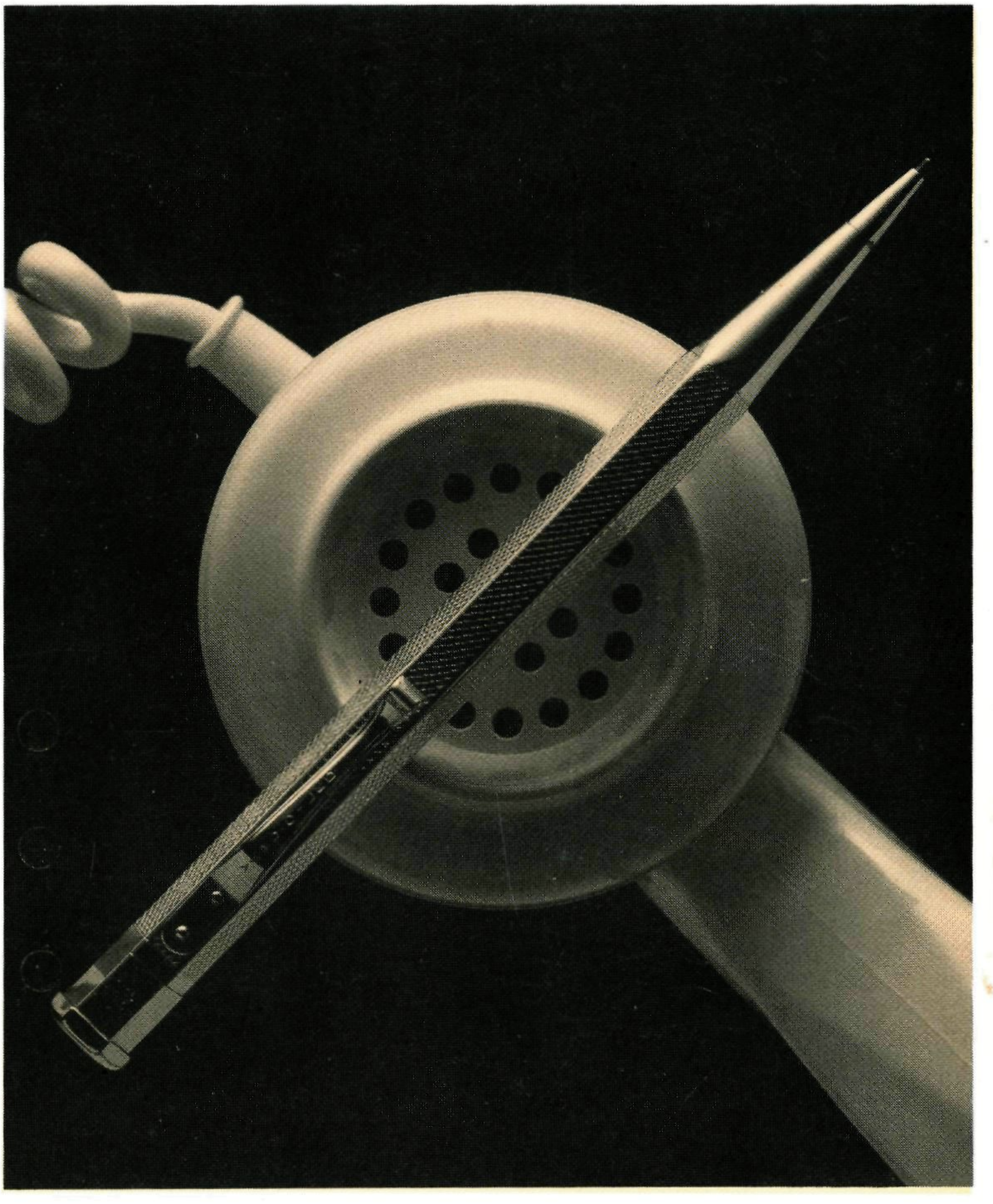


Pythagoras

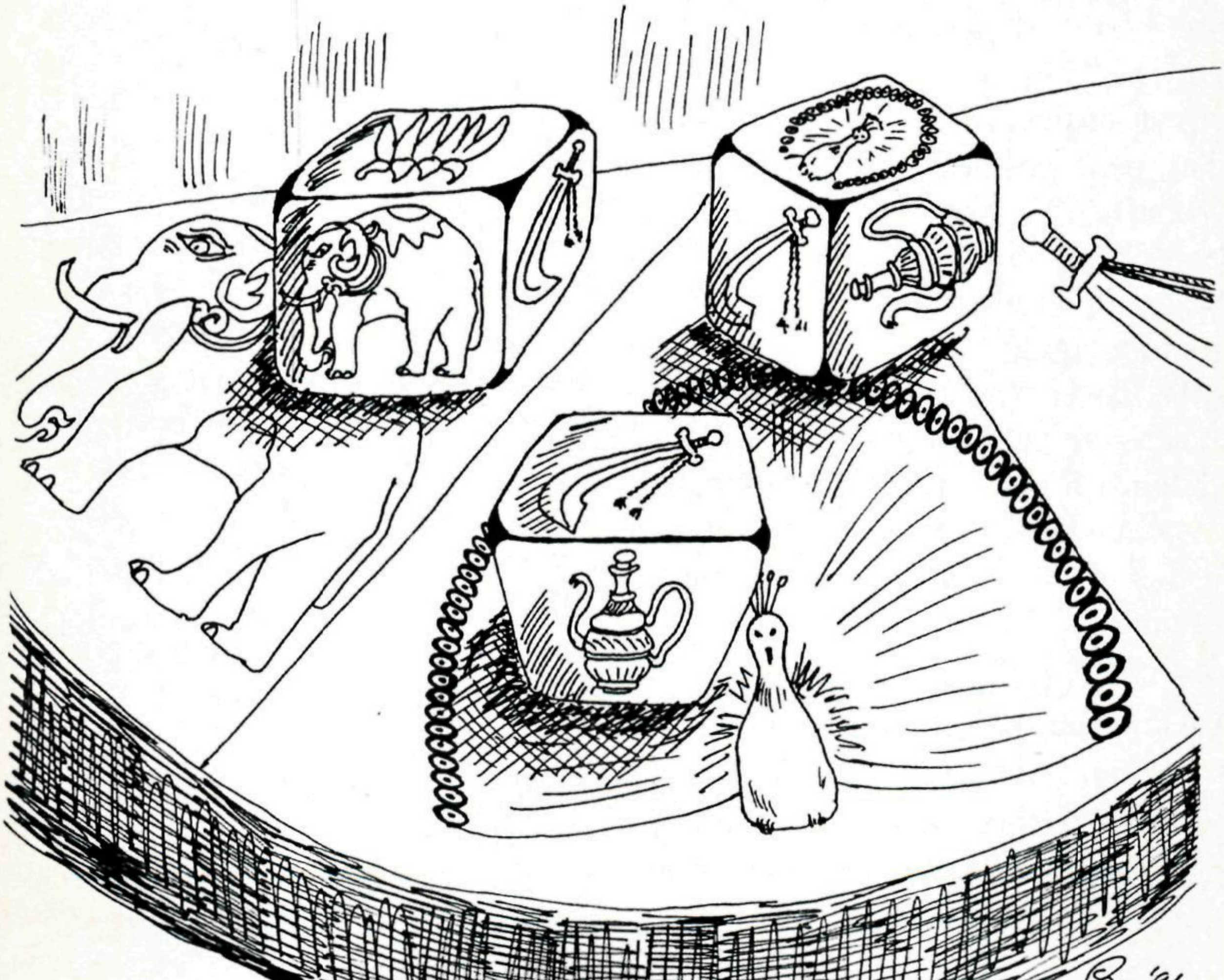
wiskunde tijdschrift voor jongeren

31e jaargang
nummer 4
maart 1992

stichting ivio

Gokken op z'n Indisch

❍❍❍ Drs. Westerink uit Veenendaal schrijft ons over een gokspel dat hij jaren geleden eens zag op een pasar malam in West Sumatra. Het spel werd gespeeld op een tableau dat in zes vakken was verdeeld. Op elk vak stond een afbeelding. Verder waren er drie dobbelstenen. Elke dobbelsteen had op zijn zijkanten dezelfde afbeeldingen staan als op het tableau. Iedere spelronde kon het publiek naar believen inzetten op één of meer van de afbeeldingen op het tableau. Dan werden de dobbelstenen geworpen. Kwam de afbeelding waarop een speler had ingezet één of meer keren boven op de geworpen dobbelsteen, dan kreeg deze speler zijn inzet op die afbeelding terug plus zijn inzet maal het aantal keren dat de afbeelding in de worp voorkwam.
Natuurlijk speelde de gokbaas dit spel niet alleen maar om zijn bezoekers te vermaken: hij maakte wel degelijk winst. Hoeveel winst? Dat kun je berekenen!



Een kleine aanpassing

Voor we aan het rekenen slaan merken we eerst even op dat het voor het spel niets uitmaakt als we de bij het gokspel gebruikte dobbelstenen vervangen door de ons vertrouwde dobbelstenen met de cijfers 1 t/m 6, en als we het tableau met de afbeeldingen vervangen door een tableau met de cijfers 1 t/m 6.

Inzetten op één nummer

Eerst berekenen we maar eens de winstkansen in het geval een speler inzet op één nummer. Voor het gemak gaan we er vanuit dat de speler op het door hem gekozen nummer 1 roepia inzet (zet hij nl. 2 roepia's in, dan verdubbelt zijn winst/verlies, zet hij 3 roepia's in dan maakt hij drie keer zoveel winst/verlies. enz.). Voor onze berekening splitsen we het probleem op in alle mogelijke speluitslagen:

- De speler kan zijn roepia verliezen. Dit gebeurt in het geval zijn nummer op geen der drie dobbelstenen bovenkomt. Deze gebeurtenis vindt plaats met een kans van
  $\frac{5}{6} * \frac{5}{6} * \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$.
- De speler kan 1 roepia winst maken (zijn eigen inzet terug plus 1 roepia). Dit gebeurt in het geval dat zijn nummer op precies één van de drie dobbelstenen voorkomt. De kans op deze gebeurtenis is
  $3 * \frac{1}{6} * \frac{5}{6} * \frac{5}{6} = \frac{75}{216}$
- De speler kan 2 roepia's winst maken (zijn eigen roepia inzet terug plus 2 roepia's). Dit gebeurt in het geval dat zijn nummer op precies 2 van de drie dobbelstenen voorkomt. De kans hierop is
  $3 * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$
- De speler kan tenslotte nog 3 roepia's winst maken in het geval dat zijn nummer 3 keer voorkomt op de drie dobbelstenen. De kans hierop is
  $\frac{5}{6} * \frac{5}{6} * \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$.

De winst die de speler kan verwachten is dus:
$-1 * \frac{125}{216} + 1 * \frac{75}{216} + 2 * \frac{15}{216} + 3 * \frac{1}{216} = -\frac{17}{216}$
Dat betekent dat, als de speler 1 roepia inzet op één nummer, hij op elke 216 spelen 17 roepia's verlies.

Inzetten op twee nummers

Nu bekijken we maar eens hoe de winstkansen van de speler liggen als hij inzet op 2 verschillende nummers. Voor het gemak gaan we er van uit dat hij 2 roepia's (op elk nummer 1 roepia) inzet. Anders verandert zijn winst/verlies evenredig met zijn inzet.
We splitsen het probleem weer op:

- De speler verliest zijn twee roepia's. Dit gebeurt in het geval dat geen van zijn 2 nummers op de drie dobbelstenen voorkomt, met de kans

$\frac{4}{6} * \frac{4}{6} * \frac{4}{6} = \frac{64}{216}$.

- De speler maakt winst noch verlies. Dit gebeurt in het geval dat precies één van zijn nummers op precies één van de drie dobbelstenen voorkomt (hij krijgt dan namelijk zijn ene roepia inzet op dat nummer terug plus 1 roepia). De kans hierop is $3 * \frac{2}{6} * \frac{4}{6} * \frac{4}{6} = \frac{96}{216}$

-De speler maakt 1 roepia winst. Dit gebeurt in het geval dat precies één van zijn nummer op twee van de drie dobbelstenen voorkomt (hij krijgt dan zijn ene roepia inzet op dat nummer terug plus 2 roepia's). De kans hierop is $2 * 3 * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{4}{6} = \frac{24}{216}$.

- De speler maakt twee roepia's winst. Dit kan gebeuren op twee manieren: ofwel één van zijn nummers komt drie keer voor op de dobbelsteen ofwel allebei zijn nummers komen ieder precies één keer voor op de drie dobbelstenen (hij krijgt dan ofwel zijn roepia inzet plus drie roepia's terug, ofwel zijn twee roepia's inzet plus twee roepia's). Dit gebeurt met kans $2 * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} + 6 * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{4}{6} * = \frac{26}{216}$

- Als laatste mogelijkheid kan de speler nog 3 roepia's winst maken. Dit gebeurt als zijn ene nummer twee keer op de dobbelstenen voorkomt, en zijn andere nummer één keer (hij krijgt dan zijn twee roepia's inzet plus drie roepia's). Dit gebeurt met kans $2 * 3 * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{6}{216}$.

De winst die de speler nu kan verwachten is:
$-2 * \frac{64}{216} + 0 * \frac{96}{216} + 1 * \frac{24}{216} + 2 * \frac{26}{216} + 3 * \frac{6}{216} = - \frac{34}{216}$.
Met andere woorden: op elke 216 spelen die hij op deze manier speelt verlies hij 34 roepia.

Regelmaat

Wat opvalt is dat de speler, nu hij op twee verschillende nummers inzet in plaats van op één, twee keer zoveel verliest. Zou hij dus drie keer zoveel verlies lijden als hij op drie verschillende nummers inzet (op elk nummer één roepia)? Blijft deze regelmaat zich voortzetten?Ja hoor reken maar na:

- Als de speler inzet op drie verschillende nummers (op elk nummer één roepia) is zijn winstverwachting:
$-3 * \frac{27}{216} + -1 * \frac{81}{216} + 0 * \frac{27}{216} + 1 * \frac{57}{216} + 2 * \frac{18}{216} + 3 * \frac{6}{216} = -\frac{51}{216}$ $(= 3 * - \frac{17}{216})$.
- Als de speler inzet op vier verschillende nummer is zijn winstverwachting:
$-4 * \frac{8}{216} + -2 * \frac{48}{216} + -1 * \frac{24}{216} + 0 * \frac{76}{216} + 1 * \frac{36}{216} + 2 * \frac{24}{216} = -\frac{68}{216}$ $(= 4 * - \frac{17}{216})$.

