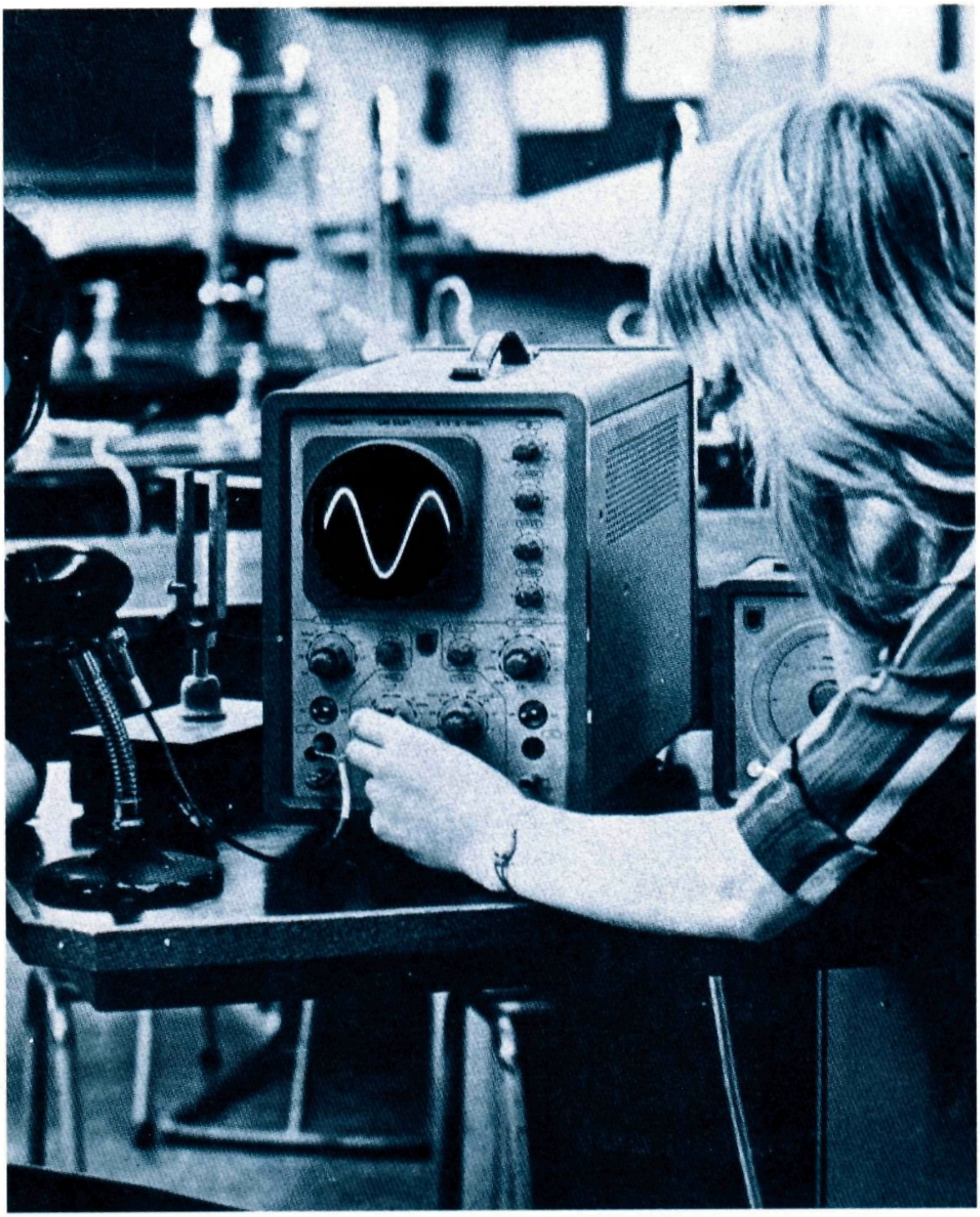


Pythagoras

wiskunde tijdschrift voor jongeren

stichting ivio

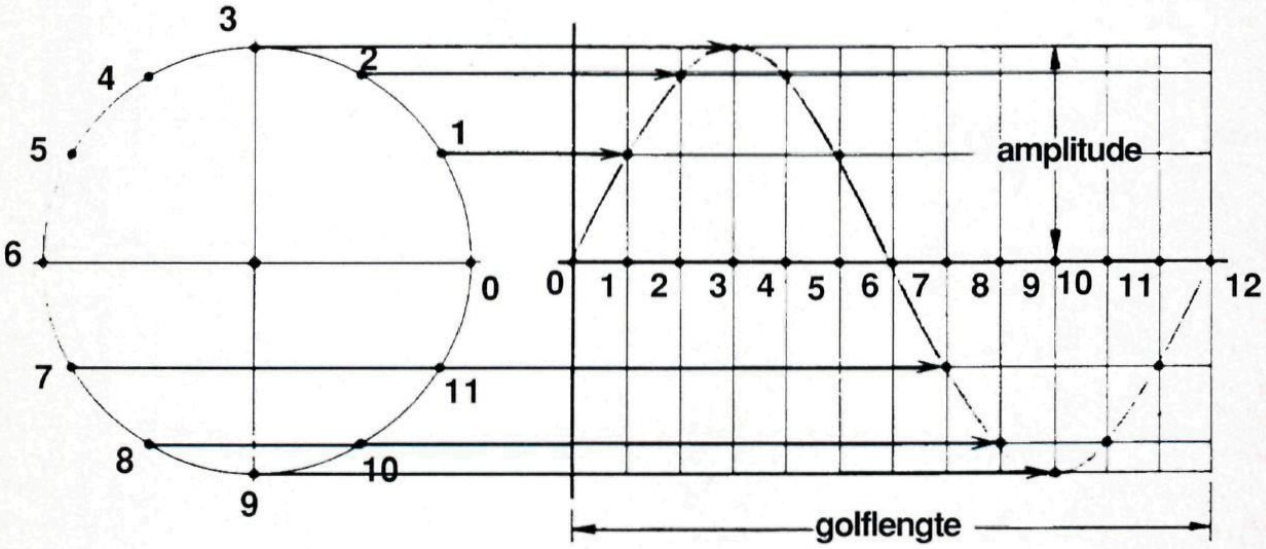
31e jaargang
nummer 3
februari 1992

DE SINUS: LIJN VAN UPS EN DOWNS

❍❍ Met grote vaart dalen skiërs omlaag langs een besneeuwde helling in de Oostenrijkse Alpen, een wonderlijk spoor achter zich aan trekkend. Het is een golflijn, van grote betekenis in natuur en techniek: de sinuslijn. Er zijn veel verschillende krommen die in ons dagelijks leven een belangrijke rol spelen. Planeten draaien ellipsen rond hun centrale ster. Een weggeworpen steen beschrijft een parabool door de lucht. Een lichtstraal volgt een keurig rechte lijn. Een watergolf heeft de vorm van een sinus. Over die figuur willen we het nu hebben.

Constructie

Elke kromme heeft een wiskundige achtergrond. We stellen dan de vraag: hoe zit de kromme in elkaar, hoe kan ze getekend worden? Voor de sinus is het recept als volgt. Verdeel een cirkel in een aantal gelijke delen. In figuur 1 kiezen we voor 12 stuks. Verleng de horizontale middellijn en pas daarop ook 12 gelijke stukken af. Zet daar telkens lijnstukken loodrecht op, evenlang als de afstand van het overeenkomstige punt op de cirkel tot de horizontale middellijn. Op die manier ontstaat één golf. Door gewoon door te nummeren op de cirkel en ook op de horizontale lijn, kunnen er meer golven verschijnen.



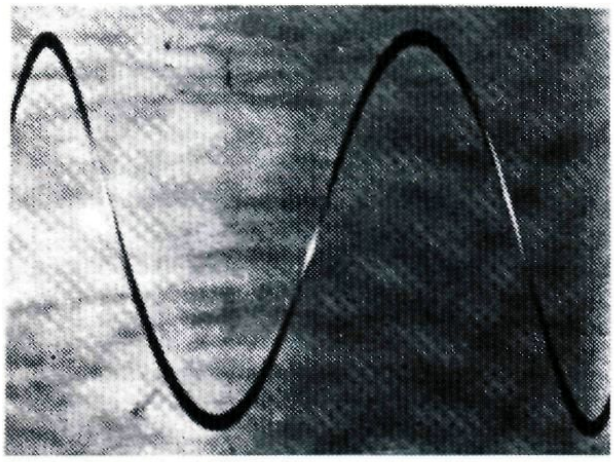
Figuur 1

Bij een sinus zijn twee zaken kenmerkend:

1 de hoogte van de golf of de straal van de hulpcirkel;
We noemen dit de amplitude van de sinus.
2. de lengte van één golf, de golflengte of ook wel de periode genoemd.

Bij een veer

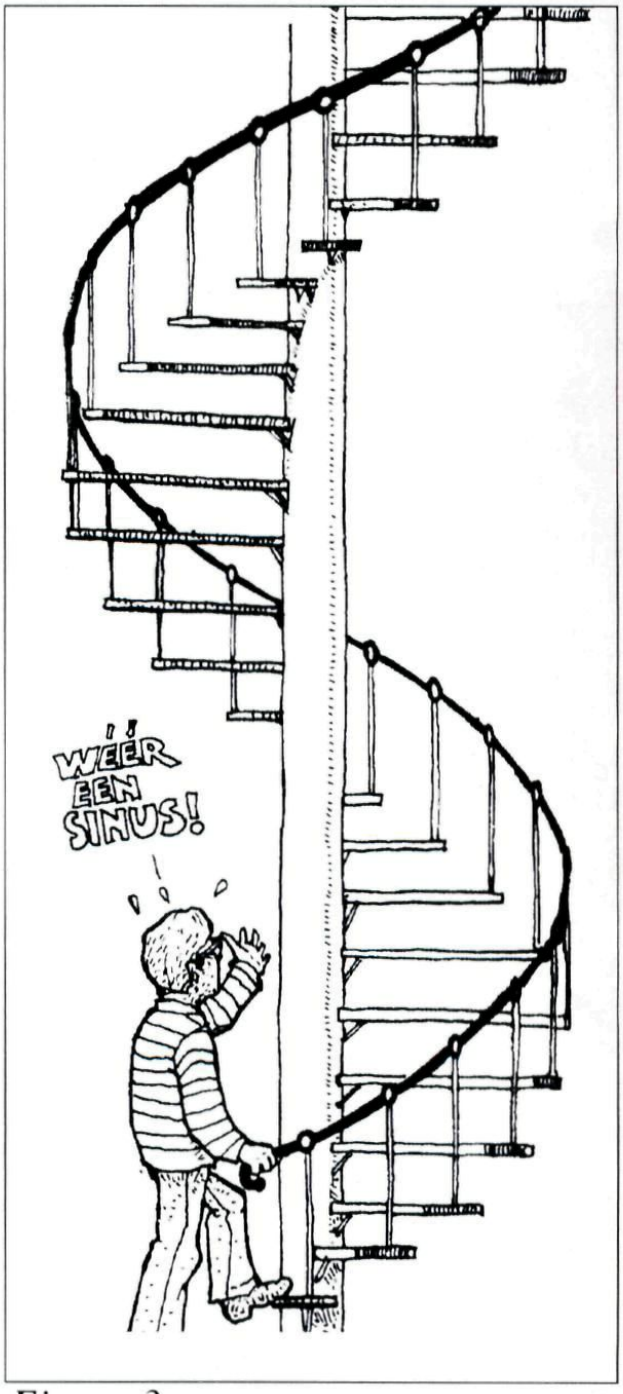
Als we een wat uitgerekte spiraalveer van de zijkant bekijken (fig. 2), zien we eenzelfde vorm. Eén golf komt hier overeen met de spoed van de schroef; dat is de afstand die we afleggen in de asrichting van de veer, als we één keer zijn rondgegaan. De amplitude is hier de straal van de ronde spiraalveer. Door de veer wat uit te trekken wordt de spoed groter.
Ook als we tegen de zijkant van een wenteltrap aankijken, zien we dezelfde vorm (fig. 3). Met een beetje fantasie herkennen we daar de constructie van figuur 1.



Figuur 2

Trillingen

De sinus speelt een overheersende rol in alles wat met trillingen, golven en communicatie te maken heeft. In die gevallen is de sinus een grafiek, waarbij de horizontale lijn uit figuur 1 de tijdas voorstelt. Om dat beter te kunnen voorstellen, doen we een eenvoudig experiment.

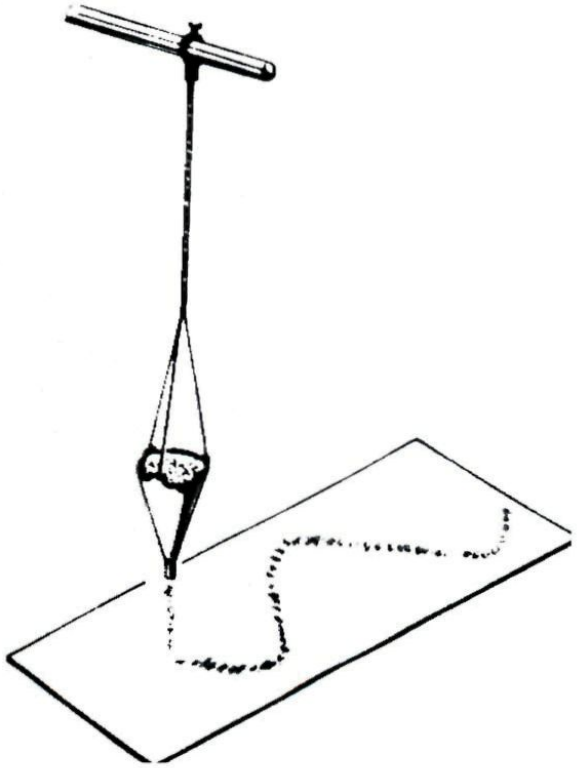


Figuur 3

We nemen een trechtertje met zand en hangen dat met een touwtje ergens aan op. Geef het een duwtje naar achteren, zodat een slingerende beweging ontstaat. Trek het papier met constante snelheid naar rechts en laat daarbij het zand uitlopen (fig.4). Er verschijnt een fraaie golflijn. Het wordt dezelfde figuur als de skiër, voorwaarts gaande, tegelijkertijd heen en weer zwenkend. De golflengte wordt bepaald door de snelheid waarmee het papier wordtweggetrokken. De zet die we de trechter meegeven bepaalt de amplitude.

