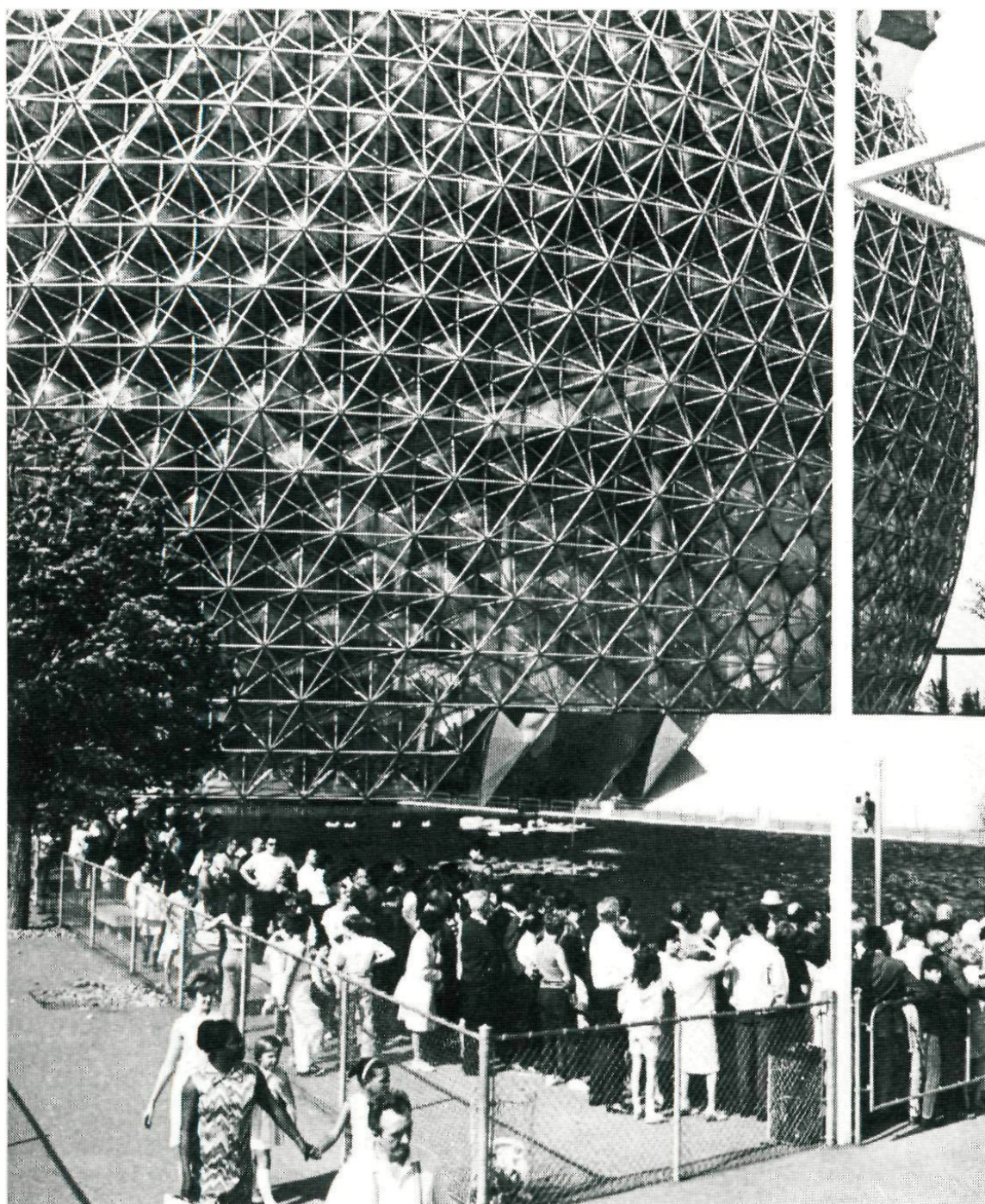




Pythagoras



wiskunde tijdschrift voor jongeren

stichting ivio

31e jaargang
nummer 6
juli 1992

De bol van Montreal, een fascinerend bouwwerk

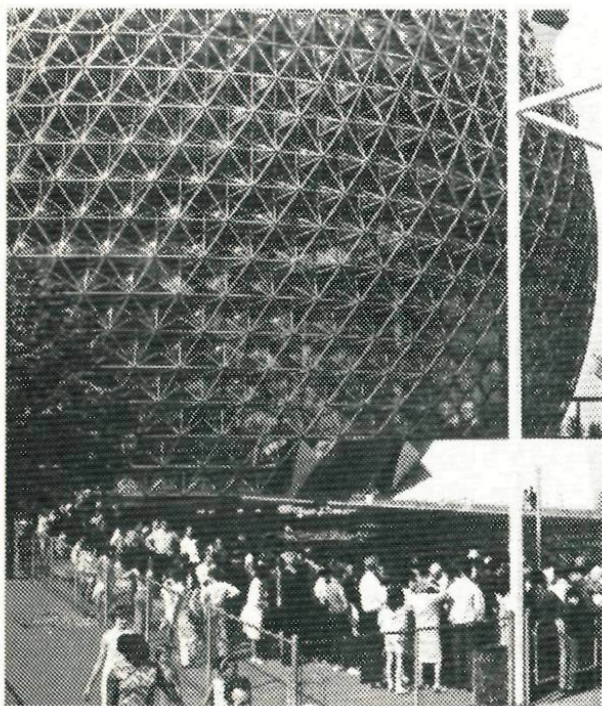
○○ We stonden in Montreal aan de St. Lawrence rivier en keken in stomme verbazing omhoog naar een 61 m hoog bouwwerk (fig. 1), daar door de Amerikanen weggezet in 1967, ter gelegenheid van de wereldtentoonstelling. Er binnen groeit een 50 m hoge eik en de langste roltrap ter wereld voert bezoekers naar boven. Deze wolkenkrabberkoepel heeft een diameter van 77 m, de 'evenaar' ligt 15,5 m boven de begane grond. De oppervlakte is 13000 m². Het is een meer dan halve bol, helemaal opgebouwd uit driehoeken. Elk driehoekig vakwerk van staven is afgedicht door een plastic kap. Motoren reageren automatisch op het zonlicht en bedienen een zonweringssysteem; tevens regelen ze de ventilatie.

De bouwmeester van dit meesterwerk is de befaamde Amerikaanse architect Buckminster Fuller. Hoe zit dit futuristische vakwerksysteem in elkaar? Zijn alle staven even lang? Zijn er wetten waaraan zo'n merkwaardig veel-

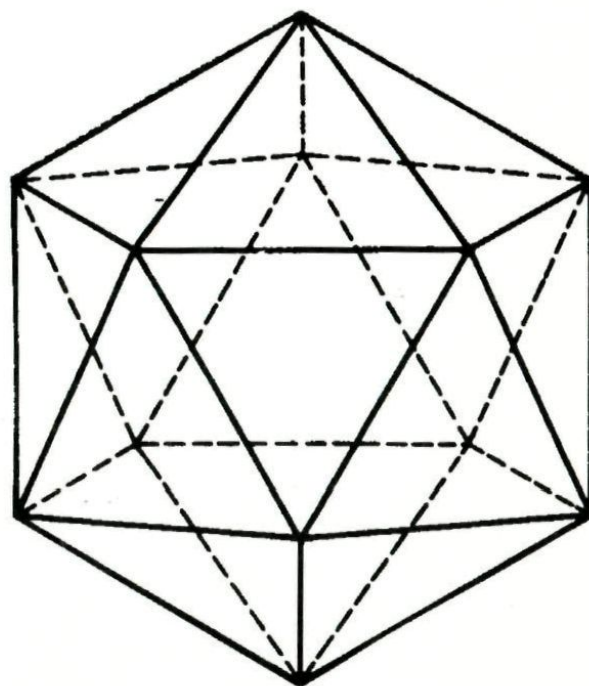
vlak moet voldoen?

20-vlak

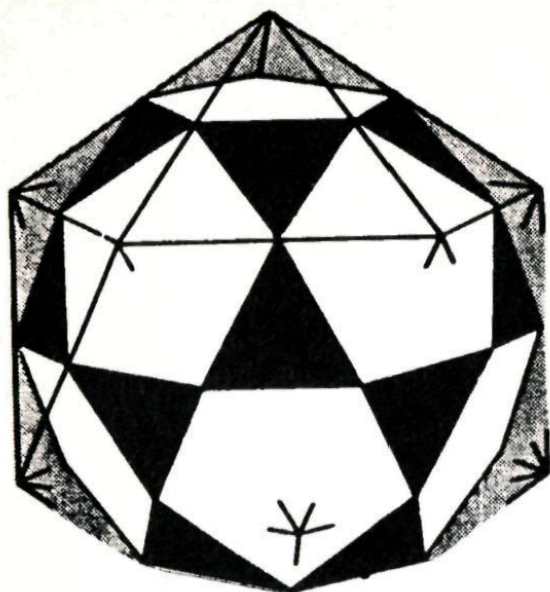
Het grondmodel van een dergelijk bouwwerk is een regelmatig 20-vlak (fig. 2). Dat heeft 20 zijvlakken, 12 hoekpunten en 30 ribben. Een regelmatig veelvlak heeft alle ribben even lang, alle



Figuur 1.
De bol van Montreal



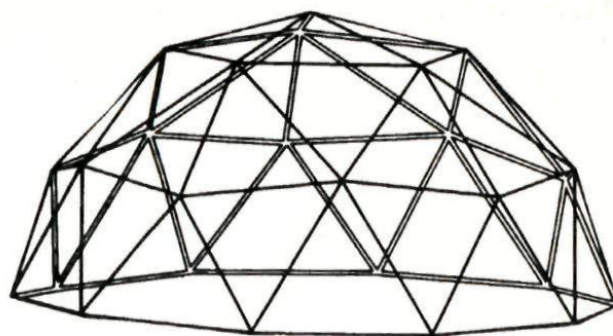
Figuur 2.



Figuur 3.

zijvlakken gelijk en alle hoekpunten liggen op een bol. Een veelvlak van deze soort met meer dan 20 gelijkbenige driehoeken bestaat niet. Dat betekent dat bij de bol van Montreal alle stangen onmogelijk even lang kunnen zijn. In figuur 3 staat de eerste variatie van het regelmatig 20-vlak. We hebben de middens van alle zijden verbonden en zo ontstaat een halfregelmatig lichaam, opgebouwd uit 12 vijfhoeken en 20 driehoeken. Alle ribben zijn nog wel even lang en door alle hoekpunten van dit 32-vlak gaat een bol.

Uit dit veelvlak maken we een nieuwe variatie en wel een, weer louter bestaande uit driehoeken, 80 stuks! Richt daartoe telkens in het centrum van een vijfhoek een loodlijn op en wel zo hoog tot de omschreven bol gesneden wordt (fig.4). Dit punt wordt dan weer verbonden met de vijf hoekpunten van de betreffende vijfhoek. Het



Figuur 4.

aantal driehoeken wordt dan $20 + (12 \times 5)$ ofwel 80 stuks. Het veelvlak heeft nu wel twee verschillende staaflengten. Zo zijn we verder op weg geraakt naar de constructie van de mysterieuze bol van Montreal.

Het klimrek van Miami

Terwijl we door de Verenigde Staten trokken en nog zwaar onder de indruk waren van de bol van Montreal, kwamen we in Miami, Florida. We logeerden in het Ford Knockx-hotel en toen we 's morgens naar buiten stapten, zagen we in een speeltuin het klimrek staan van figuur 4. Direct herkenden we het zojuist verzonnen 80-vlak en wel de bovenhelft ervan. We telden de driehoeken. Het waren inderdaad 40 stuks. Tel zelf maar na. Het aantal staven is 60. In het hotel zochten we een meetlat. De enige beschikbare was in inch geijkt. Er bleken maar twee verschillende lengten van stangen in het klimrek te zitten. Een van 30 inch en een van 27 inch. Hoewel alle driehoeken gelijkzijdig leken,

waren sommige dat niet. Die vergissing is begrijpelijk bij lengteverhouding 10 : 9.

Van alle driehoeken zijn er slechts 20 gelijkzijdig, de overige 60 zijn gelijkbenig.

Als we nader speuren, zien we hoe het klimrek is opgebouwd uit 5-zijdige en 6-zijdige piramiden, die elkaar steeds overlappen.

Fascinerend is het hoe zo'n 'halve bol' met slechts twee typen staven is te realiseren. Alle vijfhoeken zijn regelmatig; alle ribben daarvan zijn even lang en zijn tevens de lange stangen van het rek. Een fraai stukje architectuur en duidelijk een stap op weg naar de bol aan de St. Lawrence rivier.

De stelling van Euler

Er is een beroemde stelling die geldig is voor alle veelvlakken, dus ook voor de bol van Montreal. Die stelling zegt: van elk veelvlak is de som van het aantal zijvlakken (z) vermeerderd met het aantal hoekpunten (h) twee meer dan het aantal ribben (r). In formule:

$$z + h = r + 2.$$

Bij het twintigvlak wordt dat: $20 + 12 = 30 + 2$; klopt!

Bij de eerste variatie van figuur 3 waarbij we de middens van de ribben met elkaar twee aan twee verbonden, zodat er vijfhoeken en driehoeken ontstonden: $32 + 30 = 60 + 2$ en dat klopt weer!