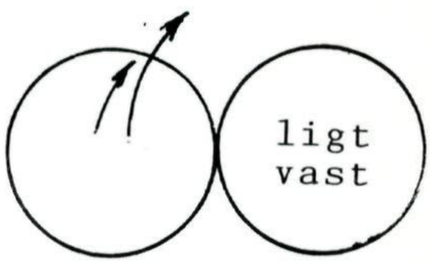
- Als de speler inzet op vijf verschillende nummers is zijn winstverwachting:
  $$-5 * \frac{1}{216} + -3 * \frac{15}{216} + -2 * \frac{15}{216} + -1 * \frac{65}{216} + 0 * \frac{60}{216} + 1 * \frac{60}{216}$$
  $$= -\frac{85}{216} \quad (= 5 * -\frac{17}{216}).$$
- Als de speler inzet op zes verschillende nummers is zijn winstverwachting:
  $$-\frac{102}{216} (= 6 * -\frac{17}{216}).$$

Dat deze regelmaat zich voortzet is niet zo verbazingwekkend als je het spelverloop bekijkt vanuit het oogpunt van de gokbaas: het maakt voor hem niets uit of er nu één speler inzet op vier verschillende nummers of dat er vier verschillende spelers komen die ieder op een (apart) nummer inzetten. Conclusie is dat de gokbaas op elke 216 ingezette roepia's 17 roepia's winst maakt, dat is een winst van ongeveer 8%. ■

Hoe vaak rond?

❍ Leg een rijksdaalder op de tafel en een andere er links tegen aan. Houd de rechter met een vinger vast op zijn plaats en rol de linker er één keer omheen.

Hoe vaak draait deze dan rond bij één rotatie? Probeer het eerst zelf te voorspellen, test dan of je idee juist is en geeft dan een theoretische verklaring. En dat verhaal moet je dan maar eens op een briefkaart schrijven en aan de redactiesecretaris sturen. De beste uitleg zetten we dan een volgende keer in het tijdschrift. ■



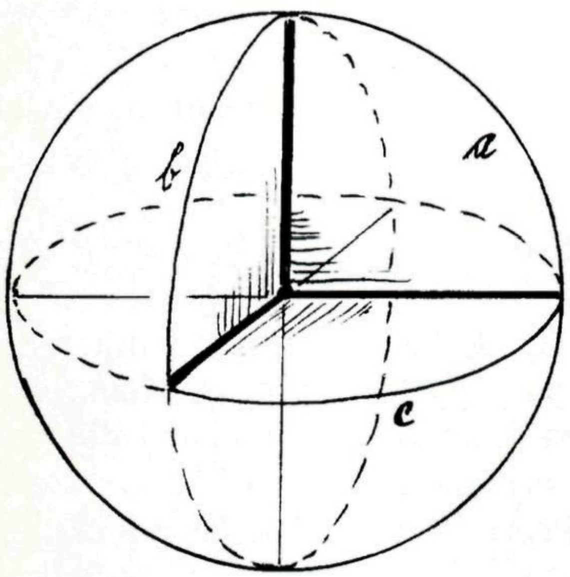
Bij de omslag

Hoe wij door wiskunde omringd zijn, zie je op de omslag. Rechten en cirkels. Een zeszijdig rechthoekig prisma, gecombineerd met een kegel levert een schrijfapparaat. De gaatjesverdeling is cirkelsymmetrisch. Het verloopstuk van het snoer is een afgeknotte kegel. Het snoer zelf is een ruimtelijke schroef.
Een geschikte combinatie van al dergelijke vormen, geeft ons een gevoel van schoonheid. Constructeurs en ontwerpers werken daar dagelijks mee. ■

De ruimtehoek

○○○ Een hoek in een plat vlak heeft een hoekpunt, twee benen en een zekere grootte die we uitdrukken in graden of radialen. Een dergelijke hoek zondert een deel van het platte vlak af. Zo is bij 30^o dat stuk $\frac{1}{12}$ omdat $30 \times 12 = 360^o$.
Vaak kunnen we van vlakke figuren overstappen op ruimtelijke elementen. Zo kom je van een vierkant uit op een kubus, van een cirkel op een bol.

Drievlakshoek
De drievlakshoek tref je aan bij de top van een driezijdige piramide, bij een hoekpunt van een kubus. Trek door een punt T van de ruimte drie rechten, die niet in een plat vlak liggen. Elk tweetal daarvan bepaalt een vlak. De drievlakshoek zondert een half open ruimte af. Het lijkt een driezijdige piramide maar dan zonder grondvlak. De stand van de benen is belangrijk, niet hun lengten. De drievlakshoek is een soort ruimtedriehoek.



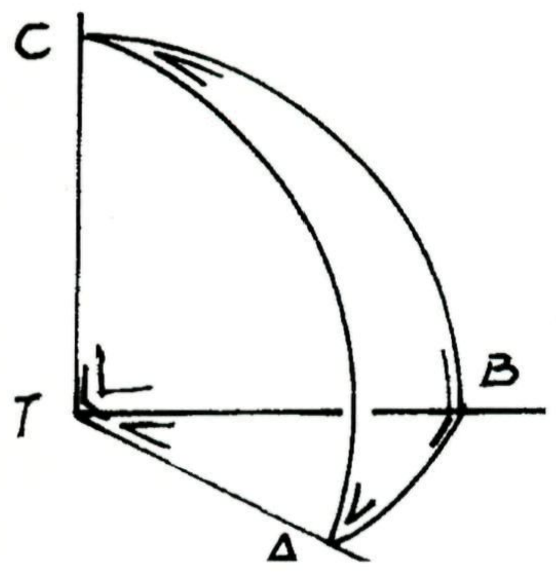
Figuur 2

Een drievlakshoek heeft 1 hoekpunt, 3 ribben, 3 zijden en verder een eenzijdige open ruimte.
Als alle ribben onderling rechte hoeken met elkaar maken, zoals bij een hoekpunt van een kubus, beslaat de drievlakshoek een achtste deel van de totale driedimensionale ruimte (fig.1).
Daarom heet deze ook wel oktant (okto = acht).

Grootte van de ruimtehoek
Als we een drievlakshoek snijden met een bol waarvan het middelpunt samenvalt met het hoekpunt ervan, wordt van de bol een zogenaamde boldriehoek afgesneden (fig. 2).
Een boldriehoek heeft zijden in de vorm van cirkelbogen. De grootte van de ruimtehoek wordt gedefinieerd als 4 π maal de oppervlakte van deze boldriehoek gedeeld door de oppervlakte van de gehele bol. De uitkomst is onafhankelijk van de straal van de bol. De uitkomst draagt dan als eenheid 'de sterradiaal'.

Ruimtehoek bij kubus
Hoeveel sterradiaal zijn de drievlakshoeken bij een kubus? Omdat acht van deze ruimtehoeken tegen elkaar, een hele bol vormen, wordt de uitkomst $4\pi \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\pi$ sterradialen.
Er is hier aansluiting gevonden bij de definitie van de vergelijkbare rechte hoek in het platte vlak. Die heeft daar de grootte $\frac{1}{2}\pi$ radiaal.
De maximale waarde van de ruimte hoek is $8 \times \frac{1}{2}\pi$ of 4π sterradiaal, zoals bij een vlakke hoek de maximale waarde 2π radiaal is.

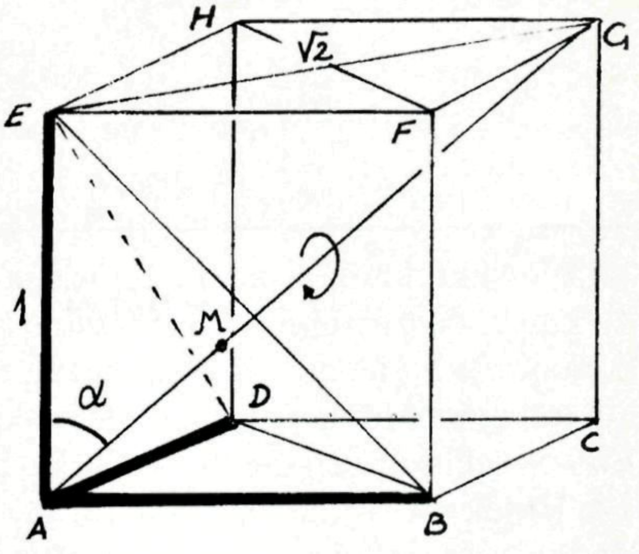
Hoeken van de boldriehoek
Tot onze verrassing zien we dat de hoeken van de boldriehoek in het geval van een oktant alle drie 90^{o} of $\frac{1}{2}\pi$ radiaal zijn. Onder de hoeken verstaan we in dit geval de hoeken die de raaklijnen aan de bogen in de snijpunten van de bogen met elkaar maken. Deze hoeken zijn tevens de standhoeken, dat wil zeggen: de hoeken die de vlakken twee aan twee met elkaar maken.
Het zal je wel verbazen een driehoek te zien met drie rechte hoeken. Zoiets kan natuurlijk niet bij een vlakke driehoek, maar bij een boldriehoek wel. Er is rond deze boldriehoeken een compleet nieuwe meetkunde ontwikkeld, waar alles net een tikkeltje anders is dan je gewend was. Het heet de boldriehoeksmeting.



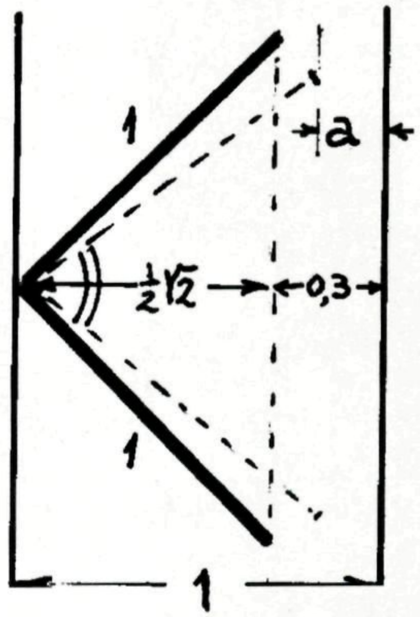
Figuur 1

Draaihek
De ribben van een drievlakshoek zien we vaak terug in de vorm van draaihekken bij vliegvelden en supermarkten (fig. 3). Als de ribben loodrecht twee aan twee op elkaar staan, herkennen we de drievlakshoek bij een hoekpunt van een kubus (fig. 4). Je kunt je bijvoorbeeld afvragen: hoe groot is de hoek die de rotatie-as maakt met de horizontale richting.
In de kubus is dat hoek EAG.
Immers de draaiingsas wijst in de richting van de lichaamsdiagonaal. Die maakt met elk van de drie ribben gelijke hoeken.
Lees af: $\tan \alpha = EG/EA = \sqrt{2} : 1 = 1{,}4$ of $\alpha = 55^{o}$.
Een dergelijk hek geeft altijd toegang in één richting en blokkeert in de andere. Er zijn natuurlijk altijd mensen die er in de verkeerde richting doorheen proberen te komen. Hoeveel speling geeft het draaihek daarvoor? Je moet om

Figuur 3



Figuur 4



Figuur 5

maximale ruimte te maken, het hek zoveel naar je toe draaien, dat één van de ribben verticaal omlaag wijst. De beide andere staan dan symmetrisch in hetzelfde horizontale vlak.

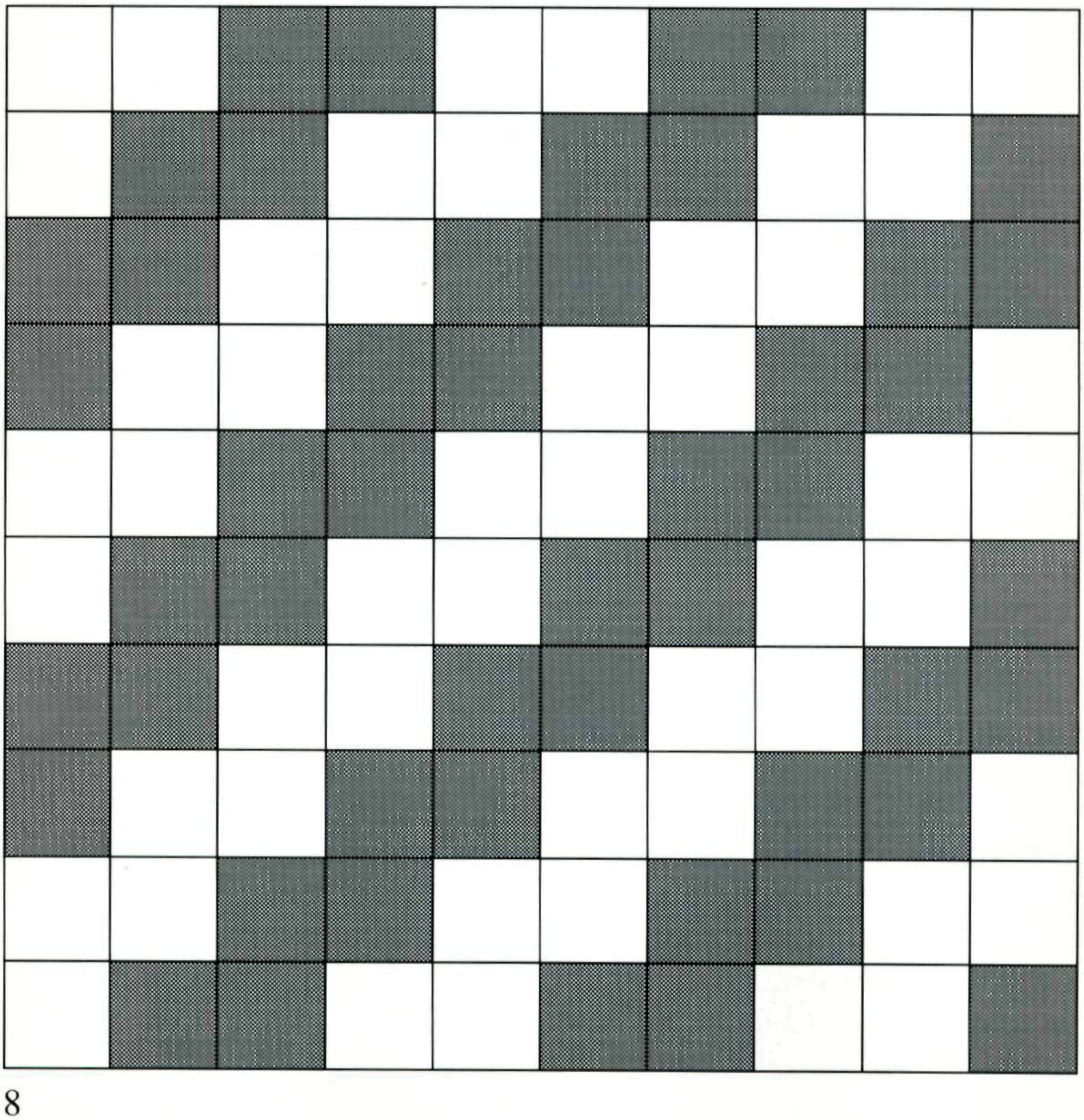
Als we de ribben van de kubus op 1 stellen, dan is dat tevens de nominale breedte van het doorgangspad. Wat je dan als vrije ruimte maximaal over hebt om je in tegengestelde richting er doorheen te wringen, is
$1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ of 0,3.