Stemvork

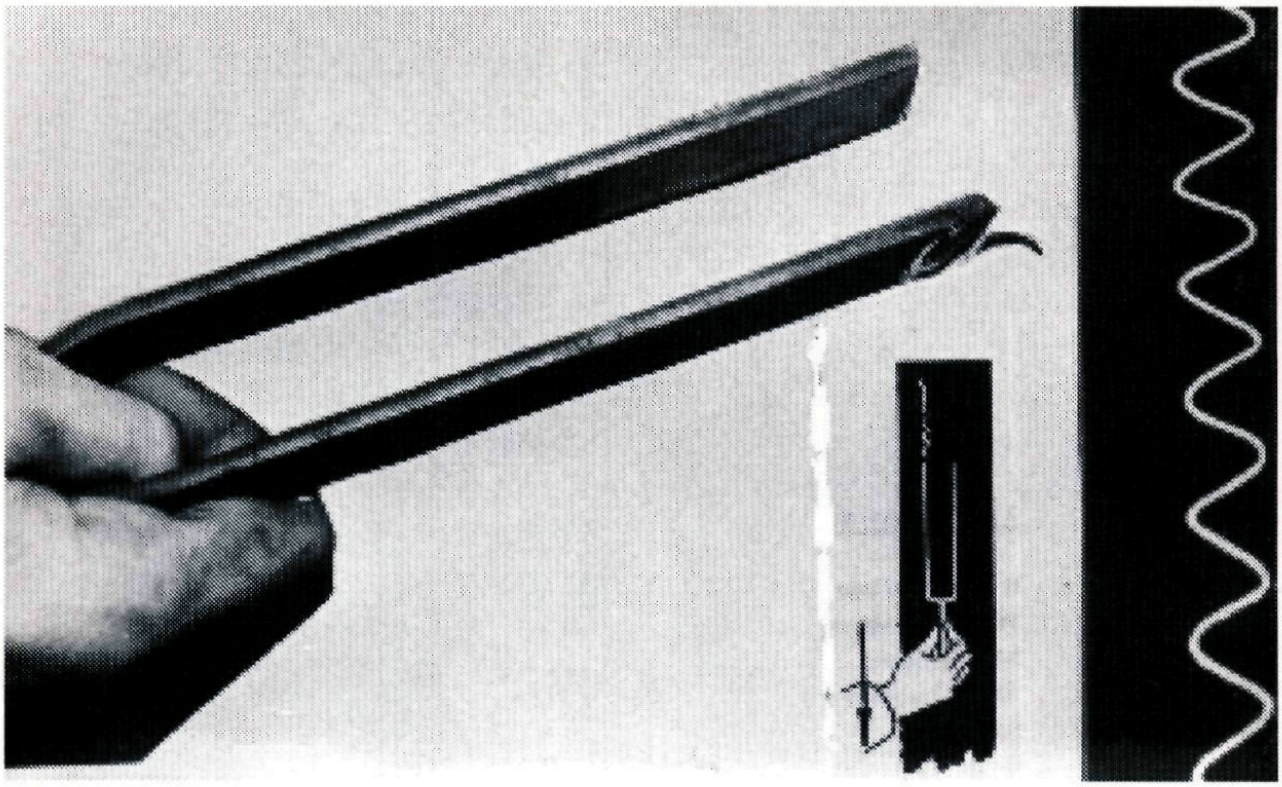
Trillingen hebben met geluid te maken, met muziek, met de menselijke stem.
Als we een stemvork aanslaan, maken beide benen trillingen zoals de slingerende trechter, alleen vlugger en met geringere wijdte. We zeggen wel: de frequentie is hoger en de amplitude geringer.
In figuur 5 staat een stemvork die we van een stuk omgebogen staal gemaakt hebben. Aan het eind zit een kraspennetje. Een glasplaat is boven een walmende petroleumvlam met een roetlaag belegd.
We trekken de stemvork over de plaat en ... daar komt de golflijn te voorschijn. Het is eigenlijk hetzelfde als bij de zandtrechter.
Alle overdracht van geluid en beeld, via de telefoon, radio en televisie geschiedt in de vorm van dergelijke kronkellijntjes. De sinusfiguur speelt in al onze communicatiesystemen een allesoverheersende rol.



Figuur 4

Energieoverdracht

We zagen hoe op de rug van de sinuslijn informatie tussen mensen wordt overgedragen.
Maar nog frappanter: op de bulten van deze wiskundige kameel wordt ook energie vervoerd.
Centrales leveren elektrische energie in de vorm van wisselstroom. De grafiek daarvan is weer precies dezelfde als van de skiërs in de sneeuw, van dat zand op dat papier. Een draaiende dynamo levert stroom af die op de oscilloscoop hetzelfde beeld geeft als de zingende stemvork.
We zouden kunnen zeggen dat de sinus de vingerafdruk van de

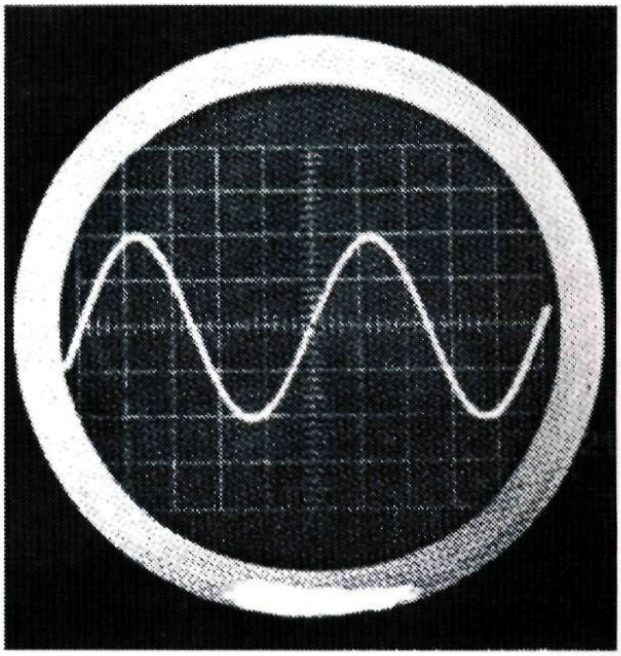


Figuur 5

stemvorktoon is; het principe van de grammofoonplaat.

Elektrische trillingen

In figuur 6 is dezelfde sinuslijn te zien op het scherm van een oscilloscoop (zie omslagfoto). Een zangeres zingt een toon voor een mikrofoon. De geluidstrillingen worden daarin omgezet in elektrische trillingen. Op het scherm verschijnt een golflijn, beeld van de gezongen toon. Als zij harder gaat zingen, krijgt de slingerlijn meer wijdte, de bergen worden hoger en de dalen dieper. Wat gebeurt er als zij een hogere toon gaat zingen? We zien op dezelfde



Figuur 6

breedte 1,5 keer zoveel golfjes; de toon heeft een 1,5 keer hogere frequentie. ■

‘Pythagoras’ op de buis in: o, zit dat zo.

❍ Tros-tv heeft inmiddels zes programma’s uitgezonden onder de titel: o, zit dat zo. Nada van Nie en prof. van de Craats presenteren de wiskunde-show. Jan van de Craats was jaren lang redacteur van Pythagoras. En zo kreeg zijn werk voor ons tijdschrift een praktisch vervolg.

Oude wiskundige problemen kregen een visueel jasje. Op een groot publiek ging een stimulerende werking uit. Wiskunde is niet saai, wij wisten dat al langer. In elke aflevering werden puzzels door het publiek opgelost en de kijkers kregen ook nog een huiswerkopdracht mee.

In de komende nummers van Pythagoras komen we op een aantal ervan terug.
In Engeland zijn al een dertigtal van dergelijke uitzendingen geweest. Wij hopen dat de Tros de serie zal voortzetten. Aan Jan van de Craats zal het niet liggen. Die heeft nog ideeën genoeg. ■

Nada van Nie en Jan van de Craats in O, ZIT DAT ZO

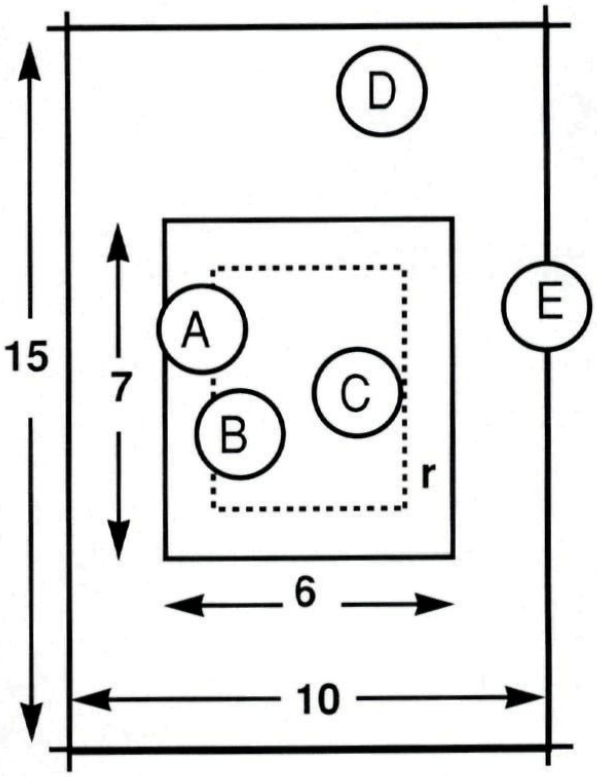
Gokken op de markt

❍❍ Op veel markten in Mexico kom je een simpel gokspel tegen. De bedoeling is natuurlijk dat de baas er genoeg aan verdient. Op een tafel ligt een grote plaat en daarop zijn in beide richtingen kaarten geplakt. Tussen de kaarten zijn stroken vrij gehouden volgens een vast patroon. De voorstelling verloopt nu verder als volgt.
Werp een munt van 1000 peso's (waarde 30 ct) op de tafel. Als de munt binnen de rand van een kaart blijft liggen of de rand net raakt, krijg je van de baas je geld terug plus nog het dubbele extra. Als dat niet lukt, ben je gewoon je geld kwijt. A, B en C zijn dus gunstige worpen, D en E foute.

Meestal was zo'n goktafel omgeven door veel volk. Er werd aan de lopende band geworpen. Sommige munten vlogen over de tafel heen, die waren natuurlijk ook voor de baas. Hoewel er weinig aan te beleven viel, bleef het volk toestromen. Een wiskundige is wat nuchterder en vraagt zich af: hoeveel verdient die man aan dit gokspel?

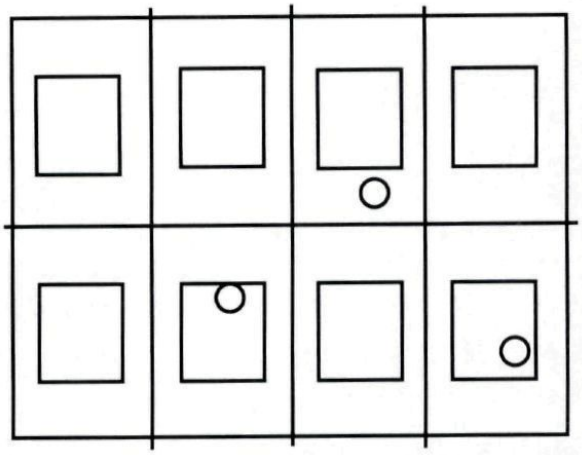
Kans

Het zal direct al wel duidelijk zijn dat hoe kleiner de munt, des te



groter de kans op succes. Verder spelen ook de afmetingen van de kaarten een rol en de grootte van de onderlinge afstanden.

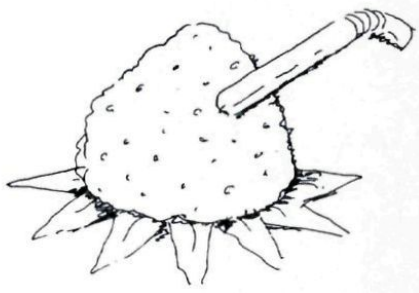
De positie van een munt kunnen we het best vastleggen met zijn middelpunt. Alle posities zijn dan gunstig waarbij dit middelpunt binnen een kaart komt te liggen, op een afstand gelijk of groter dan de straal van de munt.



Voorbeeld
De diameter van de munt is 2 cm. De kaarten hebben afmetingen 7 x 6 cm. Elke kaart is geplakt op een rechthoek met maten 15x10 cm. Alle rechthoeken liggen tegen elkaar. Het gunstige gebied voor het middelpunt is dus (7-1)(6-1) of 30 cm^2. Het mogelijke gebied 15x10 of 150 cm^2.
De kans op succes is dus 30 : 150 of 0,2 of 20%.
Dat betekent dat 1 op de vijf worpen in het algemeen gunstig zal zijn.Stel eens dat er 10 keer geworpen wordt. De baas int dan 10000. Maar 2 keer moet hij 3 munten teruggeven. Dat is totaal 6000. Per 10 worpen houdt hij dan 4000 over. En dat betekent per worp 400 peso's winst. ■

Waar of niet-waar?

