dat de waarnemingen 's winters gedaan zijn. Dat klopt ook weer niet helemaal, want in Nederland bereikt de zon niet precies om twaalf uur zijn hoogste punt maar ongeveer een half uur later (of een half uur eerder bij zomertijd). Geef voor jezelf commentaar op de grafieken 4, 5 en 6.

Als de kortste schaduw in Arnhem om 12.31 uur waargenomen wordt en in Zeist om 12.34 uur, hoe kun je dan hieruit de uursnelheid van de aarde op onze breedte afleiden? De vraag is zuiver theoretisch, want zo nauwkeurig zijn de momenten van de kortste schaduw niet te meten.



Figuur 5.



Figuur 6.

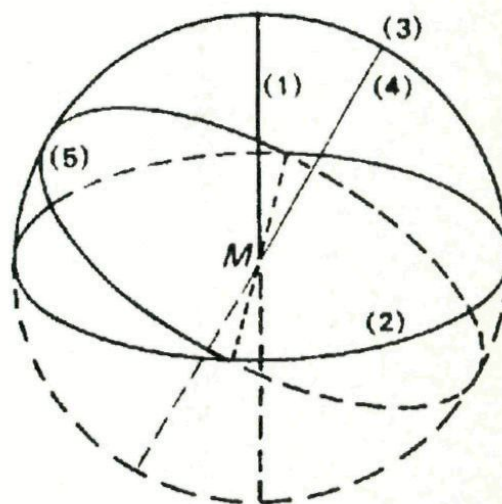
Kegelsneden

Een andere interessante vraag die bij de waarneming gesteld kan worden is: hoe is het verloop van het eindpunten van de schaduwen? Is dat verloop afhankelijk van de dag waarop de waarnemingen gedaan zijn? Zo ja, wat is dan het totale jaarbeeld van de door de schaduwtop afgelegde banen?

Het eerst wereldbeeld (fig. 7)

Om greep te krijgen op zogenaamde hemelverschijnselen, bijvoorbeeld de beschrijving van de beweging van de sterren, heeft men het volgende model ontworpen:

- beschouw de ruimte om je heen als een bol en verplaats jezelf in de rol van waarnemer in het middelpunt M van die bol;
- we denken alle sterren even ver van ons verwijderd, namelijk op het oppervlak van die bol;
- over de afstand van ons waarnemingspunt (het middelpunt M van die bol) tot de bol (dus de straal) maken we ons niet druk;



Figuur 7.

- we moeten deze straal alleen zeer veel groter veronderstellen dan de afstanden waarmee we op aarde vertrouwd zijn;
- van de beschreven bol zien we eigenlijk maar de helft, de andere helft bevindt zich onder de horizon.

Het beschreven model wordt de rustende hemelbol genoemd, omdat we er alleen maar de sterrenhemel mee kunnen beschrijven, zoals we die op een bepaald ogenblik zien.

Voor het vervolg voeren we enige noodzakelijke termen in. Let daarbij op de overeenkomst met ons aardbeeld.

Als we in onze 'waarnemingspost' M een schietlood ophangen, dan bepaalt dit de richting van de verticaal (1). De richting van deze verticaal is dus afhankelijk van de plaats M , waar men zich op aarde bevindt!

Het vlak door M , loodrecht op de verticaal, snijdt onze rustende hemelbol volgens de horizon (2). Wanneer we de dagelijkse beweging van de sterrenhemel ten opzichte van de horizon beschouwen, blijkt dat het punt (3) op zijn plaats blijft. Dit is een punt in de buurt van de poolster. We noemen het punt de hemelpool (noordpool). De as van de hemelbol door de hemelpool en ons waarnemingspunt M noemen we de hemelas. Het vlak door M loodrecht op de hemelas snijdt de hemelbol volgens een cirkel, die de hemel-equator heet.

Het tweede wereld beeld

Zoals we gezien hebben, stelde het 'model' van de rustende hemelbol ons in staat het sterrenbeeld op een bepaald moment vast te leggen. Als we echter ook de dagelijkse beweging in ons model willen opnemen, schiet het tekort. Om daartoe ook nog in staat te zijn, verwerpen we het statische model niet, doch breiden het uit, in die zin dat we ons de rustende

hemelbol omgeven denken door een tweede bol met een iets grotere straal.

Alle sterren denken we ons overgebracht op de buitenste bol en we veronderstellen de binnenste doorzichtig.

De buitenste (*wentelende*) hemelbol laten we in een sterrenetmaal (dat is 23 uren en 56 minuten) om een as draaien, die door de polen van de rustende hemelbol gaat.

In feite hebben we de draaiing van de aarde om zijn as overgebracht op de ruimte en beschouwen we in dit hemelbolmodel de aarde als rustend middelpunt en de hemel als wentelende bol.

Elke ster, meegevoerd door de wentelende hemelbol, beschrijft nu op de rustende hemelbol een cirkelvormige weg.

Het zal op grond van het geschetste model duidelijk zijn, dat elk van die sterbanen evenwijdig is met de hemelequator. Denk aan de breedtecirkels op een aardglobe. Wat ons binnen dit kader echter voornamelijk interesseert zijn de bewegingsverschijnselen van de zon.

De bewegingsverschijnselen van de zon

Wanneer we elke maand gedurende een of meer dagen de beweging van de zon over de rustende hemelbol zouden volgen, zouden we onze waarnemingen als volgt kunnen samenvatten:

- de zon beschrijft elke dag een baan, die de vorm heeft van een cirkelboog (het gedeelte onder de horizon zien we niet!); die baan is evenwijdig met de hemelequator;
- de punten van opkomst en ondergang veranderen van dag tot dag;
- de hoogste stand van de zon verandert van dag tot dag.

In figuur 8 zijn drie verschillende dagbanen van de zon over de rustende hemelbol beschreven.

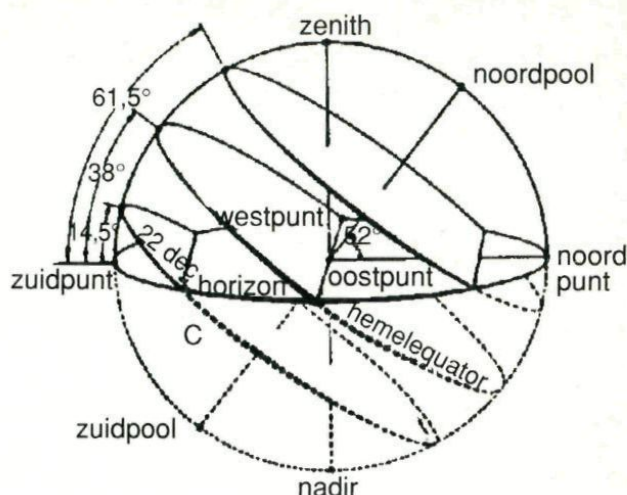
Indien we deze afbeelding vanuit onze aardse situatie interpreteren, komen we tot het verloop van de eindpunten van de schaduwen.

Uit figuur 8 lichten we nu een dagbaan *C* van de zon en het horizontale vlak *H*. Loodrecht op dit horizonvlak staat de spijker (met top *T*), die voor de nodige schaduwen moest zorgen.

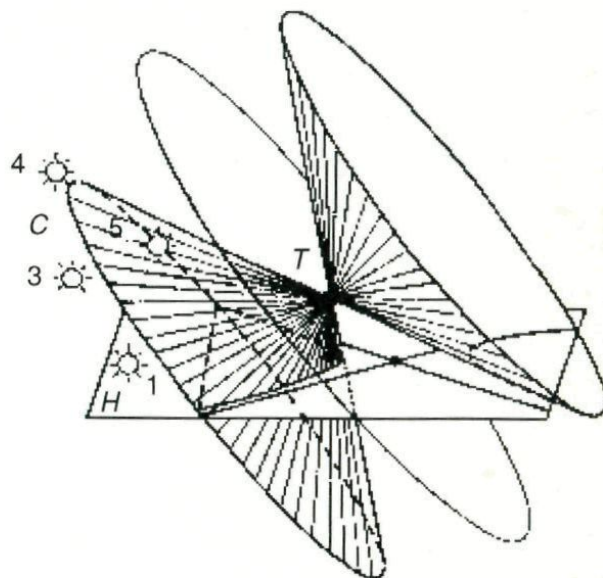
T blijkt de top van een kegel te zijn en *C* de richtkromme (fig. 9).

De mantel van de kegel wordt gevormd door die zonnestrallen, die nog juist de spijker passeren (de hypotenusa's van onze rechthoekige driehoeken), de kegel wordt gesneden door de horizonvlak *H*. De snijkromme blijkt dus een kegelsnede te zijn. Op de waarnemingsplank (fig. 10) vormen de eindpunten van de schaduwen dus een deel van bedoelde snijkromme.

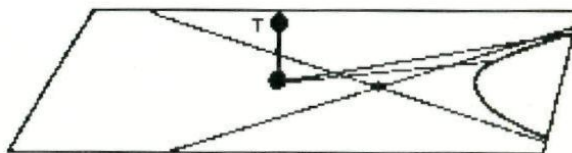
Bij opkomst en ondergang van de zon zijn de zonnestrallen die op het kegeloppervlak liggen evenwijdig met het horizonvlak er veroor-



Figuur 8. Dagbanen van de zon over de rustende hemelbol.



Figuur 9.



Figuur 10.

zaken op die momenten dus oneindig lange schaduwen.

Hiermee is de verzameling van de schaduw eindpunten vrijwel vol-

Bij de figuur op het omslag:

Zonsondergang op een zomer-avond

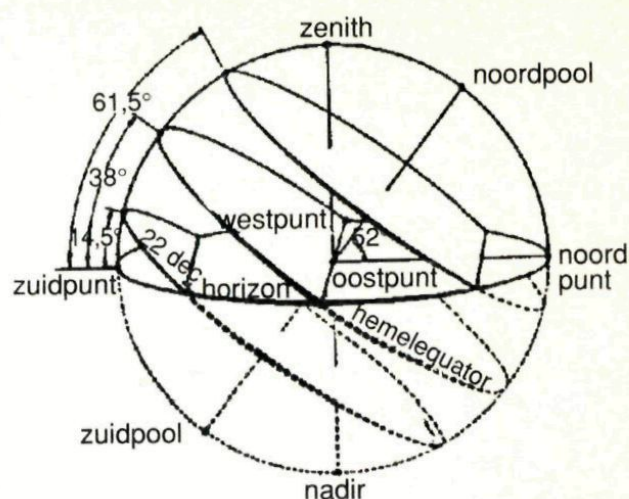
ledig ontmaskerd. Immers, een kegelsnede met oneindig verre punten moet wel een hyperbool zijn. De oneindig lange schaduwen bij opkomst en ondergang bepalen de asymptotische richtingen van de gevonden hyperbool.

Deze bevindingen zijn vrijwel algemeen geldig voor het hele jaar, zij het dat er zich (theoretisch gesproken) tweemaal per jaar een uitzonderingssituatie voordoet. Dat is het geval wanneer de dagbaan van de zon samenvalt met de hemelequator (fig. 11).

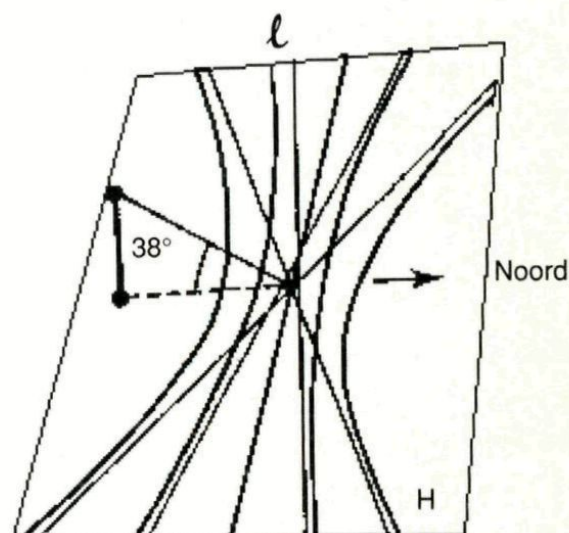
Dat doet zich steeds opnieuw voor op 21 maart en 23 september. Het topje van onze schaduwstok ligt dan namelijk in het vlak van de 'zonnebaan'. De kegel, waarvan in figuur 9 sprake was, blijkt nu 'platgedrukt' tot een vlak. Dit vlak snijdt het horizontale vlak volgens een rechte (1) (fig. 12).

Op het moment dat de zon haar hoogste punt heeft bereikt op een van die dagen, blijkt het eindpunt van de schaduw het snijpunt van de asymptoten aan te wijzen (fig. 12).

Gedurende de perioden tussen 21 maart - 23 september en 23 september - 21 maart 'beweegt' de betrokken tak van de hyperbool zich tussen de ontaarding 1 en de uiterste standen, die bereikt worden op 22



Figuur 11.