En voor het geval dat we op elke vijfhoek weer een regelmatige 5-zijdige piramide gingen zetten,

waardoor het lichaam verscheen waarvan het klimrek van Miami de helft is: $80 + 32 = 110 + 2$ en dat klopt ook weer!

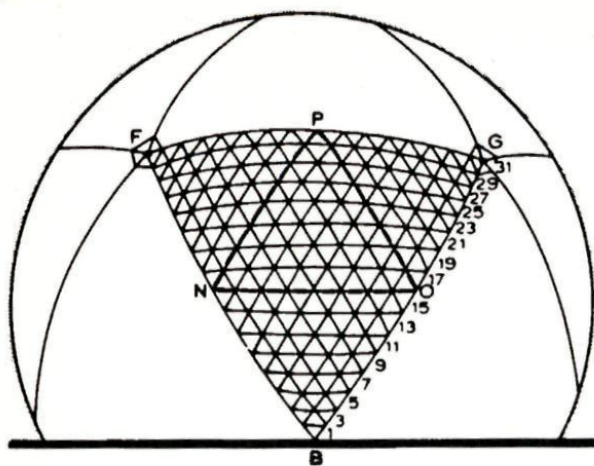
We moeten nu wel aannemen dat de stelling ook geldt voor de bol van Montreal. Op het eerste gezicht lijken de driehoeken telkens in groepen van zes bij elkaar te komen of anders gezegd: komen er in elk punt steeds zes staven bijeen? Maar we kunnen met de stelling van Euler bewijzen dat dit onmogelijk kan!

Geen bol van louter zeshoeken

Stel eens dat de bol n hoekpunten heeft en dat in elk punt zes ribben bijeen zouden komen. Dan zouden er dus $6n : 2$ of $3n$ ribben zijn. Elke driehoek wordt daarbij begrensd door telkens drie ribben en elke ribbe is steeds grenslijn van twee zijvlakken. Er moeten dan dus $(3n : 3) \times 2$ of $2n$ zijvlakken zijn. De stelling: $z + h = r + 2$, gaat dan over in: $2n + n = 3n + 2$. Maar dat is ten ene male onmogelijk!

Steeds twaalf vijfhoeken!

Misschien heeft de bol een aantal hoekpunten waar slechts vijf ribben in één punt bij elkaar komen. Laten we dat eens nader onderzoeken. We gaan uit van n hoekpunten waar zes ribben bij elkaar komen en k hoekpunten waar telkens vijf ribben bijeen komen.



Figuur 5.

Dan geldt: $h = n + k$; verder

$r = \frac{1}{2}(6n + 5k)$ en tenslotte:

$z = \frac{2}{3}(3n + 2\frac{1}{2}k) = 2n + \frac{5}{3}k$.

De stelling $z + h = r + 2$

wordt dan hier: $2n + \frac{5}{3}k + n + k =$

$3n + \frac{5}{2}k + 2$ ofwel

$16k = 15k + 12$ ofwel $k = 12$.

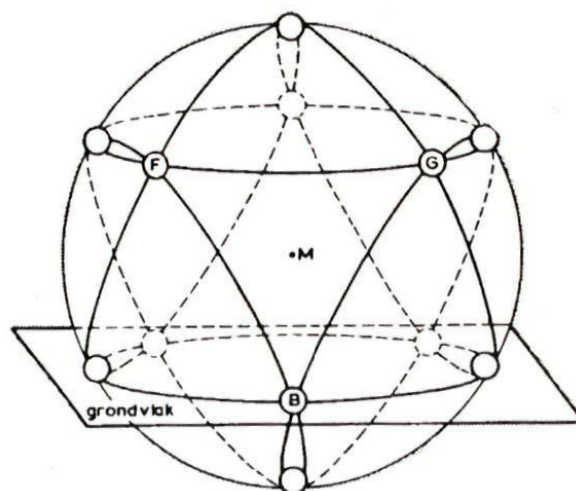
Het aantal hoekpunten waarin vijf ribben samenkomen, is dus altijd 12. Een verrassende uitkomst.

Tegelijk een belangrijke vingerwijzing naar het geheim van de bol van Montreal.

Op zoek naar de vijfhoeken

Ons eerste werk lijkt nu op de bol naar de vijfhoeken te zoeken. Om het de lezers wat te vergemakkelijken, hebben we in fig. 5 een deel van de bol overgetekend.

Na ijverig speuren zijn er twee plaatsen te vinden, waar in een punt vijf staven bij elkaar komen en wel in de punten F en G. Kijk maar goed. Dit zijn juist de punten waar knikken voorkomen in de overigens vloeiende lijnenbundels.



Figuur 6.

Maar er zouden in totaal twaalf van zulke punten moeten zijn!

Waar zijn de andere tien?

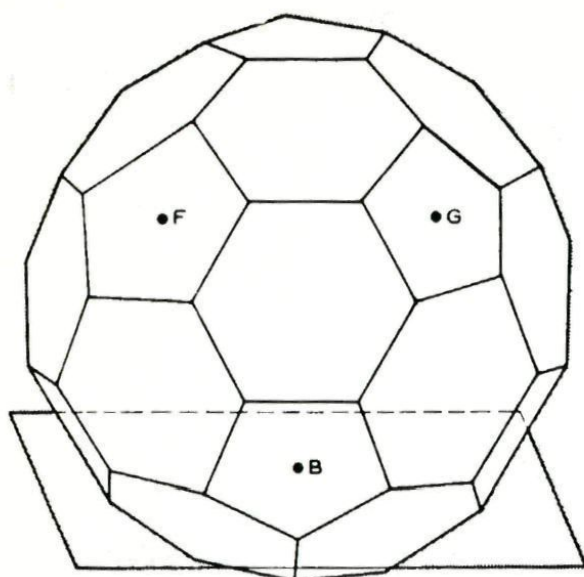
De uit F en G wegvloeiende lijnbundels wijzen ons de weg.

Vooreerst het punt in de top van de bol; dan diametraal aan de onderkant en dus hier niet aanwezig.

Verder nog drie punten, op gelijke hoogte gelegen als F en G, aan de achterkant en dus voor de lezer, onzichtbaar. Wij, die het genoeg hadden om de bol heen te kunnen lopen, hebben ze gezien. Tenslotte nog vijf van zulke punten op de grondcirkel. Punt B is er één van.

Driekwart bol met elf navels

Omdat de vijfhoeken de regelmaat in het lijnenpatroon verstoren, is de bol juist ter hoogte van B afgekapt. Het stuk van de bol dat weggelaten is, komt dus overeen met het gedeelte boven de boog FG. Punten zoals F, G en B zijn hoekpunten van het oorspronkelijke 20-vlak, waaruit de



Figuur 7.

koepel uiteindelijk door een ingewikkelde omvorming, ontstaan is. Van de 20 driehoeken zijn er dan dus slechts 15 overgebleven, waarvan BFG er één is. Het bouwwerk is dus een $\frac{3}{4}$ bol, waaraan B, F G en nog negen andere punten de navels zijn. In die punten komen alle lijnen samen.

De verdere verdeling

De originele ribbe van het 20-vlak FG is vanuit het middelpunt M, geprojecteerd op de omgeschreven bol. Op die manier ontstaat boog FG (fig. 6). Deze boog is, zoals in figuur 6 is getekend, in 16 gelijke delen verdeeld. Dit proces wordt herhaald voor de andere ribben. De koepel is dus opgebouwd uit 15 gelijke secties van het type BFG. De verbindingslijnen van de midden verdelen deze sectie weer in vier delen, waarvan er weer drie

congruent zijn. Sectie NOP is gelijkzijdig, de overige drie gelijkbenig.

De hele koepel is zodoende opgebouwd uit 15 gelijkzijdige secties en 45 gelijkbenige.

Het totaal aantal driehoeken per sectie BFG is:

$$1 + 3 + 5 + \dots + 29 + 31 = 256.$$

Bij elkaar hebben de 15 secties totaal $15 \times 256 = 3840$ driehoeken.

Het totaal aantal staven komt dan op 5800, waarvan er 80 langs de onderrand lopen. Probeer dat maar eens na te rekenen! Om een beetje te helpen: elke driehoek heeft telkens drie stangen, maar elke stang behoort tot twee driehoeken, behalve de stangen langs de onderrand.

Samenvattend kunnen we stellen dat de bol van Montreal een fantasierijke variatie is op het normale regelmatige 20-vlak. De vijfhoeken spelen daarbij een zeer bijzondere rol en het zijn er bij een bol altijd twaalf. In het eenvoudige geval van een voetbal (fig. 7) zijn het er ook twaalf. En zo is er niet zo heel veel verschil tussen de duizenden voetballen die over de hele wereld rollen en die ene superbol aan de St. Lawrence rivier in Canada. ■

De driehoek van Pascal



○○ De grote denker, wis- en natuurkunde Pascal publiceerde in een van zijn werken zijn beroemde *getallendriehoek*.

Waar gaat het om?

Wel, iedereen kent de bekende formule:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Vaak wordt daarbij het dubbelproduct vergeten. Men beweert dan:

$(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Maar dat is niet juist. We kunnen toch niet stellen:

$$(7 + 3)^2 = 7^2 + 3^2?$$

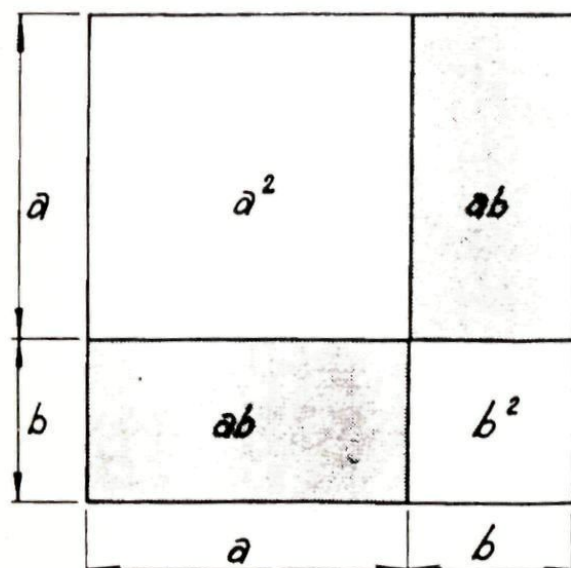
Als we schrijven:

$$(7 + 3)^2 = 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot 3 + 3^2$$

is alles oké. We hebben geprobeerd in figuur 1 deze formule met een figuur te bewijzen.

$(a + b)^2$ stelt dan de oppervlakte van een vierkant voor, met zijden $(a + b)$. We kunnen de figuur dan opsplitsen in twee vierkanten a^2 en b^2 , en twee rechthoeken, ieder groot ab .

Zo kunnen we ook $(a + b)^1$ heel simpel op een rechte lijn verbeelden (fig. 2).



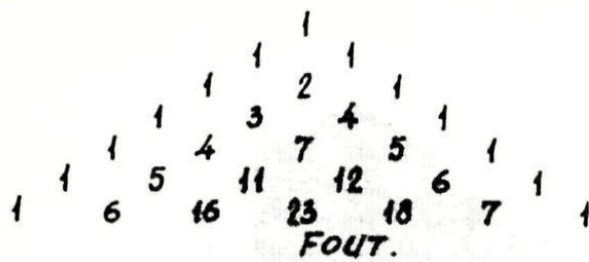
Figuur 1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

De ruimte in

Wat zou de uitkomst voor $(a + b)^3$ zijn? Wel, dat moet te verbeelden zijn door het volume van een kubus met ribben $(a + b)$. Als we die kubus gaan uitpakken, blijken er acht blokken in te zitten (fig. 3). Twee kubussen a^3 en b^3 , drie blokken van het type a^2b en



Figuur 2. $(a+b)^1 = a+b$.



Figuur 5. Foutendriehoek.

Als we één fout in deze kerstboom maken, krijgen we een hele driehoek van fouten in de figuur (fig. 5).

Zo werkt nu een eenmaal gemaakte fout door in alles wat we daarna ondernemen!

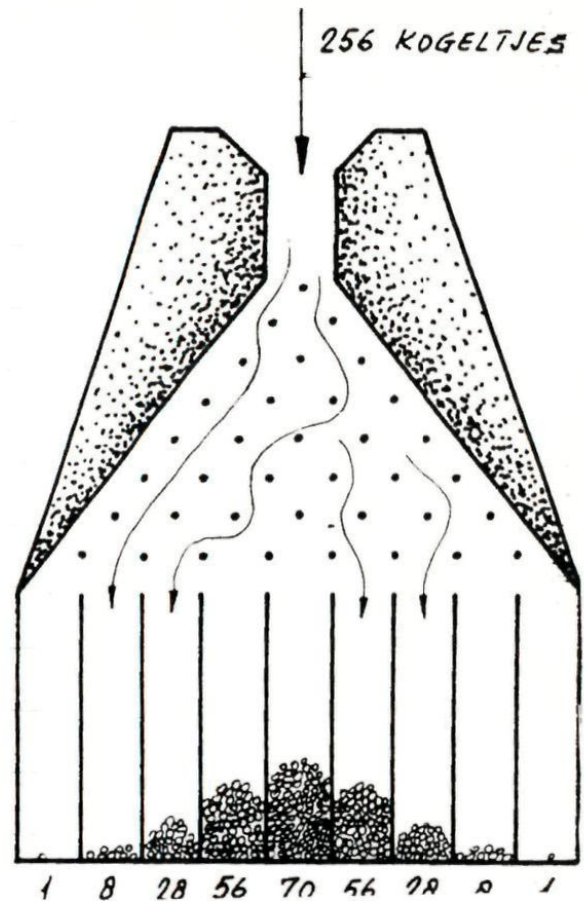
Het bord van Galton

In de moderne waarschijnlijkheidsberekening komen we de driehoek van Pascal nog eens tegen.