Bij niet te dikke bovenbenen is dat meestal voldoende.

Het is mogelijk het 'teruglooppad' verder te versmallen door de openingshoek van het draaihek te verkleinen. Zie de stippellijnen in figuur 4. De vrije doorloopruimte wordt dan verkleind tot de breedte a. Je ziet daarom ook overal dat men liever geen 90° maar bijvoorbeeld 85° kiest. De hoek schijnt tegenwoordig vrij uniform te zijn. Als je de hoek verder zou verkleinen, wordt de normale doorloop al te zeer bemoeilijkt. De foto (fig. 3) is gemaakt in de metro van Mexicostad (salida = uitgang). ■

Viermino-probleem

○○ Je kent dominostenen. Ze bestaan uit twee vierkanten tegen elkaar. Zo kun je ook trimino's en viermino's maken.
In nummer 5 van de vorige jaargang werd de vraag gesteld: is het mogelijk om een bord van 10 bij 10 te bedekken met 25 L-vormige viermino's.
Van de oplossingen die bij ons in de bus vielen vonden we die van Leon v.d. Broek uit Nijmegen de aardigste.
Het kost wat moeite, maar hij geeft een bewijs ... dat het onmogelijk is!
Hier volgt zijn redenering.

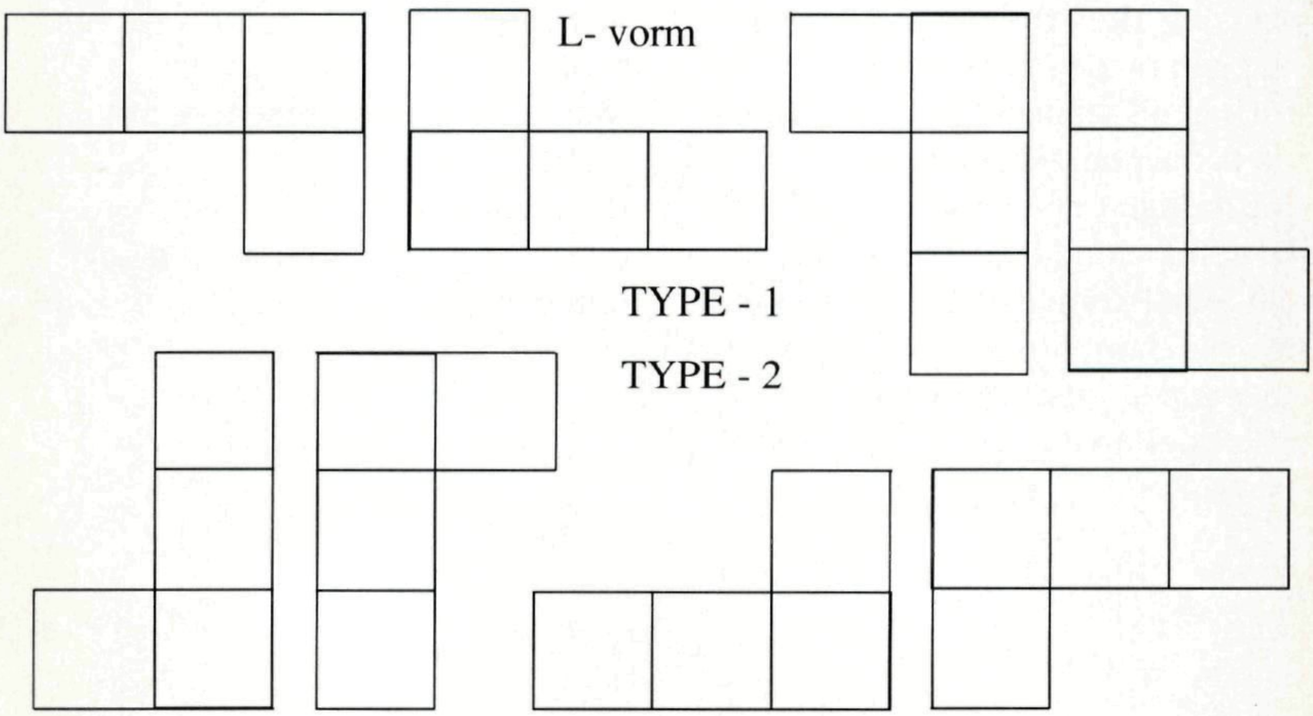


Kleuren en passen

Om te beginnen kleuren we een aantal velden zwart (zie figuur). Op het bord liggen er nu 49 zwarte en 51 witte velden (tel maar na). De viermino's kunnen we in totaal op 8 manieren op het dambord plaatsen. Deze 8 manieren delen we vervolgens op in 4 manieren van type 1
en 4 manieren van type 2.
Plaatsen we een viermino op een manier van type 1 op het bord, dan zien we dat deze altijd 2 witte en 2 zwarte velden bedekt (leg maar een viermino op de manier van type 1 op het dambord en schuif hem maar eens alle kanten op: er blijven steeds 2 witte en 2 zwarte velden bedekt).
Op dezelfde wijze (schuiven over het dambord) is te zien, dat, als je een viermino op een manier van type 2 op het dambord legt, er twee dingen kunnen gebeuren. Ofwel worden er 3 zwarte velden en 1 wit veld bedekt (deze manier van neerleggen noemen we van het type 2a), ofwel er worden 3 witte velden en 1 zwart veld bedekt (deze manier van neerleggen noemen we van het type 2b).

Redeneren

Zou het mogelijk zijn om het dambord te bedekken met alleen maar op de manieren van type 1, dan zou het aantal witte velden gelijk moeten zijn aan het aantal zwarte velden. Dat is echter niet zo, dus er moeten ook viermino's neergelegd worden op de manier van type 2. Het is echter ook niet mogelijk om evenveel viermino's neer te leggen op de manier van type 2a, als op de manier van type 2b, want ook dan zou het aantal witte velden gelijk moeten zijn aan het aantal zwarte velden (want leg je één viermino neer op een manier van type 2a,



een andere op een manier van type 2b dan bedekken deze twee viermino's samen 4 witte en 4 zwarte velden).
Leg je meer viermino's neer op de manier van type 2a dan je er neerlegt op de manier van type 2b, dan zou je meer zwarte velden dan witte velden bedekken, en dat kan ook al niet.
In de bedekking die je wilt maken moeten er dus meer viermino's op de manier van type 2b liggen dan op de manier van type 2a. Voor elke viermino méér die je neerlegt op de manier van type 2b krijg je twee witte velden meer dan zwarte velden. Er moet dus (gezien het feit dat er op het bord 49 zwarte en 51 witte velden zijn) één viermino op de manier van type 2b meer liggen dan op de manier van type 2a.
Geven we het aantal viermino's dat we neerleggen op de manier van type 2a aan met n, dan moet het aantal viermino's dat we neerleggen op de manier van type 2b dus gelijk zijn aan $n + 1$. In totaal is het aantal viermino's dat we neerleggen op de manier van type 2 gelijk aan $2n + 1$, dus oneven.
In totaal komen er 25 viermino's op het dambord te liggen, dus moet het aantal viermino's dat je neerlegt op de manier van type 1 even zijn.

Draaien
We hebben nu gezien dat, als we ons bord zouden kunnen bedekken met viermino's, dit zal moeten gebeuren door een even aantal viermino's neer te leggen op de manier van type 1, en een oneven aantal op de manier van type 2.
Laten we nu eens aannemen dat dit inderdaad kan, en dat er dus inderdaad een bedekking van ons bord bestaat met een even aantal viermino's neergelegd op de manier van type 1, en een oneven aantal viermino's neergelegd op de manier van type 2. Dan kunnen we deze bedekking ook een kwart slag draaien en dan krijgen we weer een bedekking van ons bord. Er is dan echter wel wat gebeurd: viermino's die eerst waren gelegd op de manier van type 1 liggen nu op de manier van type 2, en omgekeerd (ga maar na). Dus we hebben nu een bedekking waarbij een oneven aantal viermino's is neergelegd op de manier van type 1, en een even aantal op de manier van type 2.
Maar dat kon nou eigenlijk net niet!!!
Een bedekking van het dambord met L-vormige viermino's is dus onmogelijk. ■

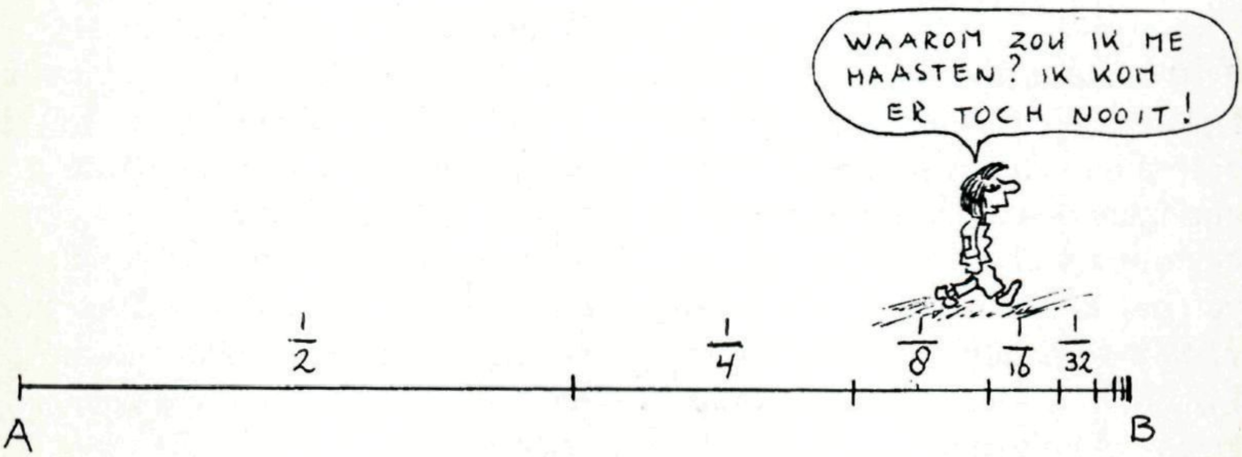
Ruimte en tijd bestaan niet ?!

❍ Iedere dag weer zijn we bezig met reizen: we fietsen naar school, we gaan boodschappen doen, we gaan op visite bij vrienden enzovoort. Toch is het mogelijk om met een wiskundig bewijs aan te tonen dat al dat reizen flauwekul is, omdat het totaal onmogelijk is om de plek te verlaten waar wij ons nu bevinden.

Halveren

Stel maar eens, dat we van punt A naar punt B willen gaan. Om naar B toe te gaan moeten we dan eerst de helft van de afstand tussen A en B afleggen. Als dit gedaan is hebben we nog de helft te gaan. Daar moeten we echter ook weer eerst de helft van afleggen, ofwel een kwart van de afstand tussen A en B. Als dit gedaan is hebben we $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ deel van de afstand tussen A en B afgelegd, en hebben we dus nog $\frac{1}{4}$ deel van de afstand tussen A en B te gaan. Ook daarvan moeten we eerst weer de helft afleggen, ofwel $\frac{1}{8}$ deel van de afstand tussen A en B. Als dat is gebeurd hebben we al $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ deel van de afstand tussen A en B afgelegd. We hebben echter nog steeds $\frac{1}{8}$ deel te gaan. Daar moeten we eerst weer de helft, $\frac{1}{16}$ deel, van afleggen. Dan hebben we nog $\frac{1}{16}$ deel te gaan, waarvan we eerst weer $\frac{1}{32}$ deel moeten afleggen. Zo kunnen we oneindig lang door blijven gaan. We komen dus nooit in B aan: er blijft altijd nog een stukje over dat we nog af moeten leggen.

Maar als we niet eens vanuit A naar een willekeurig punt B kunnen gaan, dan kunnen we dus nergens heen gaan en alleen maar blijven waar we op dit moment zijn. Deze conclusie roept echter nogal wat vragen op. Is het dan zo



dat we onszelf elke dag voor de gek houden als we weer naar school gaan? Hoe kunnen we 's morgens opstaan om naar de badkamer te lopen? Hoe is het mogelijk dat we bestaan (een zaadje kan immers niet naar een eicel zwemmen)?

Tijd

De tijd lijkt ons een antwoord te kunnen geven op ons dilemma. Neem namelijk maar eens aan dat het een uur duurt om van A naar B te komen. Dan doe je er maar een half uur over om de helft van de afstand van A naar B af te leggen. Daarna leg je een kwart van de afstand van A naar B af, maar dat doe je in slechts $\frac{1}{4}$ uur. Dan moet je nog $\frac{1}{8}$ deel; van de afstand van A naar B afleggen, maar daar heb je dan ook maar $\frac{1}{8}$ uur voor nodig. Voor het volgende af te leggen $\frac{1}{16}$ deel van de afstand tussen A en B heb je slechts $\frac{1}{16}$ uur nodig, en ga zo maar door. Ons probleem lijkt nu opgelost: je moet weliswaar steeds de helft van de resterende afstand naar B afleggen, maar je hebt daar ook maar steeds de helft minder tijd voor nodig. Maar ...

Tijd bestaat niet

Helaas roept de hiervoor gegeven oplossing van ons probleem alleen nog maar grotere vragen op. Het is namelijk, met dezelfde methode van halveren als we aan het begin van dit verhaal gebruikten, mogelijk om in te zien dat ook tijd niet bestaat. Om een uur ouder te kunnen worden, moeten we immers eerst een half uur ouder worden. Daarna hebben we nog $\frac{1}{4}$ uur te gaan, waarin we eerst weer $\frac{1}{8}$ uur ouder moeten worden. Daarna moeten we nog eerst $\frac{1}{16}$ uur ouder worden, daarna nog $\frac{1}{32}$ uur, enzovoort. Het uur halen we echter nooit.
Hetzelfde verhaal kun je natuurlijk houden voor iedere tijdseenheid die je maar wilt: jaren, maanden, minuten, seconden of wat dan ook. Kortom: we kunnen niet ouder worden en blijven vastgevroren zitten in eenzelfde stukje tijd. De tijd bestaat niet! De vragen waarmee we blijven zitten worden alleen maar erger. Omdat we niet ouder kunnen worden kunnen we dus ook niet sterven?