Figuur 12.

juni en 22 december (zie fig. 11). In het algemeen spreekt men van een ontaarde kegelsnede wanneer een snijvlak door de top van de kegel gaat. De kegelsnede beperkt zich dan tot een tweetal snijdende lijnen (of eventueel een punt). In het geval van de zon blijkt de kegelsnede te ontaarden, omdat de kegel zelf tot een plat vlak ontaard is.

Kun je je plaatsen op aarde voorstellen waar de verzameling schaduwtoppen een ellips wordt? (Denk aan de situatie van fig. 4). ■

Kringetjes lopen

○ Het is een bekend, maar niettemin mysterieus feit, dat een mens in cirkels rondloopt als hij zich niet kan oriënteren. In bossen of op vlakten zonder paden, in dichte mist of verblindende sneeuwstormen blijkt steeds dat iemand, die denkt in een rechte lijn te lopen, op zijn punt van uitgang terugkeert.

Deze eigenschap is trouwens niet puur menselijk: een geblinddoekte hond en een kip zonder kop lopen in cirkels; blinde vogels vliegen in cirkels.

De Noorse bioloog Guldberg, die dat verschijnsel onderzocht, vertelt van drie reizigers, die in een nacht, waarin het sneeuwde, probeerden vanuit een blokhut een dal van vijf kilometer breed over te steken. Tot vijf maal toe kwamen ze weer terug bij de blokhut, waarna zij hun pogingen opgaven tot de volgende morgen. Ook vertelt hij van roeiers, die in de mist probeerden een baai van vijf kilometer breed over te steken. Na lang roeien zagen zij land: het was de plek waar ze waren vertrokken. Het zal duidelijk zijn dat, als iemand rechtsom een cirkel met

een middellijn van 4 kilometer loopt, zijn linkerbeen een langere weg aflegt dan zijn rechterbeen. Stel de afstand tussen zijn voeten 10 cm, dan is de afstand die zijn linkerbeen aflegt $2\pi (2000,1)$ m en de afstand die zijn rechterbeen aflegt $2\pi (2000)$ m.

Het verschil is dus $0,2\pi$ m (dus 63 cm).

Als ons slachtoffer een staplengte heeft van 1 m, dan heeft hij 4000π stappen gedaan (≈ 12600). Dat wil dan zeggen, dat de staplengte van zijn linkerbeen gemiddeld $0,2\pi / 4000 = 5 \cdot 10^{-5}$ m = $5 \cdot 10^{-2}$ mm = 0,05 mm langer is dan de staplengte van zijn rechterbeen; dit werkelijk minimale verschil verhinderde de reizigers uit Guldbergs waarnemingen de overkant te bereiken. ■



Graankorrels

○○ Er is een legende waarin verteld wordt, dat de sjah van Perzië de bedenker van het schaakspel beloonde met alles wat hij maar wilde hebben. Wat de bedenker vroeg, scheen echter niet zoveel te zijn. Op het eerste veld van zijn schaakspel wilde hij 1 graankorrel, op het tweede wilde hij er 2, op de derde wilde hij er 4 en verder telkens het dubbele op het volgende veld. De sjah dacht dat het een redelijk verzoek was en zond daarom een bediende weg om een zak graan te halen. Maar wat gebeurde?

Het totale aantal korrels nam zo snel toe dat er bij het vierenzestigste veld meer dan 9 quintiljoen korrels waren (9.000.000.000.000.000.000). Dit zou genoeg zijn om Perzië onder een laag van 7 cm graan te bedekken!!

Het is natuurlijk overbodig om te zeggen dat de sjah niet zo in zijn sas was toen hij ontdekte dat de bedenker meer kreeg dan hij verwachtte.

Hoeveel?

We gaan dit totale aantal korrels eens bekijken:

Het aantal per veld is een rij:
1, 2, 4, 8, 16, 32 (machten van 2).
Als we een kleiner schaakbord nemen met 4 vlakken dan is de som 'van korrels'

1	2
4	8

of

2^0	2^1
2^2	2^3

$$1 + 2 + 4 + 8 = 15.$$

De som bij een schaakbord met negen vlakken is $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 = 511$.

1	2	4
8	16	32
64	128	256

2^0	2^1	2^2
2^3	2^4	2^5
2^6	2^7	2^8

Zou hier een logisch verband in zitten?

Kijken we nog eens naar het schaakbord van 4 velden:

$$15 = 16 - 1 = 2^4 - 1.$$

Het aantal op het schaakbord van 9 velden is $511 = 512 - 1 = 2^9 - 1$.

Dit hulpmiddeltje gaan we gebruiken op een schaakbord met 16 velden:

$$\text{als je optelt } 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{15} = 65.535 = 65.535 - 1 = 2^{16} - 1.$$

Bij 25 velden krijgen we dan 33554399 (!!) graankorrels.

Je begrijpt dat bij een echt schaakbord met 64 velden er dus $2^{64} - 1$ korrels zijn.

Het bovenstaande probleem kenden jullie misschien al. Stel nu

dat onze bedenker van het schaakspel nog meer had willen hebben door op het eerst veld 1, tweede veld 3, derde veld 9, vierde veld 27, ... graankorrels te vragen. Bij een schaakbord met 4 vlakken had hij dan: $1 + 3 + 9 + 27 = 40$ korrels gehad; bij een schaakbord met 9 velden zou hij krijgen:

$$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187 + 6561 = 9841 \text{ korrels.}$$

Ook hier verwacht je misschien wel een 'formule'. Die is er!

Een 4-velds bord gaf ons 40

$$\text{korrels : } 40 = \frac{81 - 1}{2} = \frac{3^4 - 1}{2}.$$

Een 9-velds bord telde in totaal

$$9841 \text{ korrels : } 9841 = \frac{19.683 - 1}{2} = \frac{3^9 - 1}{2}.$$

Een bord met 16 velden

levert ons $\frac{3^{16} - 1}{2} = 21.523.350$ korrels op! (dat is al 21.457.815 meer dan in ons eerste probleem!)

Je zult wel begrijpen dat een 64-velds bord $\left(\frac{3^{64} - 1}{2}\right)$ ontzettend veel korrels oplevert.

Als ik in plaats van machten van 3, nu machten van 4 neem, dan krijg ik op een 4-vlaks veld:

$$1 + 4 + 16 + 64 = 85 = \frac{4^4 - 1}{3};$$

$$\text{op een 9-vlaks veld : } 1 + 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 + 1096 + 16384 + 65536 = 87381 = \frac{4^9 - 1}{3}$$

korrels.

Ik vermoed dus op een compleet

$$\text{schaakbord : } \frac{4^{64} - 1}{3}.$$

Bij machten van 5 krijg ik op een 4-vlaks veld : $1 + 5 + 25 + 125 =$
 $= 156 = \frac{5^4 - 1}{4}$

en bij een 9-vlaks veld : $\frac{5^9 - 1}{4}$

(reken maar na!).

Je ziet dat er duidelijk verband bestaat tussen het aantal vlakken en met welke macht je rekt. Schrijven we de gevonden resultaten eens onder elkaar:

velden machten	4 velden	9 velden	16 velden	64 velden
2	$\frac{2^4 - 1}{2 - 1}$	$\frac{2^9 - 1}{2 - 1}$	$\frac{2^{16} - 1}{2 - 1}$	$\frac{2^{64} - 1}{2 - 1}$
3	$\frac{3^4 - 1}{3 - 1}$	$\frac{3^9 - 1}{3 - 1}$	$\frac{3^{16} - 1}{3 - 1}$	$\frac{3^{64} - 1}{3 - 1}$
4	$\frac{4^4 - 1}{4 - 1}$	$\frac{4^9 - 1}{4 - 1}$	$\frac{4^{16} - 1}{4 - 1}$	$\frac{4^{64} - 1}{4 - 1}$

Een algemene uitleg ziet er zo uit: $x \in \mathbb{N} \wedge x > 1$

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{63} = \frac{x^{64} - 1}{x - 1}.$$

Deze formule kunnen we nog abstracter maken, want het gaat ook nog op voor 'grotere schaakborden' dus met meer velden. Dan wordt het:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

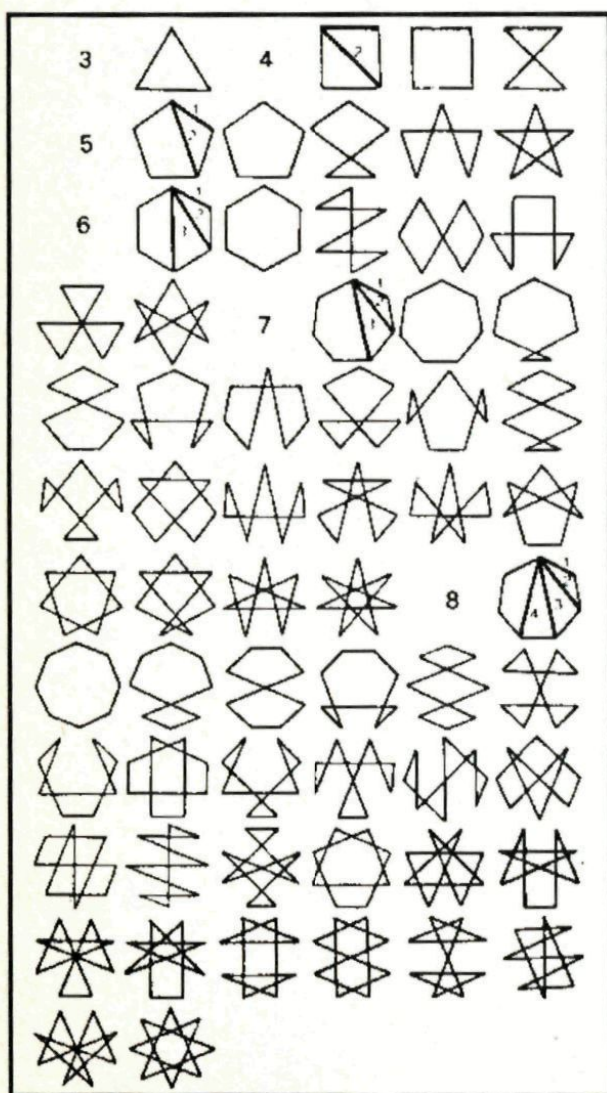


Variaties op veelhoeken: lijnen, banden en ringen

○ Uit regelmatige veelhoeken kun je, met enig creatief vermogen, een rijk assortiment van nieuwe figuren ontwerpen. Dergelijke geometrische patronen komen we in allerlei ornamenten tegen.

We zullen onszelf hierbij de volgende spelregels stellen: doorloop de hoekpunten van een regelmatige veelhoek in een willekeurig te kiezen volgorde, waarbij je elk hoekpunt slechts eenmaal mag passeren, zodat de figuur komt te bestaan uit één in zich gesloten lijn; alleen vormen met enige symmetrie zijn toegestaan.

We zouden moeten beginnen met de regelmatige driehoek, maar



Figuur 1. Symmetrische variaties op veelhoeken.

hierop zijn geen variaties mogelijk. Bij de vierhoek lukt één variatie: de zandloper (fig. 1).

De vijfhoek biedt op deze wijze 4 structuren, de zeshoek 11. Bij de zeshoek zijn er hier maar 6 van getekend, Probeer nu zelf de resterende 5 te ontwerpen. Van de zevenhoek zijn er al 24 exemplaren (waarvan 18 getekend). De achthoek heeft er 67 enz. We zullen ons met het bepalen van deze aantallen verder niet bezig houden. Met enige fantasie herken je natuurlijke vormen als een bloem, een kikker, een ster.

Men kan dergelijke patronen als men wil rubriceren, aldus:

1 betekent een zijde, 2 de kortste diagonaal, 3 de dan in lengte volgende diagonaal enzovoort.