In een bak zitten 100 kg aardbeien. Een analyse geeft aan dat ze voor 99% uit water bestaan. Het product wordt ingedroogd tot de massa is teruggelopen tot 50 kg. Het watergehalte is nu 98%. ■



Yin en Yang

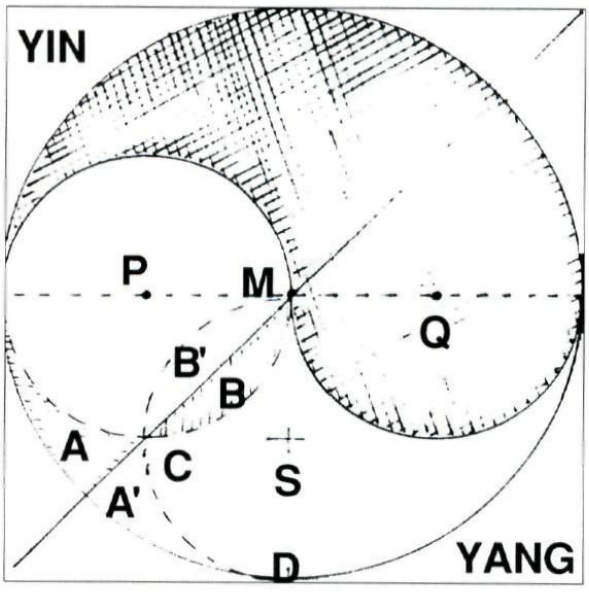
OO Het Yin en Yang teken is vooreerst een fraaie compositie. Daarnaast is het een eeuwen oud symbool voor wijsgerige gedachten.
De beide gekromde helften grijpen in elkaar en verbeelden de tegenstellingen in ons leven. Dag en nacht, goed en kwaad, aantrekking afstoting, positief negatief.
In de loop van de geschiedenis hebben wiskundigen allerlei bijzonderheden aan de figuur ontdekt. Een daarvan: een bepaalde rechte verdeelt beide snavels precies door midden. Welke?

Verdeling

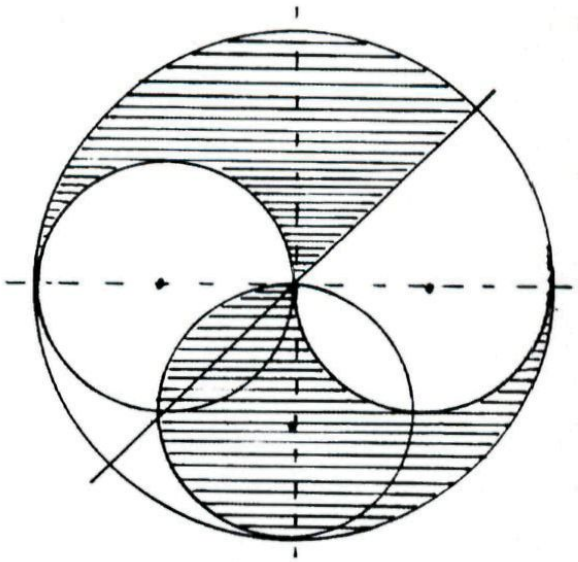
De snavels worden begrensd door een halve grote cirkel en twee halve cirkels.
Teken het omschreven vierkant (fig.1) waarvan een zijde evenwijdig loopt met de lijn der middelpunten PMQ.
We kunnen nu bewijzen dat een diagonaal van dit vierkant beide snavels halveert (fig.2).

Bewijs

Omdat de verhouding van de stralen 1:2 is heeft de kleine cirkel P een oppervlakte die $\frac{1}{4}$ deel is van die dan de grote cirkel M.
In figuur 1 hebben we nog een halve cirkel MCD getekend die de onderste snavel in twee congruente delen verdeelt en die dus een oppervlakte hebben dat gelijk is aan $\frac{1}{4}$ deel van de grote cirkel. Maar



Figuur 1. Snavels halveren.



Figuur 2. Cirkel verdeeld in vier gelijke delen.

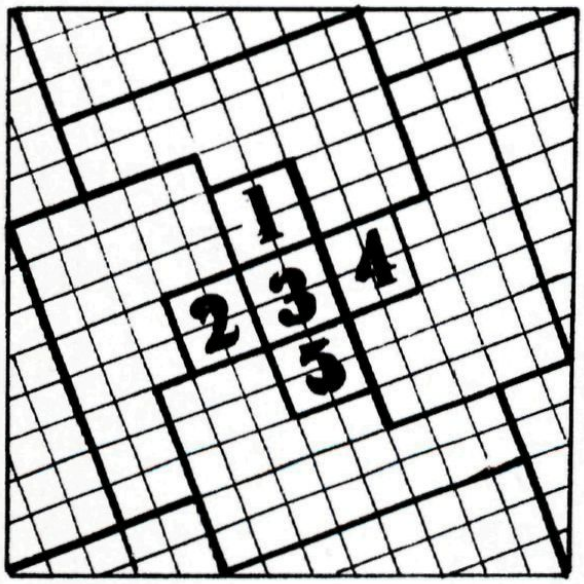
dan zijn beide stukken ook even groot als een kleine cirkel! Het is nu niet moeilijk om te bewijzen dat als je van de kleine cirkel gebied B afsnijdt en gebied A toevoegt, de oppervlakte gelijk blijft.

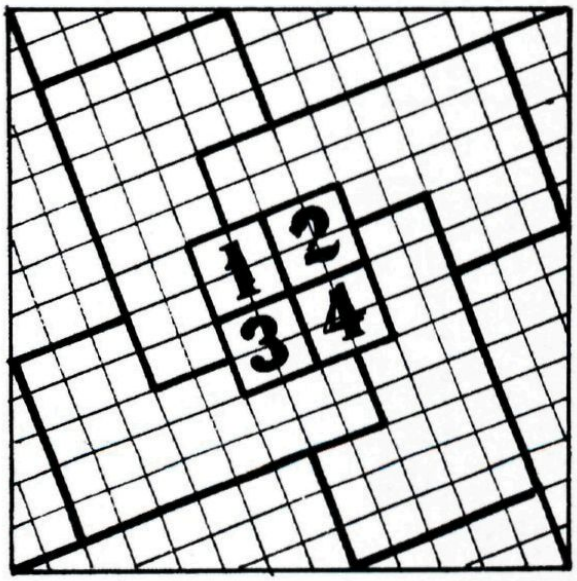
Maar dan halveert diagonaal CM de beide snavels. Probeer ook eens te bewijzen dat het bovenste gearceerde deel door de stippellijn gehalveerd wordt. ■

De grote verdwijntruc

❍❍ Je zult wel vaker puzzels gezien hebben in de vorm van samengevoegde blokjes, al of niet passend in een even kleurig doosje. Dat kan dan op twee manieren, maar ... hoewel de doos weer vol lijkt, houd je toch iets over.

Hier iets soortgelijks. Maar dit is wel een heel, heel knappe. Waar is vierkant 5 gebleven??
Het zal je niet meevallen precies aan te geven waar het bedrog schuilt. De 17 delen links passen echt exact tegen elkaar. En hoe zit het dan rechts? Toch ook!
Je moet wel wat wiskundige handigheid hebben om de truc te doorzien. Ga er maar aanstaan, we geven dit keer geen oplossing. De meeste goochelaars houden ook hun publiek op afstand. ■

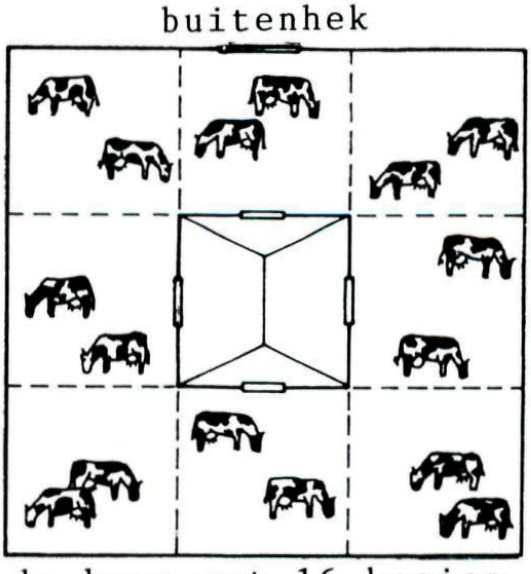




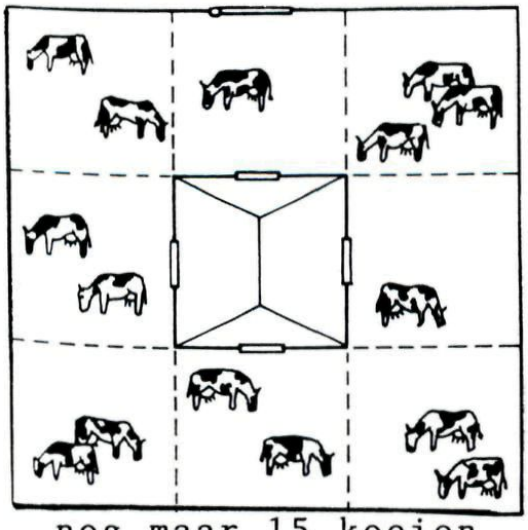
De boer en zijn koeien

❍ Een boer heeft 16 koeien die rondom zijn boerderij grazen (fig. 1). In de boerderij zitten 4 ramen waardoor hij telkens over drie weidevakken naar zijn koeien kan kijken. Als er in elk vak 2 koeien lopen, ziet hij vanuit elk raam precies 6 koeien grazen. De koeien kunnen gemakkelijk van het ene vak naar het andere lopen.

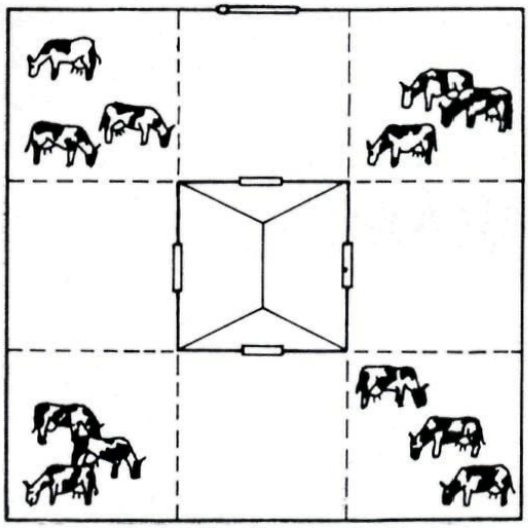
Op zekere dag staat ook het buitenhek open en loopt er één koe weg. De boer merkt er echter niets van, want vanuit elk raam telt hij toch nog steeds 6 koeien. Hoe kan dat? De volgende dag loopt er weer één weg. De boer merkt nog niets. En de volgende dag weer één. Hoeveel koeien kunnen er zo totaal weglopen, vóór hij iets merkt? Maar dan gaat hij ook naar buiten en herstelt het buitenhek. Steeds gaat hij weer door de ramen kijken of alles nog klopt. Dan beginnen



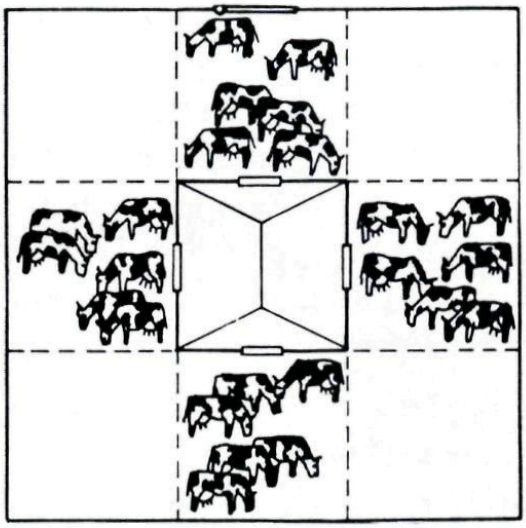
de boer met 16 koeien



nog maar 15 koeien



nog maar 12 koeien



nu 24 koeien!

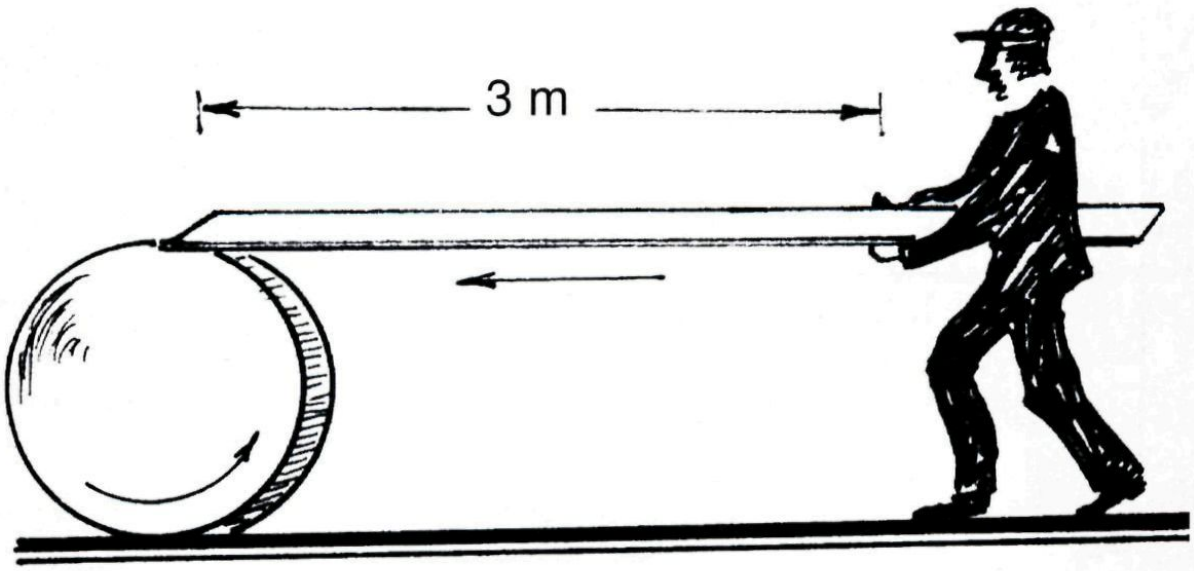
de koeien te kalveren, zodat er steeds meer beesten rondlopen. Maar hij heeft weer niets in de gaten. Bij welk aantal ontdekt hij dat zijn bezit is uitgebreid?

De oplossing kun je vinden op pagina 19. ■

Rollende cilinder

Een man legt een plank met het eind op een rollende cilinder en loopt dan vooruit waarbij de roller niet slipt. De lengte vanaf zijn hand tot de cilinder is 3 m.