Hoe kan dit nu

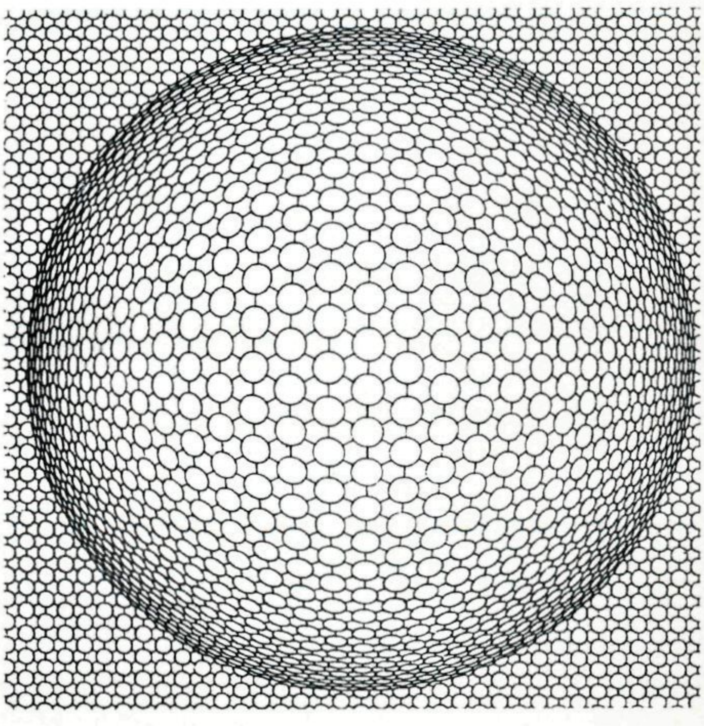
Toch bewijst de praktijk van alledag dat tijd en ruimte wel degelijk bestaan. We fietsen toch dagelijks naar school, en de lessen duren allemaal keurig 50 minuten (of minder). We worden geboren en sterven.
In bovenstaande redeneringen moet dus wel ergens een fout zitten, maar waar? Het lijkt erop dat de fout welhaast moet zitten in het feit dat we er van uitgaan dat je een afstand oneindig lang kunt blijven halveren. Er moet dus een afstandje bestaan dat je niet meer kunt halveren. Is dat misschien het beruchte 'kleinste deeltje' waar men in allerlei laboratoria naar op zoek is?

Maar dan zou zoiets dus ook voor de tijd moeten gelden, en dan zou er dus ook een kleinste stukje tijd bestaan (dat je niet meer kunt halveren). De tijd zou zich dan niet in een continue stroom voortbewegen, maar met schokjes. Zoals een film die voor je oog uit één vloeiende beweging bestaat, maar die in werkelijkheid is opgebouwd uit verschillende lossen beeldjes. Elk 'schokje' tijd zouden we dan een 'ogenblik' kunnen noemen.
Maar hoe lang is dan een ogenblik? Misschien wel de tijd die het duurt om een afstand ter grootte van het kleinste deeltje af te leggen (of is 'te springen' hier beter op zijn plaats).

Historie
Tot besluit nog even dit. Met bovenstaand probleem hield de Griekse filosoof Zeno van Elea (± 450 v.C.) zich al bezig, alleen goot hij het in de vorm van een verhaal over een wedstrijd tussen Achilles en een schildpad.
Als Achilles de schildpad een voorsprong geeft van 100 meter en 100 keer zo hard loopt, dan haalt hij de schildpad nooit in. Ga maar na: als Achilles voor het eerst de plek bereikt waar de schildpad begonnen is, is de schildpad 1 meter verder. Als Achilles daar weer aankomt is de schildpad 0,01 meter verder ... Was deze Zeno dus, zonder het zelf te weten, de voor-loper van de 'kleinste deeltjes physica' (en zijn tijd dus ver vooruit)? ■

Centrale uitdijing

Centrale uitdijing. In het centrum zijn de figuurtjes tweemaal zo groot als aan de rand. Deze centrale uitdijing moet natuurlijk ergens een samendrukking veroorzaken: aan de rand van de cirkel.



De erfenis

❍❍❍ Onlangs overleed in Chicago de wiskundige John O'Conner. Bij zijn overlijden liet hij een groot bedrag na dat over een aantal erfgenamen gelijkelijk verdeeld moest worden. Hoe groot dit bedrag was, en over hoeveel erfgenamen het verdeeld moest worden zou in het testament staan. Maar wie schetst de verbazing van de notaris toen hij het testament opende en er een geheimzinnige deling tevoorschijn kwam (fig. 1).
De notaris zat nu met de volgende vragen: hoe groot is het nagelaten bedrag, hoeveel erfgenamen zijn er en hoeveel dollar krijgt elk?
Om deze vraag op te lossen legde de notaris het document voor aan een tweetal hoogleraren van de wiskundefaculteit van Chicago University, die het raadsel ontcijferden. ■

Het leek niet eenvoudig, ze hadden alleen een 7 en een 0. Er waren nog 40 plaatsen oningevuld! Hier de ontcijfering. Eerst maken we van de punten in de deling letters (fig. 2).
Dit levert de volgende vergelijkingen op:

(1)$u_1 * n_1\, n_2\, n_3 = a_1\, a_2\, a_3\, a_4$
(2)$7 * n_1\, n_2\, n_3 = c_1\, c_2\, c_3$
(3)$u_3 * n_1\, n_2\, n_3 = e_1\, e_2\, e_3$
(4)$u_4 * n_1\, n_2\, n_3 = 0$ (want er worden op het laatst 2 cijfers aangehaald)
(5)$u_5 * n_1\, n_2\, n_3 = f_1\, f_2\, f_3\, f_4$ $(= g_1\, g_2\, g_3\, g_4)$

Hoeveel dollar krijgt elk?

Het begin is gemakkelijk, want uit (4) volgt $\underline{u_4 = 0}$.

$$
\begin{array}{l}
\ldots \,/\, \ldots\ldots\ldots \,\backslash\, 7 \ldots \\
\quad \underline{\ldots.} \\
\qquad \ldots \\
\qquad \underline{\ldots} \\
\qquad \ldots. \\
\qquad\; \underline{\ldots} \\
\qquad\quad \ldots. \\
\qquad\quad \underline{\ldots.} \\
\qquad\qquad\; 0
\end{array}
$$

Figuur 1

$$
\begin{array}{l}
n_1\, n_2\, n_3 \,/\, t_1\, t_2\, t_3\, t_4\, t_5\, t_6\, t_7\, t_8 \,\backslash\, u_1\, 7 u_3\, u_4\, u_5 \\
\qquad\qquad \underline{a_1\, a_2\, a_3\, a_4} \\
\qquad\qquad\quad b_1\, b_2\, b_3 \\
\qquad\qquad\quad \underline{c_1\, c_2\, c_3} \\
\qquad\qquad\quad d_1\, d_2\, d_3\, d_4 \\
\qquad\qquad\quad \underline{\;\; e_1\, e_2\, e_3} \\
\qquad\qquad\qquad\; f_1\, f_2\, f_3\, f_4 \\
\qquad\qquad\qquad\; \underline{g_1\, g_2\, g_3\, g_4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\; 0
\end{array}
$$

Figuur 2

Uit (1) en (2) volgt dan
$u_1 * n_1\ n_2\ n_3 > 7 * n_1\ n_2\ n_3$,
dus $u_1 > 7$, en dus $\underline{u_1 = 8}$ of $\underline{u_1 = 9}$.
Op dezelfde manier volgt uit
(5) en (2) dat ook $\underline{u_5 = 8}$ of $\underline{u_5 = 9}$.
Verder is in de deling te zien dat:
$b_1\ b_2\ b_3 - c_1\ c_2\ c_3 = d_1\ d_2\ d_3$
ofwel $d_1\ d_2\ d_3 + c_1\ c_2\ c_3 = b_1\ b_2\ b_3$
(3 cijfers), en ook dat
$d_1\ d_2\ d_3\ d_4 - e_1\ e_2\ e_3 = f_1\ f_2$
ofwel $f_1\ f_2 + e_1\ e_2\ e_3 = d_1\ d_2\ d_3\ d_4$
(4 cijfers).
Dus
$f_1\ f_2 + e_1\ e_2\ e_3 > d_1\ d_2\ d_3 + c_1\ c_2\ c_3$
(en merk op dat $f_1\ f_2 < d_1\ d_2\ d_3$).
Dus $e_1\ e_2\ e_3 > c_1\ c_2\ c_3$.
Maar dan volgt uit (2) en (3)
dat $u_3 * n_1\ n_2\ n_3 > 7 * n_1\ n_2\ n_3$,
dus $u_3 > 7$ en dus ook
$\underline{u_3 = 8}$ of $\underline{u_3 = 9}$.
We weten nu dat u_1, u_3 en u_5 allen
gelijk zijn aan 8 of 9.

Maar uit (1) en (3) volgt dat
$u_3 * n_1\ n_2\ n_3 < u_1 * n_1\ n_1\ n_3$
en dus $u_3 < u_1$.
En zo volgt ook uit (3) en (5)
dat $u_3 < u_5$.
Dus moet dan wel $\underline{u_3 = 8}$ en
$\underline{u_1 = u_5 = 9}$. En hiermee is het
quotiënt gevonden.
Elke erfgenaam krijgt
$u_1\ 7u_3\ u_4\ u_5 = 97809$ dollar!

Hoeveel erfgenamen zijn er?

We weten ondertussen:
(1) $9 \times n_1\ n_2\ n_3 = a_1\ a_2\ a_3\ a_4$
(2) $7 \times n_1\ n_2\ n_3 = c_1\ c_2\ c_3$
(3) $8 \times n_1\ n_2\ n_3 = e_1\ e_2\ e_3$
(4) $0 \times n_1\ n_2\ n_3 = 0$
(5) $9 \times n_1\ n_2\ n_3 = f_1\ f_2\ f_3\ f_4$.
Uit (3) volgt: $8 * n_1\ n_2\ n_3 < 1000$,
en dus $n_1\ n_2\ n_3 < 125$.
Nu volgt uit (5): $f_1\ f_2\ f_3\ f_4 =$
$9 * n_1\ n_2\ n_3 < 9 * 125 = 1125$.
Dus $f_1\ f_2 = 10$ of $f_1\ f_2 = 11$.
In ieder geval $f_1\ f_2 < 12$.
Maar dan geldt (zie deling):
$d_1\ d_2\ d_3\ d_4 - e_1\ e_2\ e_3 = f_1\ f_2 < 12$.
Dus $e_1\ e_2\ e_3 > d_1\ d_2\ d_3\ d_4 - 12 \geq$
$1000 - 12 = 998$.
Natuurlijk geldt ook dat
$e_1\ e_2\ e_3 < 1000$.
Nu volgt met (3)
dat $988 < 8 * n_1\ n_2\ n_3 < 1000$,
en dus $123{,}5 < n_1\ n_2\ n_3 < 125$.
Dus is het aantal erfgenamen
$n_1\ n_2\ n_3 = 124$.
Schrijf nu de complete deling maar
uit en kijk maar of alles nu klopt.

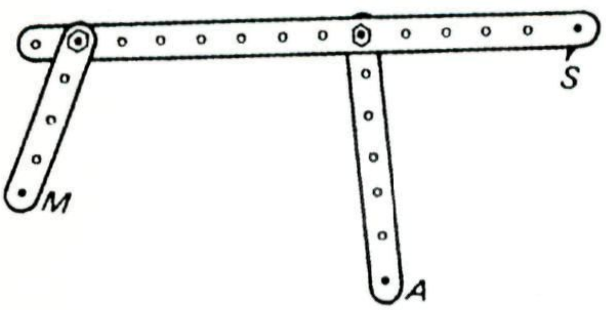
Denkertje

Neem een stevig stuk papier teken hierop de omtrek van één figuur die voldoet aan de volgende eisen:
de figuur kan uitgeknipt worden en blijft dan een stevig geheel;
een rechte lijn kan de figuur in 4 volkomen gelijke delen verdelen.
Of meer practisch gezegd:
één rechte knip van de schaar is nu voldoende om 4 losse gelijke stukken te krijgen. ■

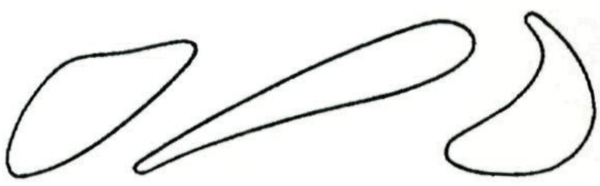
Druppelkrommen

❍ De redactie van Pythagoras ontvangt regelmatig brieven van lezers. Zeker een kwart daarvan bevatten verzoeken om een zelfgemaakte puzzel of een door de lezer zelf uitgewerkt stukje wiskunde als artikel op te nemen.