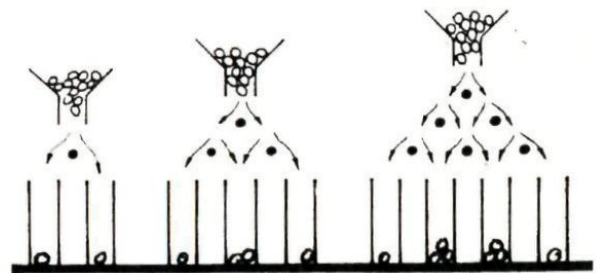
In figuur 6 staat een verticaal bord in de vorm van een driehoek, bezet met spijkertjes, op regelmatige afstanden.

De bovenste rij heeft één spijkertje, de volgende twee, dan drie enz. Door een gleuf erboven valt een knikkertje of fietskogeltje. Dat belandt tenslotte na botsen op de bovenste pin en vervolgens op nog zeven willekeurige andere in een bakje onderaan. Wat ons interesseert is de vraag: hoeveel kogeltjes zullen er in elk bakje terechtkomen?

De waarschijnlijkste verdeling is die volgens de driehoek van Pascal. Bij twee bakjes krijgen we de verhouding 1:1 (fig. 7), bij drie



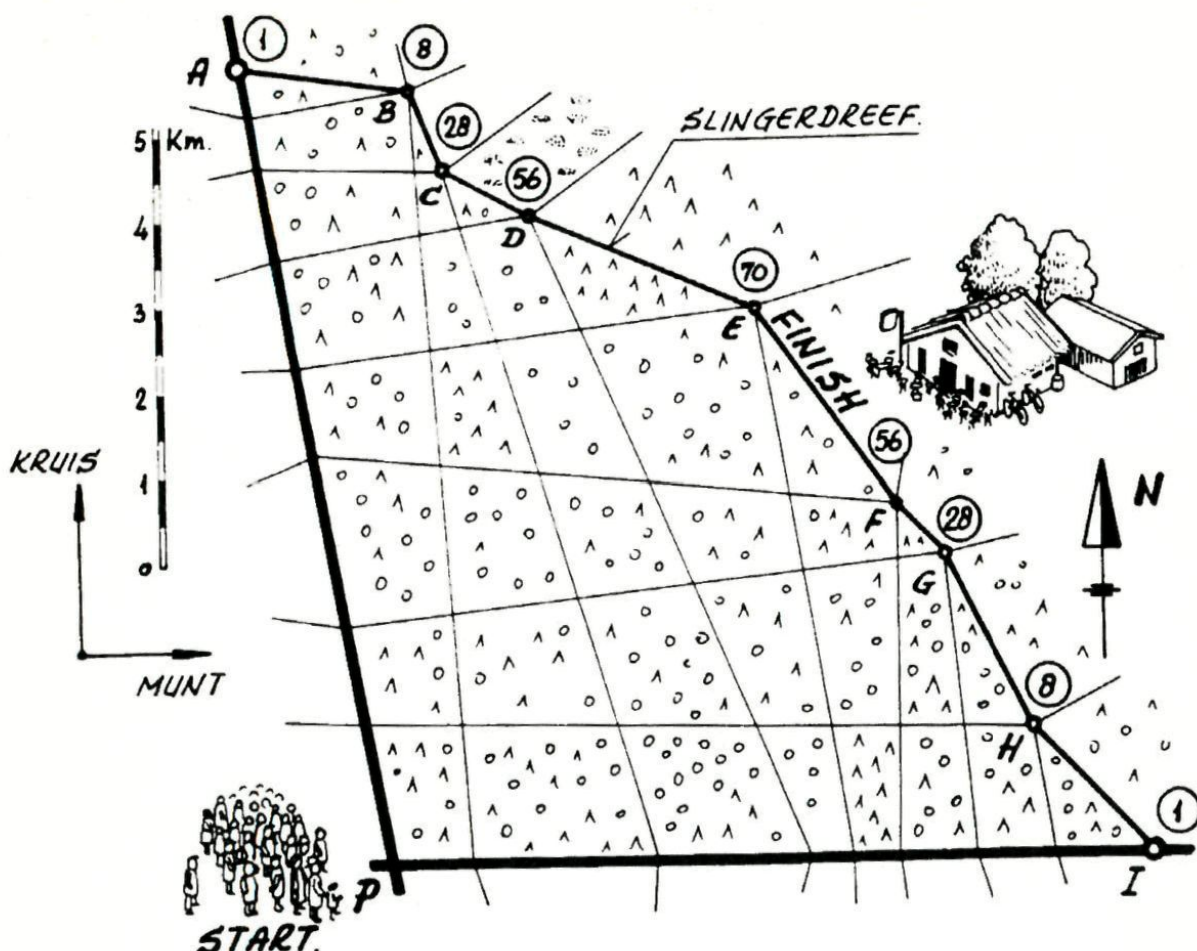
Figuur 6. Bord met trechter, spijkertjes en potjes volgens Galton



Figuur 7. Verdeling bij 2, 3 en 4 eindpunten.

bakjes wordt dat 1:2:1, bij vier 1:3:3:1 enz.

Probeer zelf maar eens zo'n bord te fabriceren en experimenteer daar maar mee.



Figuur 8. Kaart voor de boswandeling.

Een boswandeling

Bij ons hebben we de wandelvereniging 'Op Goed Geluk' en die heeft laatst voor haar 256 leden een wandeling georganiseerd in het Geersbroekse bos.

Een deel van dat bos staat in fig. 8. Elke wandelaar trekt individueel dat bos in; de start is in P. Elke deelnemer krijgt bij vertrek een munt en werpt die op. De uitkomst kan zijn 'kruis' of 'munt'.

Bij kruis dient vertrokken te worden in noordelijke richting tot aan het volgende kruispunt, bij munt echter in oostelijke richting. Bij elk volgende kruispunt moet

evenzo gehandeld worden.

Zo eindigt tenslotte de trip voor iedereen op de Slingerdreef.

Bij zo'n eindpunt wordt koffie geserveerd.

De vraag is: hoeveel kopjes moeten er bij elk punt A, B, C enz. worden klaargezet?

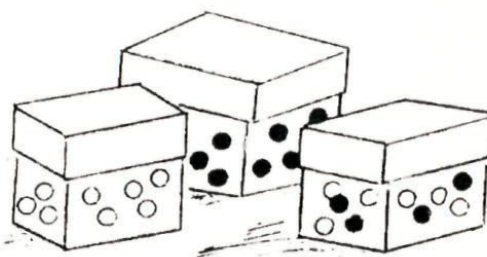
De waarschijnlijkste verdeling is: bij A één kopje, bij B acht kopjes, bij C 28 kopjes enz. Bij A en I komt er maar één aan, bij E is het het drukst.

Het is de getallenrij 1-8-28-56-70-56-28-8-1 dat samen precies 256! En dat is dan de negende rij van de driehoek van Pascal! ■

Waar of niet-waar?

○○ In drie doosjes zitten zwarte en/of witte balletjes. In één ervan alleen zwarte, in een andere alleen witte en in de derde zwarte en witte door elkaar. Op elk doosje staan aanduidingen. Maar elk daarvan deugt niet.

Je kiest nu een doosje uit en haalt, zonder te kijken er één balletje uit. Dat blijkt zwart te zijn. Maar dan weet je nu ook precies wat er in elk doosje zit!



Oplossing

Stel we halen uit het linker doosje (zonder te kijken) één balletje. We zien achteraf dat de kleur wit is. Maar op het doosje staat dat hte enkel uit witte zou bestaan en verder weten wij dat die aanduiding vals is. Dan moet het linker doosje dus witte en zwarte door elkaar

bevatten.

Maar dan zal het middelste doosje dus enkel witten hebben en het rechtste enkel zwarte.

Probeer nu zelf maar, uitgaande van de diverse doosjes, een soortgelijke redenering op te zetten. Er zijn totaal zes gevallen te onderscheiden!

Loop die allemaal eens na. ■

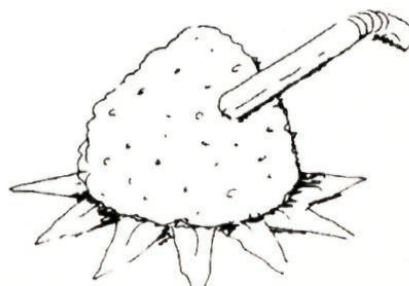
Waar of niet-waar?

○○ In een bak zit 100 kg aardbeien. Een analyse geeft aan dat ze voor 99% uit water bestaan. Het produkt wordt ingedroogd tot de massa is teruggelopen tot 50 kg. Het watergehalte is nu 98%.

Oplossing

In de bak zit 100 kg aardbeien, waarvan 99 kg water en 1 kg vaste stof.

We gaan nu indrogen tot 50 kg. Dan hebben we nog steeds 1 kg vaste stof en dus nog 49 kg water. Op de nu totale 50 kg hebben we dan 49 kg water ofwel 98%. ■



Waar of niet-waar?

○○ Een Japanse autofabrikant brengt een verbetering aan in het ontstekingsmechanisme waardoor het brandstofverbruik 40% kan dalen.

Inmiddels ontwikkelt een oliefirma een benzine die 35% besparing kan geven. Daarnaast is een constructiebedrijf in de weer om een patent te verwerven op glijlagers die 25% brandstofvermindering kunnen geven. Dat zou betekenen dat als deze firma's zouden samenwerken er 100% besparing uit de bus zou komen en eindelijk het perpetuummobile werkelijkheid wordt. Rijden voor niets en niemandal!



Oplossing

40% + 35% + 25% is inderdaad 100%.

Maar de redenering is fout.

Bij 40% besparing heb je nog maar 60/100 deel van de oorspronkelijke hoeveelheid nodig. Bij weer 35% besparing nog maar 65/100 deel

daar weer van en ten slotte bij opnieuw 25% besparing weer 75/100 deel daarvan. Uiteindelijk dus $0,60 \times 0,65 \times 0,75$ of 0,29 van de oorspronkelijke hoeveelheid of 29% ofwel totaal 71% besparing. Je moet de verhoudingen vermenigvuldigen en niet optellen, daar zit 'm de kneep. ■

Waar of niet-waar?

○○ We verheffen x steeds weer tot de macht x en vragen deze vergelijking op te lossen. Bepaal dus x .

Het lijkt een fiks karwei. Wij beweren dat $x = \sqrt{2}$ en hebben daarvoor de volgende eenvoudige redenering. Ga maar na dat je de vergelijking ook kunt schrijven als $x^2 = 2$ en dus is de oplossing $x = \sqrt{2}$. We beweren dus dat als je $\sqrt{2}$ steeds verheft tot de macht $\sqrt{2}$ er een limietwaarde 2 verschijnt. Ter vergelijking lijkt het verstandig eens na te gaan wat 2^{2^3} voorstelt.

Oplossing

De redenering is fout. Als je 2^2 opschrijft, zijn beide cijfers 2 niet gelijkwaardig. De eerste is grondtal, de tweede exponent.

Wat bedoel je eigenlijk met 2^{2^3} ?

Je zou het kunnen lezen als 2^8 of 256 of als 4^3 , maar dat geeft 64. Dat maakt dus nogal verschil. Je zult dus met haken moeten aangeven wat je precies bedoelt. ■

Waar of niet-waar?

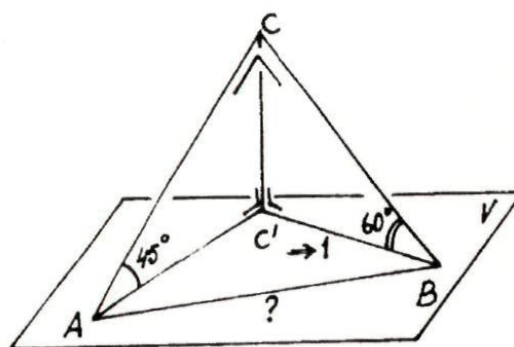
○○ Van een rechthoekige driehoek ligt de schuine zijde in vlak V. Rechthoekszijde AC maakt een hoek van 45° met V en de ander BC een hoek van 60° .

Als gegeven is: $BC' = 1$, bereken dan AB.

Oplossing: $BC' = 1$ dan $BC = 2$ en $CC' = \sqrt{3}$ en dan $AC = \sqrt{6}$.

Ten slotte: $AB = 6 + 4 = 10$ of $AB = \sqrt{10}$.

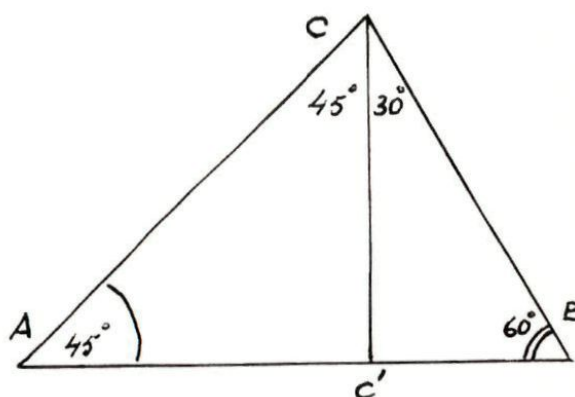
Knip de driehoeken $AC'C$ en $BC'C$ op schaal uit en zet ze tegen elkaar, zoals in de tekening. ...