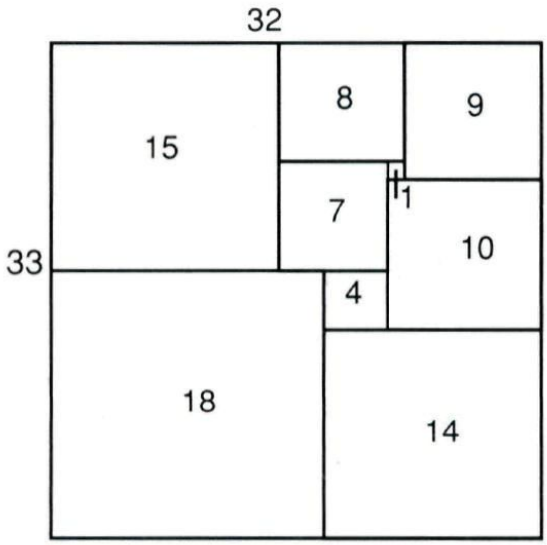
Hoeveel meter moet hij vooruit lopen om met zijn hand bij de cilinder te zijn?
Als je het echt niet zelf kunt verzinnen, kijk dan op pagina 19. ■



Een rechthoek vullen met vierkanten

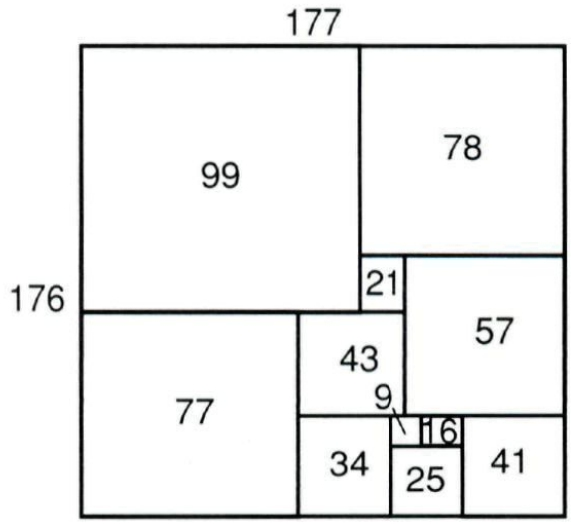
❍❍ In het boek: mathematical puzzles wordt beschreven hoe een groepje wiskunde-studenten van de universiteit van Cambridge zich bezig heeft gehouden met het verknippen van rechthoeken in vierkanten. Het doel dat ze zich stelden: verdeel een rechthoek in een aantal vierkanten, liefst allemaal verschillend van grootte.

In figuur 1 staat een eerste voorbeeld. De rechthoek heeft afmetingen 32 x 33 en is verdeeld in 9 vierkanten met zijden 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 en 18. De getallen in de vierkanten geven daarbij aan hoe lang de ribben telkens zijn.
Een volgend voorbeeld staat in figuur 2. Controle is niet moeilijk; gewoon een kwestie van optellen. Zo moet langs de onderzijde:
77 + 34 + 25 + 41 = 177 enz.
Zowel in horizontale als verticale richting zullen alle optellingen 177 en 176 moeten opleveren.

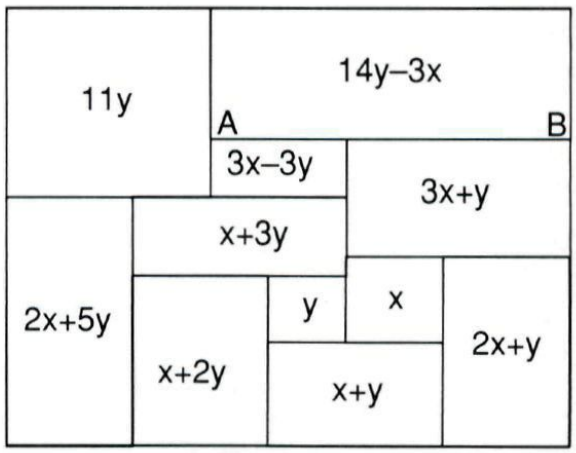


Figuur 1

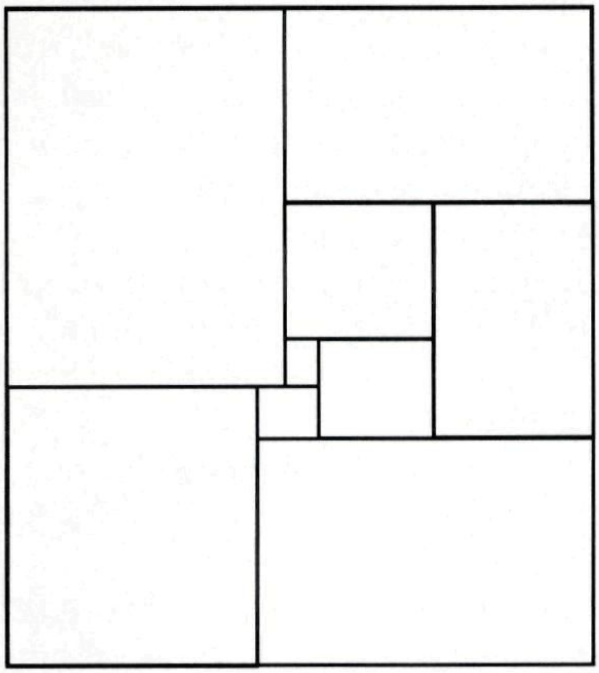
Hoe vind je zoiets?
In figuur 3 hebben we het principe van de verdeling van figuur 2 aangegeven. We hebben alleen nog



Figuur 2.



Figuur 3.

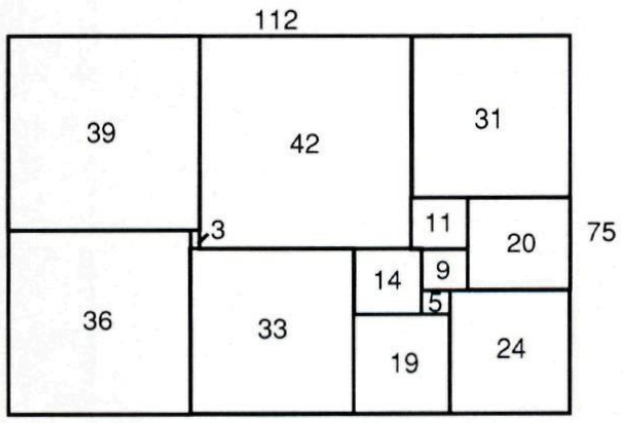


Figuur 4.

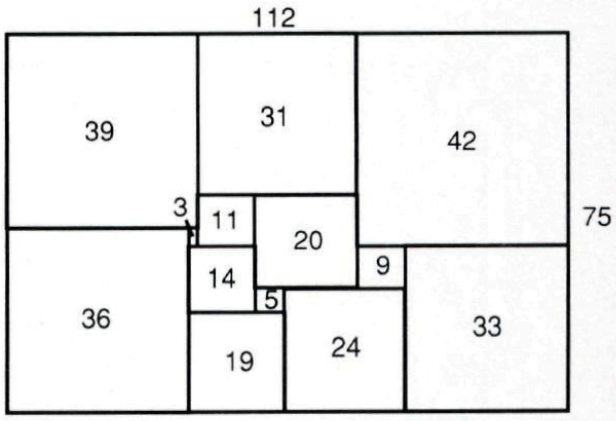
geen idee van de maten, we kunnen beter zeggen van de maatverhoudingen. Vandaar dat de vierkantjes er allerminst erg op lijken, we hebben maar wat rechthoekjes getekend.
Door een berekening gaan we er nu allemaal vierkantjes van maken. Ergens in het midden stellen we bijvoorbeeld een vierkant met zijden x. De buurman geven we zijden met lengte y. Het 'vierkant' eronder krijgt dan zijden met lengten x + y. Rechts ervan 2x + y en ga zo maar door. Het lukt, uitgaande van x en y alle vierhoeken (sorry, vierkanten) te voorzien. Ga maar rond en kijk maar of alle overige aanduidingen zo kloppen.
We proberen nu een relatie tussen x en y te vinden. Let eens op lengte AB. Er geldt: AB = 14y – 3x = 3x + – 3y + 3x + y of 14y – 3x = 6x –2y of 9x = 16y. De kleinste gehele waarden voor x en y zijn dus: x = 16 en y = 9. En daar horen dus zijden voor de grote rechthoek bij: 177 en 176.
Het zal duidelijk zijn dat je alle waarden altijd met eenzelfde willekeurig positief getal mag vermenigvuldigen; dat geeft dan weer een oplossing.
Je kunt nu zelf alle zijden uitrekenen en dan kom je weer bij figuur 2 uit.

Zelf proberen

In figuur 4 hebben we een rechthoek getekend waarin centraal al een tweetal vierkanten te zien zijn, maar de overige "vierkanten" zijn nog niet bepaald een succes.



Figuur 5.



Figuur 6.

Volg de hiervoor vermelde werkwijze en teken de verdeling in correcte vierkanten. Er is een oplossing. Eerst proberen en dan kijken op pagina 32.

Meer oplossingen

In de figuren 5 en 6 is dezelfde rechthoek (112 x 75) tweemaal verdeeld in 13 vierkanten. Het zijn precies dezelfde vierkanten, maar wel in een andere volgorde!

Van eindig naar oneindig

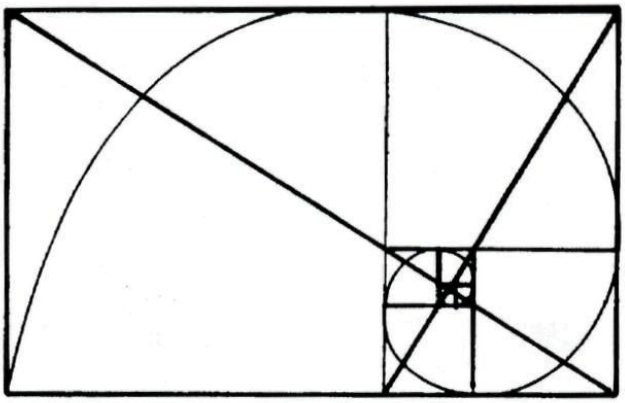
De groep studenten heeft er heel wat afgezocht. Hoe vind je figuur 7, een vierkant verdeeld in liefst 26 verschillende kleinere, waarbij enkele lilliputters. Ten slotte ontdekten ze dat het zelfs mogelijk is een bepaald type rechthoek in oneindig veel verschillende vierkanten te verdelen.

Je moet wel van een geschikte rechthoek uitgaan. Een verhouding van zijden 50 : 31 komt aardig in de buurt.

Als je figuur 8 goed bestudeert zul je ontdekken dat de werkelijke verhouding $1 : \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$ is.

Dat volgt uit een paar gelijkvormige driehoeken. In dat geval heeft elk volgend vierkant een zijde die telkens dezelfde fractie van de voor-

Figuur 7.



Figuur 8.

gaande is. Een hoekpunt komt beurtelings te liggen op één van beide ingetekende diagonalen. Hun snijpunt is het verdwijnpunt van de vierkantjes.
Voor wie meer geïnteresseerd is volgt hier nog de volledige titel van het betreffende boek:
Martin Gardner: More Mathematical Puzzles and Diversions. ■

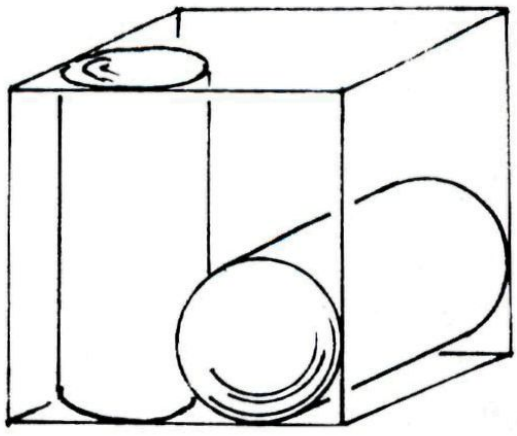
Pannekoeken bakken

❍ Het is gebruikelijk om pannekoeken aan weerskanten bruin te bakken. We hebben nu drie pannekoeken te bakken en er kunnen maar twee tegelijk in de pan. Hoe moet je het aanpakken om zo vlug mogelijk klaar te komen. Oplossing: zie pagina 21.■

Cilinders in kubus

❍ We hebben een kubus en een aantal cilinders. Deze hebben een hoogte gelijk aan die van de kubus en een diameter gelijk aan de helft ervan. Het zal je niet moeilijk vallen om in te zien dat je maximaal vier van deze cilinders in de kubus kunt stapelen. We hebben al een begin gemaakt. Kun je het afmaken?

Opgave
Kijk eens naar de tekening. Probeer nu eens te bedenken hoe je de derde erin moet zetten om te beletten dat de vierde er nog bij kan.
Oplossing: zie pagina 32. ■



Repeterende vergelijkingen

○○○ Zoals je repeterende breuken hebt waarbij een bepaalde cijfercombinatie tot in het oneindige herhaald wordt, zijn er ook vergelijkingen met die eigenschap.
Het lijkt een onbegonnen zaak om die op te lossen, maar in een aantal gevallen, blijkt het maar een fluitje van een cent te zijn. We geven hierbij enkele voorbeelden, waarbij je het herhalingseffect op je rekenmachine zou kunnen programmeren om het effect van de methode te onderzoeken.

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots}}} = 7$$

Het linkerlid zal niet veranderen als we bijvoorbeeld de eerste combinatie van wortelteken, x en + zouden weglaten. Maar dat betekent: $\sqrt{x} + 7 = 7$ en die vergelijking is gauw opgelost, namelijk $x = 42$.
Door nu in het linkerlid voor $x = 42$ in te vullen en met je rekenmachine telkens achtereenvolgens worteltrekking en optelling uit te voeren, zul je zien dat we met rasse schreden naar 7 gaan.
Omgekeerd zou je op deze manier de limietwaarde van het linkerlid kunnen bepalen voor een zekere waarde van x.
Toon maar een aan dat je voor $x = 1$ uitkomt op 1,618034 . . . officieel op $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

$$\sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \ldots}}} = 9 - x$$

We laten weer het eerste wortelteken en de eerste x weg; de rest moet dan weer gelijk zijn $9 - x$.
De oplossing gaat dan als volgt:
$\sqrt{x + (9 - x)} = 9 - x$ of $x = 6$.
Ga maar weer herhaaldelijk $x = 4\frac{1}{2}$ invullen en dan moet je in dit geval ook op 3 uitkomen.
De gecompliceerde vergelijking is gewoon identiek aan $x = 9 - x$. In het algemeen: $\sqrt{xp} = p$ of $xp = p^2$ of $x = p$.