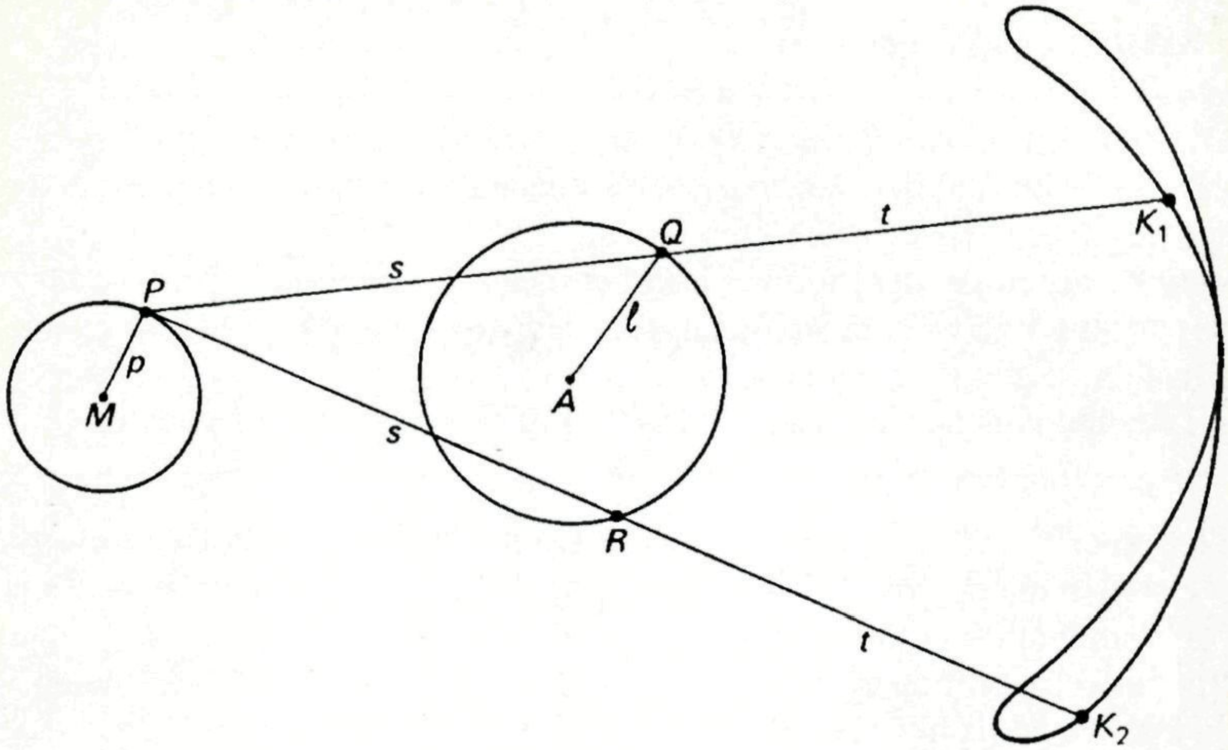
Paul van de Veen uit Woudenberg ontdekte dat je met meccano-strippen (het kan natuurlijk ook met gewone latjes) krommen met fraaie druppelvormen kan tekenen. 'Punten A en M (Fig. 1) zijn draaibaar op een grondplaat bevestigd. Als het grote staafje eenmaal om M draait, beschrijft S krommen die (afhankelijk van de onderlinge verhoudingen der andere lengten van de staafjes) variëren tussen de figuur 2 afgebeelde.
Je kunt zo'n kromme ook punt voor punt construeren (fig. 3). Teken een cirkel met de straal p en een cirkel met de straal l. Neem een lente s tussen de passer en zet de passerpunt in een willekeurig punt P van de eerstgenoemde cirkel. Construeer nu de punten Q en R op de tweede cirkel zodat PQ = PR = s.
Verleng nu PQ en PR met gelijke stukken t. Zo vinden we twee punten K_1 en K_2 van de druppelkromme'.
Tot zover Paul van de Veen. Je ziet dat zijn constructiemethode nauwkeurig de beweging van de punt S van de meccanostrippen imiteert. Nu wil Paul de vergelijking van zo'n druppelkromme vinden en hij speelt dat niet klaar. Dat is geen wonder, want het is vrij ingewikkeld en . . . eerlijk gezegd saai. Met behulp van stangecontructies (waarvan een voorbeeld) kunnen de ingewikkeldste krommen getekend wordt. Door wiskundigen en technici wordt gezocht naar een stangenconstructie die de eenvoudigste kromme zou opleveren: de rechte lijn! ■



Figuur 1



Figuur2

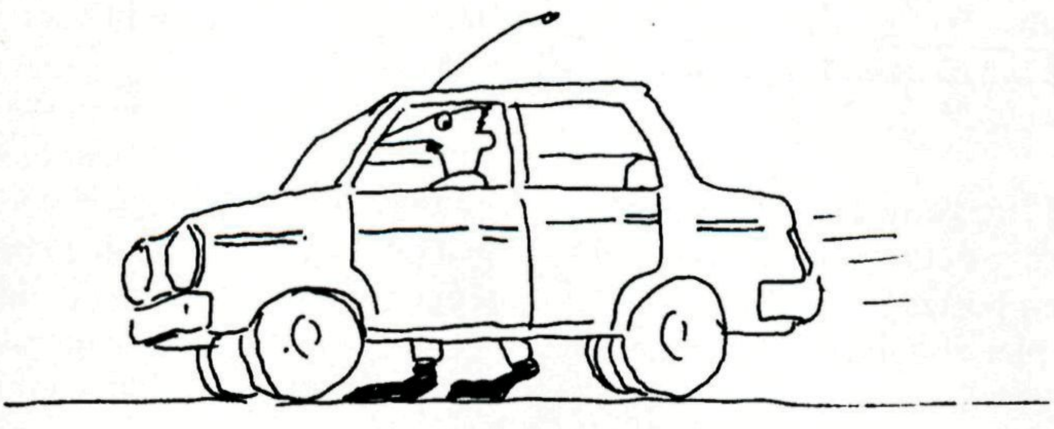


Figuur 3

Waar of niet-waar?

❍ Een Japanse autofabrikant brengt een verbetering aan in het ontstekingsmechanisme waardoor het brandstofverbruik 40% kan dalen.

Inmiddels ontwikkelt een oliefirma een benzine die 35% besparing kan geven. Daarnaast is een constructiebedrijf in de weer om een patent te verwerven op glijlagers die 25% brandstofvermindering kunnen geven. Dat zou betekenen dat als deze firma's zouden samenwerken er 100% besparing uit de bus zou komen en eindelijk het perpetuum-mobile werkelijkheid wordt. Rijden voor niets en niemendal! ■



Papier vouwen

❍❍ Je komt in oude verhalen nog al eens merkwaardige opdrachten tegen, die meestal door koningen en sjeiks aan hun onderdanen worden opgelegd.
Voor de argeloze toeschouwer lijkt het meestal een koud kunstje, maar een wiskundige weet beter. Zo ken je vast wel het oude probleem van het schaakbord met de graankorrels.
We nemen vandaag een ander karwei onder de loep: papier vouwen.

Tien keer

We stellen als opgave: vouw een vel krantepapier tien keer dubbel. Het pakket wordt daarbij steeds dikker. Maar als het vel groot genoeg is, moet zoiets toch mogelijk zijn.
Een dubbele pagina van een dagblad meet 800 x 600 mm.
De dikte van het papier is ongeveer 0,08 mm. Daar gaan we dan.

	Oppervlakte	Dikte
Open blad	800 x 600 mm	0,08 mm
1e vouw	400 x 600	0,16
2e vouw	400 x 300	0,32
3e vouw	200 x 300	0,64
4e vouw	200 x 150	1,28
5e vouw	100 x 150	2,56
6e vouw	100 x 75	5,12
7e vouw	50 x 75	10,24
8e vouw	50 x 37,5	20,48
9e vouw	25 x 37,5	40,96
10e vouw	25 x 18,75	81,92

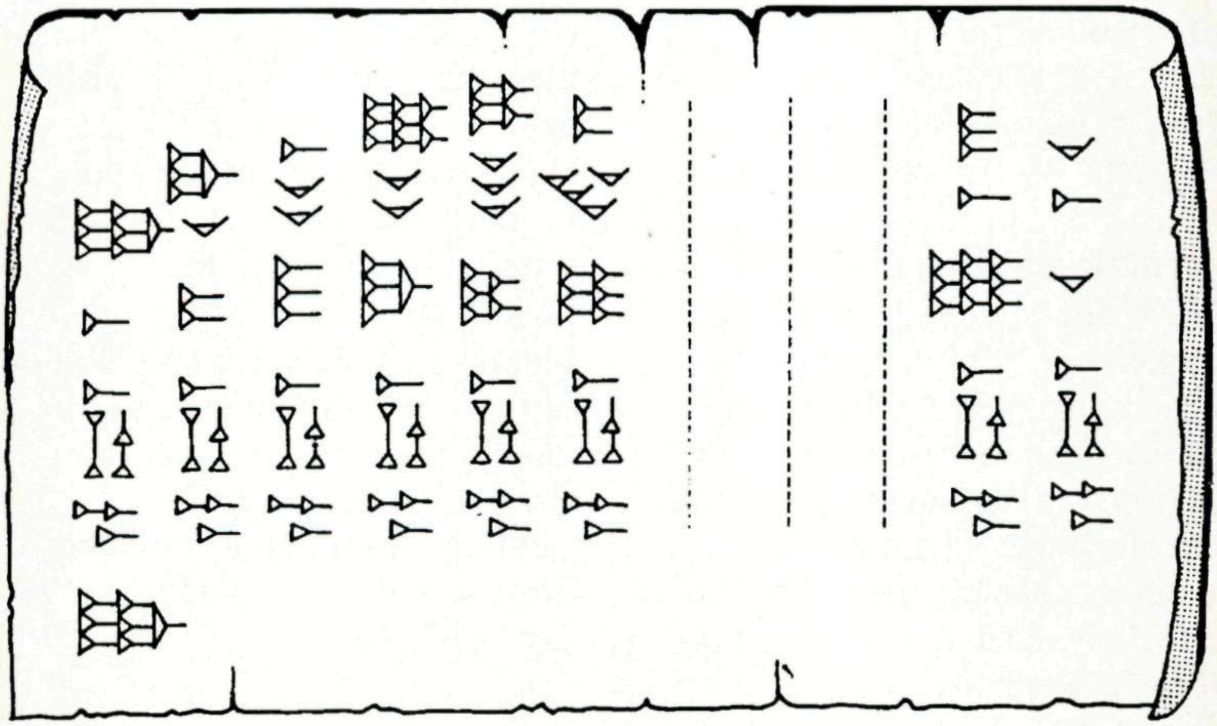
Bij de 10e vouw zou de courant dus een grootte hebben gekregen van een postzegel en de dikte van het papier zou meer dan 8 cm bedragen.

Bij de theoretische 20ste vouw zou de dikte van het papier reeds 83,89 meter bedragen.
Om nog eens duidelijk te maken hoe onvoorspelbaar de wegen der rekenkunde zijn, bezien wij het opvouwen van een krant op een iets andere wijze. Zoals wij zagen was het tien maal vouwen van een krant een onmogelijkheid. Maar als wij nu eens een héél grote krant zouden nemen!
Veronderstel, dat wij een blad papier zouden hebben ter grootte van het totale aardoppervlak, dus land en zee tezamen, dan zou dit blad papier 510000000 km^2 groot zijn of anders gezegd in vierkante centimeters:
5100000000000000000 cm^2.
De dikte van het papier is weer 0,08 mm en dit is gelijk aan 0,00000008 km.
Om de critici alvast de mond te snoeren, gaan we ditmaal niet vouwen maar knippen. We knippen het vel doormidden en wij leggen de twee helften op elkaar. Vervolgens knippen wij de twee helften weer doormidden en leggen

de vier kwarten op elkaar. Deze procedure herhalen wij 55 maal. De oppervlakte van het papier is dan niet groter dan een briefkaart (10 x 14 cm) en de hoogte van de stapel papier is dan ....! Juist! 2882303762 kilometer. Ongelooflijk, maar waar. Het gaat in feite ons voorstellingsvermogen te boven. Na 10 keer vouwen is de dikte van de stapel papier al 8 cm. Na 20 keer is de hoogte van de stapel 84 meter en na 30 keer is de hoogte van de stapel ongeveer 86 kilometer. Na 40 keer is de hoogte 87960 kilometer.
In het algemeen bereken je de uitkomsten aldus: na n keer vouwen is de oppervlakte gelijk aan de beginoppervlakte gedeeld door 2^n en is de dikte van het pakket gelijk aan de papierdikte maal 2^n. ■

Geschikt als ontdekker?

❍ Droom je wel eens van ontdekkingsreizen, van geheimzinnige kaarten, die je vindt, van stenen vol mysterie tekens? Tekens, die jij natuurlijk ontcijfert? Welnu, hier is afgedrukt een deel van een kleitablet, waarop een tabel met getallen in Sumerische talstelsel.
Heel oud: 2000 v. Chr. Je kunt nu je geschiktheid als ontdekker testen. Blijkt het, dat je niet voor een beroep in deze vorm in de wieg bent gelegd, och, dat is niet zo erg, want de oplossing staat op bladzijde 30.

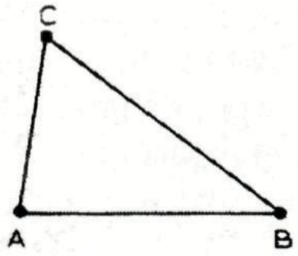


Punten en lijnen in netwerken

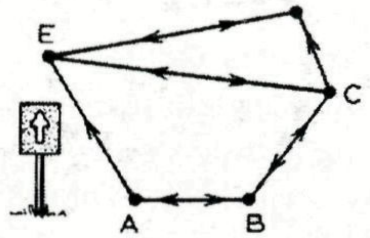
❍❍ Als we een driehoek ABC tekenen (fig. 1) bedoelen we meestal een figuur met 3 lijnstukken van bepaalde lengten, het zou een dak van een huis kunnen voorstellen. Wanneer we nu nog wel de verbinding interessant vinden, maar niet meer de lengten, hebben we een netwerk. Driehoek ABC krijgt dan een heel andere betekenis. We kunnen ermee bedoelen dat Amsterdam, Brussel en Curaçao rechtstreeks door vliegverbindingen met elkaar verbonden zijn. Of dat Anne, Bas en Corrie twee een twee met elkaar corresponderen. Soms zetten we pijlen in dergelijke verbindingen; we bedoelen dan dat de verbinding eenzijdig is.
Zo staat in het netwerk van figuur 2 in AE maar één pijl en wel van A naar E. Dat kan betekenen dat dit een weg met eenrichtingsverkeer is. We hebben daar een apart verkeersbord voor: blauw met een witte pijl. Het kan ook betekenen dat Annie aan Eddie schrijft, maar die laat nooit iets van zich horen!

Een nieuwe wegenkaart
In figuur 3a staat een kaartje van het eiland Sint Maarten in de Caribische Zee. Het ziet er wat onoverzichtelijk uit. Wanneer het ons alleen maar interesseert welke punten door autowegen met elkaar verbonden zijn, kunnen we net zo goed het kaartje van figuur 3b pakken; dat is dan veel overzichtelijker. Kijk maar eens of alles nog klopt.