Oplossing

Het is allemaal aardig uitgerekend en er zitten geen rekenfouten in, en ... toch klopt er niets van! Als je de driehoeken $AC'C$ en $BC'C$ in elkaars verlengde legt, maken de zijde AC en BC de grootste hoek met elkaar en wel $45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$. Door draaiing om CC' kan die hoek nooit 90° worden. Er zit dus een tegenstrijdigheid in de gegevens en dan lopen de zaken altijd mis!

Je kunt het ook anders bekijken. Volgens het bovenstaande is $BC' = 1$ en $CC' = \sqrt{3}$ en dus AC' ook.



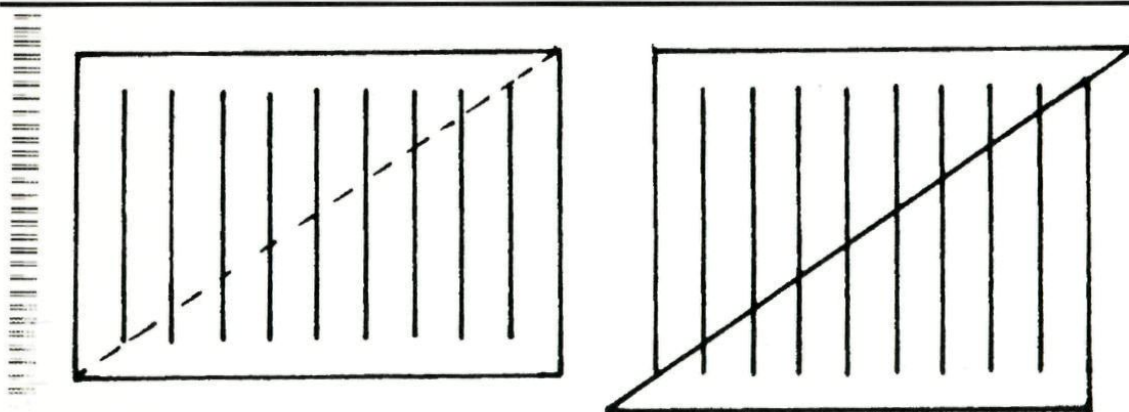
Maar in driehoek ABC moet $AB < AC' + BC'$.

Vul maar in: $\sqrt{10} < \sqrt{3} + 1$ of $3,16 < 1,73 + 1$.

Nu daar klopt dan niets van. ■

Waar of niet-waar?

○○ Een kaart met negen strepen wordt volgens een diagonaal doorgeknipt. We verschuiven vervolgens de stukken een bandbreedte langs elkaar. We tellen weer de strepen. Het zijn er nu nog maar acht! Waar is de negende gebleven? Als je het uit papier naknipt, kom je er wel achter.



Oplossing

Van de negen strepen zijn er nu nog maar acht over, maar ... ze zijn allemaal wel een stukje langer geworden en wel een $1/8$ ste deel

van de oorspronkelijke streep lengte. En daar zit dan de negende. ■

Waar of niet-waar?

○○ We nemen zeven stukken papier. Een aantal daarvan worden in acht stukken geknipt. Vervolgens worden enige hiervan weer in acht delen verknipt.

Vervolgens tellen we het totaal aantal papiersnippers dat dan op tafel ligt. We tellen er 83. Kan dat correct zijn?

Oplossing

We beginnen met 7 stuks. We verknippen er n in 8 delen. Dan hebben we $7 - n + 8n$ of $7 + 7n$ stukken. Daarvan gaan we weer m stukken in 8 delen verknippen,

waardoor we er dan $7 + 7n - m + 8m$ of $7 + 7n + 7m$ krijgen of $7(1 + n + m)$.

Maar dat betekent dat het eind-aantal door 7 deelbaar moet zijn en dat is 83 niet, dus "niet-waar". ■

* Bovenstaande problemen hebben in voorafgaande nummers gestaan.

De band van Möbius

OO De wis- en sterrenkundige August Möbius was directeur van de sterrenwacht in Leipzig en professor in de astronomie. Möbius is beroemd geworden door een ontdekking die hij in 1858 deed. Het lijkt iets ongelooflijk simpels; in werkelijkheid is dit het begin van een heel nieuw stuk wiskunde.

Zijn ontdekking staat bekend als 'de band van Möbius'. Neem een strook papier en plak die dicht tot een cilinder (fig. 1). Zo'n band heeft twee kanten, één binnen- en een buitenzijde en verder twee randen, boven en onder, die niet met elkaar in verbinding staan. Je kunt alleen van de ene kant op de andere komen door over één van beide randen te kruipen. Men zou zich platte wezens kunnen voorstellen die in twee groepen aan beide zijden wonen,

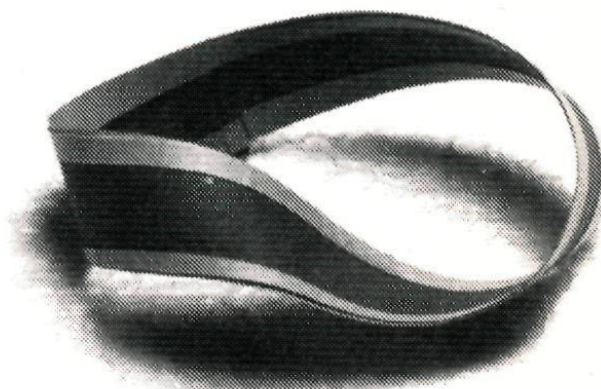
zonder elkaar ooit te ontmoeten. Door een heel eenvoudige handeling kunnen we hen uit hun isolement verlossen.

Knip de strook open en plak de einden nu averechts aan elkaar (fig. 2). Zoiets heet 'de band van Möbius'.

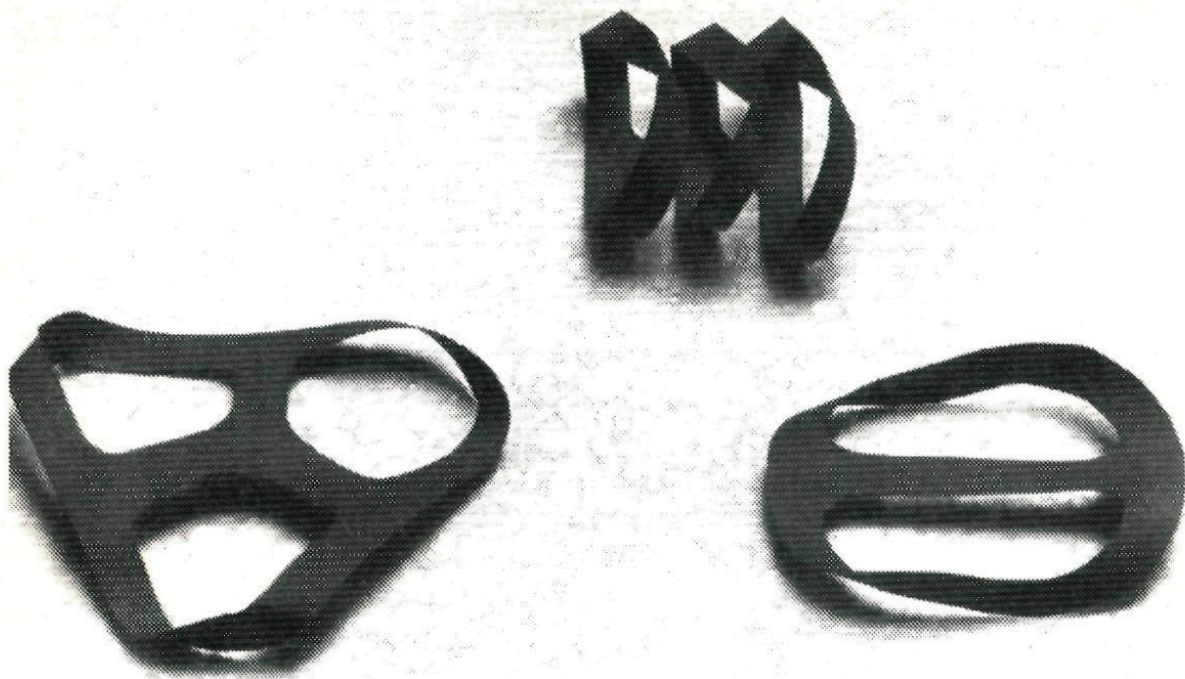
De rand op de band is de monorail in Möbiusland, die ieder heel comfortabel (geen geklauter over randen) brengt van binnenband naar buitenband. Eigenlijk is er geen 'binnen' of 'buiten' meer.



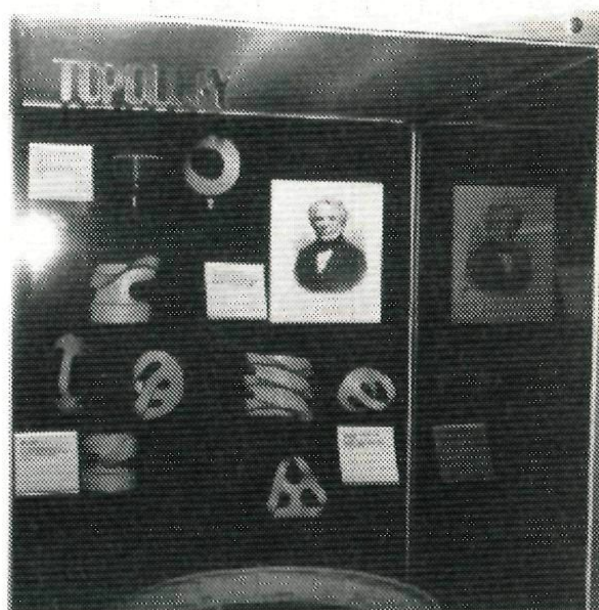
Figuur 1. Cilindrische band met twee kanten en twee randen.



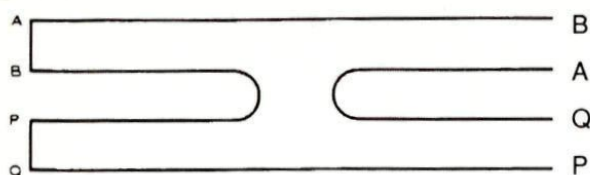
Figuur 2. Band van Möbius met één kant en één rand.



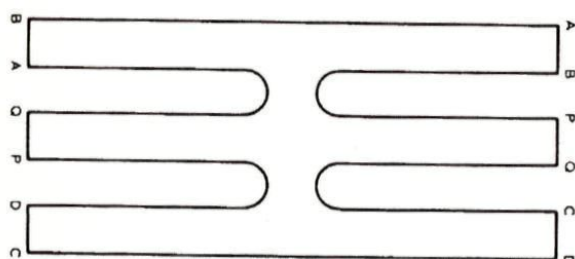
De ring van Möbius is een 'eenzijdige oppervlak'. De zaak wordt nog gekker als we naar de randen kijken ... er is maar één rand. Ga dat zelf maar na.



Figuur 3. Vitrine Science-museum in Londen gewijd aan het werk van Möbius.



Figuur 4. Dubbele tweetand.



Figuur 5. Dubbele drietand.

Variaties

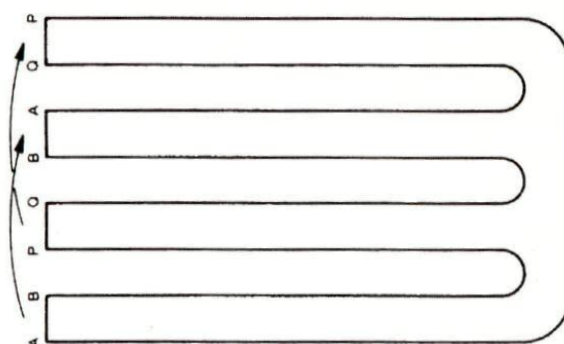
In het Science-museum in Londen is op de wiskundige afdeling een vitrine aan het aan het werk van Möbius gewijd (fig. 3). Door wat knippen en plakken zijn een paar van de daar aangegeven variaties na te maken. Door dat zelf te doen is het mogelijk de merkwaardige eigenschap van dergelijke structuren te ervaren.

We letten daarbij op twee zaken:

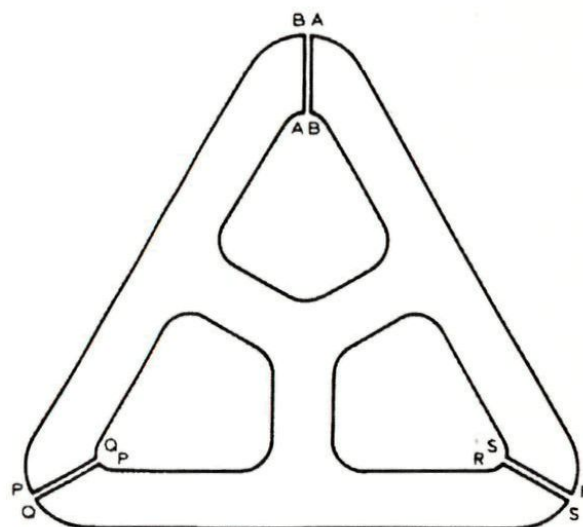
1. we hoeven niet over de rand om overal te kunnen komen;
2. er is maar één rand.