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots}}} = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x \ldots}}}$$

We maken het nog iets moeilijker. We stellen de twee linkerleden van de vorige voorbeelden aan elkaar gelijk en vragen hiervan de oplossing. Je ziet al snel dat $x = 0$ voldoet, maar er is er nog een oplossing.
Omdat ook hier weer een inwendige wortel gelijk is aan de totale, kunnen we aan het begin een stuk weglaten of toevoegen.
Stel linker en rechterlid gelijk aan y. Dan geldt dus ook $y = \sqrt{x} + y$ en tevens $y = \sqrt{xy}$.
En dat zijn twee vergelijkingen met twee onbekenden en die kun je gemakkelijk oplossen.
We vinden $x = 0$ of $x = 2$. Bovendien blijkt ook $y = 2$ en dat zijn dan de limietwaarden voor beide leden in het geval $x = 2$. Dat laatste moet je zeker weer uitproberen.

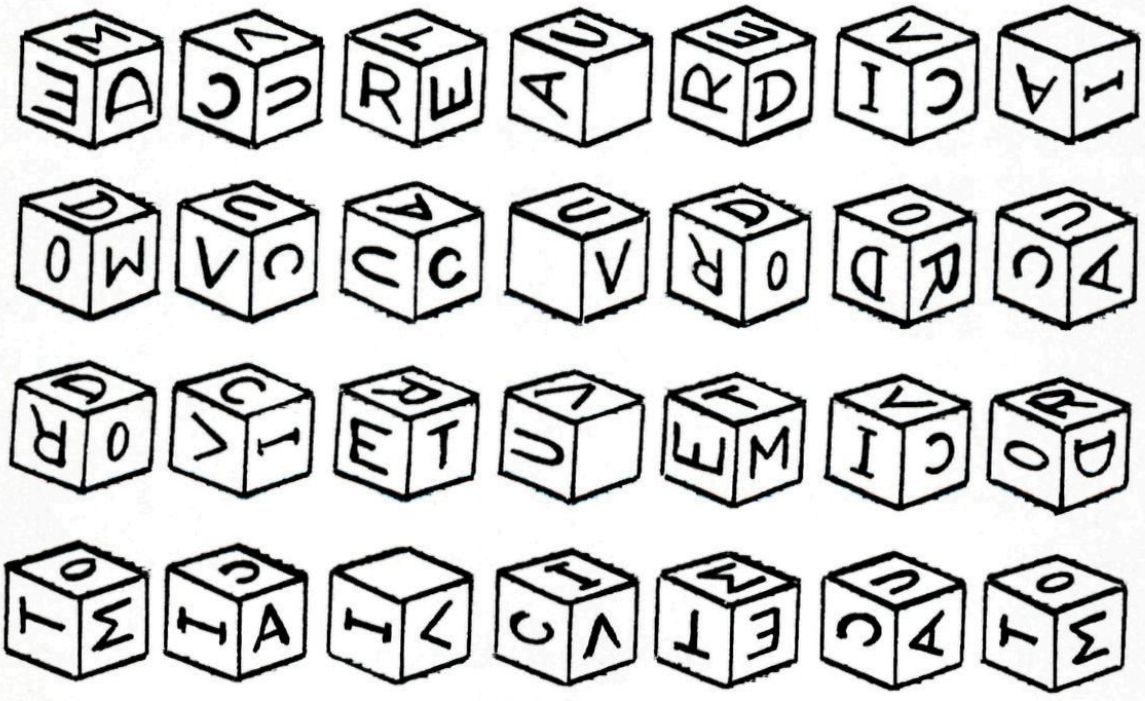
Verder experimenteren
Hier staan ideeën genoeg om zelf voorbeelden te ontwerpen, daarbij kijkend of je met deze ervaringen daar misschien uit weet te komen. De herhaalgedeelten moeten natuurlijk niet al te gek worden. Maar wat is al te gek? ■

Waar of niet-waar?

○○ We verheffen x steeds weer tot de macht x en vragen deze vergelijking op te lossen. Bepaal dus x.
Het lijkt een fiks karwei. Wij beweren dat $x = \sqrt{2}$ en hebben daarvoor de volgende eenvoudige redenering. Ga maar na dat je de vergelijking ook kunt schrijven als $x^2 = 2$ en dus is de oplossing $x = \sqrt{2}$. We beweren dus dat als je $\sqrt{2}$ steeds verheft tot de macht $\sqrt{2}$ er een limietwaarde 2 verschijnt. Ter vergelijking lijkt het verstandig eens na te gaan wat 2^{2^3} voorstelt. ■

Blokjespuzzel

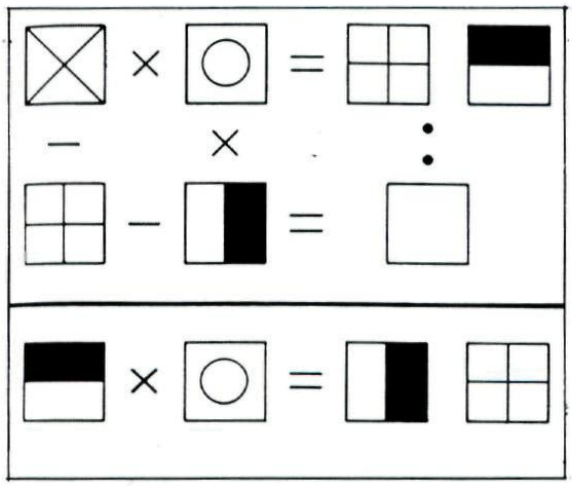
Op twee blokjes zijn letters aangebracht. Van beide type blokjes zijn er totaal 28 beschikbaar. Door deze in een bepaalde volgorde te leggen, is het mogelijk een natuurverschijnsel aan te geven, alsmede de naam van een persoon, die er zich bijzonder mee heeft bezig gehouden.
De bedoelde letters staan in de juiste volgorde op de onderzijde van de blokjes. Lees daarbij van links naar rechts, regel voor regel.
De oplossing kun je vinden op pagina 22. ■

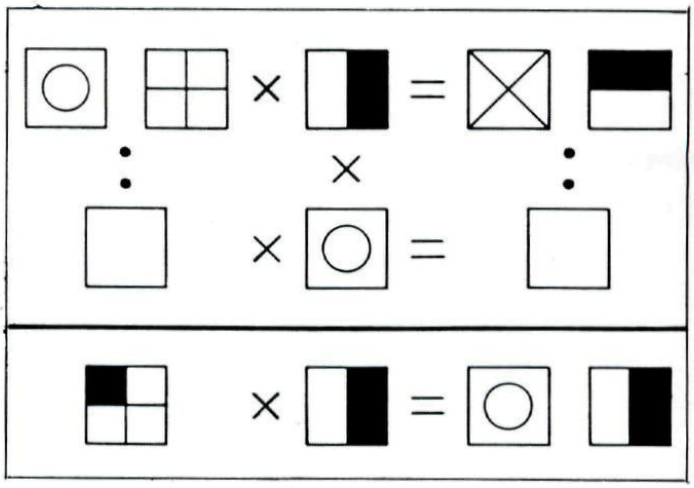


Cijferpuzzel zonder getallen

○○ Hier staan twee puzzels waarbij elk teken telkens één cijfer voorstelt. Een ander teken verbeeldt steeds een ander getal. Twee hokjes naast elkaar stellen een getal van 2 cijfers voor.

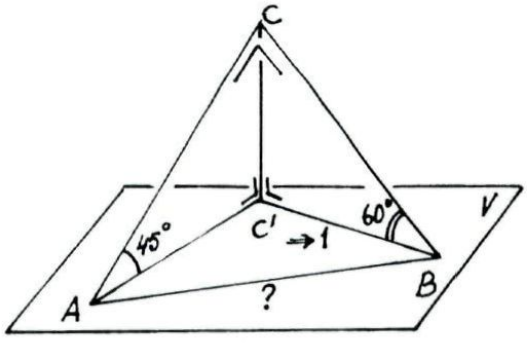
Bepaal de getallen zo dat de 6 aangegeven bewerkingen uitkomen. In de tweede puzzel hebben de figuurtjes een andere betekenis dan in de eerste.
Voor wie wiskundig wat handig is, lijkt een manier van werken: de figuurtjes te vervangen door letters. De eerste puzzel heeft 6 onbekenden, de tweede 7. Door vergelijkingen op te stellen en die op te lossen kun je de onbekenden dan vinden. Oplossing: pag 25. ■





Waar of niet-waar?

○○ Van een rechthoekige driehoek ligt de schuine zijde in vlak V. Rechthoekszijde AC maakt een hoek van 45° met V en de andere BC een hoek van 60°.

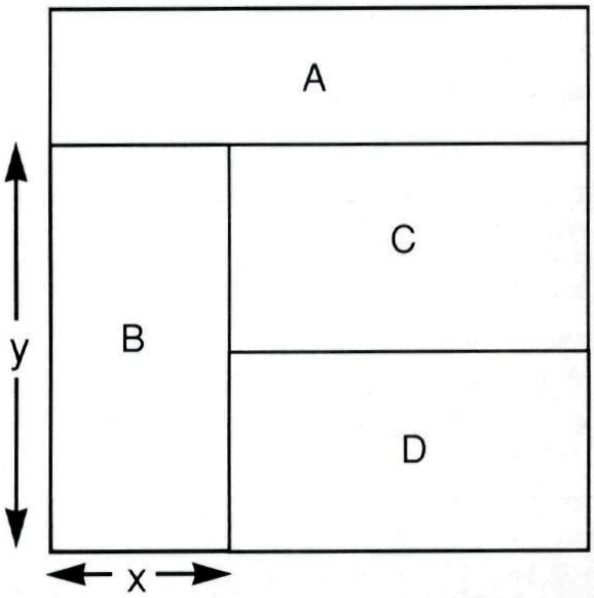


Als gegeven is: BC' = 1, bereken dan AB.
Oplossing:
BC' = 1 dan BC = 2 en CC' = $\sqrt{3}$ en dan
AC = $\sqrt{6}$.
Ten slotte: $AB^2 = 6 + 4 = 10$
of AB = $\sqrt{10}$.
Knip de driehoeken AC'C en BC'C op schaal uit en zet ze tegen elkaar, zoals in de tekening. . . . ■

Gelijke oppervlakte, gelijke omtrek

❍ We hebben een vierkant met maten 24 x 24.
Verdeel dit volgens het schema van de figuur in vier rechthoeken A, B, C en D, zodat ze alle vier eenzelfde oppervlakte krijgen. Probeer het antwoord te vinden zonder het bepalen van x en y door middel van vergelijkingen. Gewoon een beetje redeneren met wat optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

We hebben nog een vierkant voor je om te verdelen. De afmetingen zijn nu 7 x 7. Maak nogmaals een verdeling volgens hetzelfde schema, er nu voor zorgend dat alle vier de rechthoeken eenzelfde omtrek krijgen.
Ga nu maar vergelijkingen maken met x en y, maar zonder een derde onbekende te stellen.
De oplossing staat op pagina 28.



Oplossing: rollende cilinder

❍❍ Als de schijf vastligt en de plank er overheen schuift, wordt het antwoord 3 m. Maar nu gaat ook nog tegelijkertijd de roller 3 m vooruit, waardoor het antwoord 6 m wordt.

Je kunt ook als volgt redeneren. De verplaatsing van het middelpunt is evenveel als die van de man. Maar het hoogste punt van een wiel heeft bij een roller een dubbele snelheid ten opzichte van het middelpunt. Je kunt het ook zelf uitproberen en nameten. Laat bijvoorbeeld een potlood rollen over een klosje, dan zie je het zo. ■

Oplossing: de boer en zijn koeien

Pas als de vijfde koe wegloopt heeft de boer wat in de gaten. Pas als er 25 stuks rondlopen merkt hij dat de kudde is uitgebreid!

Ontwerp voor een draaimechaniek

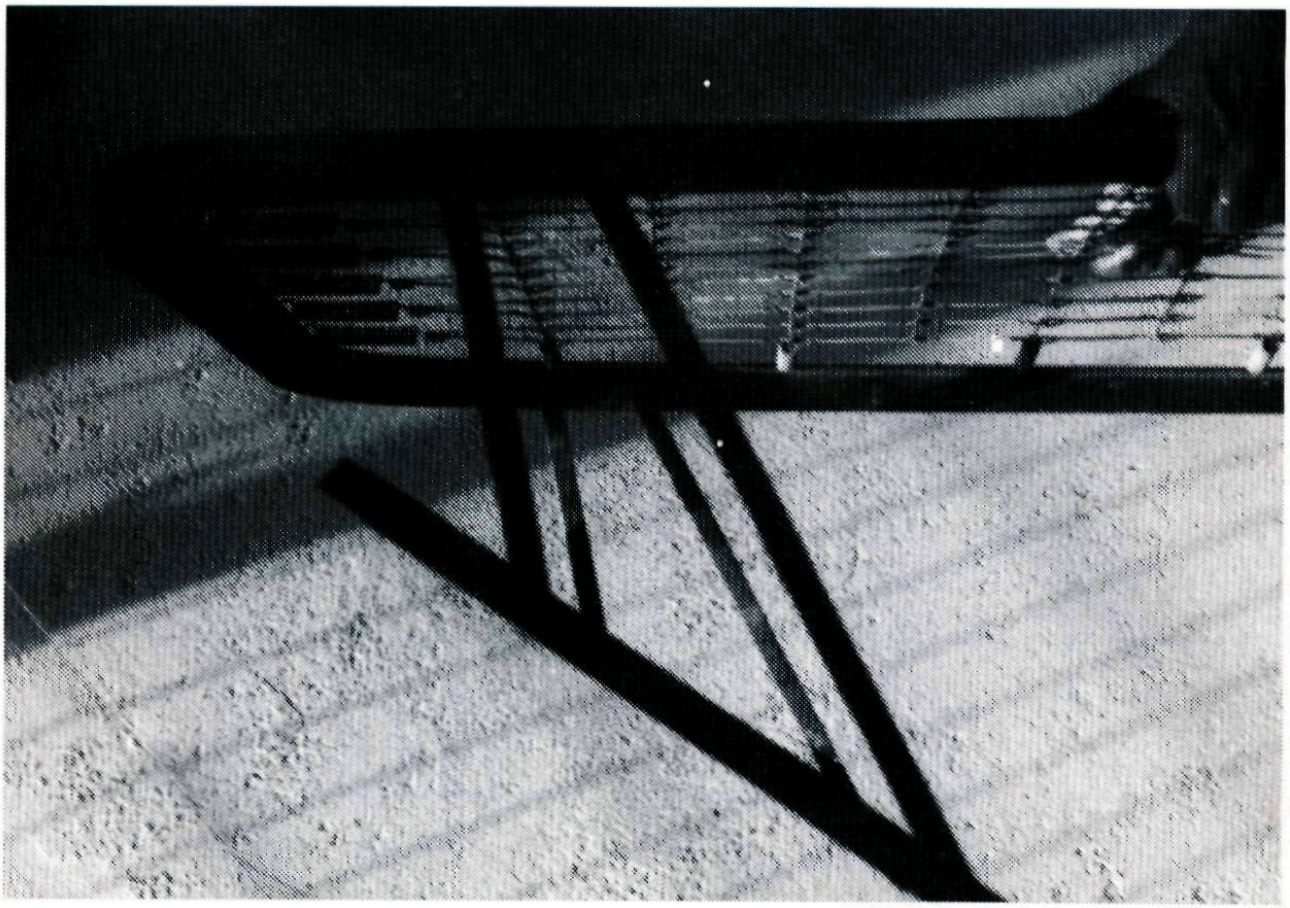
❍ Als we spullen kunnen dichtklappen, kunnen we ze gemakkelijker opbergen. Dat doen we bijvoorbeeld bij een paraplu, een tuinmeubel, verzin maar verder. In dichtgeklapte toestand nemen ze weinig ruimte in. Voor een goed ontwerp komt er vaak de nodige meetkunde om de hoek kijken. Als voorbeeld hier het ontwerp voor een dicht-klap-bed.