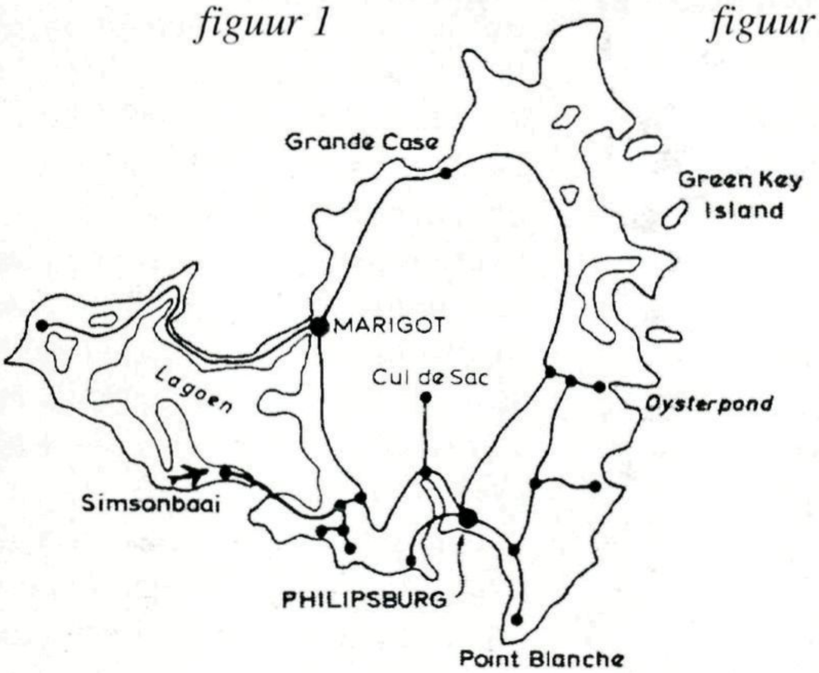
Formule van Euler
Als je een netwerk hebt in driehoeksvorm, zijn er 3 punten, 3 verbindingen en 2 gebieden één binnen- en één buitengebied. De zwitserse wiskundige Euler heeft een algemene relatie gevonden tussen het aantal punten (p), het aantal gebieden (g) en het aantal verbindingen (v).
Hij ontdekte dat als we p en g optellen en er v van aftrekken er steeds 2 uitkomt! Bij de driehoek wordt dat $3 + 2 - 3 = 2$. Dat is natuurlijk wel erg eenvoudig.
We nemen wat moeilijkers. Het netwerk van figuur 4a (het symbool van TELEAC) heeft $p = 13$, $g = 17$ (vergeet het buitengebied niet!) en $v = 28$. Hier geldt ook $13 + 17 - 28 = 2$.
Onderzoek de geldigheid van de formule zelf voor het huis en de ster van figuur 4b en figuur 4c. Klopt het?
Met de formule is het mogelijk om één van de 3 grootheden, als die moeilijk te bepalen is, uit de andere 2 af te leiden.
Geldt de formule ook voor een lijnstuk met 2 eindpunten? En voor één enkel punt??



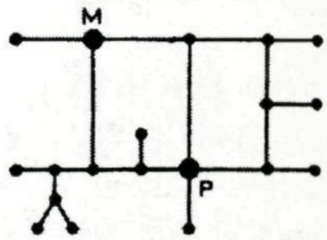
figuur 1



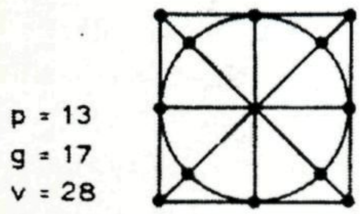
figuur 2



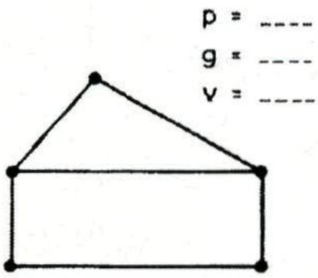
figuur 3a
St Maarten in de Caribische Zee



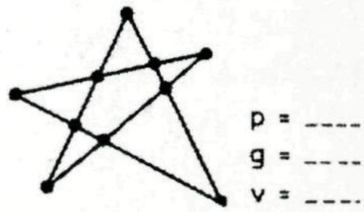
figuur 3b
Netwerk van wegen op St. Maarten



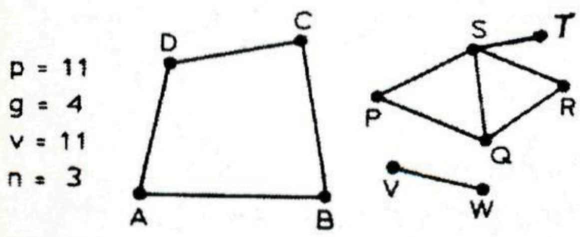
figuur 4a



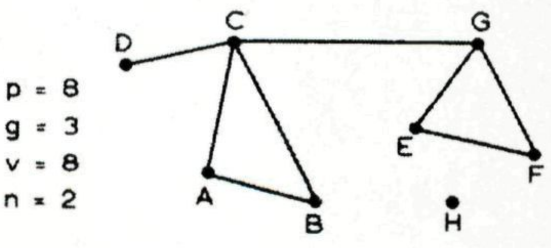
figuur 4b



figuur 4c



figuur 5



figuur 6

Hoe bij meer netwerken

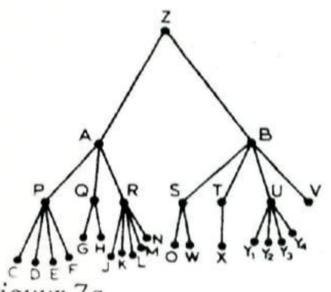
In figuur 5 staat een groep van 3 netwerken. Er zijn 3 binnengebieden en één gemeenschappelijk buitengebied, dus g = 4. Verder geldt p = 11 en v = 11. Het aantal netwerken is 3.
We schrijven: n = 3.
Dezelfde Euler heeft nu bewezen dat nòg algemener voor zo'n combinatie van netwerken geldt:
$p + g - v - n = 1$.
Dat klopt hier, want
$11 + 4 - 11 - 3 = 1$!
In alle gevallen waarin n = 1 gaat deze formule automatisch over in de vorige $p + g - v = 2$.

Netwerken in de praktijk

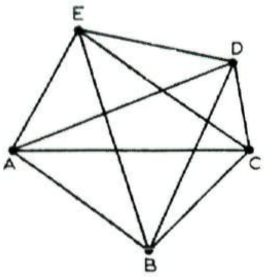
Een groep bestaat uit 8 studenten (fig. 6). Een verbindingslijn betekent dat ze buiten de lesuren met elkaar contact hebben. Het is direct duidelijk dat C en G de verbindingspersonen binnen de groep zijn. C heeft de meeste relaties; H leeft geïsoleerd.
Ga na dat ook hier de formule $p + g - v - n = 1$ klopt. In figuur 7a staat een voorbeeld van een gezagsrelatie. Een directeur van een fabriek heeft 27 man 'onder zich'. Het bedrijf heeft 2 onderdirecteuren, een voor de administratie en een voor de produktie. Elk heeft een aantal chefs onder zich, die op hun beurt weer aan lager kader opdrachten geven. Zo'n opbouw tref je ook in het leger. In onze tijd voelen we meer voor collegiale systemen zoals in figuur 7b.
Daarbij verschijnen binnengebieden, die kenmerkend zijn voor overleg over en weer binnen een zekere groep. Meestal zijn onze maatschappelijke en technische structuren een combinatie van een ster- en een mazensysteem. Elk systeem op zich heeft voor- en nadelen. Een zuiver mazensysteem geeft korte verbindingen maar wel *ontzettend veel*. Een zuiver stersysteem geeft weinig verbindingen maar wel *lange*. De combinatie is nog het beste.

Telefoon

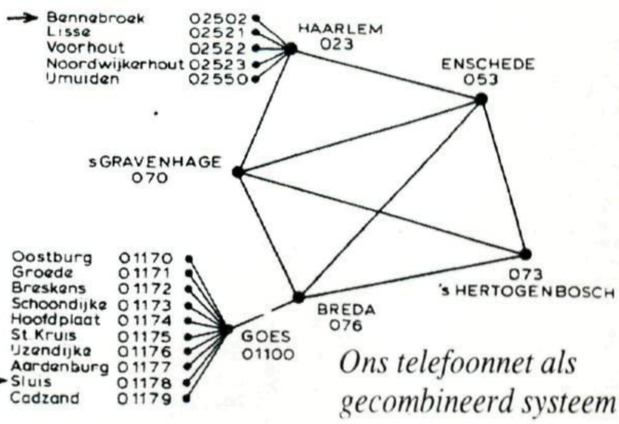
Een voorbeeld daarvan is ons telefoonstelsel. Ruim 20 steden in ons land zijn door een mazensysteem telkens direct met elkaar verbonden. Het zijn al die plaatsen,



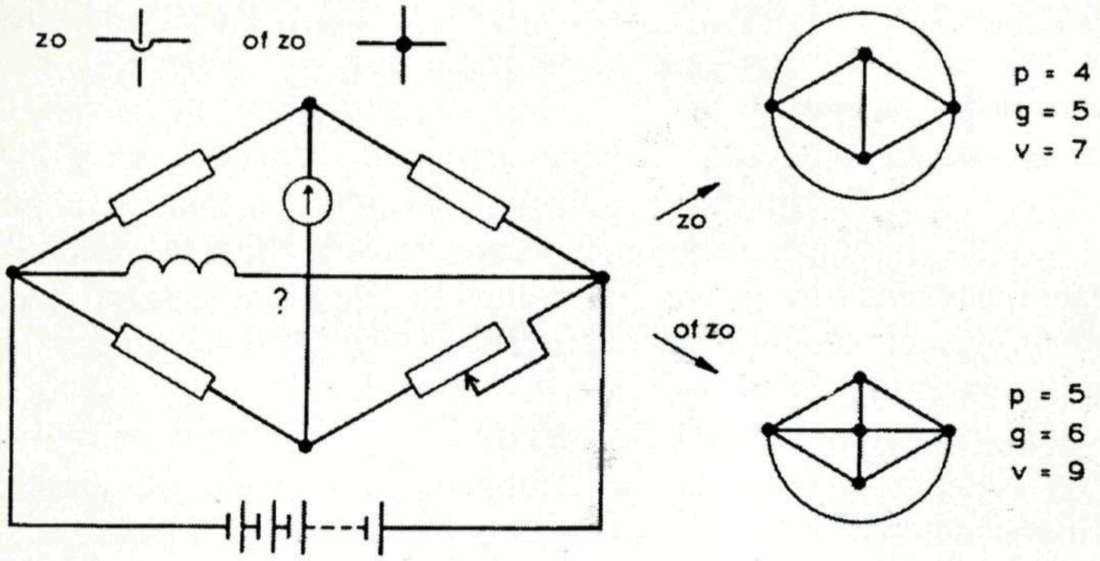
Figuur 7a
Dictatoriaal (stersysteem)



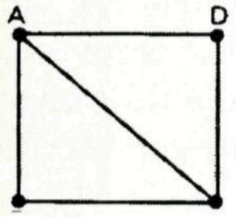
Figuur 7f
Collegiaal (mazensysteem)



Ons telefoonnet als gecombineerd systeem

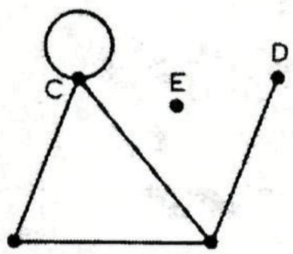


Figuur 9. Elektrische schakeling als mazensysteem



	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	0	1	0
C	1	1	0	1
D	1	0	1	0

Figuur 10.



$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Figuur 11

Figuur 12..

$$\begin{matrix} 0&1&0&1 \\ 1&0&1&1 \\ 0&1&0&0 \\ 1&1&0&0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0&1&0&1 \\ 1&0&1&3 \\ 0&1&2&0 \\ 1&2&0&0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0&1&1&1 \\ 1&0&1&1 \\ 1&1&0&1 \\ 1&1&1&0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&1&0 \\ 1&1&0&1 \\ 0&0&1&0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0&1&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0 \end{matrix}$$

Welk is een mazennetwerk? Waaraan is dat te zien?
Welk is een sternetwerk? Waaraan is dat te zien?
Wat betekent het dat de matrix symmetrisch is ten opzichte van de diagonaal van links boven naar rechts onder?

zoals Haarlem, Breda, Enschede die door het draaien van een 0 en vervolgens nog slechts twee cijfers, te bereiken zijn (fig. 8). Voorin de telefoongids zijn die plaatsen gemakkelijk op te zoeken. Maak daar maar eens een lijst van. Een eenvoudige berekening leert dat voor dit mazensysteem ruim 200 directe lijnenverbindingen nodig zijn. Aan deze 20 plaatsen hangen alle andere via sterren. Iemand die bijvoorbeeld van Sluis in Zeeuws-Vlaanderen naar Bennebroek in Noord-Holland wil bellen, vindt een verbinding over Goes, Breda en Haarlem.
Door te letten op de begintallen is gemakkelijk in de gids uit te zoeken, welke plaats tot de ster van welke andere behoort.

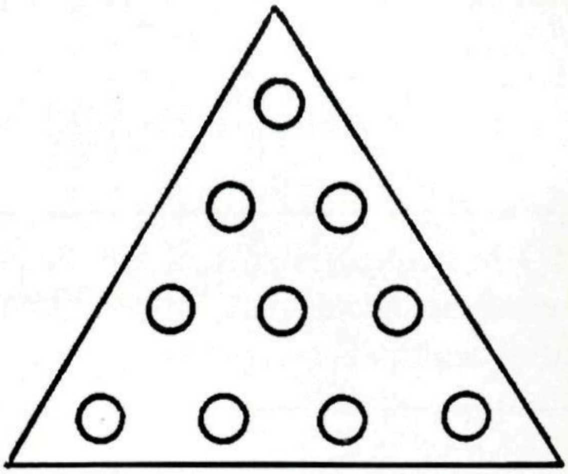
Elektrische schakelingen
Een heel belangrijke toepassing van netwerken tenslotte vinden we bij elektrische schakelingen. Daar werken we steeds met mazensystemen. Telkens treffen we gesloten circuits, anders kan er geen stroom rondgaan. In figuur 9 staat zo'n schakeling. Vaak is het in dergelijke schema's onduidelijk of er in het centrum nu wel of niet een geleidende verbinding bedoeld is. Dat maakt nogal verschil!
Ook wiskundig hebben we dan een ander netwerk. In het eerste geval zijn er 4 vertakkingspunten, in het tweede geval 5. Maar hoe het ook bedoeld is, de formule van Euler is steeds geldig. Ga dat maar na.