In figuur 4 staat de uitslag van de dubbele tweetand. Plak de bovenste stroken gekruisd aan elkaar, zodat A op A en B op B komen. Doe beneden hetzelfde. Hoe is het met de beide eigenschappen gesteld? Ga dat eens na.

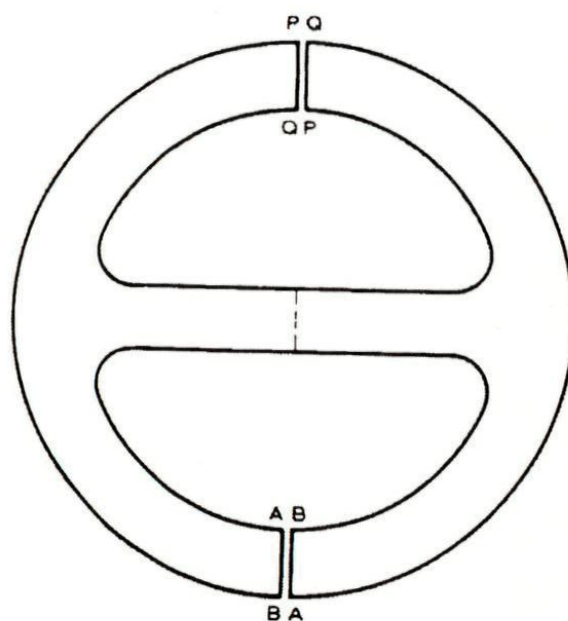
In figuur 5 is dit patroon uitgebreid tot een drietand. Weer gelden beide eigenschappen.



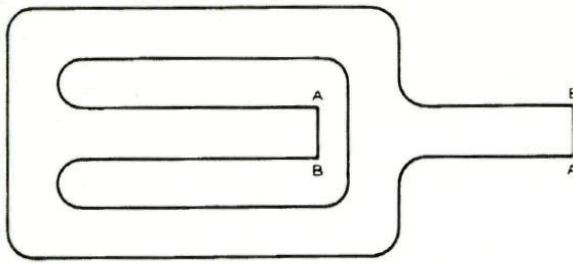
Figuur 6. Viertand.



Figuur 7. Driehoeksband.



Figuur 8. Ronde band met middel-lijn.



Figuur 9. Steelpannetje.

Probeer ook de viertand van figuur 6 te maken. Plak gelijke letters weer tegen elkaar.

Interessant is de driehoekband van figuur 7. Ook die heeft weer één vlak en één rand.

Maak dan de ronde band met middellijn van figuur 8. Ook hier

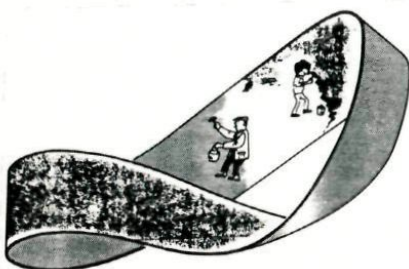
weer één rand. Knip nu ook de middellijn bij de stippellijn door en plak de einden weer averechts.

Wat gebeurt er nu? Ten slotte het steelpannetje van figuur 9.

Probeer zelf andere structuren uit en onderzoek de aard ervan. Nog één merkwaardigheid aan de ring van Möbius zelf. Als je de cilinder van figuur 1 langs de centrale lijn in tweeën knipt, krijg je twee afzonderlijke ringen. Probeer nu van tevoren te voorspellen wat er met de ring van Möbius zal gebeuren als die ook langs zo'n lijn doorknipt. Zullen er twee randen ontstaan of weer één??? ■

Er waren eens twee mannen die een band van Möbius moesten schilderen.

De ene begon ergens met rode verf en de andere aan de achterkant met zwarte verf. Ze werkten gewoon verder in tegengestelde richting en kwamen elkaar ten slotte aan dezelfde kant weer tegen.

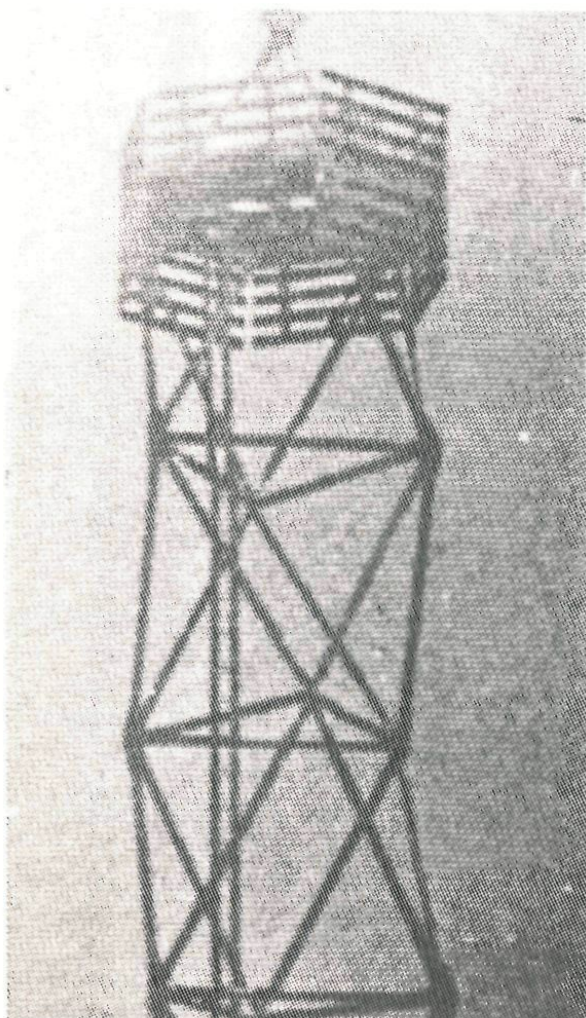


Toren recht, toren krom

○○ Bij een zwerftocht in het niemandsland tussen Israël en Egypte, troffen we aan de rand van de Sinaiwoestijn merkwaardige uitkijktorens aan (fig.1).

Zo zagen we er een opdoemen in de nevel van de morgen. Ze zijn opgebouwd uit allemaal even lange buizen, ofwel een stapeling van gelijkzijdige driehoeken.

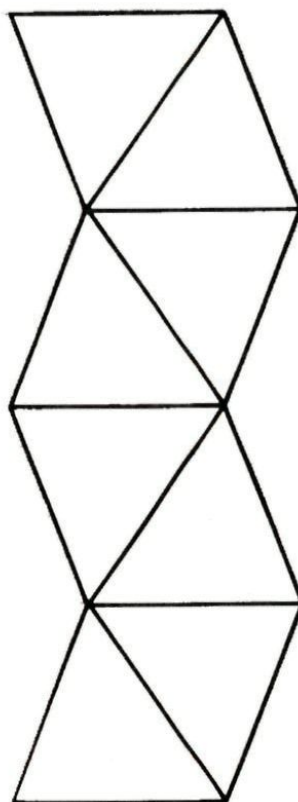
Het merkwaardige schuilt vooral hierin, dat men de toren vanuit een bepaald punt 'gegolfd' ziet (fig. 2) en vanuit een ander punt 'recht' (fig. 3). Probeer je de toren eens voor te stellen en onderzoek eens hoe deze toren is opgebouwd. De



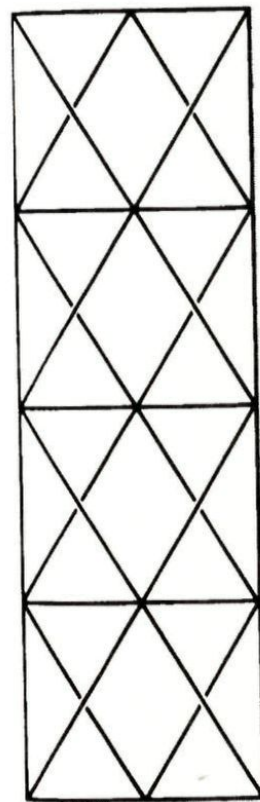
Figuur 1. Uitkijktoren

beide aanzichten van figuur 2 en 3 zijn precies op schaal getekend. Hoeveel graden moet je om de toren heenlopen om de toren van de golftoestand in de rechte stand te zien te krijgen? Of anders gezegd: hoe vaak zie je de toren gegolfd, als je er één keer omheen loopt?

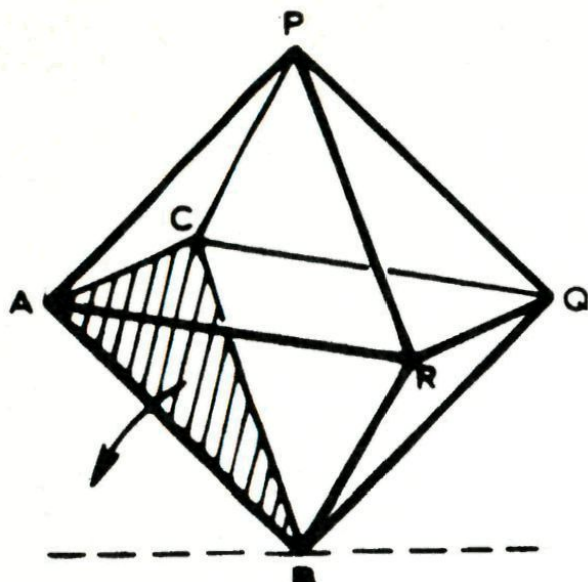
Nog één tip: de ware lengte van de



*Figuur 2.
Gegolfd*



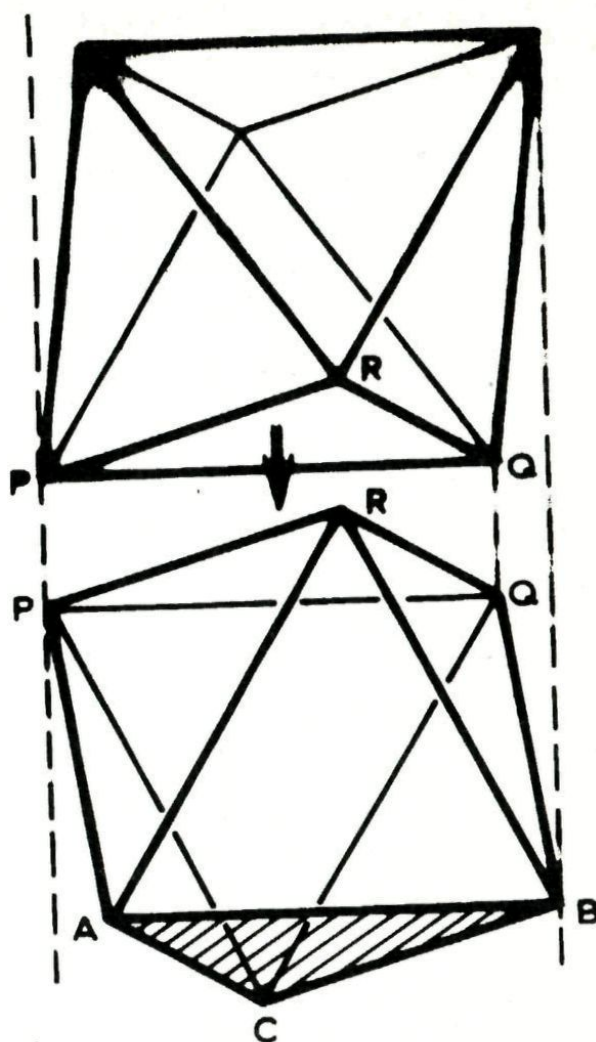
*Figuur 3.
Recht*



Figuur 4. Regelmatig achtvlak
stangen is juist gelijk aan de breedte van de toren in de rechte stand (fig. 3).

Structuur

Elke etage bestaat uit een regelmatig achtvlak (fig. 4), dat zo gedraaid is dat één gelijkzijdige driehoek grondvlak wordt en de tegenoverliggende bovenzvlak. De toren wordt dan verder opgebouwd door dergelijke achtvlakken te stapelen met telkens twee driehoeken tegen elkaar. Het is het beste zelf een achtvlak uit karton te plakken. Je krijgt dan een beter inzicht in de opbouw.



Figuur 5. Stapeling van achtvlakken

Het is dan ook niet moeilijk in te zien dat per rotatie zes maal de golfstand en zes maal de rechte stand verschijnt. Je moet dus 30° om de toren heen lopen om van de ene stand in de andere te komen. ■

Stelling

'De cijfertoetsen 1 tot en met 9 op telefoontoestellen met druktoetsen staan in de rijen 1-2-3, 4-5-6 en 7-8-9 van boven naar beneden en op de zakrekenmachine andersom. Dit verschil voorkomt dat men probeert op te bellen met een zakrekenmachine en te rekenen op een telefoontoestel.'



Exponentiële groei

○ Exponentiële groei - je kent die term zeker al als een stukje wiskunde dat de dagbladen heeft veroverd. Waar doet hij je aan denken? Ik wed, aan bevolkingsaanwas en voedselproblemen, aan lucht- en waterverontreiniging.

Wat houdt dat eigenlijk in?