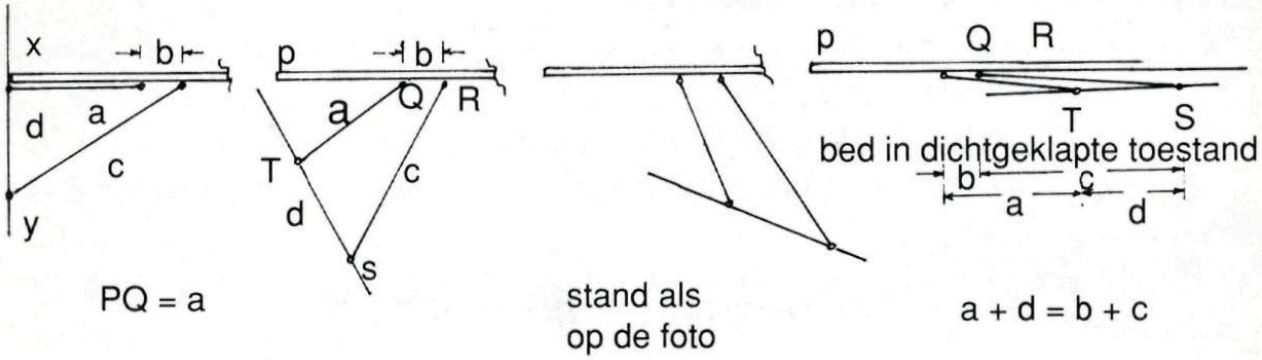
Vierhoeksconstructie

Een spiraalbed (zie foto) heeft een verticale achterwand. Als we het bed niet gebruiken, kunnen we die dichtklappen onder tegen de spiraal aan. De wand moet daarvoor 90^{o} kunnen draaien.
Een parallellogram werkt hier niet; dat dient om iets evenwijdig te verplaatsen. Met een ander type vierhoek kan het wel lukken.

Dichtklappen

Als je de foto goed bekijkt en verder de vier tekeningen, snap je vast wel de bedoeling.
We willen nu een voorstel maken voor de maten van de verschillende stangen en wel zo dat de zaak naar genoegen werkt.
Zo te zien zijn er zes veranderlijken in het spel, aangegeven met x, y, a, b, c en d.





Het is wel duidelijk dat de maten x en y de minste problemen geven. Die kun je naar eigen smaak kiezen: hoe hoog wil je het schot en hoe-ver moet de matras boven de grond.

Vergelijkingen

Het gaat dan alleen maar om de vierhoek QRST ofwel:
hoe groot kiezen we a, b, c en d.
Het uitzetten van het bed en het dichtklappen bepalen dan de voorwaarden en daarmee de vergelijkingen voor deze vier onbekenden.
In de uitgezette stand moet de driehoek TRS rechthoekig worden.
Volgens Pythagoras geldt dan:

$$c^2 - d^2 = (a+b)^2$$

Dat is dan de eerste relatie.
In dichtgeklapte toestand moet gelden:

$$a + d = b + c$$

Ga dat zelf maar na. Je kunt dat aflezen in de vierde tekening.

Oplossing

Om vier onbekenden op te lossen hebben we vier vergelijkingen nodig. Maar we hebben er maar twee. Dat betekent dat we van deze vier er nog twee zelf kunnen kiezen. De beide andere zijn dan van die keuzen afhankelijk.
We hebben twee maten aan het bed zelf opgemeten en wel
$a = 35$ cm en $b = 10$ cm.
Uit de vergelijkingen volgt dan:

$$c^2 - d^2 = 2025$$

en verder: $c - d = a - b = 25$.
Omdat $c^2 - d^2 = (c+d)(c-d)$
volgt $c + d = 81$.
De gecombineerd met $c - d = 25$
geeft $c = 53$ en $d = 28$.
En hiermee is het ontwerp af. ■

Pannekoeken bakken: oplossing

❍ Leg de eerste twee erin. Keer de eerste om, haal de tweede eruit en leg de derde erbij. Haal dan het dubbelgebakken exemplaar eruit, keer nummer drie om en leg de tweede met de ander kant terug in de pan. Zo liggen er steeds twee in en gaat het karwei het snelst. ■

Driehoek met vierkanten

❍ In een driehoek waarvan basis en hoogte even groot zijn, zetten we een vierkant zoals in de tekening aangegeven.
In de driehoek daarboven herhalen we dit weer. We hebben hierover twee vragen:

1. Bewijs dat de hoogte van het eerste vierkant de helft is van die van de driehoek.
2. Welk deel van de oppervlakte van de driehoek beslaan de vierkanten, als we het proces lang zouden voortzetten?

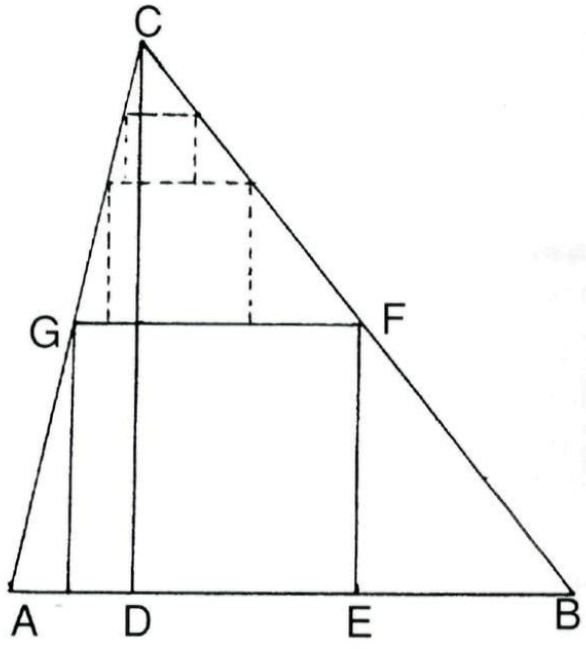
Een beetje voorzeggen

We willen je een stuk op weg helpen. Een reeks getallen waarbij elke volgende term uit een voorgaande ontstaat door vermenigvuldiging met een bepaalde factor, noemen we een meetkundige rij. We stellen de eerste term a en de factor r. Dan ziet de rij er aldus uit:
$a \quad ar \quad ar^2 \quad ar^3 \ldots$
Als $r < 1$ dan zullen de termen steeds kleiner worden en ten slotte tot nul naderen. Als we ze dan allemaal optellen, krijgen we een somlimiet. De uitkomst daarvan is:

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

Bewijs

$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$
$rS = \quad ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$



Aftrekken geeft:

$S - rS = a$ of $S = \frac{a}{1 - r}$

Nu kom je ervast zelf wel verder uit.
Voor de oplossing zie pagina 31. ■

Oplossing: blokjespuzzel

De 28 blokjes gezet in de gegeven volgorde leverden op:
radioaktiviteit madame curie.

Opsporing verzocht

❍❍ In de thriller 'the iron glass' komt een passage voor van een inbraak op de twee en twintigste verdieping van een kantoorgebouw aan de Enterprise-street in Atlanta.
Een of meer van de vijf kantoorbedienden zouden de inbraak gepleegd moeten hebben. In aanmerking komen de heren: Bucker, Davids, Miller, Sheperd en Thompson.
Maar wie? Te vertrouwen waren ze geen van allen.
Hitchcock beschikte over vrij uitvoerige karakterbeschrijvingen waaruit de volgende conclusies kwamen.

Davids en Bucker waren gezworen kameraden. Ze zouden samen hebben ingebroken of geen van beiden. Bucker liet zich altijd sterk beïnvloeden door Sheperd; als Sheperd meegedaan zou hebben, was Bucker er ook vast bij.
Thompson en Davids leken het meest verdacht, maar ze waren vast niet allebei in de zaak betrokken, want ze konden elkaar niet luchten of zien. Sheperd zou

alleen meegedaan hebben als Miller buiten het complot zat, want hij vertrouwde hem voor geen cent. Miller en Thompson waren de enige die een sleutel van de flat hadden, dus minstens één van hen moest tot de verdachten behoren, want de dieven hadden zich van de normale voordeur bediend.

Tweetallig

We geven de namen van Bucker, Davids, Miller, Sheperd en Thompson aan met a, b, c, d, e. Hoeveel mogelijkheden zijn er? We schrijven een '1' als iemand wel en een '0' als iemand niet in aanmerking komt. Totaal krijgen we dan een lijst van 31 mogelijkheden. Zo betekent 00101 dat c en e verdacht zijn.
Ongetwijfeld zul je in de lijst van mogelijkheden de getallen van 0 tot 31 herkennen, geschreven in het tweetallige stelsel. Zo iets gaat alleen maar op als het om twee mogelijkheden gaat, ja of nee, 1 of 0.

Opsporing

We lopen nu de verschillende gegeven na.

1. Davids en Bucker hebben samen meegedaan of geen van beide. Dat betekent dat alle vijftallen die beginnen met 01 of 10 wegvallen. Dat zijn dan alle combinaties van 8 tot en met 23.
2. Als Sheperd meedeed, was Bucker er zeker ook bij. Nu alleen mogelijk 1bc1e en1bc0e.
3. Thompson en Bucker mogen niet tegelijk meedoen, zodat alleen a0cd1 en a1cd0 geschikt zijn. Dat geeft weer de nodige afvallers.
4. Sheperd ja als Miller nee. Dus goed ab01e en ab10e en ab00e; fout ab11e.
5. Miller of Thompson of beide moeten erbij geweest zijn, dus goed ab1d0 en ab0d1 en ab1d1.

Oplossing

Je kunt de zaak nu vast zelf wel afmaken. Als je juist hebt weggestreept, houd je nog maar één enkele combinatie over en dat is dan de club echte verdachten. Hoeveel en wie?

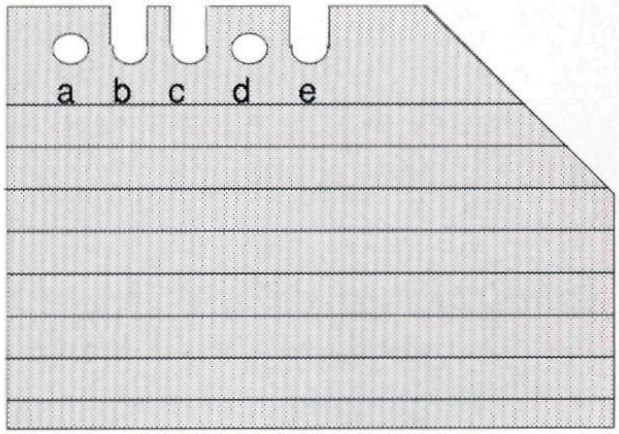
Ponskaarten

Er is een mechanische manier om zo'n probleem aan te pakken. Voor elke mogelijkheid maken we een ponskaart. In elke kaart komen 5 gaatjes. Dat kun je gemakkelijk klaar krijgen met een ponsapparaat, waarmee je ook gaatjes in multopapier maakt. Zorg dat alle gaatjes keurig op elkaar passen.
Zo'n gaatje stelt een nul voor. We kunnen zo'n gaatje ook uitknippen en dat betekent een 1.
In de tekening staat 13 tweetallig uitgeponst ofwel; de combinatie 01101. Totaal hebben we dus 31 kaarten nodig.Aan één kant knippen we een hoek af om zeker te zijn dat alle kaarten in de goede stand staan.

0	00000	16	10000
1	00001	17	10001
2	00010	18	10010
3	00011	19	10011
4	00100	20	10100
5	00101	21	10101
6	00110	22	10110
7	00111	23	10111
8	01000	24	11000
9	01001	25	11001
10	01010	26	11010
11	01011	27	11011
12	01100	28	11100
13	01101	29	11101
14	01110	30	11110
15	01111	31	11111

Lucifer

Hitchcock heeft nu alleen nog maar een lucifer nodig om het karwei te klaren. Neem de eerste voorwaarde. Alle kaarten beginnend met 01 of 10 moeten eruit. Steek de lucifer in het eerste



gaatje. Schud en verzamel de kaarten die eruit vallen. Volgens de redactie kun je het verdere proces zelf wel verzinnen. Na de nodige sorteeractiviteiten houd je tenslotte de enige gezochte kaart over.