Driehoek	vierkant	vijfhoek
111	1111	11111
	1122	11122
		11222
		22222

zeshoek

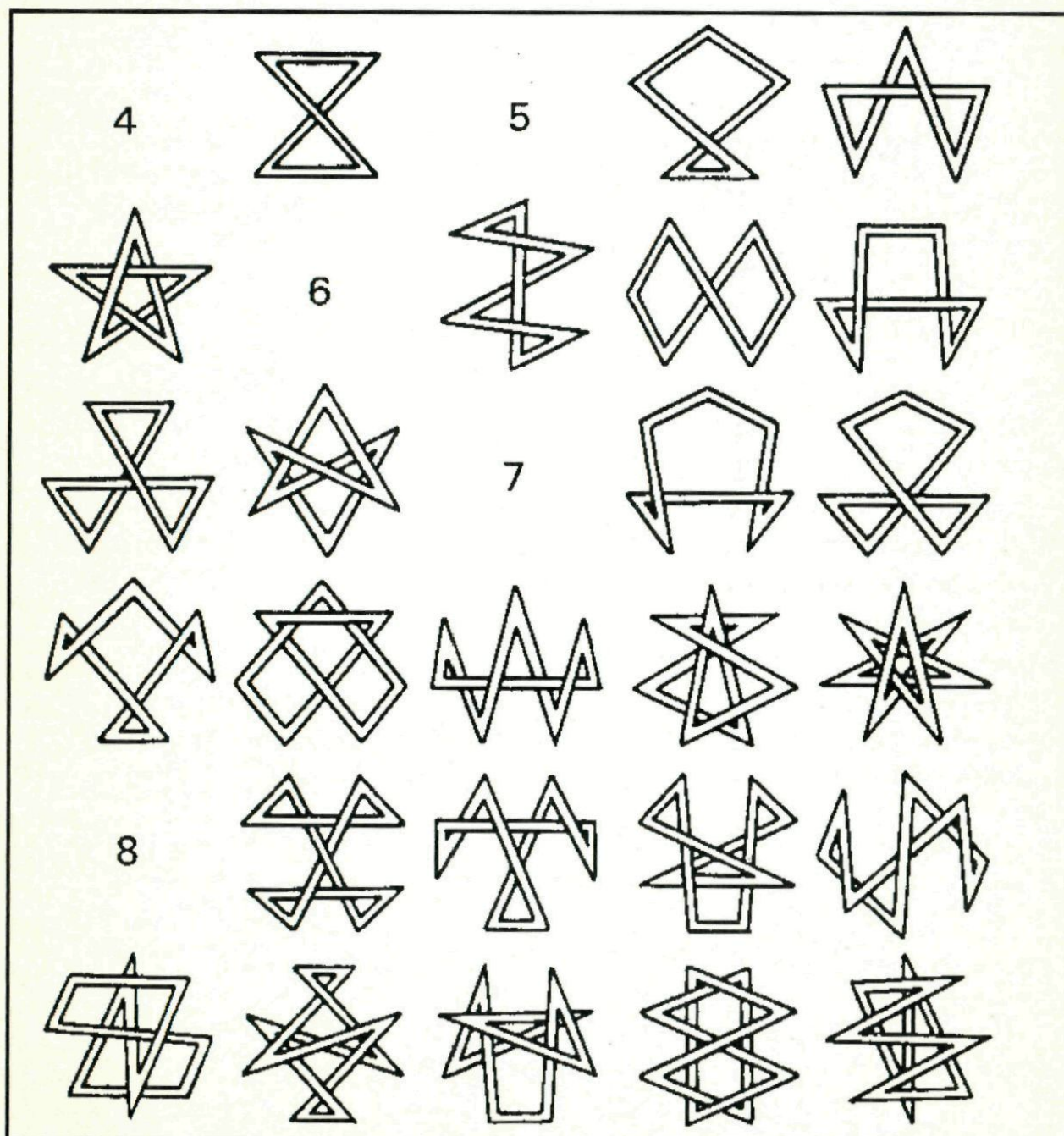
111111	112222
111122	112233
111133	122223
111223	122333
111333	222233 enz.

We kunnen het spel nog boeiender maken door aan deze platte lijnvormige figuren relief te geven; dit gelukt door de zijden te verbreden en als banden in elkaar te vlechten.

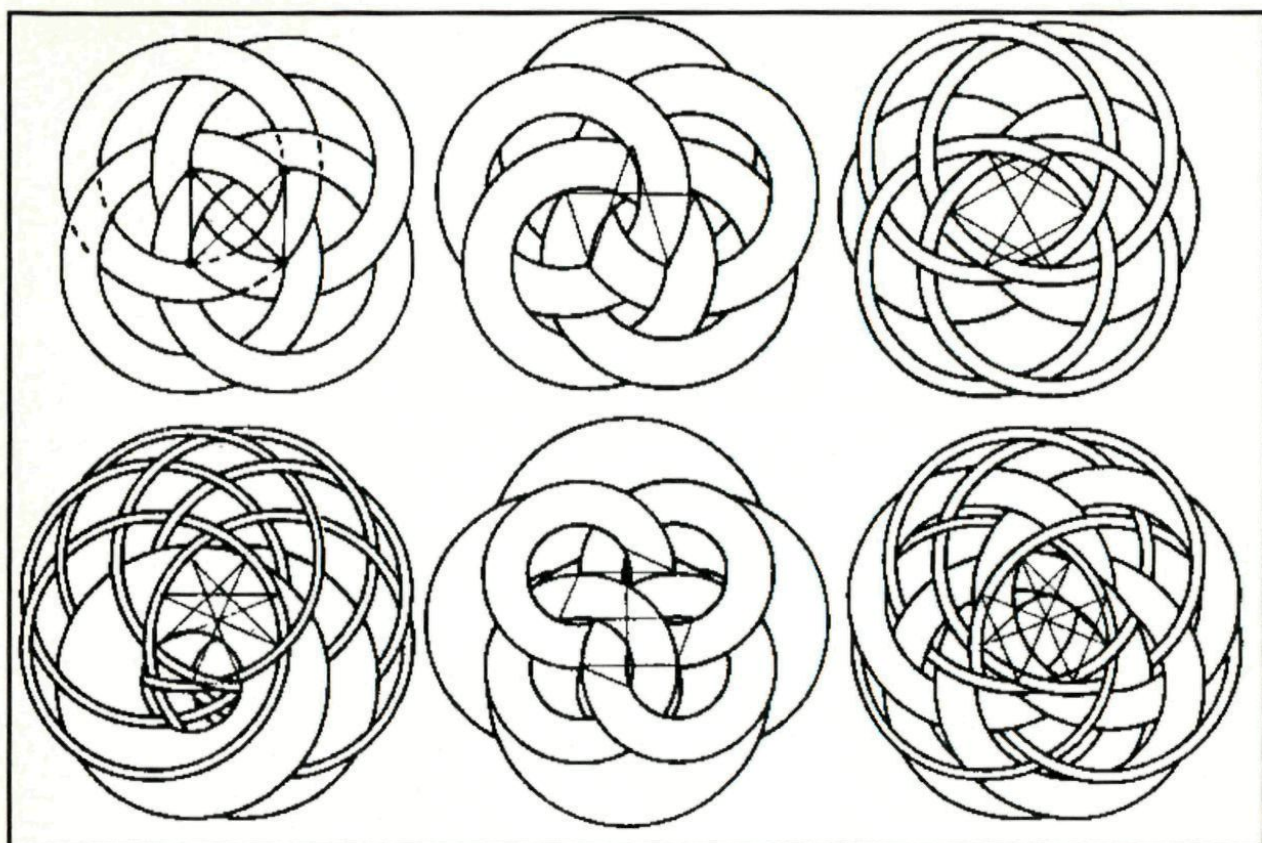
Deze figuren zijn bijzonder fraai (fig. 2).

Probeer de overeenkomstige basisfiguren in figuur 1 terug te vinden. Bij vergelijking zul je merken hoeveel gevarieerder, hoeveel levendiger ze zijn geworden.

We gaan nog een stap verder. De bedoeling is uit de veelhoeken ringvormige patronen af te leiden. Neem allereerst maar weer de



Figuur 2. Variaties op figuren in gevlochten bandvorm.



Figuur 3. Variaties op figuren in gevlochten ringvorm.

variatie op het vierkant: de zandloper (fig. 3). We spreken nu af dat we cirkels gaan tekenen met de hoekpunten van de veelhoek als middelpunt en straallengten overeenkomstig de getekende zijden en diagonalen.

Op deze wijze ontstaan ringen die daarna nog ingenieus in elkaar gevlochten moeten worden.

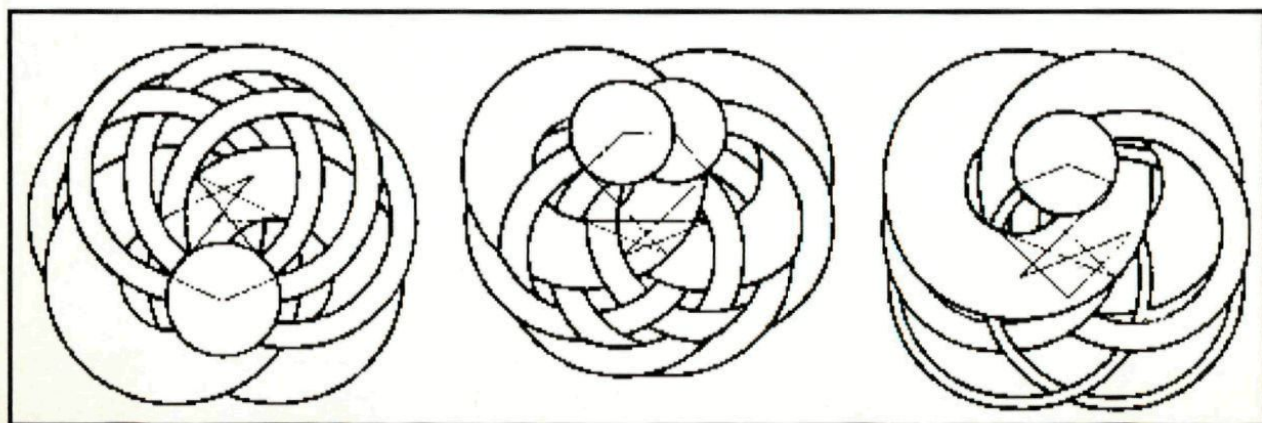
Je kunt hier eindeloos mee door-

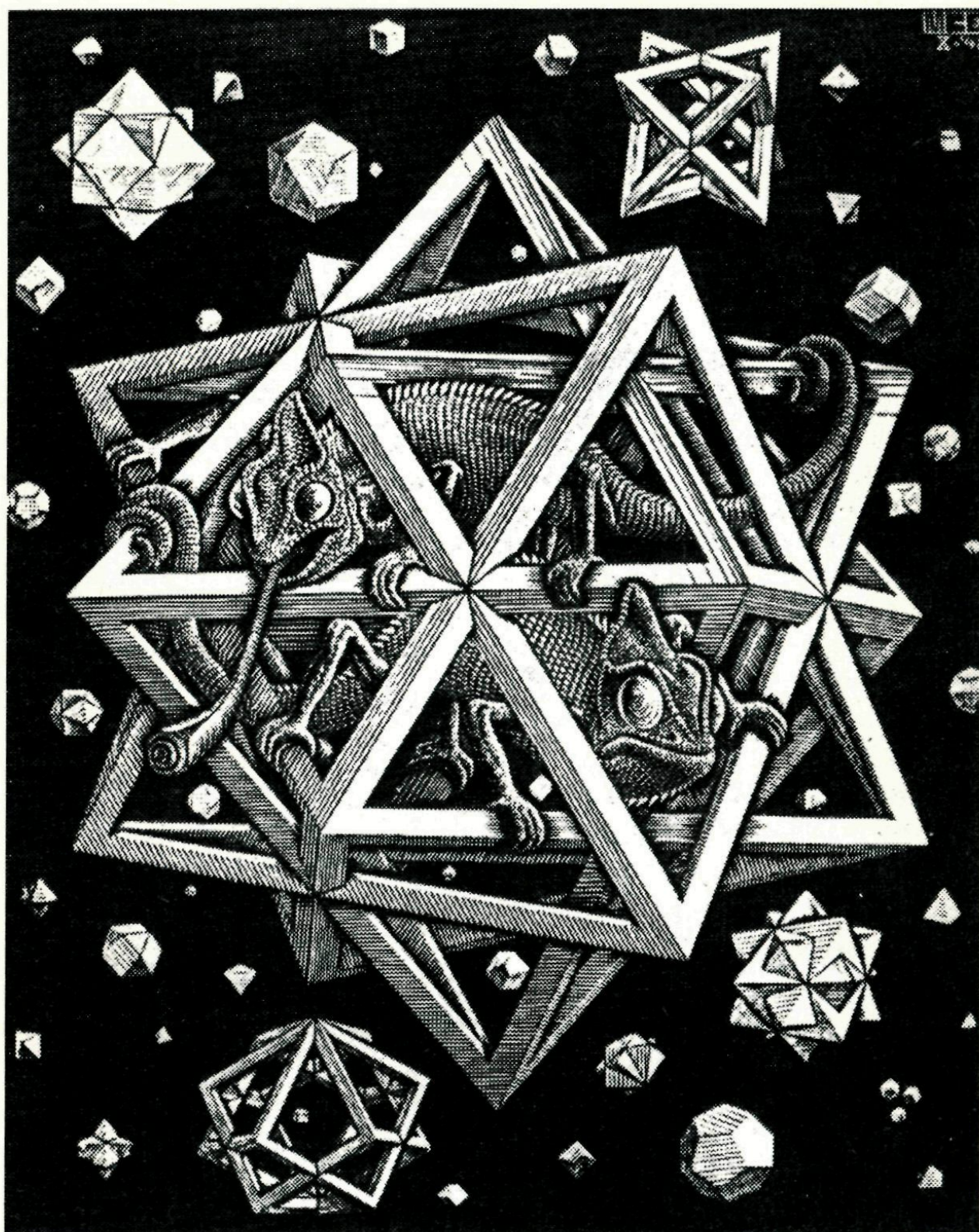
gaan. In figuur 3 staan maar een paar willekeurige voorbeelden.