Bacteriën

Een bacterie op een voedingsbodem - 'Petrischaal' genaamd door hen die bacteriën kweken - deelt zich, laten we zeggen, één keer per uur door celdeling in tweeën. Nu zijn er twee bacteriën die zich op dezelfde wijze en in hetzelfde tempo voortplanten. En zo gaat het door.

Er zijn op uur

0 : 1 bacterie

1 : 2 bacteriën

2 : $2 \times 2 = 4$ bacteriën

3 : $2 \times 2 \times 2 = 8$ bacteriën

4 : $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ bacteriën

Je begrijpt direct het nut van machten en exponenten: er zijn op uur n : $2 \times 2 \times \dots \times 2$ (n factoren) = 2^n bacteriën.

Hoeveel is dit bijvoorbeeld voor $n = 80$? Als je maar een rond antwoord wilt hebben, dus niet nauwkeurig, op één bacterie af, kun je het best als volgt redeneren:

$$2^5 = 32$$

$$2^{10} = 2^5 \times 2^5 = 1024 \sim 1000 = 10^3,$$

$$2^{20} = 2^{10} \times 2^{10} \sim 10^3 \times 10^3 = 10^6,$$

$$2^{40} = 2^{20} \times 2^{20} \sim 10^6 \times 10^6 = 10^{12},$$

$$2^{80} = 2^{40} \times 2^{40} \sim 10^{12} \times 10^{12} = 10^{24},$$

en dat is een één met 24 nullen.

Stel zo'n bacterie heeft een middel-

lijn van een honderdste millimeter:

$$100 \times 100 = 10\,000 = 10^4$$

overdekken samen dan een vierkante millimeter, $10^6 \times 10^4 = 10^{10}$

een vierkante meter, $10^6 \times 10^{10} =$

10^{16} een vierkante kilometer; voor

't geheel dat na 80 uren door celdeling is ontstaan, heb je dus

10^8 vierkante kilometer nodig, een

terrein van 10 000 km lang en

10 000 km breed, dus een flink

stuk van de aardbol.

Natuurlijk is het al eerder spaak

gelopen: toen de rand van de

Petrischaal werd bereikt, na 24

uur, of door allerlei omstandigheden veel eerder.

Maar in 't begin, met genoeg ruimte en voedsel voor allen, was er wel degelijk ongeremde 'exponentiële groei'.

Waarom exponentieel? Kijk eens terug naar de formule met de n : op uur n zijn er 2^n bacteriën.

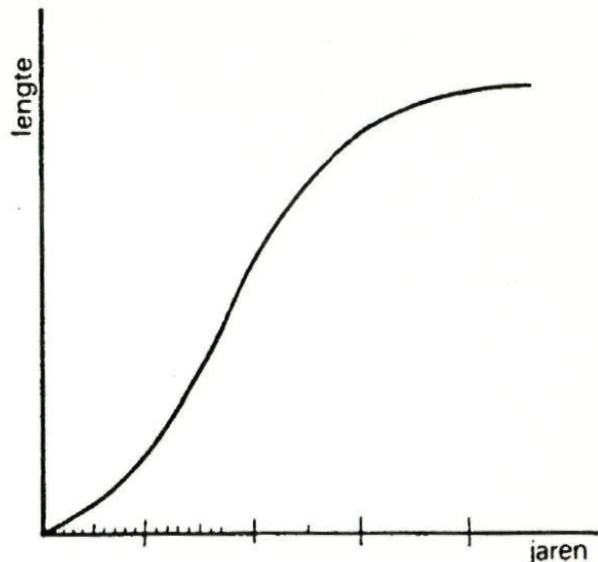
Het aantal bacteriën in de groeiende bevolking hangt af van n en die staat in de exponent.

Er bestaan natuurlijk andere groeiwetten.

In het natuurlijke groeiverloop van

mensen en dieren bestaan er hele stukken van lineaire groei, d.w.z. waar de aanwas evenredig met de tijd is: na n dagen (of jaren) is de lengte of het gewicht $a + bn$.

In figuur 1 kun je na de aanloop een periode aan lineaire groei onderkennen, gekenmerkt door het verloop van de grafiek. Je ziet daar duidelijk het toenemen van lengte met eenzelfde stuk in dezelfde tijd, terwijl na deze periode van lineaire groei de groei snel minder wordt en tenslotte tot stilstand komt.



Figuur 1.

Samengestelde interest

De tegenstelling van lineaire en exponentiële groei is vanouds bekend. Als je een kapitaal van f 100,- hebt belegd tegen 5% jaarlijkse rente, maar de rente niet opnieuw belegt dan is het na

0 jaar: f 100,-

1 jaar: f 105,-

2 jaar: f 110,-

.

.

n jaar: f $100,- + 5n$.

Het kapitaal groeit in lineaire afhankelijkheid van de tijd n .

Wie handig is, belegt echter zijn rente opnieuw (tenzij hij genoodzaakt is van die rente te leven). De f 105,- na 1 jaar verloop dragen opnieuw 5% rente, die dus niet alleen door de 100 oorspronkelijke guldens, maar ook door de 5 nieuwe wordt gekweekt. Het lijkt een onbeduidend verschil, maar het telt aan.

Hoe bereken je zoiets het handigste?

Uit f 100,- zijn na 1 jaar f 105,- geworden, of - eenvoudiger - iedere gulden is met 1,05 vermenigvuldigd in een jaar tijd.

En dit blijft zo: in een jaar tijd vermenigvuldigt een gulden zichzelf met 1,05. Het doet ons denken aan de groeiende bacteriebevolking. Die deed het met een factor 2 in een uur. Het geld doet het langzamer, met een factor 1,05 in een jaar. Maar in principe is het hetzelfde. Na

0 jaar: f 1,-

1 jaar: f 1,05

2 jaar: f $1,05 \times 1,05 = 1,052$

.

.

n jaar: $(1,05)^n$.

Groei volgens samengestelde

interest is dus ook exponentieel.

We krijgen een beter overzicht als we ons afvragen in welk tijdvak

het oorspronkelijke kapitaal is verdubbeld. Dus, voor welke n is $(1,05)^n = 2$?

Zo iets rekent men met logaritmen uit. Ik heb de uitkomsten hier neergezet voor verschillende rentepercentages.

rente	verdubbeling na ongeveer jaar
1%	70
2%	35
3%	24
4%	18
5%	14
10%	7

Ruw gezegd: als je bij gewoon interest verdubbeling van het kapitaal in d jaren zou verwachten, is het bij samengestelde interest $0,7 d$ jaren.

Het een keer verdubbelen gaat met een factor 0,7 vlugger. (Maar let wel, dit klopt alleen voor 'kleine' waarden van interest, zoals in de tabel boven bijeengebracht.)

Tegen 5% is het kapitaal na
jaar 14 met 2 vermenigvuldigd
jaar 28 met 4 vermenigvuldigd
jaar 42 met 8 vermenigvuldigd.
Een gulden, in de tijd van Claudius Civilis tegen 5% samengestelde interest belegd, zou thans uitgegroeid zijn tot een bedrag groter dan de jaarlijkse Nederlandse rijksbegroting. Natuurlijk zijn er ook voor de exponentiële financiële groei grenzen afgepaald.

Afremming van de groei

Onbelemmerde groei is exponen-

tieel. Dit was met de groei van de menselijke bevolking zo in 't verleden en het is nu nog zo.

Alleen was vroeger het groei percentage, voornamelijk tengevolge van ziekten, veel kleiner dan nu.

Van 1600 tot 1800 had de mensheid 200 jaar voor een verdubbeling nodig. In Zuid-Amerika is de groei thans per jaar 3%, en dit betekent verdubbeling in een kwarteeuw; in de rijke landen gaat het met 0,8% per jaar, hetgeen verdubbeling in 90 jaren betekent. Het wereld-energieverbruik groeit, met 4% per jaar - verdubbeling na 18 jaren. Maar alles kent een grens. Bij het exponentieel groeiende energieverbruik ligt die bij het opraken van de voorraad. Zolang voorraden onbeperkt zijn, gaat het exponentieel.

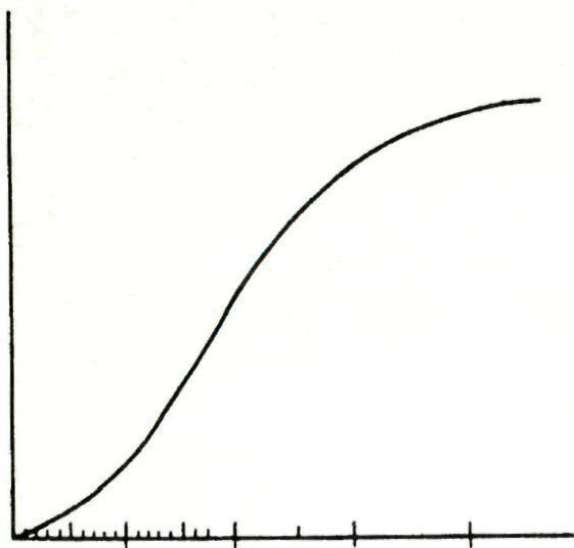
Maar met het plafond in zicht heerst een andere wet.

De exponentiële wet zegt dat de groei evenredig is met wat er al is. Maar volgens een verfijnd model komt er een groeiremming bij, omgekeerd evenredig met wat er nog te verteren valt. Het gevolg is een kromme, ook welbekend uit toepassingen van de wiskunde (fig. 2).

Natuurlijk zou de kromme, als er catastrofes komen, ook eens naar beneden kunnen gaan.

Exponentieel verval

Naast de exponentiële groei is er als tegenhanger, het exponentieel verval.



Figuur 2.

Van een radio-actieve stof vervalt per jaar een zekere kleine fractie, waarvoor straling wordt uitgezonden. De vervallende fractie is evenredig met wat er nog voer is. Als het met de hoeveelheid m begint en van het aanwezige elk jaar één duizendste vervalt, is er na

0 jaar: de hoeveelheid m
 1 jaar: de hoeveelheid $0,999 m$
 2 jaar: de hoeveelheid $(0,999)^2 m$

·
·
·

n jaar: de hoeveelheid $(0,999)^n m$.

Zoals daarstraks de verdubbelingstijd, interesseert ons hier de halveringstijd of, zoals men het ook noemt, de halve-waardetijd. In het onderhavige geval zou dit 700 jaren zijn. Radio-actieve stoffen hebben zeer uiteenlopende halveringstijden, van seconden tot miljoenen jaren.

De radio-actieve elementen gaan door verval in andere over, bijv. uranium in radium. In de uranium-ertsen is de verhouding uranium tot radium ongeveer 10 miljoen tot 3.

Het uranium vervalt dus $\frac{10}{1}$ miljoen keer zo langzaam als het radium ongeveer 1500 jaar en voor uranium 5000 miljoen jaren. ■

Goede volgorde

○○ Wat is groter $\sqrt[10]{10}$ of $\sqrt[3]{2}$? Kun je dat bepalen zonder gebruik te maken van je rekenmachine?

Wel, dan moet je de wortels een gelijke exponent geven. maak ervan $\sqrt[30]{10^3}$ tegenover $\sqrt[30]{2^{10}}$. Omdat $10^3 = 1000$ en $2^{10} = 1024$, is het nu wel bekeken.

Een soortgelijk probleem is:

Zet in goede volgorde:

2^{45} , 3^{36} , 4^{27} en 5^{18} .

als je alle exponenten door 9 deelt,

moet je dus vergelijken:

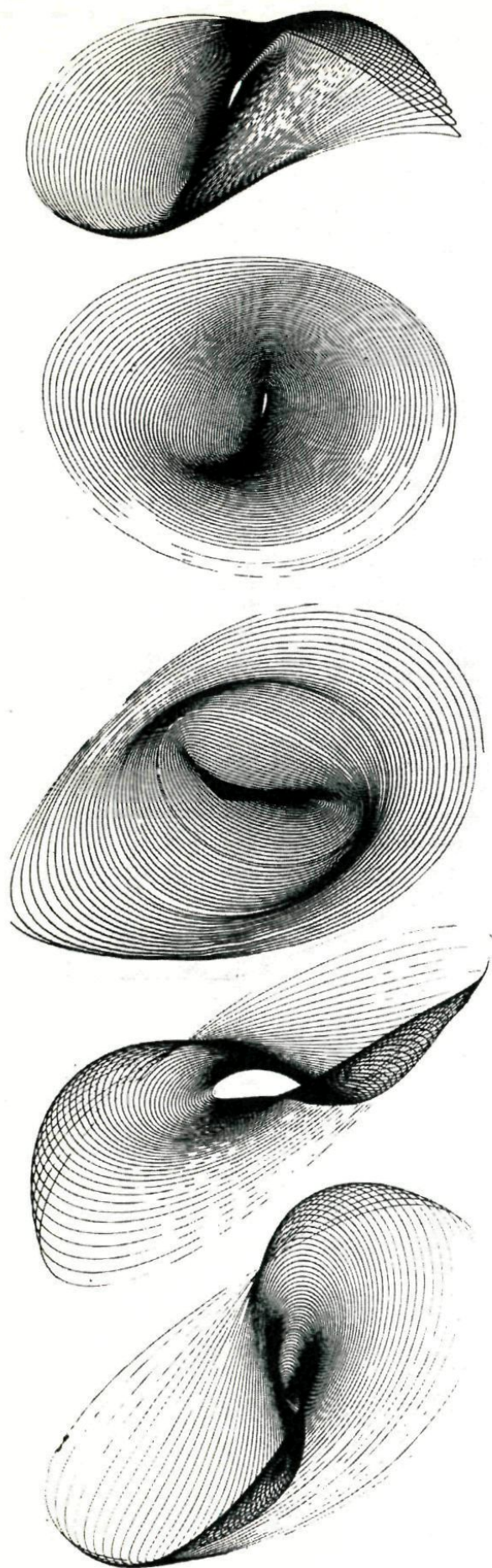
2^5 , 3^4 , 4^3 en 5 of

32 , 81 , 64 en 25 .