Papieren computer

Het zal je duidelijk zijn dat de ponskaartenmethode een voorloper is van de computer. Die heeft ook een tweetallige intelligentie. Bij een geschikt programma, zijn opgaven als boven, snel opgelost. ■

Oplossing: cijferpuzzel

```
6 x 7 = 4 2
−   x   :
4 − 1 = 3
-------------
2 x 7 = 1 4
```

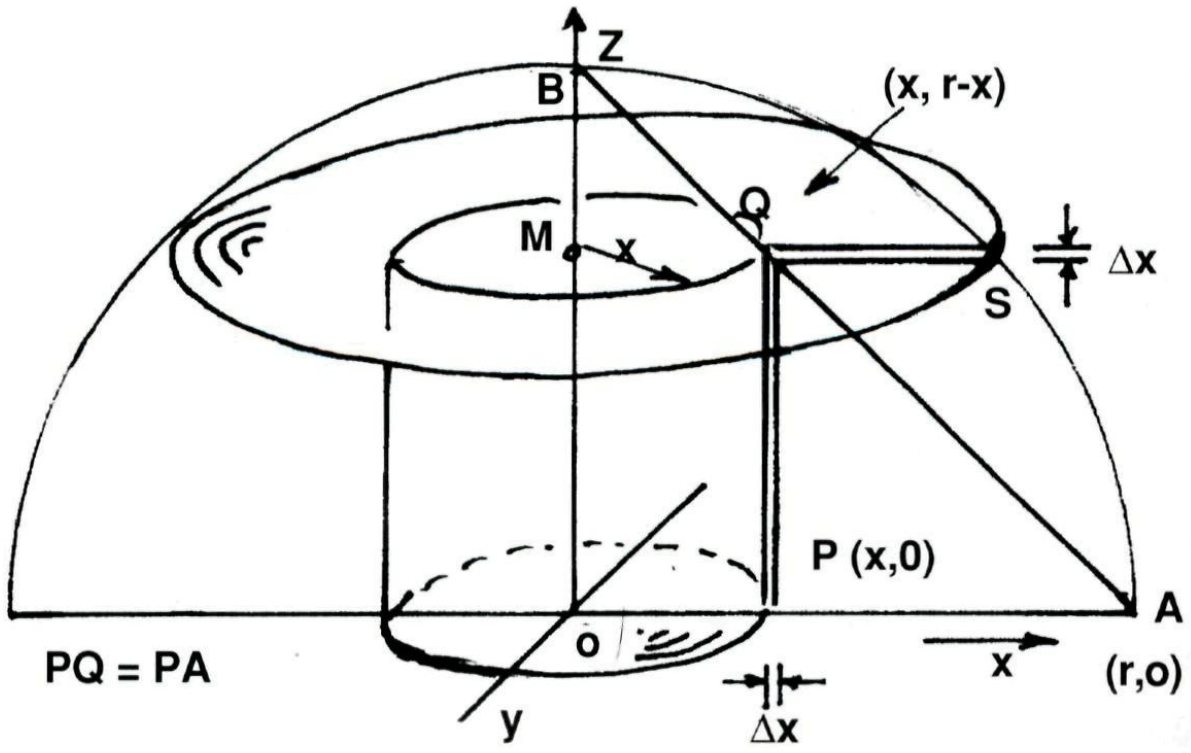
```
1 2 x 5 = 6 0
:     x     :
4     x 1 =   4
-----------------
3     x 5 = 1 5
```

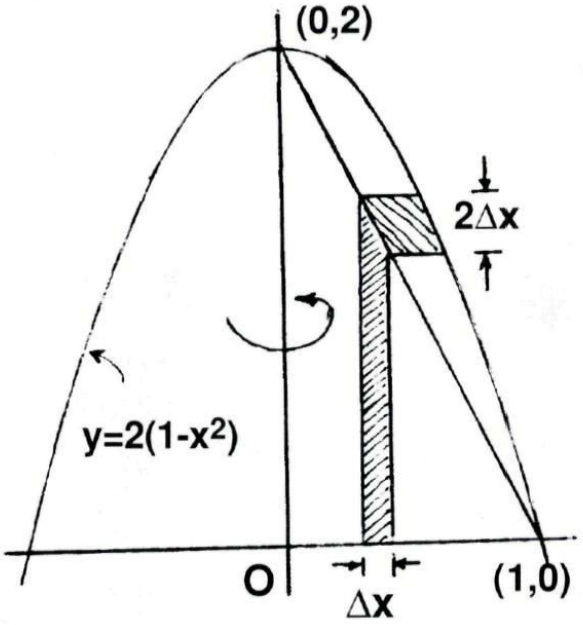
PYTHAGORAS komt hierbij met een primeur.
Het volgende artikel van Dr. Jan Guichelaar uit Purmerend geeft een originele methode om van omwentelingslichamen het volume te bepalen. Het is de methode van 'de open hoeden'.

Integreren uit de hoge hoed

○○○ Integreren is een wiskundige werkwijze om bijvoorbeeld een volume te bepalen. Dit lukt door het optellen van oneindig veel zeer kleine volumenelementen. Zo kun je de inhoud van een bol bepalen. De uitkomst wordt daar $\frac{4}{3}\pi r^3$, waarbij r de straal van de bol is.
We gaan dit nu voor een bol, op een wat originele wijze, proberen. Maar eerst gaan we een merkwaardige stelling bewijzen.

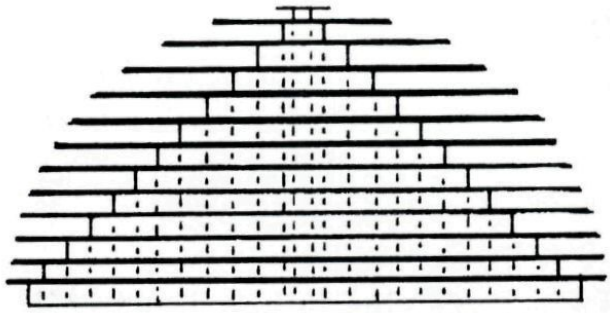
Hulpstelling
Teken een cirkel met O als middelpunt en r als straal.
A(r,O) en B(O,r) liggen op deze cirkel. We kiezen een punt P(x,O) ergens op de x-as tussen O en A.
De verticaal door P snijdt AB in Q met coördinaten (x, r-x). Als we de figuur wentelen om OB, beschrijft PQ een cilindermantel en QS een ring.
De oppervlakte van de mantel is:
$2\pi(OP)(PQ) = 2\pi x(r-x)$
De oppervlakte van de ring is:
$\pi(MS)^2 - \pi(MQ)^2 =$
$\pi(OS^2-OM^2) - \pi(MQ)^2 =$
$\pi(r^2 - (r-x)^2) - \pi x^2 =$
$2\pi x(r-x)$.





Voor elke waarde van x zijn dus de oppervlakten van ring en cilindermantel gelijk.
Als we de cilindermantel een dikte Δx geven, hoort daarbij een volume $2\pi x(r-x)\Delta x$. Omdat AB onder 45° loopt, zal de bijbehorende ring dezelfde dikte Δx hebben en dus ook hetzelfde volume als de cilindermantel.

De hoedjesmethode
We gaan de halve bol nu helemaal opvullen met aansluitende cilinders en ringen, alle met dezelfde dikte Δx. De halve bol wordt zo opgevuld met een aantal in elkaar passende 'hoeden' (overigens zonder bovenkant).
Ze zitten in elkaar geschoven zoals de bekende Russische poppetjes. Alleen zijn het er in dit geval oneindig veel, tenminste als we Δx alsmaar kleiner nemen.



In elkaar schuiven van hoedjes.

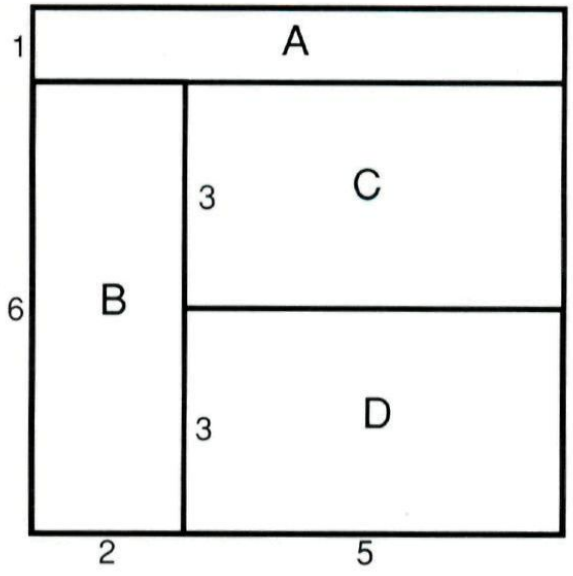
Volume van een bol
Alle ringen samen hebben dus hetzelfde volume als alle cilinders samen. De verzameling cilinders vormt juist een kegel met als grondvlak een cirkel met straal r en een hoogte eveneens r.
Voor de kegel geldt:
volume = $\frac{1}{3}$ grondvlak x hoogte.
In ons geval wordt dat:
$\frac{1}{3}(\pi r^2)r$ of $\frac{1}{3}\pi r^3$.
Het resterende deel van de halve bol heeft hetzelfde volume en de totale bol dus vier keer zo veel. En dus is het volume van een bol:
$\frac{4}{3}\pi r^3$.

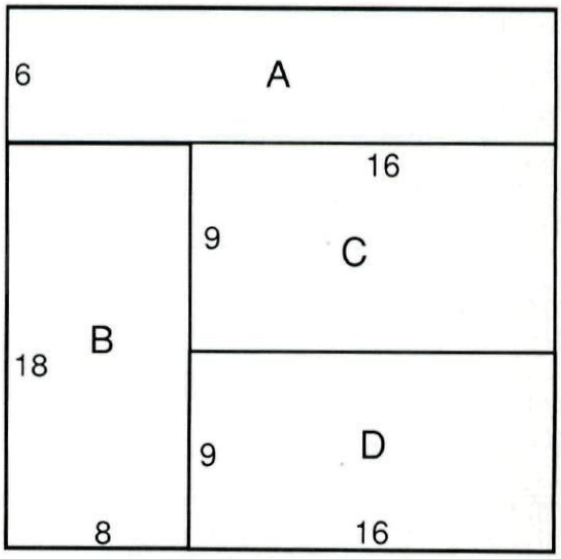
Volume bij een parabool
Er staat een bergparabool getekend met de vergelijking:
$y = 2(1-x^2)$.
We laten deze wentelen om de y-as. We kunnen ook hier de hoedjesmethode toepassen om het deel van de omwentelingsparabool boven de x-as te bepalen. Merk op dat hierbij de hoedjes bij cilinder en ring niet meer even dik zijn. Bij

een dikte Δx van de cilindermantel hoort een ringdikte $2(\Delta x)$. Dit komt omdat de richtingscoëfficiënt niet 1 is maar de waarde 2 heeft. Elk cilindertje blijkt een tweemaal zo groot volume te hebben als het bijbehorende ringetje.
Probeer de klus zelf maar verder te klaren. Volg de hoedjesmethode en probeer voor het volume te vinden $V = \pi$.
Zie je misschien ook kans om een nog algemener resultaat te krijgen bij een parabool van het type: $y = p(a^2-x^2)$?
Je moet dan als uitkomst vinden: $V = \frac{1}{2}\pi pa$. ■

Oplossing: oppervlakte en omtrek

❍ Gelijke oppervlakte:
De totale oppervlakte is 24 x 24 = 576. Elke rechthoek moet daarvan een kwart deel zijn ofwel 144. A is 24 lang en 6 breed. De hoogte van B wordt dus 24 – 6 = 18. De breedte van B wordt dan 8. De vakken C en D zijn congruent, dus elk 9 x 16.
Gelijke omtrek:
Omdat C en D weer congruent moeten zijn, worden ze elk $\frac{1}{2}y$ hoog. De halve omtrekken van de vier rechthoeken worden dan aldus:
voor A → $14 - y$
voor B → $x + y$
voor C en D → $7 - x + \frac{1}{2}y$
Door gelijkstelling zijn de onbekenden te bepalen.
Uitkomst: $x = 2$ en $y = 6$. Alle omtrekken worden dan 16. ■





Zoeken naar priemgetallen

❍ Een priemgetal is alleen maar deelbaar door 1 en door zichzelf. Een getal, dat uit 3 of meer factoren bestaat, kan dus nooit priem zijn. De Griekse wiskundige Euclides, die 300 jaar v.Chr. leefde, bewees al dat het aantal priemgetallen oneindig groot is.
Stel dat er een eindig aantal priemgetallen zou bestaan, dan zal er één zijn, dat het grootste is. Wij noemen dit getal P. Wij gaan nu alle getallen van 1 tot en met P met elkaar vermenigvuldigen, dus 1 x 2 x x 3 x 4 x ... x P en wij noemen dit product Q. Het is duidelijk dat Q door ieder getal van 1 tot en met P gedeeld kan worden zonder dat er een rest over blijft. Nu tellen we bij Q één op en wij zien dan dat Q + 1 niet meer deelbaar is, behalve door 1 en door zichzelf. Delen we Q door P of door een getal kleiner dan P dan blijft er een rest over. Met andere woorden Q is een nieuw priemgetal, dat groter is dan P. Onze stelling dat P het grootste priemgetal is, klopt dus niet. Het aantal priemgetallen is oneindig groot.

Formule van Euler
Leonhard Euler, het wiskunde fenomeen van de 18e-eeuw zocht een formule om priemgetallen te vinden en het gebruikte daartoe de vorm
$n^2 + n + 41$.
Deze formule werkt perfect totdat n de waarde 40 bereikt.
Dan klopt het niet meer want bij n = 40 komt er 1681 uit en dat is 41^2 dus geen priemgetal.
In 1963 had de grote Maniac II computer in Los Alamos de eerste 90 miljoen priemgetallen in het geheugen opgeslagen en nu bleek Euler's formule verrassend goed te werken voor heel grote waarden van n. De Maniac berekende dat de formule van Euler 47,5% juiste antwoorden gaf bij de berekening van alle priemgetallen tot 10 miljoen. De formule werkte zelfs beter voor kleinere waarden van n. Voor n-waarden lager dan 2398 steeg de trefkans tot 50% en voor n-waarden beneden 100 kwam het percentage op 86%.