Ga nu zelf eens aan het werk.

Neem een regelmatige veelhoek begin eenvoudig en maak een lijnvormige variatie, dan een bandvormige. Probeer daarna een ringenstructuur.

Als je het al te moeilijk vindt, met je eerst maar proberen een gegeven voorbeeld na te werken. ■



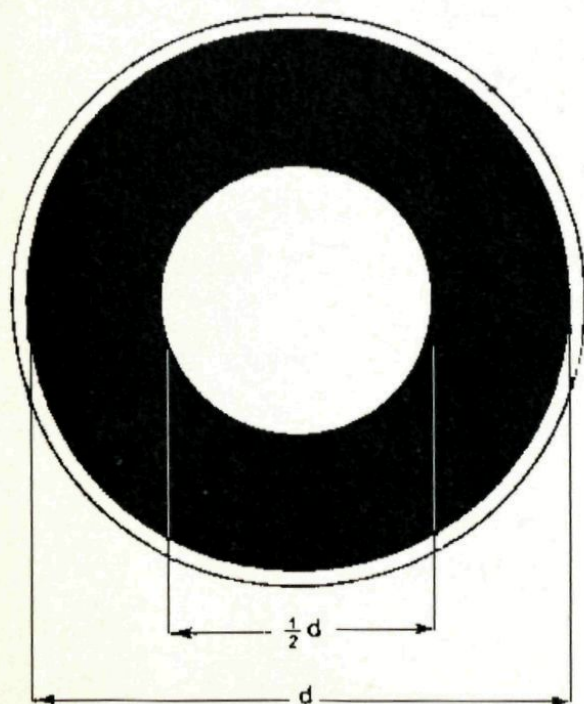


In de houtgravure *Sterren* uit 1948 heeft Escher een groot aantal regelmatige en half-regelmatige veelvlakken afgebeeld.

Hoe diep is dat gat?

○ Als je wilt weten hoe hoog een toren is dan is het niet nodig om een touwtje te spannen van de top tot de voet en dan de lengte van dat touw op te meten. Het zou zelfs niet kunnen als je de toren niet op mocht. Nee, je kunt gewoon beneden op de grond blijven. Zo'n meting gaat met hoeken. Zo kunnen we de afstand tot de zon meten, zonder naar de zon te reizen.

Een soortgelijk probleem heb je bij een pijp, waarvan je de lengte of de diepte wilt meten. Ook hier stellen we als spelregel: je kunt niet naast de pijp komen en ook het gat niet inkruipen met een meetlint. In figuur 1 is een pijp getekend waar we inkijken in de richting van de as. Door de perspectiefwerking lijkt de cirkelvormige begrenzing bij het eind van de pijp kleiner dan die aan het begin. De grootte van die cirkel is op een of andere manier een maat voor de diepte aan het gat. Immers, hoe dieper de pijp



Figuur 1. Inkijk in een diep gat.

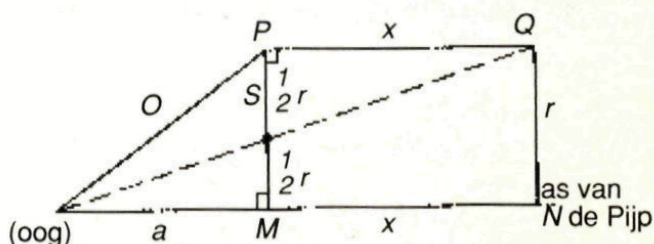
hoe kleiner die eindcirkel wordt. Het zou spannend zijn als we in onze opzet konden slagen en een relatie wisten te leggen tussen die cirkelgrootte en de pijplengte. En als spelregel geldt dan: voer de meting helemaal uit bij het begin van de pijp. Trouwens als zo'n pijp ingebouwd is zouden we niet anders kunnen.

○○ Een manier

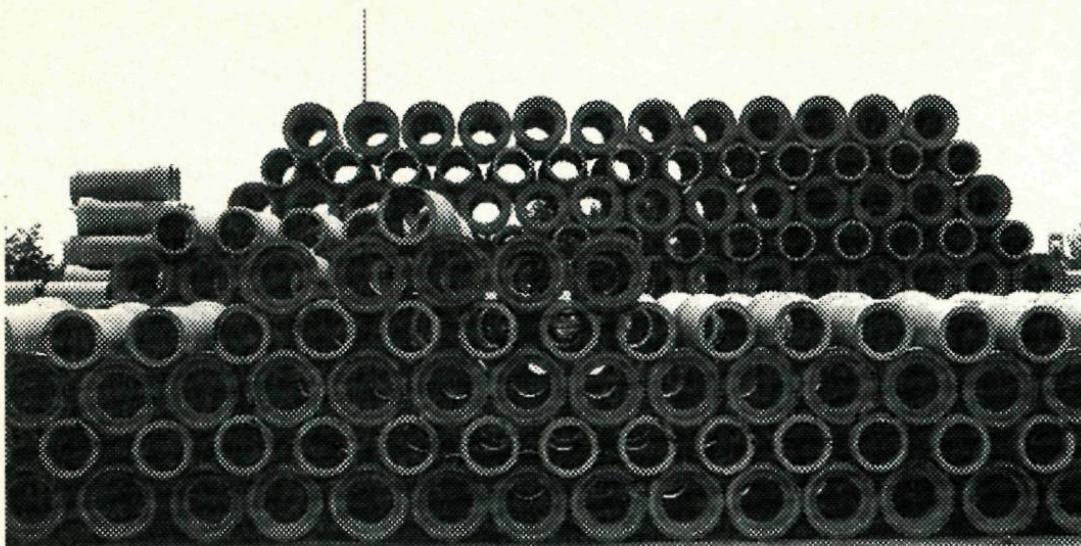
Ga zover van de pijp af achteruit, dat de eindcirkel een schijnbare diameter krijgt, die precies de helft is van die aan de voorkant (fig. 2). Zouden we daarmee de pijplengte kunnen achterhalen?

OMN is de as van de pijp; r de straal.

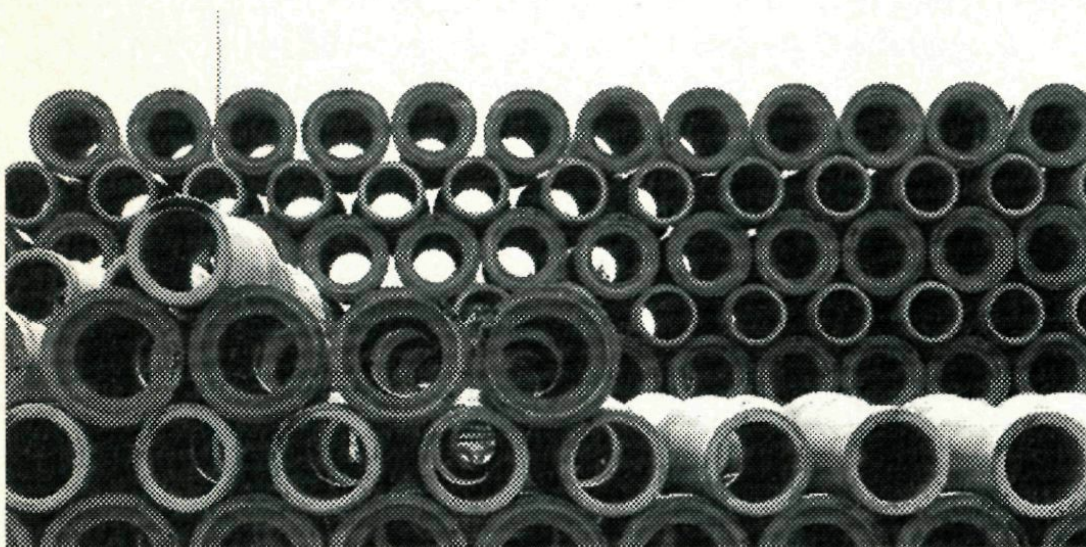
O is de positie van ons oog en a de afstand OM van ons oog tot de pijp.



Figuur 2. Hoekverkleining door perspectief.



Ver weg. De eindcirkel is bijna even groot als de begincirkel.



Dichterbij. De eindcirkel heeft de halve grootte van de begincirkel.



Dichtbij. De eindcirkel wordt betrekkelijk klein.

We zien gemakkelijk dat ΔOMS het rotatiebeeld is van ΔQPS , zodat we weten dat $x = a$.

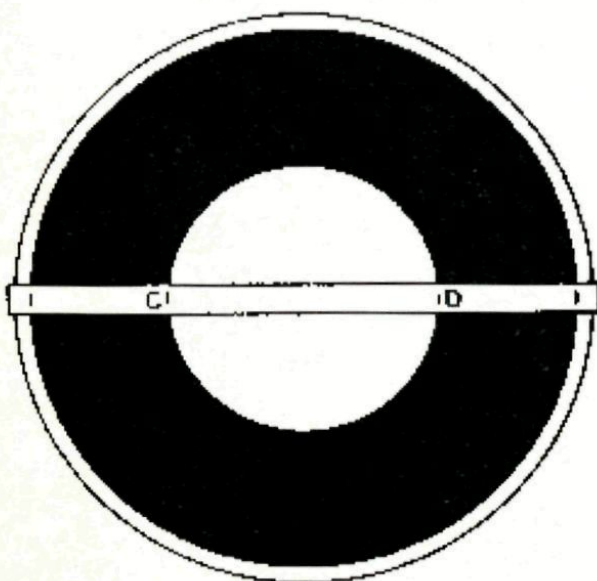
De onbereikbare pijplengte x is op die manier naar buiten gekomen en wel als de afstand a van het oog tot de pijprand.

Om precies op te maken of we op de goede afstand van de pijp zitten, kunnen we het best gebruik maken van een strook zoals in figuur 3. Daar hebben we van te voren de halve diameter op afgetekend, zodat we dan alleen nog maar hoeven te zorgen dat de eindcirkel passeert bij de punten C en D .

Zelf proberen

Pas de beschreven meetmethode eens toe op een pijp en kijk daarbij wat de nauwkeurigheid wordt van het meetresultaat.

Vergelijk de gemeten waarde met de werkelijke pijplengte.



Figuur 3. Instelling met behulp van een meetstrook ($CD = d$).

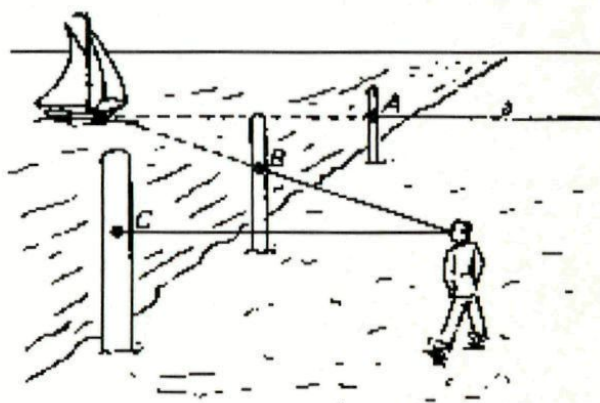
Denk eraan dat als je op deze manier de diepte van een waterput wilt bepalen en je ziet de binnenring als spiegelbeeld van de bovenrand in het water, dat de uitkomst het dubbele is van de afstand van bovenrand tot waterspiegel.

Probeer ook zelf eens de regel te formuleren voor het geval het niet mogelijk is om de juist afstand tot de pijp te nemen en je ziet bijvoorbeeld de kleine cirkel niet half maar een derde keer zo groot als de grote cirkel. Of nog algemener: kleine en grote cirkel verhouden zich als $m : n$ en de afstand tot de voorkant van de pijp is a .

Geschiedenis

Deze methode is al oud.

Van Thales van Milete (rond 600 v. Chr.) wordt verteld dat hij op een soortgelijke wijze de afstand van een schip tot de kust bepaalde. Hij sloeg drie palen A , B , C , in één lijn en op onderling gelijke afstanden aan de oever in de grond (fig. 4).



Figuur 4.