Matrix
Het is mogelijk netwerken aan te geven met een getallenvierkant. Zoiets noemen we een matrix (fig. 10). Hierbij betekent '1' dat er een verbinding is; '0' betekent dat er geen directe weg tussen beide punten loopt. Hier komt nog één voorbeeld (fig. 11) en dan zèlf proberen uit enkele matrixschema's, het passende wegenkaartje te construeren. Tevens is het gebruikelijk de letters weg te laten. Verzin die er zelf maar bij. Bij deze figuur vallen 2 dingen op: E is een geïsoleerd punt, het heeft geen verbindingsweg met een van de andere punten; verder heerst op het traject AC éénrichtingsverkeer, je kunt wel van A naar C, maar niet van C naar A. In figuur 12 staan de computerformules van nog 5 nieuwe netwerken. Probeer ze op te lossen. De antwoorden staan op pagina 30. ■

Driehoekspuzzel

❍❍ Tien stippen zijn gerangschikt in een regelmatig patroon, waarbij elk naburig drietal een gelijkzijdige driehoek vormt.
Hoeveel gelijkzijdige driehoeken tel je totaal? Wij komen uit op 15 stuks, gerangschikt opklimmend in grootte volgens de rij: 9, 2, 3, 1.

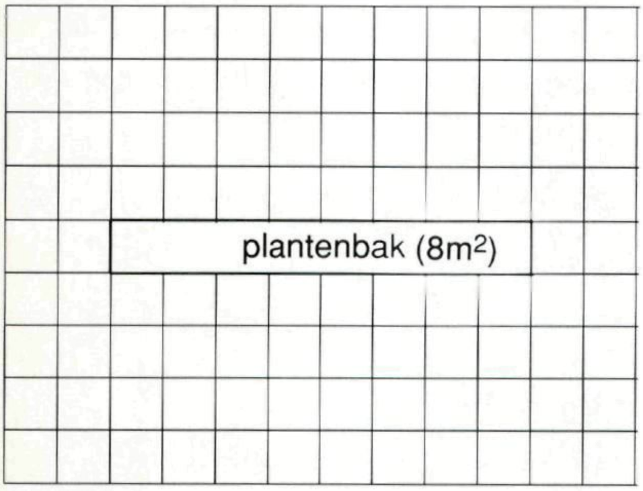
De bedoeling is nu om vier van de tien rondjes zwart te maken zodat de 6 overgebleven witte stippen nergens een gelijkzijdige driehoek meer opleveren. Dat is mogelijk. Kun je ook aangeven op hoeveel manieren dat kan? Methoden die door symmetrie uit elkaar volgen tellen we daarbij maar één keer.

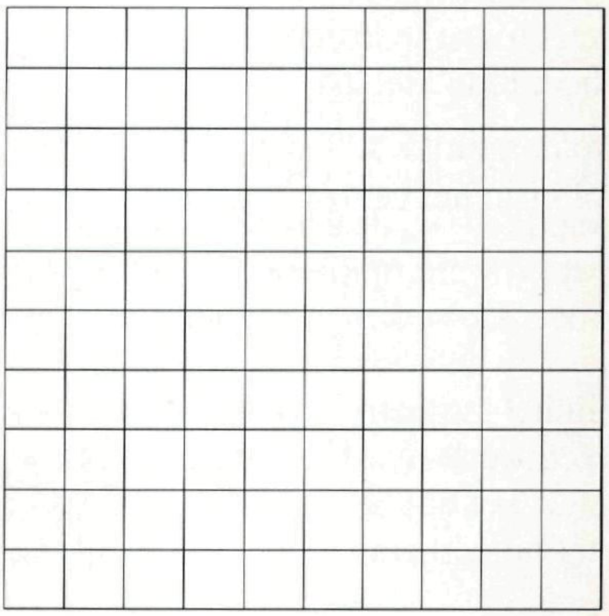


Anders
Je kunt met dit patroon nog iets aardigs uithalen. Zet eens tien glazen op tafel volgens dit model. Je hebt nu een grote gelijkzijdige driehoek met de punt naar boven. Kun je die omzetten in eenzelfde, maar nu met de punt omlaag? Maar ... je mag hiervoor maar drie glazen verzetten. Tip: verzet het bovenste glas vier rijen lager. Die wordt dan de nieuwe top. Nu nog twee ... ■

Verhuisprobleem

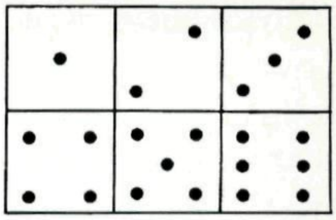
❍ Knip de vloerbedekking van de oude kamer, waarin een lange plantenbak staat, zo in twee stukken dat die, in de juiste stand gelegd, de hele nieuwe kamervloer kunnen bedekken. Oplossing op pagina 30. ■





links: $9x12=108m^2$ rechts: $10x10=100m^2$

Spelen met getallen en figuren



❍❍ Je kunt getallen saai opschrijven als tekens in een telefoongids. Met meer fantasie staan ze op de zijkanten van een dobbelsteen. Elk getal is aangegeven als een patroon van stippen; zo ontstaat een figuur.

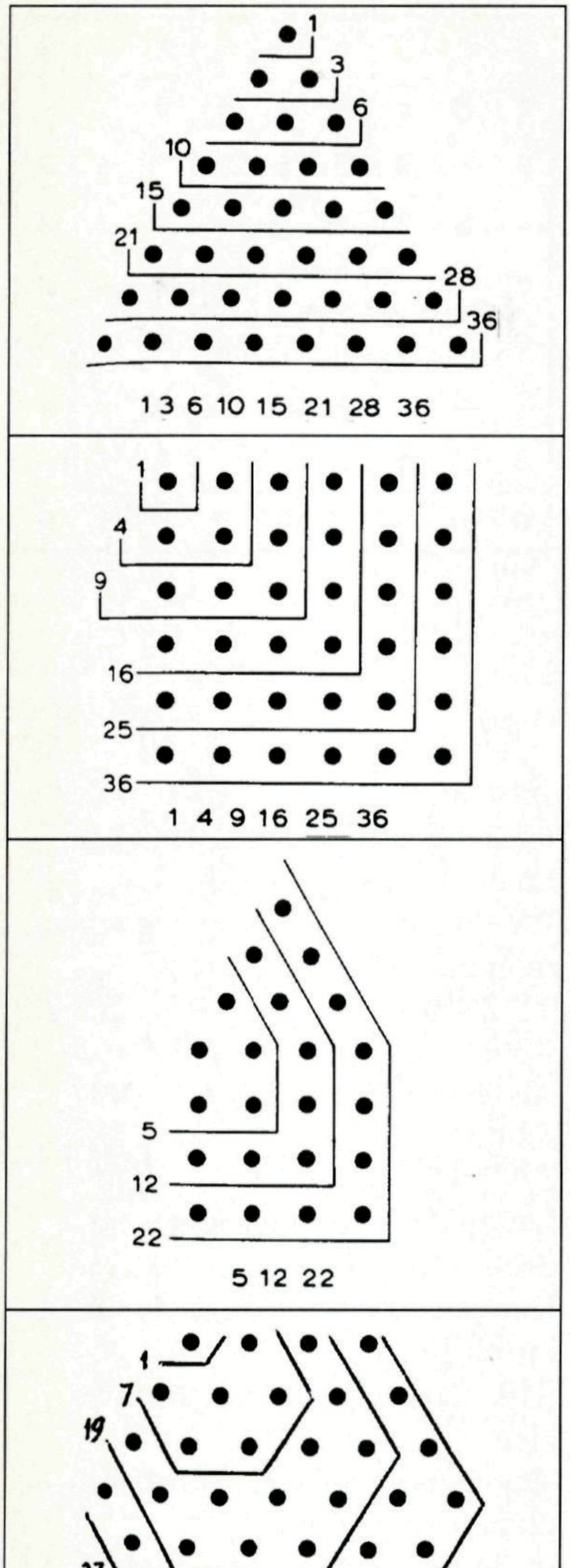
Zet punten in driehoeksformatie (fig. 1); door uitbreiding van de figuur ontstaat de rij:
1, 3, 6, 10, 15, 21 ...
In vierkantsvorm ontstaat de rij van de kwadraten:
1, 4, 9, 16, 25, 36 ...
Zet vijf stippen in de vorm van een huis; door uitbreiding ontstaat de rij:
5, 12, 22, 35, 51 ...
In een zeshoekige uitbreiding verschijnt:
1, 7, 19, 37, 61, 91 ...

Klokrekenen

Er is een methode om in getallenverzamelingen een opvallende regelmaat te krijgen. De methode heet reductie. Zo bijvoorbeeld rekenen 'modulo 9'. Dat betekent dat het hoogste getal in je verzameling 9 is, daarna begin je gewoon weer opnieuw. Vergelijk dat met 'klokrekenen'; tellen tot 12 en weer van voor af aan beginnen.
In het systeem 'modulo 9' schrijven we 10 als 1, 11 als 2, 12 als 3 ... Je kunt het ook anders zeggen: tel bij de getallen met meer cijfers, de cijfers op zodat je weer een uitkomst krijgt met één cijfer.
Schrijf dus in plaats van 42 de som van 4 en 2 dus 6; 27 wordt 9;
243 wordt 9;
5362=16=7 ...
In figuur 2 staat ons normale vermeningvuldigingsvierkant. Daarin kun je aflezen 6x7=42 ... daarnaast staat hetzelfde na reductie. Dat ziet er merkwaardig uit. Een lijst van negens begrenst het vierkant aan twee zijden. In veel opzichten is er symmetrie.
In onze dagelijkse rekentechniek werken we daarmee in de zogenaamde negenproef. Een getal is deelbaar door 9 als de som van de cijfers door negen deelbaar is. Je kunt er vermenigvuldigingen mee controleren.Voorbeeld
42x365=15330
Controle 4+2=6 en 3+6+5=14.
15330=12=3 ten slotte
6x5=30=3 en dat klopt!

Patroon

Het is mogelijk gedetailleerde figuren te ontwerpen met grote regelmaat. Een getallenritme gaat



Figuur 1.

zo over in een figuur.
In figuur 3 is dat gedaan voor getallenrijen afkomstig uit het tweede vermenigvuldigingsvierkant.
Neem de rij:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 (fig. 3a).
Maak lijnstukjes in lengte evenredig met het betreffende getal en zet ze loodrecht op elkaar, daarbij draaiend tegen de wijzers van de klok. Begin bij de punt. Er ontstaat een merkwaardige spiraal die na vier ronden sluit. Je kunt het ook doen met hoeken van 120^{o}. Wat je dan beleeft, staat eronder. De figuur gaat na twee ronden sluiten.
In figuur 3b is dit proces gevolgd voor de tweede rij uit het vierkant: 2 4 6 8 1 3 5 7. In figuur 3c voor de groep 3 6 9.
Zo zijn allerlei patronen te ontwerpen. Experimenteer zelf maar verder. De kunst is: hoe te komen aan geschikte getallenrijen? Je kunt het proberen met de rij der kwadraten.
Pas maar reductie toe en zie wat er gebeurt.
1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144 169 225 256.
We krijgen zo de rij:
1 4 9 7 7 9 4 1 9 1 4 9 7 7 9 4.
Overal waar je reductie toepast ontstaat dergelijke regelmaat.
Probeer het nog maar eens met derde machten.
1 8 27 64 125 216 343 512 729 1000 1331 1728.
Dat gaat over in:
1 8 9 1 8 9 1 8 9 1 8 9.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

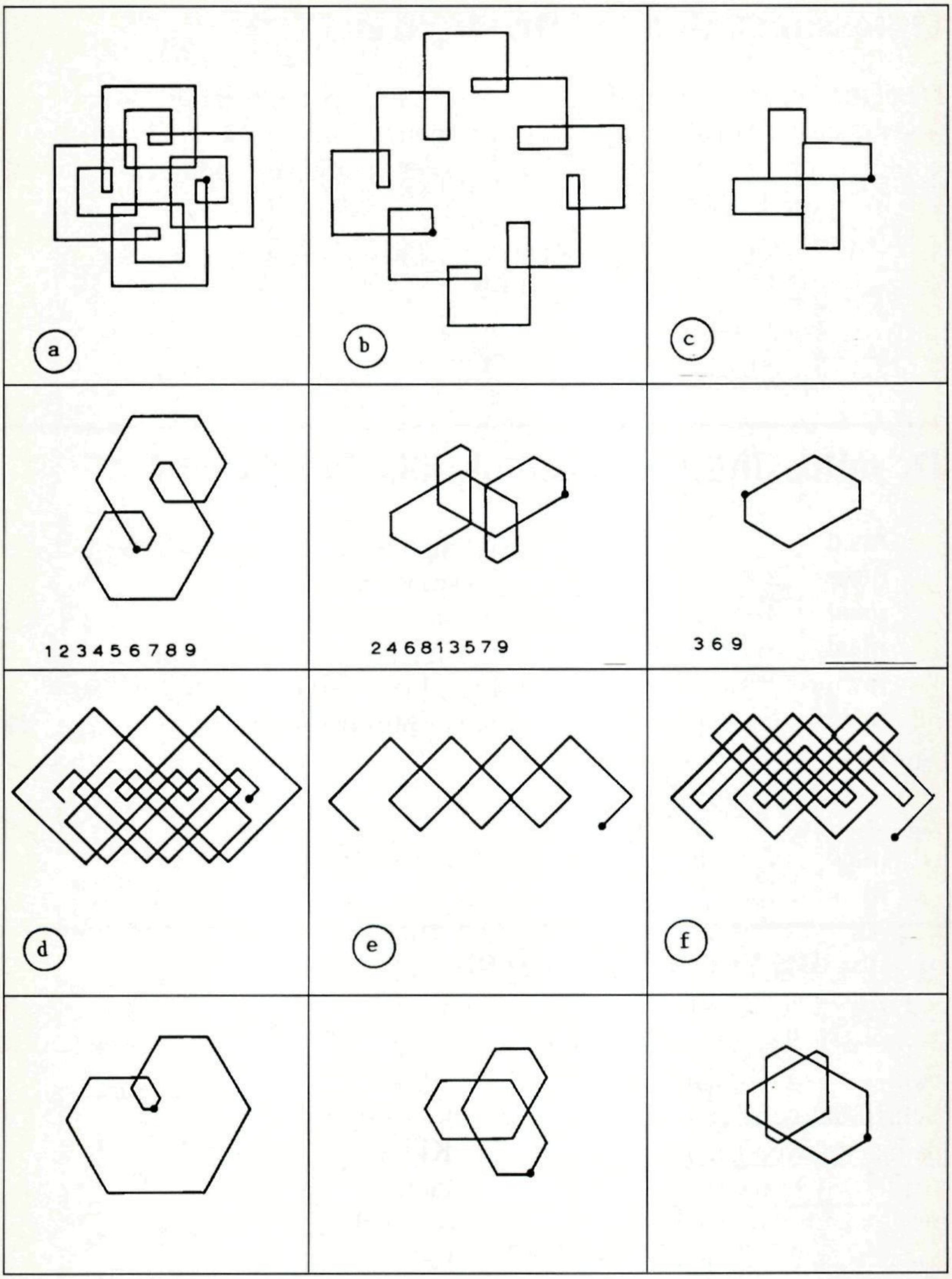
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	1	3	5	7	9
3	6	9	3	6	9	3	6	9
4	8	3	7	2	6	1	5	9
5	1	6	2	7	3	8	4	9
6	3	9	6	3	9	6	3	9
7	5	3	1	8	6	4	2	9
8	7	6	5	4	3	2	1	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9

Figuur 2.