En daarmee is de volgorde bekeken .. zonder de hulp van de rekenmachine.

de volgorde is:

5^{18} , 2^{45} , 4^{27} en 3^{36} . ■



Figuur 2.

of eenvoudiger met twee aangepunte boutjes. Op de ring kantelt dan weer het eindblok van de slingerbalk om een middellijn van de ring die loodrecht op de eerste staat. Zorg dat de punten van de vier boutjes in één vlak komen. Laat de boutpunten in kommetjes draaien, anders vreet het materiaal bij de zware belasting kapot. Je zou daar ook boutjes met platte kop voor kunnen gebruiken, die je bij de kop wat inboort. Deze ophanging monteer je op een plank die je stevig vast moet zetten, aan het dak van de garage of een balk op zolder bijvoorbeeld.

De hoofdslinger maak je van een balk (4 x 4 cm), ongeveer 1 m lang. Onderaan komt dan het framework van de schrijftafel te hangen, bovenaan het dwarsbalkje voor de ophanging. Hoe je het frame moet maken, is gemakkelijk in de tekening af te lezen. De hoeken van het vierkante raam kunnen half ingezaagd worden en met triplex driehoekjes versterkt. Zet alles goed in de lijm en sla er nog wat spijkertjes bij.

Maak het schrijftafeltje van een stuk triplex (20 x 20 cm). Zorg dat de zaak stevig in elkaar zit.

Boor om de 2 cm gaatjes in het onderste deel van de slingerbalk. Als je een grote spijker in zo'n gat steekt, kan het hoofdgewicht op verschillende plaatsen worden vastgezet. Op die manier is de slingerlengte te veranderen en

tevens de slingertijd.

Het hoofdgewicht kan bestaan uit een paar stenen die je in een houten bakje op de balk kunt bevestigen. Zorg voor een massa van ongeveer 8 kg.

Onder het frame van de schrijftafel draai je een schroefboom in, waaraan de tweede slinger bevestigd wordt. Neem hier als massa een blik gevuld met zand of kiezelstenen. Zorg voor een massa van 1 of 2 kg.

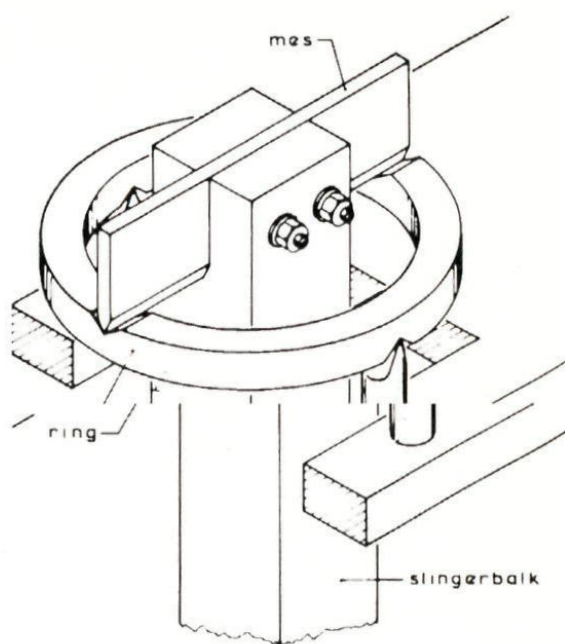
2. de schrijfarm

De schrijfarm heeft de vorm van een kruis, met een lange as van 60 cm. Aan het ene eind komt daarin een gat, waarin een viltstift klemmend past. Aan de andere kant monteer je een contra-gewicht, zo groot dat de arm vrijwel in balans is. De arm kan draaien om de punten van twee schroefjes aan de einden van het dwarslatje. De punten rusten op een tafelblad dat even hoog moet komen als de schrijftafel.

Het contra-gewicht moet ervoor zorgen dat de stift niet te hard op het schrijftafeltje drukt, anders is er te veel wrijving en komen de lussen te ver uit elkaar.

En nu tekenen

Als het timmerwerk klaar is, gaan we aan het tekenen beginnen. Bevestig een vierkant stuk glad papier met punaises of plakband op het tafeltje. Oefen wat om met je tekenmachine vertrouwd te raken.



Figuur 3.

Door de slingerlengten te veranderen ontstaan verschillende figuren. Begin bijvoorbeeld met het grote gewicht op het onderste gaatje. Geef dan het grote gewicht een zetje in de richting van de wijzer van de klok en het kleine gewicht juist in de andere richting. Even later plaats je de schrijfstift voorzichtig op het papier. De machine doet nu de rest.

Als de lussen te ver uit elkaar komen of de figuur bevalt je niet, zet je het hoofdgewicht een beetje hoger en je probeert opnieuw. Kleine verplaatsingen bij het onderste gewicht geven gladde figuren, zonder scherpe punten. Het onderste gewicht moet je zeker niet meer dan een hoek van 15°

laten uitzwaaien ten opzichte van de hoofdas. Laat ook beide slingers eens in dezelfde richting zwaaien. Welk verschil geeft dat?

Bij het stoppen van het slinger-effect moet je telkens eerst de schrijfstift weghalen en dan met

één hand het grote gewicht afremmen en met de andere het kleine. Je zult neiging hebben de hele zaak bij de balk te stoppen maar op die manier kun je de gevoelige ophanging gemakkelijk beschadigen.

Verskil wiskunde en natuurwetenschappen

○○ Zowel in de wiskunde als in de natuurwetenschappen zoeken we naar bewijzen, alleen de werkwijze is nogal verschillend.

In de wiskunde wordt naar exacte bewijzen gezocht. Dat betekent: voor eens en altijd, voor alle gevallen, die we kennen of in de toekomst nog zullen ontmoeten, geldt dat resultaat.

Bijvoorbeeld: het volume van elke kegel is $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ of elk getal is deelbaar door drie als de som der cijfers door drie deelbaar is.

In de natuurwetenschappen gaat dat heel anders. Als we stellen: bij een veer is de uitrekking evenredig met de uittrekkende kracht, dan bedoelen we: bij de tot dusver onderzochte veren geldt deze uitkomst ... bij benadering.

De natuurwetenschappen worden dan ook ten onrechte exacte wetenschappen genoemd. Alleen de wiskunde is dat. In alle andere vakken blijft het bij aanrommelen. Voor een wiskundige is er nog niets bewezen, ook al komt een bepaalde bewering in 1000 gevallen uit.

Een voorbeeld

Neem een tweeterm $991n^2 + 1$.

Vul daar achtereenvolgens $n = 1, 2, 3 \dots$ in. Doe het maar. De vraag is: zou de uitkomst ooit wel eens een kwadraat kunnen zijn?? Als je zo een halfuurtje bezig geweest bent, zeg je vast: nee ... nooit!

Ik kan het je nog sterker vertellen: als je 100 jaar door zou gaan met invullen en testen op een kwadraat, zou je nog geen gevonden hebben. Toch is er voor een wiskundige nog niets bewezen, en terecht, want ... kortgeleden gelukte het een snelle computer het kleinste gehele getal te vinden waarbij $999n^2 + 1$ wel een kwadraat oplevert.

Schrik niet, dat getal is:

$n = 12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,538\,767$. ■

Van cirkel naar rechte lijn

○○ In nummer 4 van deze jaargang stelt Paul van Veen in zijn bijdrage 'druppelkrommen', dat het niet zo eenvoudig is om een stangenconstructie te bedenken, waarbij een cirkelvormige beweging wordt omgezet in een rechtlijnige.

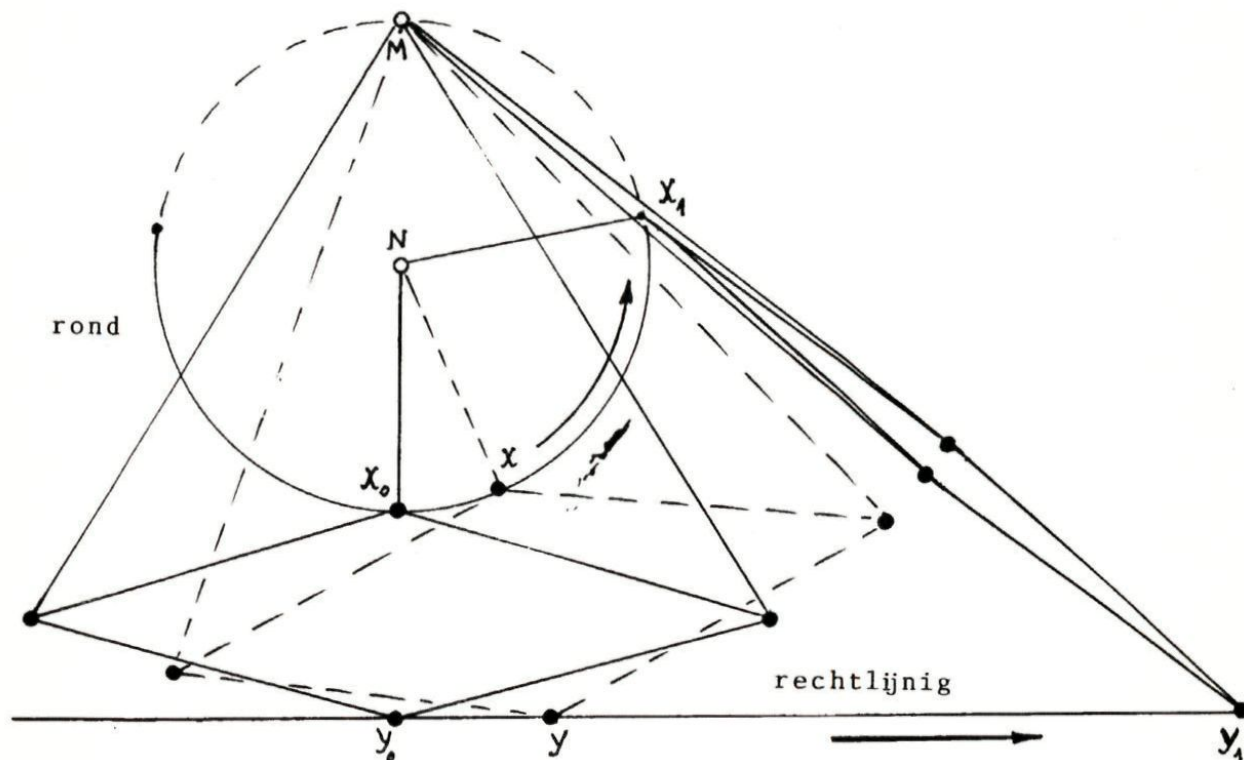
Dr. P. Lemmens uit Utrecht reageerde hierop en beschrijft een mogelijke werkwijze. Tevens vermeldt hij hoe James Watt al in 1874 een poging deed om, ten behoeve van zijn stoommachine, de beweging van een heen en weer draaiend punt om te zetten in nagenoeg rechtlijnige verplaatsing van een zuigerstang.

Een exacte methode

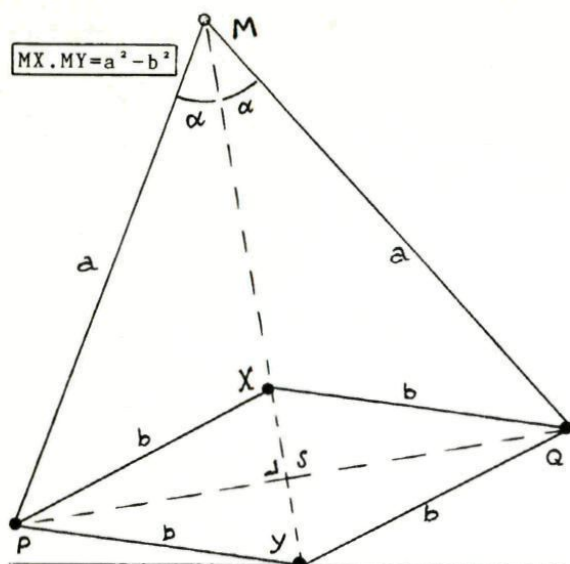
In 1864 lukte het de Fransman Peaucellier om een precieze rechte baan te krijgen uit een ronddraaiende.

Zijn apparaat (fig. 1) bestaat uit een stelsel van zeven stangen, waarvan twee even lange om een

vast punt M draaien. De beide andere einden zijn door middel van vier, eveneens onderling even lange stangen, vrij draaibaar verbonden met de punten X en Y. Ten slotte verbindt een zevende stang het punt X met een vast draaipunt N. De lengte van deze



Figuur 1. Als X langs een cirkeldeel beweegt van X_0 naar X_1 gaat Y langs een rechte van Y_0 naar Y_1 .



Figuur 2. M, X en Y liggen steeds op een rechte.

stang is de straal van de cirkel. We kunnen nu aantonen dat, als punt X om N draait, het punt Y zich over een rechte verplaatst.