Hij liep nu vanaf paal C landinwaarts, evenwijdig aan de lijn langs schip en paal A (rechte a), totdat hij vanuit zijn plaats het schip zag achter paal B. De door hem afgelegde afstand was gelijk aan de gevraagde afstand. Dat evenwijdig lopen aan rechte a is in de praktijk natuurlijk moeilijk. Je

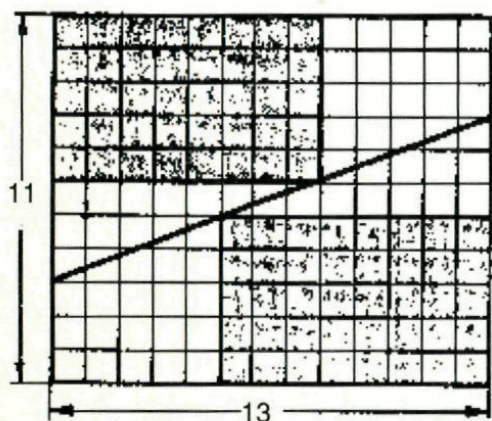
kunt je voorstellen dat iemand over de lijn a , steeds zorgend het schip achter paal A te houden, met Thales meeliep, waarbij die twee hun onderlinge afstand gelijk hielden door een strak touw. Hoe het allemaal precies in z'n werk is gegaan weten we niet. ■

Paradoxale oppervlakten: $63 = 64 = 65!?$

○ Je kunt iemand, ook al is die niet bepaald een wiskundige, aangenaam bezighouden door te goochelen met vierkantjes. Als enig bijzonder hulpmiddel heb je een schaar nodig.

Oefen eerst zelf en verricht de volgende handelingen:

1. Teken een niet te grote rechthoek op ruitjespapier, 13 lang en 11 breed. Ruitjes (vierkantjes) met zijn $\frac{1}{2}$ cm zijn al voldoende.
2. Teken figuur 1. Stel jezelf (of aan anderen) de vragen:
 - a. Hoe groot is de oppervlakte van de eerst rechthoek? (die is dus $11 \times 13 = 143$).
 - b. Hoe groot is de oppervlakte van de gearceerde rechthoek?



Figuur 1.

(totaal 80).

- c. Hoe groot is de niet-gearceerde oppervlakte? (63).
3. Knip de gearceerde oppervlakte-delen los en leg die opzij.
4. Knip de vier overige vlakdelen los. Dat zijn dus 2 rechthoekige driehoeken en 2 trapezijs.
5. Rangschik die vier stukken zo, dat een vierkant ontstaat. Het wonder is gebeurd, de oppervlakte is $8 \times 8 = 64$.
6. Hergropeer de 4 stukken tot een rechthoek met zijde 5. (Dat puzzelen alleen al kan voor hilariteit zorgen.) De oppervlakte is nu $13 \times 5 = 65$. Ongelooflijk, nog een vierkantje uit het niets gewonnen.

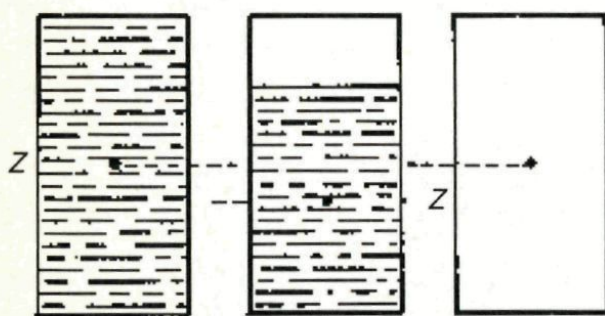
Je begrijpt, dat ergens de schoen wringt. Maar waar? Bewijs de fout met behulp van (x, y) -coördinaten. De oplossing op pagina 32. ■

Het dilemma van het bierblikje: kantelen of niet

○○ Het is niet leuk als een gedeeltelijk leeggedronken blikje bier omvalt. En dat kan zich gemakkelijk voordoen als je het onder 'primitieve' omstandigheden moet neerzetten bijvoorbeeld aan het strand. Het is dan van belang om te weten hoe het met de stabiliteit van zo'n blikje gesteld is. Zoals je wel zult weten is een voorwerp des te stabiel opgesteld naarmate zijn massamiddelpunt lager ligt.

Bij een vol blik ligt het massamiddelpunt precies in het midden (fig. 1a). Als je er wat uit hebt gedronken is het massamiddelpunt gedaald (fig. 1b). Maar als je het

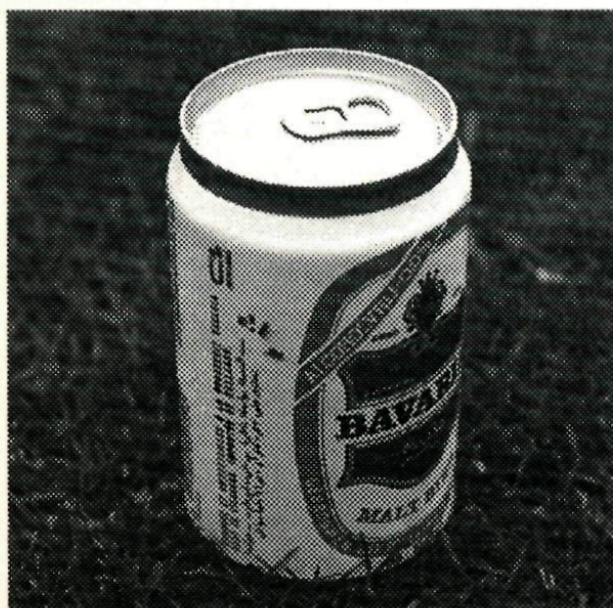
blikje helemaal hebt leeggedronken, is het massamiddelpunt weer op zijn 'oude' plaats gekomen (fig. 1c). Dat betekent dus, dat 'ergens' een laagste positie van het massamiddelpunt moet voorkomen. Tot hoever moet je het blik nu leegdrinken om het massamiddelpunt zo laag mogelijk te krijgen?



Figuur 1a

1b

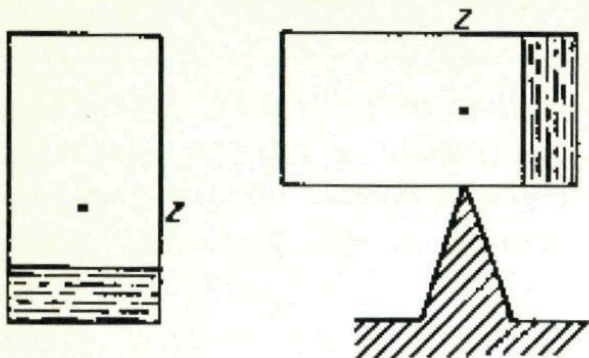
1c



Oplossing

○○ De oplossing bestaat uit twee delen. Eerst zullen we aantonen dat in het geval van het laagste massamiddelpunt dit samenvalt met de vloeistofspiegel. De berekening van de hoogte van de vloeistofspiegel is dan betrekkelijk eenvoudig.

Het bewijs voor het eerst deel is een bewijs uit het ongerijmde. Stel (fig. 2a) dat het laagste massamiddelpunt zich boven de vloeispiegel bevindt. We voegen nu iets bier toe. Het massamiddelpunt zal hierdoor verplaatst worden. Aangezien het massamiddelpunt berekend wordt uit de massamiddelpunten van het metalen blikje en van de vloeistof, zien we dat het massa-

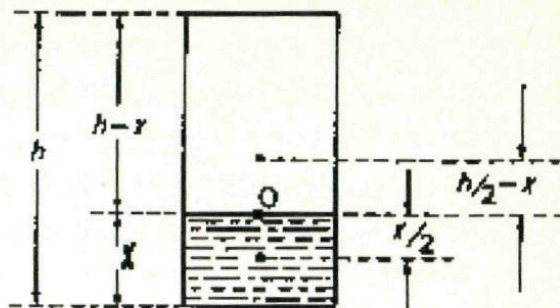


Figuur 2a 2b

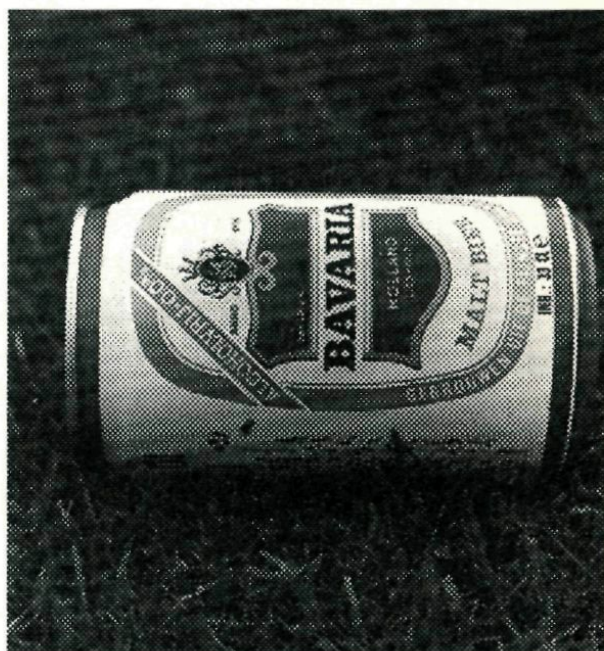
middelpunt door het toevoegen van vloeistof iets moet zijn gedaald. Mocht je het nog niet 'zien', dan kunnen we de volgende truc toepassen. Kantel het blikje over 90 en zorg door middel van een gewichtslus vlies, dat de vloeistof niet kan wegstromen (fig. 2b). Ondersteun het blikje in het massamiddelpunt. Het blikje is dan in evenwicht. Voeg nu rechts wat bier toe. Het geheel zal dan 'met de wijzers van de klok' gaan omkiepen: het massamiddelpunt ligt blijkbaar rechts van Z (dus 'lager').

Omgekeerd

Eenzelfde verhaal kunnen we afsteken bij de veronderstelling dat het massamiddelpunt in de laagste positie onder de vloeistofoppervlakte zou liggen. Ook dat voert tot een ongerijmdheid. Iets wegnemen van bier leidt dan tot een verlaging van het massamiddelpunt. De enige overgebleven situatie moet dus de juist zijn: de laagste positie van het massamiddelpunt valt samen met de vloeistofspiegel. Stellen we de massa van het blikje op V en die aan het bier alléén B ,



Figuur 3



dan is de resterende biermassa $\frac{x}{h} B$ (fig. 3). De plaats voor het massamiddelpunt wordt dan:

$$\left(\frac{h}{2} - x\right) \cdot V = \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{x}{h} B\right)$$

Uitwerken van deze vergelijking levert :

$$(h - x)^2 V = x^2 (B + V)$$

$$\text{dus in ons geval, waar } \frac{B + V}{V} = 9$$

$$\text{krijgen we : } \left(\frac{h - x}{x}\right)^2 = 9$$

Eén van de twee wortels van deze vierkantsvergelijking levert ons de 'fysische realiteit': $x = \frac{1}{4} h$. ■

Eerlijk spel

○○ Met een 'eerlijke' munt iets onder twee personen verloten is eerlijk spel. Maar hoe zou je het onder drie personen met een munt moeten doen als je iets te verloten had? Bij voorbeeld: eerst tussen *A* en *B* loten met *A* voor kruis en *B* voor munt en dan de winnaar met kruis laten loten tegen munt voor *C*?

Er zijn vier mogelijkheden:

kruis-kruis

kruis-munt

munt-kruis

munt-munt

In het tweede geval wint *C* tegen *A*, in het vierde tegen *B*; in 't eerste wint *A*, in 't derde *B*. Dus *C* heeft net zo veel kansen als *A* en *B* samen en dat is niet eerlijk.

Er zijn heel wat manieren om het anders te doen en hier volgt er één: Er wordt met een eerlijke munt zo lang gegooid tot voor het eerst *twee keer achter elkaar hetzelfde* valt, dus munt-munt of kruis-kruis. Het aantal worpen dat je hiervoor nodig hebt, kan variëren - dit hangt geheel van 't toeval af. Laten we dit aantal *n* noemen. Het *reglement voor loting* is nu als volgt: Bij *n* even en kruis-kruis in de laatste twee worpen, wint *A*.

Bij *n* even en munt-munt in de laatste twee worpen, wint *C*.

Bij *n* oneven wint in elk geval *B*.

Is dit spel eerlijk, d.w.z. hebben *A*, *B*, en *C* dezelfde kansen?

Als je zelf het antwoord wilt vinden, is dit het punt om Pythagoras even dicht te doen en na te denken. Inmiddels begin ik met een ander

verhaal.

Je weet, dat onze getallennotatie tientallig is, maar je hebt zeker ook wel eens van andere talstelsels gehoord. Het belangrijkste - in computers veelvuldig toegepast - is het tweetallige. Men doet het daar alleen met de cijfers 0 en 1 en op de plaats van de eenheden is zo'n 1 dan ook echt één waard. In het tientallig stelsel is een 1 op de volgende plaatsen naar links tien, honderd, duizend, . . . waard, telkens een faktor tien meer. In het tweetallig stelsel zijn de opeenvolgende waarden van zo'n 1 nu twee, vier, acht, . . . telkens een faktor twee meer. Dus:

tientallig	tweetallig
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
.	.
.	.
.	.