De rij van vierde machten:
1 16 81 256 625 1296 2401 4096 6561 10000 ...
wordt 1 7 9 4 4 9 7 1 9 1 ...

Fibonacci

Een ander veld van experimenten zijn de rijen van Fibonacci.
Rond het jaar 1228 duiken ze op in de geschiedenis. Het recept is als volgt. Schrijf op 0 en daarachter 1. We noemen dit de 01-rij. Tel nu beide getallen op. De som is 1. Schrijf dat getal er weer achter. Tel de laatste twee getallen weer op ... Bij 5+8=13 moet je weer reduceren, schrijf dan dus 4. Na 24 elementen wordt de rij periodiek.
Daar gaan we.
0 1 1 2 3 5 8 4 3 7 1 8 9 8 8 7 6 4 1 5 6 2 8 1 9 1 1 2 3 ...
Je ziet de serie terugkeren.
Als we om de andere opschrijven, ontstaat:
1 2 5 4 7 8 8 7 4 5 2 1 (fig. 3d)
En dat heet symmetrie.
We schrijven nog meer Fibonacci-rijen uit en wel de 02-rij.
0 2 2 4 6 1 7 8 6 5 2 7 9 7 7 5 3 8 2 1 3 4 7 2 9 2 2 4 ...
Als je om de ander neemt, verschijnt:
2 6 7 6 2 9 7 3 2 3 7 ...
Let op de scheidingsnegen en deelsymmetrie.
Kun je zelf nu de 03- en de 04-rij uitschrijven?
Kijk eens hoe dat eruit komt te zien.
Wat een regelmaat; overal periodiciteit, spiegeling.
In figuur 3e en 3f staan nog de tekenpatronen die behoren bij de laatste series: 366336-633663 en 482715-517284. Zelf kun je nog nieuwe experimenten doen. Het is

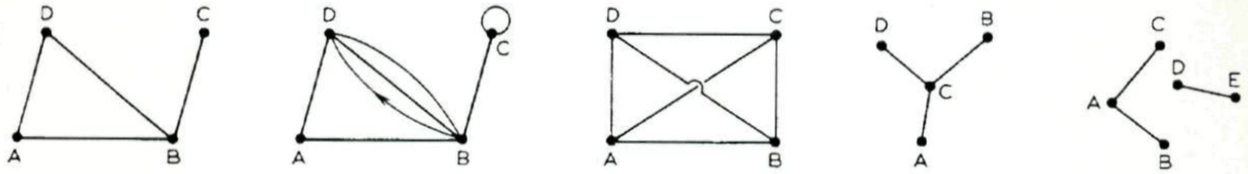


Figuur 3.

een eindeloos veld van onderzoek. De natuur is de ontwerper, de mens niet meer dan de opdrachtgever. Die blijft in verbazing achter. ■

Oplossing van de matrixfiguren

De derde is een mazennetwerk (overal staat 1 behalve op de hoofddiagonaal). De vierde is een ster (alleen één punt heeft verbinding met alle ander). Symmetrie duidt op tweerichtingsverkeer op alle verbindingen. ■

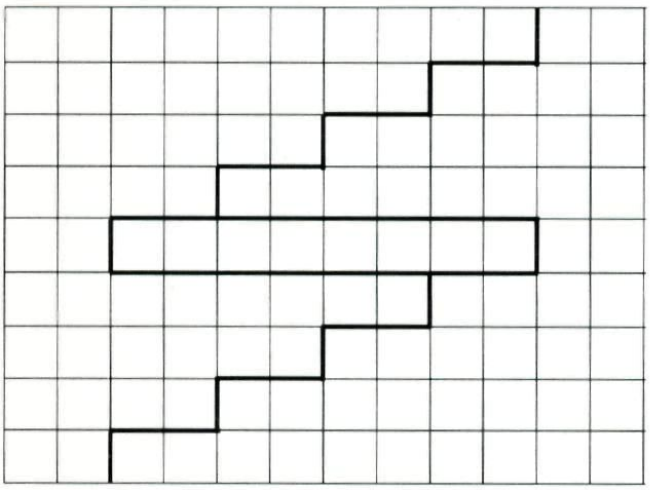


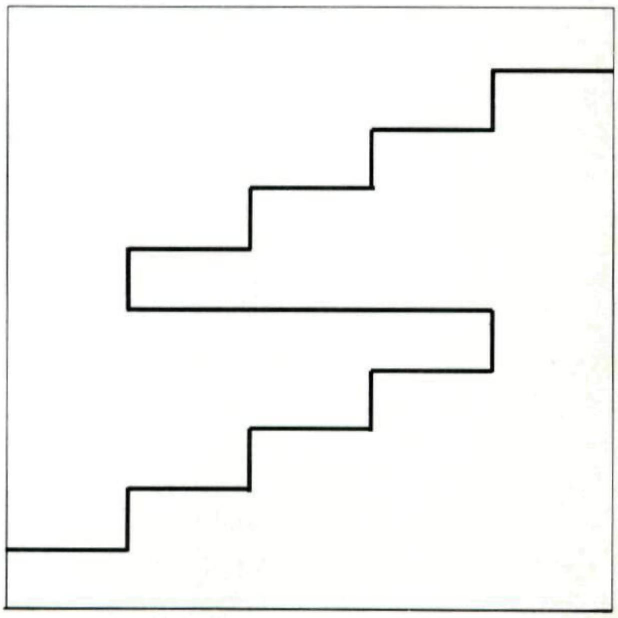
De oplossing van: geschikt als ontdekker?

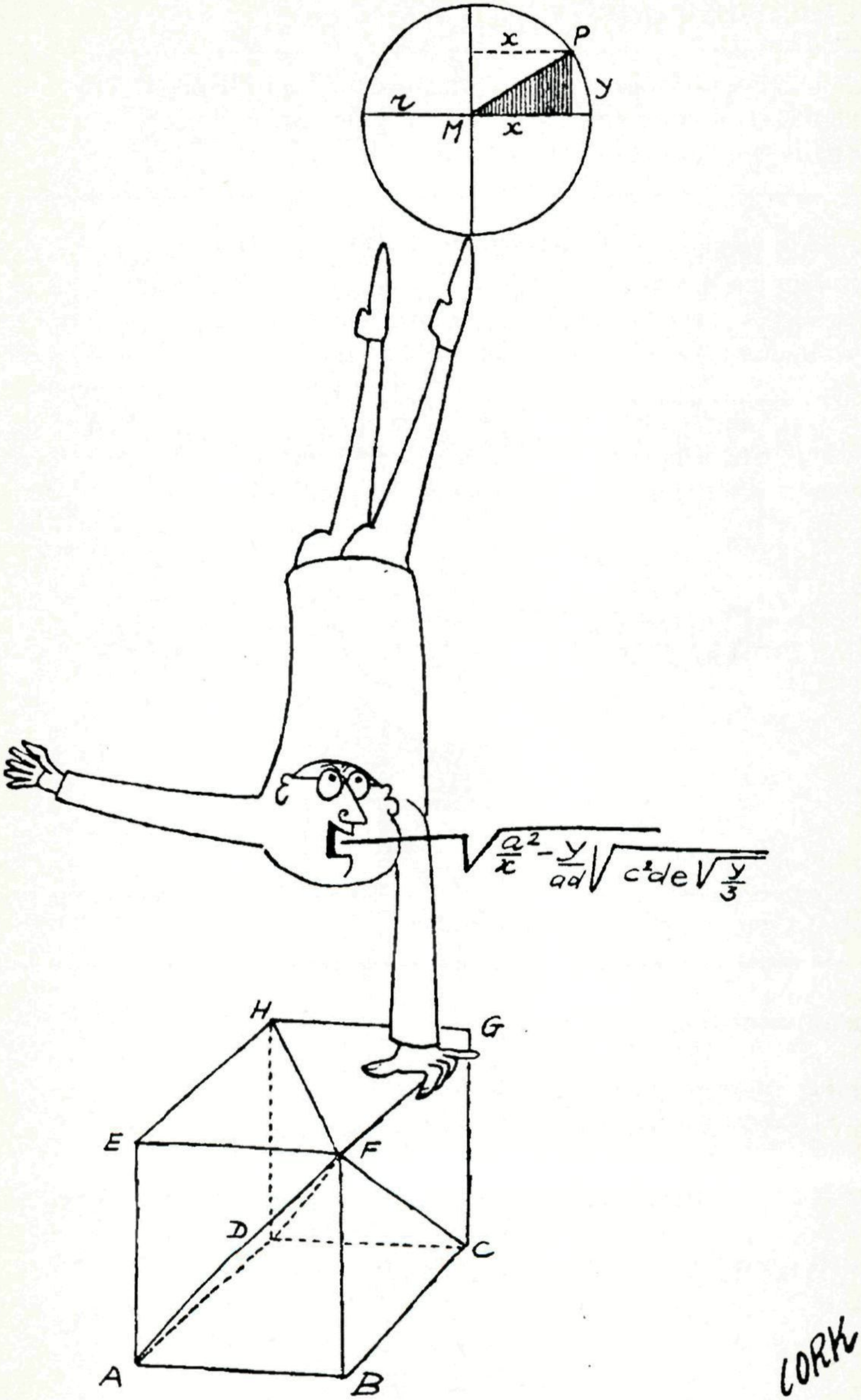
7	maal	1	7
	maal	2	14
	maal	3	21
	maal	4	28
	maal	5	35
	maal	6	42
....	....	....	....
....	....	....	....
....	....	....	....
	maal	9	63
	maal	10	70

Het Sumerisch talstelsel was 60-tallig.
één spijker is een eenheid
10 eenheden is <
60 eenheden is weer één spijker.
Dus 63 (tientallig) is 60 + 3 is één spijker plus drie spijkers. ■

oplossing verhuisprobleem



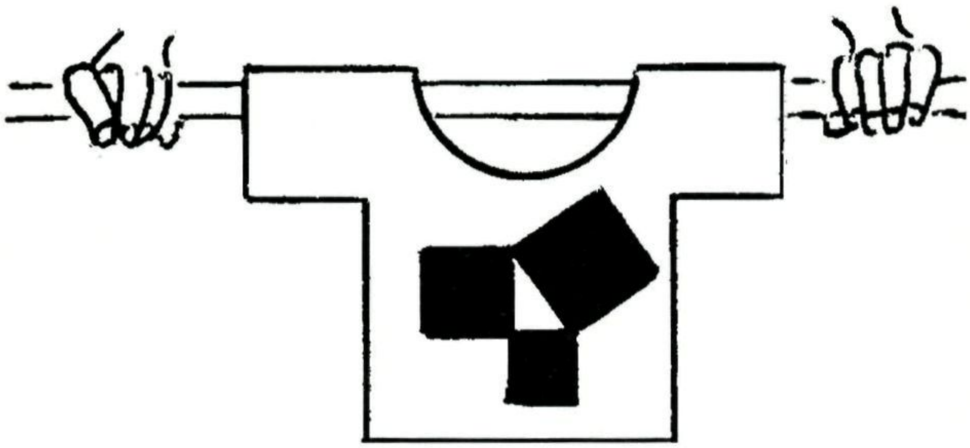



x
P
y
r
M
x
$\sqrt{\frac{a^2}{x}-\frac{y}{ad}\sqrt{c^2de\sqrt{\frac{y}{3}}}}$
H
G
E
F
D
C
A
B
CORK

Binnenste-buiten

❍ Schuif een stok door de mouwen van een T-shirt. Houd de stok bij de einden vast en vraag een ander het shirt binnenste buiten te keren, zonder dat jij de stok loslaat.

Sommige proberen het shirt via de hals door te trekken. Dat wordt geen succes. Toch kan het wel. Via één van de mouwen! Probeer het maar.
Het wordt nog spannender als jezelf het hemd aantrekt, vervolgens je handen voor je lichaam in elkaar strengelt en iemand vraagt het shirt binnenste buiten te keren, zonder je handen los te maken.
De truc is dan het hemd over het hoofd uit te trekken, het op te schuiven tot over één van beide armen en dan weer verder zoals bij de stok. Succes ermee. ■



Verantwoording illustraties

Foto's: Henk Mulder

Tekeningen: Henk Mulder
Hans Oomis

Illustraties: Ad Karremans
Carry Oomis
Escher

Pythagoras wiskunde tijdschrift voor jongeren

Redactie: Henk Huysmans, Henk Mulder

Medewerkers: Prof. H. Duparc, Bob de Jongste, Thijs Notenboom, Hans Oomis, Hans de Rijk, Frank Roos

Redactiesecretariaat: Henk Mulder, Geersbroekseweg 27, 4851 RD Ulvenhout.

Eindredacteur: Henk Huysmans

Inhoudsopgave Pythagoras nummer 4, 31^e^ jaargang

Pythagoras verschijnt zesmaal per schooljaar; opgave van abonnementen bij de uitgever (zie onder). Abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 september schriftelijk bij de uitgever is opgezegd. Bij tussentijdse abonnering ontvangt men ook de reeds verschenen nummers. Betaling per acceptgirokaart.

Tarieven	NLG/BEF
Abonnement Pythagoras	25,–/450
Luchtpost-toeslag	10,–
Inclusief Archimedes	45,–/800
Luchtpost-toeslag	20,–
Losse nummers	5,–/ 90

stichting ivio
Postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL.) **Tel. 03200-76411**
educatieve uitgeverij - instituut voor buitenschools onderwijs - wereldschool - AO-reeks - leerprojecten
Postgiro Nederland: 287934 **Postcheck België: 000-0130850-94**