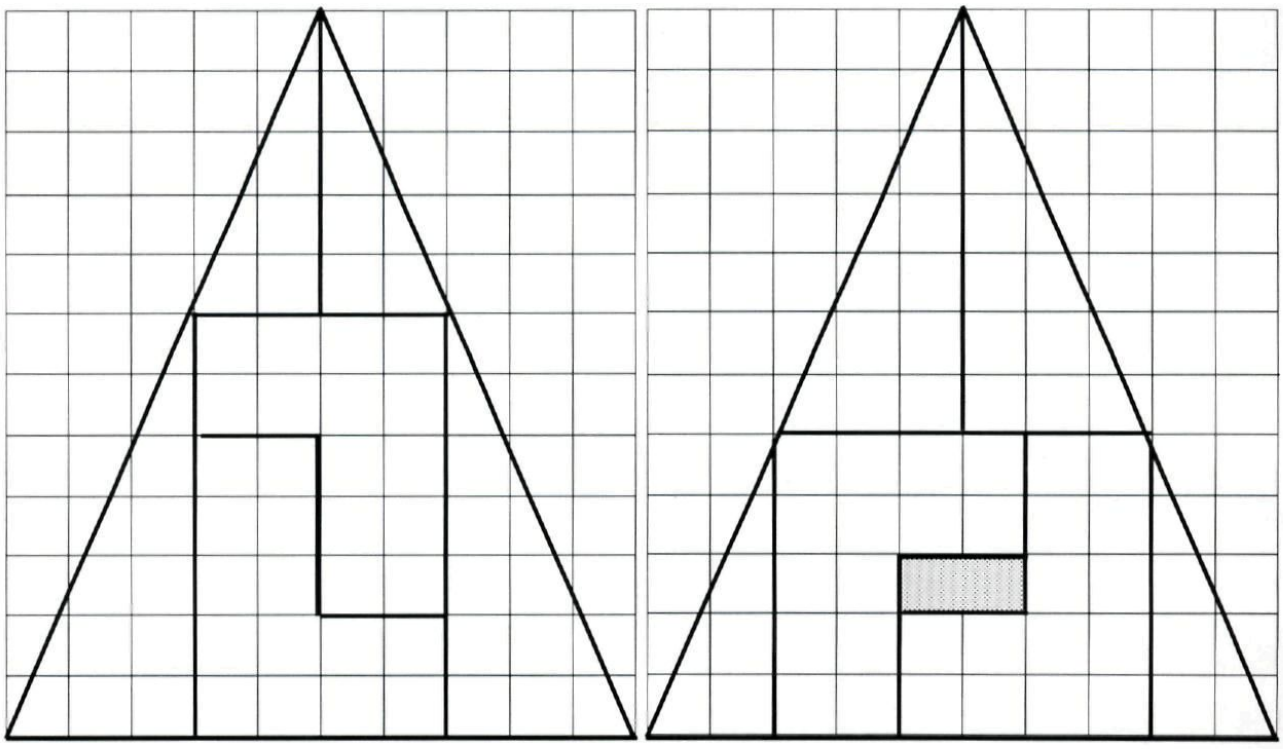
Nieuwe formules
Professor Ulam en zijn medewerkers, die met de Maniac werkten, ontdekten nieuwe formules, die bijna net zo goed waren als die van Euler. Met een resultaat van 46,6% berekende de formule
$4n^2 + 170n + 1847$
zelfs nog 760 priemgetallen, die niet met Euler's formule waren gevonden en de formule
$4n^2 + 4n + 59$
produceerde met een succesper-

centage van 43,7% nog eens zo'n 1500 priemgetallen die ook niet met de andere formules waren gevonden. Men is ervan overtuigd, dat er geen alles omvattende formule voor priemgetallen bestaat, maar het zoeken gaat door. ■

Schijn bedriegt

○○ Een gelijkbenige driehoek wordt verdeeld in vier rechthoekige driehoeken en twee L-vormige stukken.
Knip de figuren op maat uit (let op de aantallen hokjes) en leg twee keer de gelijkbenige driehoek. Als je de zes onderdelen anders rangschikt krijg je ogenschijnlijk dezelfde gelijkbenige driehoek. Maar ... je houd daarbij wel een rechthoekig gat over. Hoe kan dat?
Er zijn veel van dergelijke legpuzzels. Meestal is het zo dat de stukjes niet behoorlijk aan elkaar passen. Maar daar lijkt het in dit geval helemaal niet op. Wat is er dan aan de hand?
Je kunt de zaak op drie manieren bekijken, met vergelijkingen, met verhoudingen en met hoeken.

Vergelijkingen
Er wordt de indruk gewekt dat het linkerbeen van de grote driehoek een rechte is, die gaat door de punten (0,0), (2,5), (3,7) en (5,12), waarbij we oorsprong linksonder gekozen hebben. De verbindingslijn van oorsprong en top heeft als



vergelijking
$y = \frac{12}{5}x$ of $5y = 12x$.
Kijk nu zelf maar of (2,5) en (3,7) daarop liggen. Nee dus, maar het scheelt niet veel!

Verhoudingen
Je kunt het ook anders bekijken. Als de zaak 'eerlijk' is, zouden alle rechthoekige driehoeken toch gelijkvormig moeten zijn en dan zouden de rechthoekzijden toch dezelfde verhouding moeten hebben. Maar dan zou: 2:5=3:7. Maar dat is niet zo, maar het scheelt weer weinig.

Hoeken
Met behulp van de tangens kun je gemakkelijk de verschillende hoeken uitrekenen. De hoeken in de ene rechthoekige driehoek zijn ongeveer 22^o en 68^o en in de andere 23^o en 67^o. Maar dat betekent dat 'het linkerbeen' in de eerste tekening een knik naar binnen vertoont en in de rechter juist naar buiten.
Het verschil in 'de lijn' is overigens maar 1^o en dat is zo weinig dat je dat niet gemakkelijk opmerkt. ■

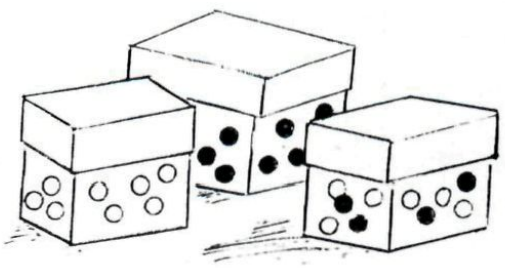
Oplossing: driehoek met vierkanten

De oppervlakte van de driehoek is $\frac{1}{2}c^2$ (c stelt basis en hoogte van de driehoek voor).
Het eerste vierkant heeft een oppervlakte $\frac{1}{4}c^2$, het tweede $\frac{1}{16}c^2$, het derde $\frac{1}{64}c^2$ en zo verder.
De somlimiet van de oppervlakten wordt dan $\frac{1}{3}c^2$. En dat is $\frac{2}{3}$ deel van de totale driehoek. ■

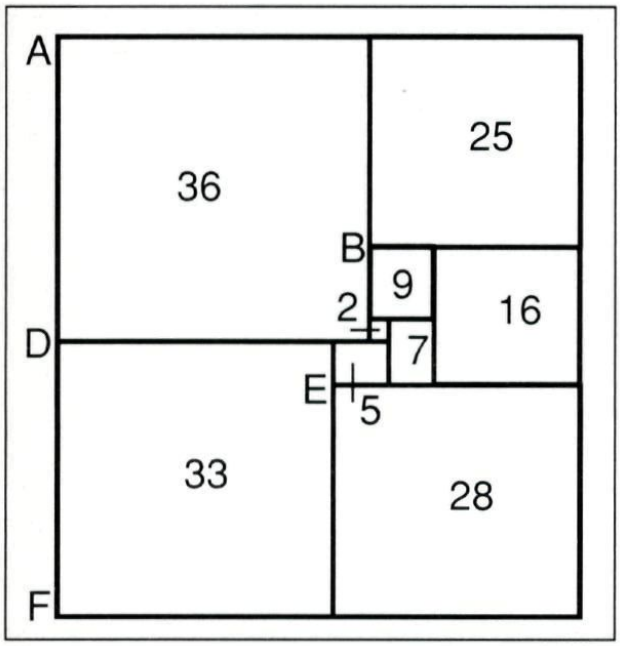
Waar of niet-waar?

❍ In drie doosjes zitten zwarte en/of witte balletjes. In één ervan alleen zwarte in een andere alleen witte en in de derde zwarte en witte door elkaar. Op elk doosje staan aanduidingen. Maar elk daarvan deugt niet.

Je kiest nu een doosje uit en haalt, zonder te kijken er één balletje uit. Dat blijkt zwart te zijn. Maar dan weet je nu ook precies wat er in elk doosje zit! ■



Oplossing: vierkanten

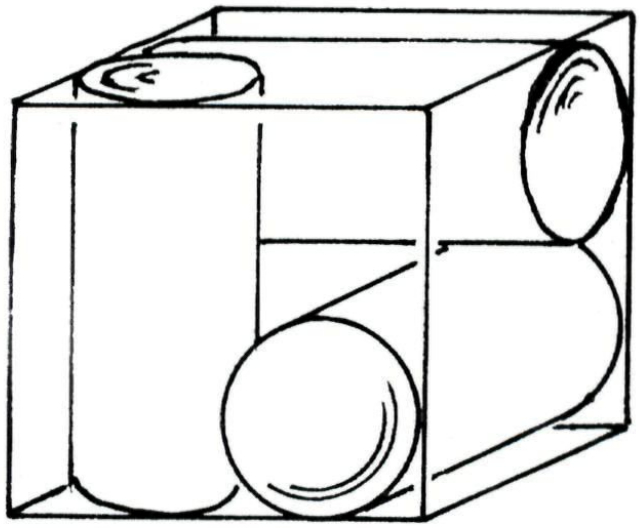


Oplossing: kruis-cijfer-puzzel

9	1	2		4	2	5
1					5	6
4	4	4		4	2	
1		1	6	9		6
	1	4		5	6	4
2	1					2
9	9	9		1	2	8

Oplossing: cilinders in kubus

Drie wel, vier niet.

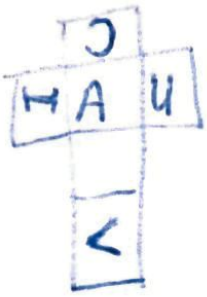


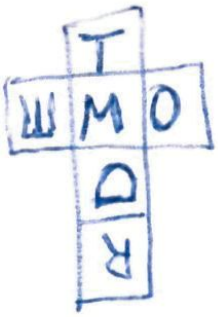
Verantwoording illustraties

Foto's: Johan van Gurp
Henk Mulder
NOB-Hilversum

Tekeningen: Henk Mulder

Illustraties: Ad Karremans





RADIOACTIVITEIT

MADAME CURIE

Pythagoras wiskunde tijdschrift voor jongeren
Redactie: Henk Huysmans, Henk Mulder
Medewerkers: Prof. H. Duparc, Bob de Jongste, Thijs Notenboom, Hans Oomis, Hans de Rijk, Frank Roos
Redactiesecretariaat: Henk Mulder, Geersbroekseweg 27, 4851 RD Ulvenhout.
Eindredacteur: Henk Huysmans

Inhoudsopgave Pythagoras nummer 3, 28e jaargang

De sinus / 1 *Jan van Hoof*
'Pythagoras' op de buis / 5 *Henk Mulder*
Gokken op de markt / 6 *Henk Mulder*
Waar of niet waar? / 7 *Hans Oomis*
Yin en Yang / 8 *Pieter Nieuwland*
De grote verdwijntruc / 9 *Martin Gardner*
De boer en zijn koeien / 10 *Henk Mulder*
Rollende cilinder / 11 *Henk Mulder*
Een rechthoek vullen met vierkanten / 12 *Martin Gardner*
Pannekoeken bakken / 15 *Hans Oomis*
Cilinders in een kubus / 15 *Henk Mulder*
Repeterende vergelijkingen / 16 *James Hurley*
Waar of niet waar? / 17 *Henk Mulder*
Blokjespuzzel / 17 *Henk Mulder*
Cijferpuzzel zonder getallen / 18 *Rinus Goosens*
Waar of niet waar? / 18 *Henk Mulder*
Gelijke oppervlakte, gelijke omtrek / 19 *Klaas van Opdorp*
Oplossing: rollende cilinder / 19 *Henk Mulder*
Oplossing: de boer en zijn koeien / 19 *Henk Mulder*
Ontwerp van een draaimechaniek / 20 *Henk Mulder*
Pannekoeken bakken: oplossing / 21 *Hans Oomis*
Driekhoek met vierkanten / 22 *Bob de Jongste*
Oplossing: blokjespuzzel / 22 *Henk Mulder*
Opsporing verzocht / 23 *Gerard de Groot*
Oplossing: cijferpuzzel / 25 *Rinus Goosens*
Integreren uit de hoge hoed / 26 *Jan Guichelaar*
Oplossing: oppervlakte en omtrek / 28
Zoeken naar priemgetallen / 29 *Bob de Jongste*
Schijn bedriegt / 30 *Johan Kortekaas*
Oplossing: driehoek met vierkanten / 31 *Bob de Jongste*
Waar of niet waar? / 31 *Jan van de Craats*
Oplossing: rechthoek / 32 *Martin Gardner*
Oplossing: Kruis-cijfer-puzzel / 32 *Jan van Opstal*
Oplossing: cilinders in kubus / 32 *Henk Mulder*

Pythagoras verschijnt zesmaal per schooljaar; opgave van abonnementen bij de uitgever (zie onder).
Abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 september schriftelijk bij de uitgever is opgezegd.
Bij tussentijdse abonnering ontvangt men ook de reeds verschenen nummers. Betaling per acceptgirokaart.

Tarieven	NLG/BEF
Abonnement Pythagoras	25,–/450
Luchtpost-toeslag	10,–
Inclusief Archimedes	45,–/800
Luchtpost-toeslag	20,–
Losse nummers	5,–/ 90

stichting ivio
Postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL.) **Tel. 03200-76411**
educatieve uitgeverij - instituut voor buitenschools onderwijs - wereldschool - AO-reeks - leerprojecten
Postgiro Nederland: 287934 **Postcheck België: 000-0130850-94**