Natuurlijke kun je tweetallig ook achter de komma rekenen, de eerste plaats achter de komma telt, $\frac{1}{2}$, de tweede $\frac{1}{4}$, de derde $\frac{1}{8}$, enz.

Dus bijvoorbeeld: 11,0110101

is op de gewone manier geschreven

$$2 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} = 3\frac{53}{128}$$

Op die manier krijgen we uiteraard alleen maar breuken met in de noemer een macht van 2. Voor de andere moeten we oneindige slierten van nullen en enen achter de komma toelaten, maar gelukkig kunnen we dan met repeterende volstaan.

Bijvoorbeeld:

$\frac{1}{3} = 0,010101 \dots$ dat wil zeggen: repetendum 01

want stel $0,010101 \dots = x$,

vermenigvuldig dit met 4

$$1,010101 \dots = 4x$$

trek af $4x - x = 1$, wordt $x = \frac{1}{3}$.

Door van deze ontwikkeling voor $\frac{1}{3}$ het dubbele te nemen, krijg je ook nog

$$\frac{2}{3} = 0,0101010 \dots \text{ (10 repetent).}$$

Tweetallige lineaal

Ziehier (fig. 1) een lineaal, niet tientallig zoals gewoonlijk, maar

tweetallig onderverdeeld, maar verbeeld je je deze verdeling dan ook nog onbegrensd voortgezet.

Het punt $\frac{1}{3}$ wordt steeds nauwer ingesloten:

$$0,01 < \frac{1}{3} < 0,011$$

$$0,0101 < \frac{1}{3} < 0,01011$$

$$0,010101 < \frac{1}{3} < 0,0101011$$

En net zo vergaat het de $\frac{2}{3}$:

$$0,10 < \frac{2}{3} < 0,11$$

$$0,1010 < \frac{2}{3} < 0,10101$$

$$0,101010 < \frac{2}{3} < 0,1010101$$

Terug naar het kruis-en-munt-spel.

Om het wat korter te noteren,

zeggen we 0 voor kruis en 1 voor munt. Een worpreeks

kruis munt munt kruis munt kruis

noteren we met nog een komma ervoor

en vóór de komma een nul als

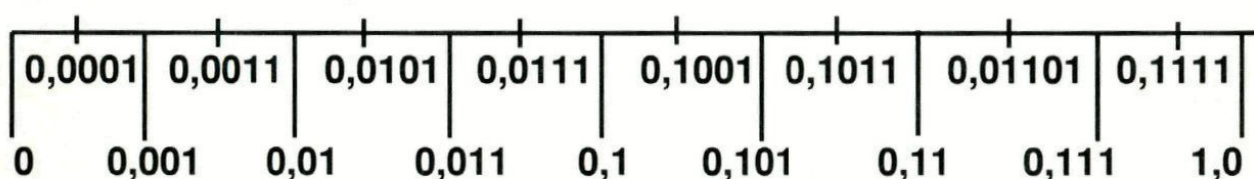
$$0,011010,$$

$$\text{of zo je wilt, als } \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{13}{32}$$

Iedere worpreeks wordt zodoende door een punt van onze liniaal gerepresenteerd en om nu tussen A, B en C te loten, kijken we naar de liniaal:

A wint het, als de worpreeks op de liniaal tussen 0 en $\frac{1}{3}$ valt,

$$0,010101 \dots = 0,0101010 \dots =$$



B wint het, als de worpreeks op de liniaal tussen $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{3}$ valt.
 C wint het, als de worpreeks op de liniaal tussen $\frac{2}{3}$ en 1 valt.
 Je zult, dacht ik, toegeven dat dit een eerlijke verdeling is.

Dus bijvoorbeeld

0,00	→	A wint
0,0100	→	A wint
0,011	→	B wint
0,100	→	B wint
0,1011	→	C wint
0,11	→	C wint

en dat klopt opvallend met het reglement van loting in het begin van het verhaal.

Inderdaad zeggen de twee reglementen precies hetzelfde.

Immers:

Eindigt het in een even aantal worpen met 00, dan krijgen we

$0,010101 \dots 0100 < 0,010101 \dots 0101 \dots = \frac{1}{3}$, dus is het voor A.

Eindigt het na een even aantal worpen met 11, dan krijgen we
 $0,101010 \dots 1011 > 0,101010 \dots 1010 \dots = \frac{2}{3}$, dus voor C.

Eindigt het na een oneven aantal worpen, dan is het

0,0101 ... 011
 of
 0,1010 ... 100

en dat is beide keren tussen
 $0,0101 \dots 0101 \dots = \frac{1}{3}$ en
 $0,1010 \dots 1010 \dots = \frac{2}{3}$, dus voor B.

Dus beide reglementen leveren hetzelfde op en aangezien we het tweede als eerlijk erkend hebben, is het eerst het ook.

Als er nu nooit twee keer achter elkaar hetzelfde zou vallen - wat dan? Als de munt blijft doordrammen

kruis munt kruis munt kruis munt ...
 of munt kruis munt kruis munt kruis ... ?

Hoe groot is de kans op nog geen beslissing na - zeg - 50 keer gooien?
 Die kans is $2 \cdot (\frac{1}{2})^{50}$,
 en dat is zowat

1 op de duizendbillioen.

Als je rekent dat 50 keer kruis of munt gooien op zijn minst een minuut kost en in een milliard jaren zowat 500 billioen minuten zitten, begrijp je dat het uiterst onwaarschijnlijk zou zijn, als er na 50 keer gooien nog geen beslissing was gevallen.

Maar hoe lang zal het gemiddeld duren voor de beslissing valt?
 Hoeveel keer zul je *gemiddeld* moeten opgooien, zodat twee keer achter elkaar kruis of twee keer achter elkaar munt valt?

Het is gemiddeld drie keer. ■

Dit getal telt mee

○○ Je komt soms merkwaardige getallen tegen! Neem nu bijvoorbeeld 105263157894736842

Of je dit getal nu verdubbelt of dat je het laatste cijfer wegneemt en vooraan zet, het resultaat is hetzelfde. En ook als je dat met het resultaat opnieuw doet. En nog een keer. En nog een keer.

Een zelfde soort verschijnsel doet zich voor bij sommige repeterende breuken:

$$\frac{1}{7} = 0,142857\ 142857\ \dots$$

$$\frac{2}{7} = 0,285714\ 285714\ \dots$$

$$\frac{4}{7} = 0,571428\ 571428\ \dots$$

$$\frac{8}{7} = 1,142857\ 142857\ \dots$$

Hierbij kun je zeggen dat vermenigvuldiging met 2 het effect heeft dat in de repeterende cijfergroep (het repetendum) de laatste vier cijfers vooraan worden gezet.

Een variant hierop:

$$\frac{2}{13} = 0,153846\ \text{repetent}$$

$$\frac{8}{13} = 0,615384\ \text{repetent}$$

$$\frac{32}{13} = 2,461538\ \text{repetent}$$

Vermenigvuldiging met 4 verplaatst in het repetendum het laatste cijfer naar voren.

Misschien kunnen we het gegeven

getal ook op deze manier laten ontstaan, dus als repetendum van een breuk. Laten we aannemen dat er een breuk G is met de gevraagde eigenschap. We nemen $a_1, a_2, \dots, a_n$ als cijfer van het repetendum.

$G = 0, a_1 \dots a_n$ repetent

met

$2G = 0, a_n a_1 \dots a_{n-1}$ repetent

Uit regel (1) volgt

$G + a_n = a_n, a_1 \dots a_n$ repetent

Uit regel (2) volgt door

vermenigvuldiging met 10:

$20G = a_n, a_1 \dots a_n$ repetent

Uit de gelijkheid van (3) en (4)

volgt $20G = G + a_n$, dus $G = \frac{a_n}{19}$.

Kiezen we nu voor a_n het cijfer 2, dan krijgen we:

$$\frac{2}{19} = 0,105263157894736842\ \text{repetent.}$$

Vandaar dus. ■

Goochelen met cijfers

○○ Laat iemand de cijfers 1 t/m 9 opschrijven, uitgezonderd 8.

Neem een willekeurig cijfer uit deze verzameling.

Vermenigvuldig dan dit getal 12345679 met 9 en met dit

gekozen cijfer.

De uitkomst hiervan bestaat nu uitsluitend uit herhaling van dit cijfer! Probeer dit te verklaren.

Oplossing zie pagina 32. ■

Toverkwadraatvierkant

○○ Een toervierkant is een vierkant van $n \times n$ hokjes waarin de natuurlijke getallen $1 \dots n^2$ zijn opgenomen, zodanig dat de som van elke rij gelijk is aan de som van elke kolom en de som van elke diagonaal.

Voorbeelden:

1	9	4
7	5	3
6	1	8

Figuur 1.

13	2	3	16
8	11	10	5
12	7	6	9
1	14	15	4

Figuur 2.

Vooral de toervierkanten met on-even n zijn gemakkelijk te construeren volgens onderstaande regels.

Werkwijze:

1. Kies als beginhokje het midden van een zijde (kompasrichting: N, O, Z of W).
2. Kies als looprichting uit NO, ZO, ZW of NW, met als voorwaarde dat de bij 1 gekozen letter erin voorkomt.

De getallen worden in de natuurlijke volgorde ingevuld in de gekozen looprichting, met twee uitzonderingen (3 en 4).

3. Als het volgende in te vullen hokje bezet blijkt, kies dan het hokje in de richting tegengesteld aan die gekozen bij 1.
4. Als het volgende in te vullen hokje niet bestaat, denk het even

buiten het vierkant en verplaats het naar de uiterste andere kant van de kolom, rij of diagonaal. Hierbij kan blijken dat regel 3 toch eerst moet worden toegepast. We maken nog even een 5×5 vierkant met het begin aan de West-zijde en looprichting NW.

15	16	22	3	9
8	14	20	21	2
1	7	13	19	25
24	5	6	12	18
17	23	4	10	11

Figuur 3.

We vervangen nu de regel 1 door:

1. Kies als beginhokje een van de hokjes aan een zijde (kompasrichting N, O, Z of W).

We zien dan dat er een vierkant ontstaat waarvan de kolommen en rijen de juiste som hebben, maar de diagonalen kunnen onjuist zijn. Bijvoorbeeld (keuze Oost, looprichting ZO):

1	9	4
7	5	3
6	1	8

Figuur 4.

2 15 25	31 44 48	63 64 77
36 37 50	56 69 79	4 17 21
58 71 75	9 10 23	29 42 52
24 7 11	53 30 40	73 59 72
46 32 45	78 61 65	26 3 13
80 57 67	19 5 18	51 34 38
16 20 6	39 49 35	68 81 55
41 54 28	70 74 60	12 22 8
66 76 62	14 27 1	43 47 33

Figuur 5.

Tot zover misschien weinig verrassende.

Maar nu het volgende

$n^2 \times n^2$ -vierkant (n oneven).

Dit vierkant is niet alleen gewoon toervierkant, ook de som van de kwadraten van de getallen in een rij of een kolom is onafhankelijk van de keuze, gelijk aan 20049. Het lijkt op het eerste gezicht totaal anders geconstrueerd, maar toch...

Let eens op de onderverdeling in $n \times n$ -vierkanten en kijk ook eens in welke ondervierkanten 1, 2, 3, ..., 9 terecht komen, vergeleken met figuur 1.

Vergelijk de plaats die deze getallen krijgen in zo'n ondervierkant met figuur 4.

De moeilijkheid is dan nog slechts de overgang van 9 naar 10, van 18 naar 19, van 27 naar 28 (!) enzovoort. ■

Denkertje: een optelsom in kleuren

	R	O	O	D
	G	E	E	L
G	R	O	E	N

B R U I N

○ In deze optelsom komen tien verschillende letters voor. De bedoeling is, iedere letter te vervangen door een cijfer. Eenzelfde letter moet steeds door eenzelfde cijfer worden vervangen; verschillende letters natuurlijk ook door verschillende cijfers. Een getal mag hier niet met een nul beginnen.

Er bestaan verschillende manieren waarbij je een correcte optelsom kunt maken van het gegeven schema. Zoek naar die oplossing waarbij voor R O O D een zuiver kwadraat verschijnt.