Op één lijn

We laten nu eerst even de zevende stang (NX) weg en gaan bewijzen dat Y altijd op het verlengde ligt van de verbinding (fig. 2).

Omdat MPYQ een vlieger is, staat MY loodrecht op PQ en halveert deze. Maar, omdat XPYQ een ruit is, gaat XY ook door het midden van PQ en staat daar loodrecht op. Daarom valt de lijn MX samen met de lijn MY en daarom ligt Y altijd op het verlengde van MX.

Eigenschap

Vervolgens tonen we aan dat het produkt van de afstanden MX en

MY bij beweging constant is. Stel de lengte van de stangen $MP=MQ=a$ en de lengten $PX=PY=QX=QY=b$. De hoek tussen MP en MQ stellen we 2α en S het snijpunt van MY en PQ. In figuur 2 kun je dan aflezen: $PS = a \sin \alpha$ en $MS = a \cos \alpha$. $XS^2 = b^2 - PS^2 = b^2 - a^2 \sin^2 \alpha$ dus $MX \cdot MY = (MX - XS)(MS + XS) = MS^2 - XS^2 = a^2 \cos^2 \alpha - (b^2 - a^2 \sin^2 \alpha)$ dus $MX \cdot MY = a^2 - b^2$.

En dit is onafhankelijk van de grootte van α en dus bij elke hoek α even groot.

Van rond naar recht

Bij de volgende stap leggen we het apparaat in de centrale positie (nog steeds zonder de zevende stang), waarbij X_0 en Y_0 op de lijn MN liggen.

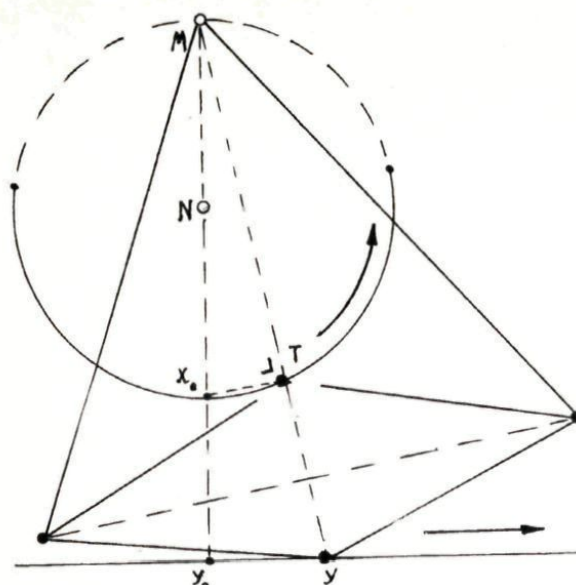
Hierbij geldt natuurlijk ook:

$MX_0 \cdot MY_0 = a^2 - b^2$. We denken ons nu Y verplaatst over een lijn door Y_0 loodrecht op MY_0 . Bij die beweging gaat X ook mee.

Teken nu de cirkel met MX_0 als middellijn en N als middelpunt. Stel T het snijpunt van deze cirkel met MY.

Als we de lijn TX_0 trekken, ontstaat bij T een rechte hoek. De driehoeken MX_0T en MYY_0 zijn nu gelijkvormig, zodat geldt: $MX_0 : MY = MT : MY_0$ of $MY \cdot MT = MX_0 \cdot MY_0 = a^2 - b^2 = MX \cdot MY$.

Hieruit volgt: $MT=MX$ zodat we ontdekken dat T samenvalt met de positie van X.



Figuur 3. Relatie tussen X en Y.

En hiermee is aangetoond dat als Y de onderste lijn doorloopt, X over

een cirkel wandelt en omgekeerd. Door nu de zevende stang aan te brengen, dwingen we X zich over de cirkel te verplaatsen en doorloopt Y daarbij de bedoelde rechte.

Zelf maken

Met wat latjes of meccanoapparatuur is het mechaniek gemakkelijk na te bouwen en te testen. Je zult dan ook ontdekken dat het niet mogelijk is om X een volledige cirkel te laten doorlopen. U doorloopt dan ook geen lijn maar een lijnstuk met eindige lengte (zie fig. 3).

Het volume van een boomstam

○○○ Als we een boomstam min of meer als een cilinder op kunnen vatten, is het volume gemakkelijk te bepalen.

$V = \pi r^2 h$ waarin r de straal en h de hoogte of stamlengte. De straal r kun je het gemakkelijkst bepalen uit de omtrek.

Span daartoe een touwtje om de stam. Je vindt dan de omtrek πd . Deel door π en je hebt de diameter. Halveer en je hebt de straal r .

Voorbeeld

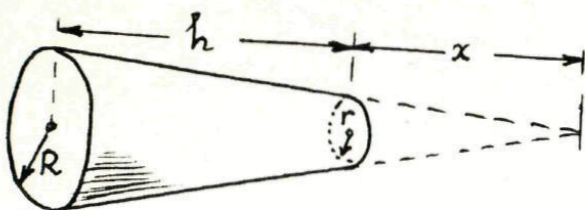
Een beukestam heeft overal een omtrek 140 cm en een lengte 7m. Omdat $\pi d = 140$ volgt $d = 44,6$ cm en dus $r = 22,3$ cm. Dat betekent een doorsnede $\pi r^2 = 1562$ cm². Het volume van de stam wordt dan 1562×700 cm³ of $1,1$ m³. Omdat de dichtheid van beukehout $0,5$ g/cm³ of 500 kg/m³ is, volgt voor de massa ervan $500 \times 1,1$ of 550 kg.

Niet overal even dik

Vaak loopt een stam omhooggaande, smaller toe. Speciaal bij lange stammen speelt dit effect mee.

Je zou dan nog wel met de formule $V = \pi r^2 h$ kunnen werken, mits we onder πr^2 een gemiddelde doorsnede verstaan. Waar moet je die doorsnede bepalen?

We zijn geneigd te stellen: halverwege de stam. Maar is dat correct?



Figuur 1. Verlopende stam.

Of hoeveel fout krijgen we op die manier in de meting?

Functie van r/R

De afwijking is een functie van r/R (fig.1). In het geval van een zuivere cilinder geldt: $r/R = 1$.

Dan is de fout nul.

In het theoretische geval dat de stam een zuivere kegel is, geldt: $r/R = 0$ omdat $r = 0$. Dan is de exacte uitkomst:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

en gaan we uit van de straal halverwege, dan geeft dat als uitkomst:

$1/4 \pi R^2 h$. We moeten deze benadering dus met de factor $\frac{4}{3}$ (of 1,33)

vermenigvuldigen om het werkelijke volume te vinden.

In tabel 2 staat een overzicht hoe, afhankelijk van $p = r/R$, de correctie-factor c eruit komt te zien. De uiterste waarden van c hebben we inmiddels al gevonden. Hoe vinden we in het algemeen de waarde van c als functie van p ?

p	c
0,0	1,33
0,1	1,22
0,2	1,15
0,3	1,10
0,4	1,06
0,5	1,04
0,6	1,02
0,7	1,01
0,8	1,00
0,9	1,00
1,0	1,00

Figuur 2. Relatie p en c .

Afgeknotte kegel

In figuur 1 is af te lezen:

$$\frac{x}{r} = \frac{x+h}{R} \text{ of } xR = xr + hr$$

$$\text{of } x = \frac{hr}{R-r}$$

De afgeknotte kegel heeft een volume:

$$\frac{1}{3} \pi \{ R^2(x+h) - r^2x \}$$

Vullen we de gevonden waarde van x in, dan krijgen we na enig rekenwerk:

$$V = \frac{1}{3} \pi h \frac{R^3 - r^3}{R - r}$$

$$\text{of } V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2).$$

Dat is dan de uitkomst voor het volume.

Gaan we nu uit van een straal halverwege ter grootte $(R+r)$ dan hoort daarbij een doorsnede

$$\pi \left(\frac{R+r}{2} \right)^2 \text{ of } 1/4 \pi (R+r)^2.$$

De uitkomst met de cilinderformule wordt dan:

$$V = \frac{1}{4} \pi h (R^2 + 2Rr + r^2).$$

De verhouding van beide uitkomsten:

$$\frac{\text{echt}}{\text{benaderd}} = \frac{4 R^2 + 2Rr + r^2}{3 R^2 + 2Rr + r^2} = c$$

Stellen we de verhouding van de eindstralen $r/R = p$ waarbij $0 \leq p \leq 1$, dan vinden we voor de verhouding:

$$c = \frac{4}{3} \frac{1 + p + p^2}{1 + 2p + p^2}$$

Als we dan p op laten lopen van 0 tot 1, zien we in de tabel van figuur 2 de c -waarden dalen van 1,33 tot 1,00.

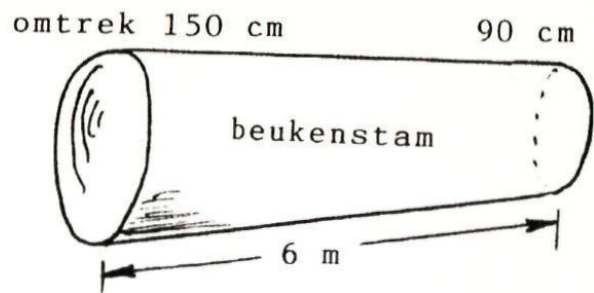
Praktisch

Het komt dus hierop neer dat je het best de benaderingsformule kunt gebruiken, mits je deze uitkomst met een juiste factor vermenigvuldigt.

Als bijvoorbeeld $r/R = 2/5$ of $p = 0,4$ dan moeten we de eenvoudige uitkomst met 6% verhogen om het werkelijke volume te vinden.

Voorbeeld

In figuur 3 hebben we een beukestam met omtrekken aan beide



Figuur 3. Volume en massa.

einden ter grootte 150 en 90 cm. De stam is 6 m lang. Bereken het volume.

Wel, $p = 150/90 = 0,6$.

Correctiefactor 2%.

Omtrek halverwege

$$1/2 (150 + 90) = 120 \text{ cm.}$$

Diameter halverwege

$$120/\pi = 38 \text{ cm.}$$

Doorsnede halverwege $1/4 \pi d^2 = 1146 \text{ cm}^2 = 0,115 \text{ m}^2$.

Benaderde volume

$$6 \times 0,115 = 0,69 \text{ m}^3.$$

Bij een dichtheid 0,5 (beukehout) g/cm^3 of 500 kg/m^3 volgt een massa $0,69 \times 500 = 345 \text{ kg}$.

De exacte massa ligt echter 2% hoger dus op: 352 kg. Als de stamdikte weinig verandert heeft het corrigeren, mede gezien de grilligheid van de vorm, weinig zin. ■

Verantwoording illustraties: Foto's: Henk Mulder, Tekeningen: Henk Mulder, Illustraties: Ad Karremans

Stichting IVIO draagt het roer over aan MEMO

Vanaf het volgende nummer zal MEMO nv uit Utrecht de produktie en de verspreiding van Pythagoras en Archimedes van de Stichting IVIO overnemen. De samenstelling van de redactie blijft ongewijzigd. Ook de lopende abonnementen blijven geldig zodat u weinig van de overname zult merken.

Het adres van MEMO is: Hengeveldstraat 29, Postbus 9822, 3506 GV Utrecht.

Pythagoras wiskunde tijdschrift voor jongeren

Redactie: Henk Huysmans, Henk Mulder

Medewerkers: Prof. H. Duparc, Bob de Jongste, Thijs Notenboom,
Hans Oomis, Hans de Rijk, Frank Roos

Redactiesecretariaat: Henk Mulder,
Geersbroekseweg 27
4851 RD Ulvenhout

Eindredacteur: Henk Huysmans

Inhoudsopgave Pythagoras nummer 6, 31e jaargang

De bol van Montreal / 1

Henk Mulder

De driehoek van Pascal / 6

Klaas van Opdorp

Waar of niet waar?

Oplossingen / 10

Henk Mulder

De band van Möbius / 14

Henk Mulder

Toren recht, toren krom / 18

Rini van Boegschoten

Stelling / 19

Wim van Gilst

Exponentiële groei / 20

Rinus Goosens

Goede volgorde / 23

Henk Mulder

Lussograaf / 24

Henk Mulder

Verschil tussen wiskunde en
natuurwetenschappen / 27

Jan de Bie

Van cirkel naar rechte lijn / 28

Dr. P. Lemmens

Het volume van een

boomstam / 30

Henk Mulder

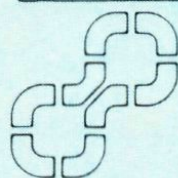
Pythagoras verschijnt zesmaal per
schooljaar; opgave van abonnementen
bij de uitgever (zie onder).

Abonnementen zijn doorlopend, tenzij
voor 1 september schriftelijk bij de
uitgever is opgezegd.

Bij tussentijdse abonnering ontvangt
men ook de reeds verschenen num-

mers. Betaling per acceptgirokaart.

Tarieven	NLG/BEF
Abonnement Pythagoras	25,-/450
Luchtpost-toeslag	10,-
Inclusief Archimedes	45,-/800
Luchtpost-toeslag	20,-
Losse nummers	5,-/ 90



stichting ivio

Postbus 37, 8200 AA Lelystad (NL.)

Tel. 03200-76411

educatieve uitgeverij - instituut voor buitenschools

onderwijs - wereldschool - AO-reeks - leerprojecten

Postgiro Nederland: 287934

Postcheck België: 000-0130850-94