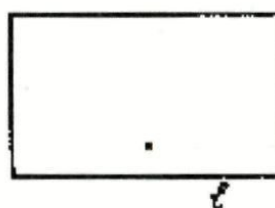
In dit geval is er maar één oplossing. Oplossing van de denkertjes vind je op pagina 29. ■

Wat vouwen kan suggereren

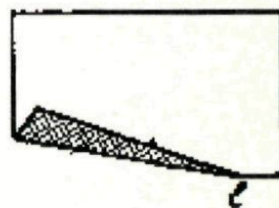
○ In de brugklas, maakte je bij het tekenen van grafieken al kennis met de parabool. De hyperbool moest nog wachten vanwege zijn asymptoten, maar verscheen toch in de volgende klassen. Daarna presenteerde zich o.a. ook bij natuurkunde de ellips. Alle drie echter kunnen al geconstrueerd worden, als je nog maar tot de brugklassers in de wiskunde behoort. Nou, ja, construeren is wat sterk uitgedrukt. Beter is : door vouwen te voorschijn toveren. Dat gaan we nu doen.

Eerste vouwwijze

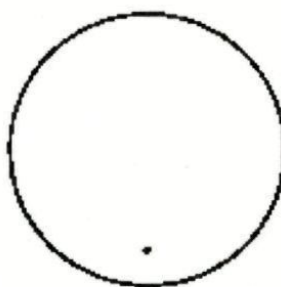
Een rechthoekig vel papier, liefst ongelinieerd, krijgt een punt ongeveer twee centimeter boven het midden van een lange zijde. Zie figuur 1. Vouw om, zoals figuur 2 aangeeft, dus precies langs de punt, en maak de vouwlijn goed scherp. Weer openen en een andere vouwlijn schepen. Herhaal dit zo ongeveer 20 keer. De vouwen suggereren een bekende kromme. Accentueer deze desgewenst fijntjes met potlood.



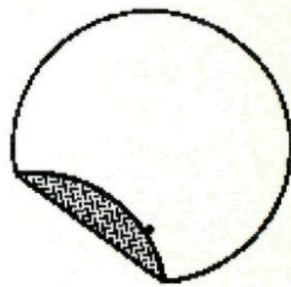
Figuur 1.



Figuur 2.



Figuur 3.



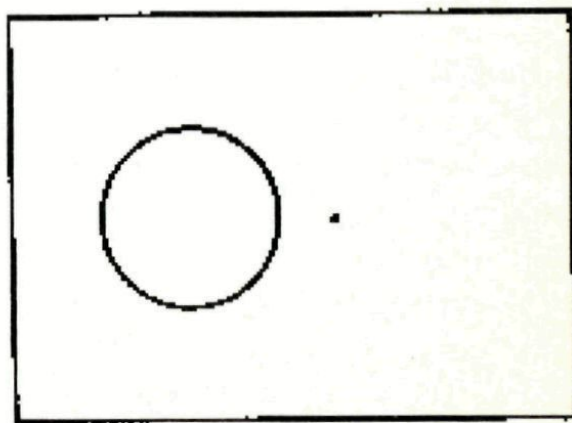
Figuur 4.

Tweede vouwwijze

Teken met de passer een flinke cirkel en knip die uit. Plaats een punt in het binnengebied. Zie figuur 3. Vouw om, zoals figuur 4 aangeeft. Weer openen en herhalen. Tenslotte ontdekt je oog weer een kegelsnede.

Derde vouwwijze

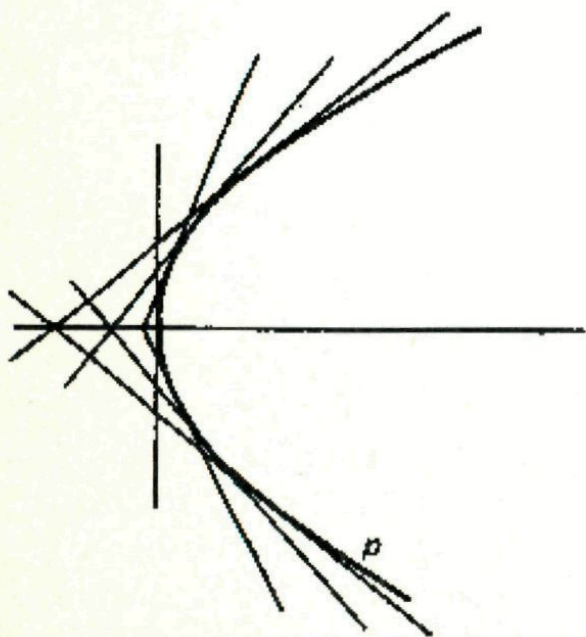
Teken op een rechthoekig vel papier een cirkel en zet een punt zoals figuur 5 aanwijst. Vouw het papier zo, dat de punt op de cirkel komt. Of omgekeerd, vouw zo, dat



Figuur 5.

de cirkel op de punt komt. Weer openen en opnieuw vouwen, Herhalen rondom de gehele cirkel en de vouwlijnen goed scherp maken. Voer de opdracht uit tegen een raamruit, waardoor het papier meer doorschijnend is. Nauwkeurigheid en geduld worden weer beloond met een kegelsnede.

We gaan eens kijken waarom de vouwlijnen ons kegelsneden voortoverden. In figuur 6 is een parabool getekend, In elk punt van die kegelsnede kan een raaklijn worden geconstrueerd. Men zegt, dat de raaklijnen de parabool omhullen. Omgekeerd, als een voldoende aantal raaklijnen kan worden getekend, zal de suggestie van een parabool tot stand komen. Een analoge situatie treedt op bij ellips en hyperbool. De vouwlijnen in de drie opdrachten vervullen de rol van raaklijnen.



Figuur 6.

De parabool

Deze kan worden gedefinieerd als de verzameling punten waarvan de afstanden tot een gegeven lijn en een vast punt gelijk zijn.

In figuur 7 is l die gegeven lijn, die richtlijn, en is F het vaste punt.

P is een punt van de parabool.

$$d(P, l) = \overline{PQ} = \overline{PF}.$$

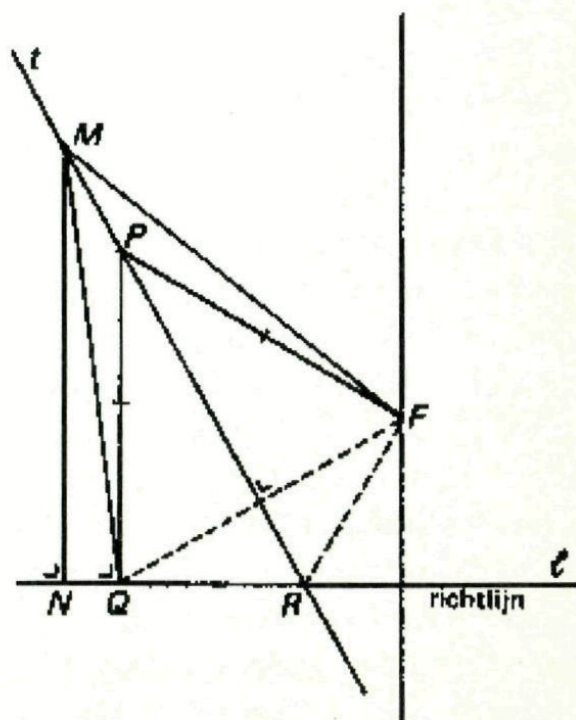
Lijn t is symmetrie-as van de vlieger $PFRQ$; t is ook raaklijn aan de parabool.

Immers voor een punt M van t ,
ongelijk P , geldt:

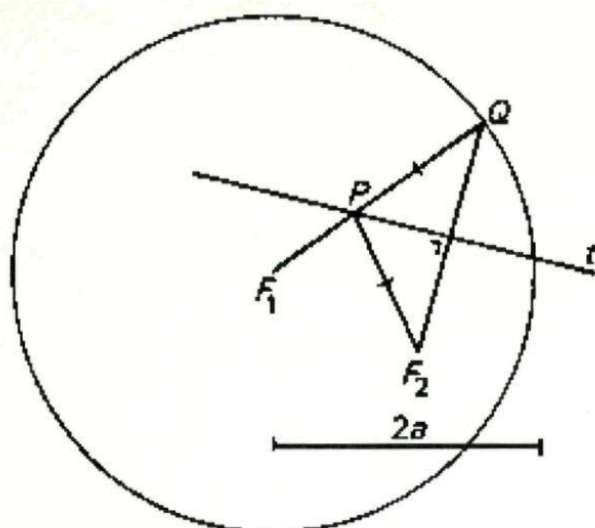
$$\left. \begin{aligned} d(M, l) &= \overline{MN} < \overline{MQ} \\ \overline{MQ} &= \overline{MF} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{MN} < \overline{MF} \Rightarrow M$$

is niet een punt van de parabool.

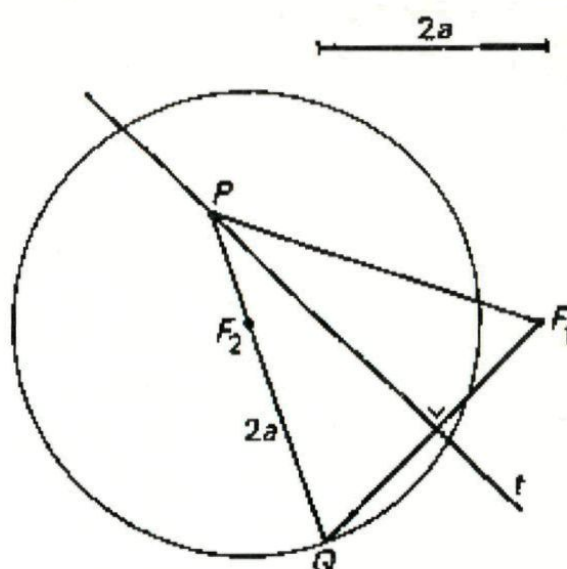
Bij de vouwopdracht nr. 1 is de lange zijde van het vel papier de richtlijn. De symmetrie-as t , dus de raaklijn, ontstaat als vouwlijn. De vouwlijnen zijn omhullenden van een parabool.



Figuur 7.



Figuur 8.



Figuur 9.

De ellips

Deze kan gedefinieerd worden, als de verzameling punten waarvan de som van afstanden tot twee gegeven punten constant is.

In figuur 8 zijn F_1 en F_2 die vaste punten en is $2a$ de gegeven afstand. Is nu P een punt van de ellips dan is $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$. Verleng $\overline{F_1P}$ met $\overline{PQ} = \overline{PF_2} = \overline{F_1Q} = 2a$.

t is symmetrie-as van $\triangle PF_2Q$. Op de zelfde manier als bij de parabool wordt bewezen, dat t ook raaklijn is aan de ellips.

De cirkel met middelpunt F_1 en straal $2a$ heet richtcirkel van de ellips. Punt Q ligt op die cirkel. Vouw zoals in opdracht 2 laat Q op F_2 komen en dus is de vouwlijn raaklijn. Een voldoende aantal malen vouwen wekt in deze opdracht de suggestie van een ellips.

De hyperbool

Deze kan worden gedefinieerd als de verzameling punten waarvan het verschil van de afstanden tot twee vaste punten constant is.

In figuur 9 zij F_1 en F_2 die vaste punten en is $2a$ de afstand. Voor P als punt van de hyperbool geldt: $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$.

Pas op $\overline{PR_2}$ af $\overline{PQ} = \overline{PF_1}$
 $\Rightarrow \overline{F_2Q} = 2a$.

De cirkel met middelpunt F_2 en straal $2a$ is weer richtcirkel. t is symmetrie-as van $\triangle PQF_1$ en tevens raaklijn aan de hyperbool. Bij de opdracht is de richtcirkel gegeven en punt F_1 . Het omvouwen brengt dat punt op de richtcirkel, de vouwlijn is weer symmetrie-as t en tevens raaklijn. Zo ontstaat dan nu de indruk van een hyperbool. ■

Oplossing: een optelsom in kleuren

We vereenvoudigen het schema:

$$\begin{array}{cccc} & O & O & D \\ & G & E & E & L \\ G & R & O & E & . \end{array}$$

$$B \quad . \quad U \quad I \quad .$$

Op de stippen komt hier geen cijfer te staan.

$$D + L = 10$$

Een kwadraat kan niet eindigen op een 2, 3, 7, of 8.

Voor D komen alleen in aanmerking 0, 1, 4, 5, 6, of 9.

0 en 5 vervallen vanwege ongeoorloofde cijferherhaling.

$$\text{dus } D = 1, 4, 6, 9$$

$$L = 9, 6, 4, 1$$

Zoek $O = 2E + 1$ eindigende op een ander cijfer I

$2O + E + \text{rest}$ eindigende op een andere cijfer U

$$G + 1 = B$$

$$G + R + \text{rest} = 10.$$

Voor N resteert het laatste nog ongebruikte cijfer.

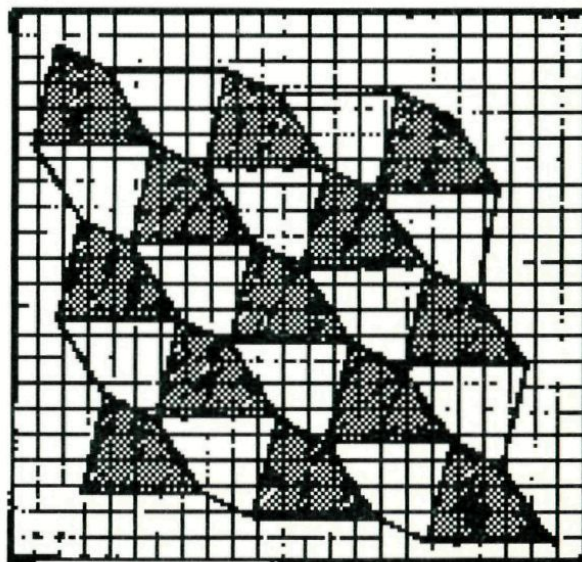
Oplossing:

$$\begin{array}{rrrrr} 2 & 1 & 1 & 6 & = & 46^2 \\ 7 & 9 & 9 & 4 & & \\ \hline 7 & 2 & 1 & 9 & 5 & \\ 8 & 2 & 3 & 0 & 5 & \end{array}$$



Tegels

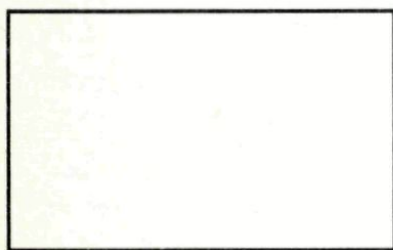
Misschien wist je niet dat vierhoekige tegels, die niet symmetrisch zijn, heel goed gebruikt kunnen worden om er keurig en netjes een vloertje mee te beleggen. Nevenstaande figuur laat zien hoe dat gebeuren moet. Verzin nu zelf eens een vijfhoekige niet-symmetrische tegel die ook bruikbaar is.



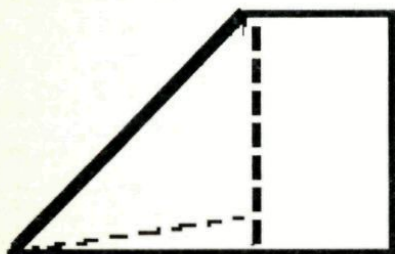
Een gulden 'iccanobif'-rij

○○ Als je van een rechthoek een vierkant afhaalt (fig. 1 a-b-c) - bijvoorbeeld door een hoek om te vouwen - dan blijft er een kleinere rechthoek over. Het zou bijzonder mooi zijn, als die met de oorspronkelijke rechthoek gelijkwaardig was. Dit is inderdaad te realiseren.

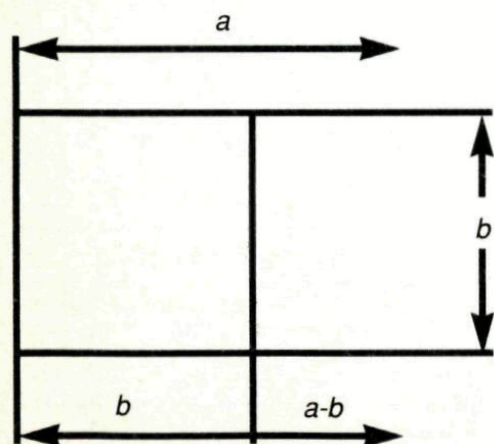
Noem de lange zijde van de eerste rechthoek a en de korte b . Willen de grote en de kleine rechthoek gelijkvormig zijn, dan moet $a : b = b : (a - b)$ zijn.



Figuur 1a.



Figuur 1b.



Figuur 1c.

Anders geformuleerd:

de zijde a is zo verdeeld in stukken b en $a - b$, dat de zijde a staat tot het grotere stuk als het grotere stuk tot het kleinere.

Zulk een verdeling van een lijnstuk staat ook bekend als de gulden snede. Men vindt hem algebraïsch door de evenredigheid uit te werken,

$$a(a - b) = b^2 \text{ ofwel}$$

$$b^2 + ab - a^2 = 0,$$

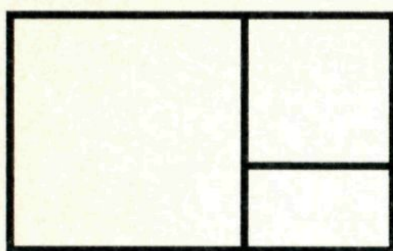
waaruit $b = a(-1 + \sqrt{5})$ volgt.

Er zijn echter ook een aantal meetkundige constructies om de gulden snede te verkrijgen.

Wat gebeurt er, als we de tweede rechthoek net zo bewerken als de oorspronkelijke (fig. 2)? De derde rechthoek wordt weer gelijkvormig met de tweede (dus ook met de eerste). Inderdaad, de zijden van de eerste rechthoek waren a, b die van de tweede $b, c = a - b$ die van de derde worden $c, d = b - c$.

Tussen de zijden van de eerste en de tweede rechthoek bestond de evenredigheid

$$a : b = b : c$$



Figuur 2.

Maar volgens een bekende eigenschap van evenredigheden is dit ook

$$\begin{aligned} a : b &= b : c \\ &= (a - b) : (b - c) \\ &= c : d \end{aligned}$$

waarmee het gestelde bewezen is. De drie rechthoeken zijn gelijkvormig en als we dit afhaalproces voortzetten, krijgen we een rij rechthoeken, die allemaal gelijkvormig zijn. Noemen we de

langste zijden ervan $u_1, u_2, u_3, \dots$ dan zijn de kortste zijden $u_2, u_3, u_4, \dots$ en hierbij is elke zijde gelijk aan de som van de twee volgende dus

$$u_1 = u_2 + u_3$$

$$u_2 = u_3 + u_4$$

$$u_3 = u_4 + u_5$$

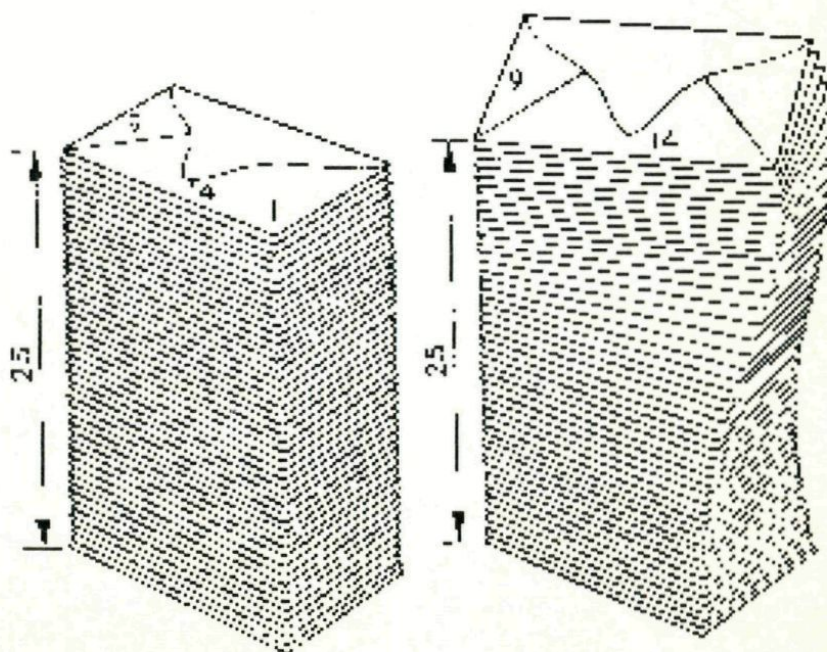
$$\begin{aligned} &\cdot && \cdot \\ &\cdot && \cdot \\ &\cdot && \cdot \end{aligned}$$

Dit doet denken aan de rij van Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, $\dots$

waarbij elke term gelijk aan de som van de twee voorafgaande (i.p.v. volgende) is.

De opeenvolgende gulden sneden vormen dus als het ware een omgekeerde rij van Fibonacci. Daar vandaan het rare opschrift boven dit verhaal. ■

Twee lichamen met dezelfde grondoppervlakte G en hoogte h , hebben hetzelfde volume, als alle doorsneden op dezelfde hoogte evenwijdig met het grondvlak gelijk zijn.



Oplossing: paradoxale oppervlakten

Neem een hoekpunt van de grote rechthoek als oorsprong en de X -as en de Y -as langs twee rechthoekszijden. Zie figuur 2.

$$A = (0, 3) \text{ en } B = (13, 8)$$

$$AB \text{ is } V = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid 5x - 13y + 39 = 0\}$$

Vrijwel iedereen, die de oplossing niet kent, accepteert, dat AB precies door de twee hoekpunten C en D van de gearceerde rechthoeken gaat.

Echter:

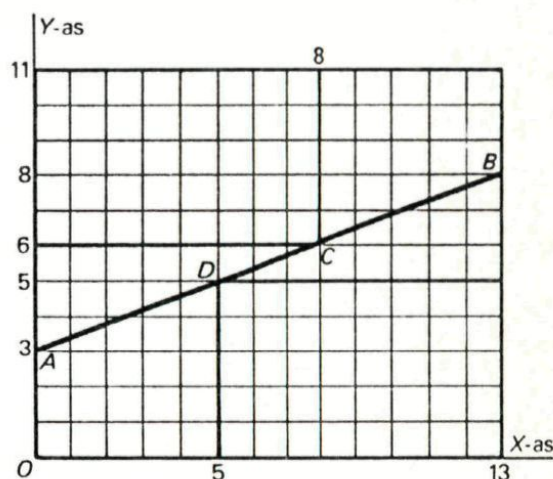
$$5x - 13y + 39 = 0$$

$$C = (8, 6)$$

$$40 - 78 + 39 = 0$$

$$\Rightarrow 1 = 0 \text{ een onware bewering}$$

De fout is al gemaakt in nummer 2 van de opdrachten. ■



Oplossing goochelen

$$9 \times 12345679 = (10 - 1) \times 12345679 = \\ 123456790 - 12345679 = 111111111.$$

Als je een dergelijk getal met het gekozen getal vermenigvuldigt, krijg je een voortdurende herhaling van dit cijfer. ■

Verantwoording illustraties

Foto's: Johan van Gurp

Illustraties: Ad Karremans
Escher

Tekeningen: Henk Mulder

Pythagoras wiskunde tijdschrift voor jongeren

Redactie: Henk Huysmans, Henk Mulder

Medewerkers: Prof. H. Duparc, Bob de Jongste, Thijs Notenboom,
Hans Oomis, Hans de Rijk, Frank Roos

Redactiesecretariaat: Henk Mulder,
Geersbroekseweg 27,
4851 RD Ulvenhout.

Eindredacteur: Henk Huysmans

Inhoudsopgave Pythagoras nummer 6, 30^e jaargang

Schaduwten / 1

Leen Streefland

Kringetjes lopen / 7

Dirk de Boer

Graankorrels / 8

Hans Sliker

Variaties op veelhoeken / 10

Geerteke de Boer

Houtgravure 'Sterren' / 13

Escher

Hoe diep is dat gat? / 14

Jan van Riet

Paradoxaal oppervlakten / 17

Klaas de Jong

Het dilemma van het bierblikje / 17

Henk Mulder

Eerlijk spel / 20

H. Freudenthal

Dit getal telt mee / 23

Dirk Pedoc

Goochelen met cijfers / 23

Jeanne Klaasen

Toverkwadraatvierkant / 24

Hans de Rijk

Denkertje / 25

Hendrik Nijon

Wat vouwen kan suggereren / 26

Bruno Ernst

Oplossing: denkertje / 29

Hendrik Nijon

Tegels / 29

Henk Mulder

Een gulden 'Iccanobif' - rij / 30

Hans de Rijk

Volume / 31

Henk Mulder

Oplossing: Paradoxaal oppervlakten / 32

Klaas de Jong

Oplossing goochelen / 32

Jeanne Klaasen

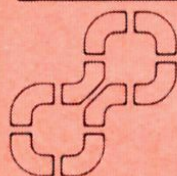
Pythagoras verschijnt zesmaal per schooljaar; opgave van abonnementen bij de uitgever (zie onder).

Abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 september schriftelijk bij de uitgever is opgezegd.

Bij tussentijdse abonnering ontvangt men ook de reeds verschenen num-

mers. Betaling per acceptgirokaart.

Tarieven	NLG/BEF
Abonnement Pythagoras	25,-/450
Luchtpost-toeslag	10,-
Inclusief Archimedes	45,-/800
Luchtpost-toeslag	20,-
Losse nummers	5,-/ 90



stichting ivio

Postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL.)

Tel. 03200-76411

educatieve uitgeverij - instituut voor buitenschools

onderwijs - wereldschool - AO-reeks - leerprojecten

Postgiro Nederland: 287934

Postcheck België: 000-0130850-94