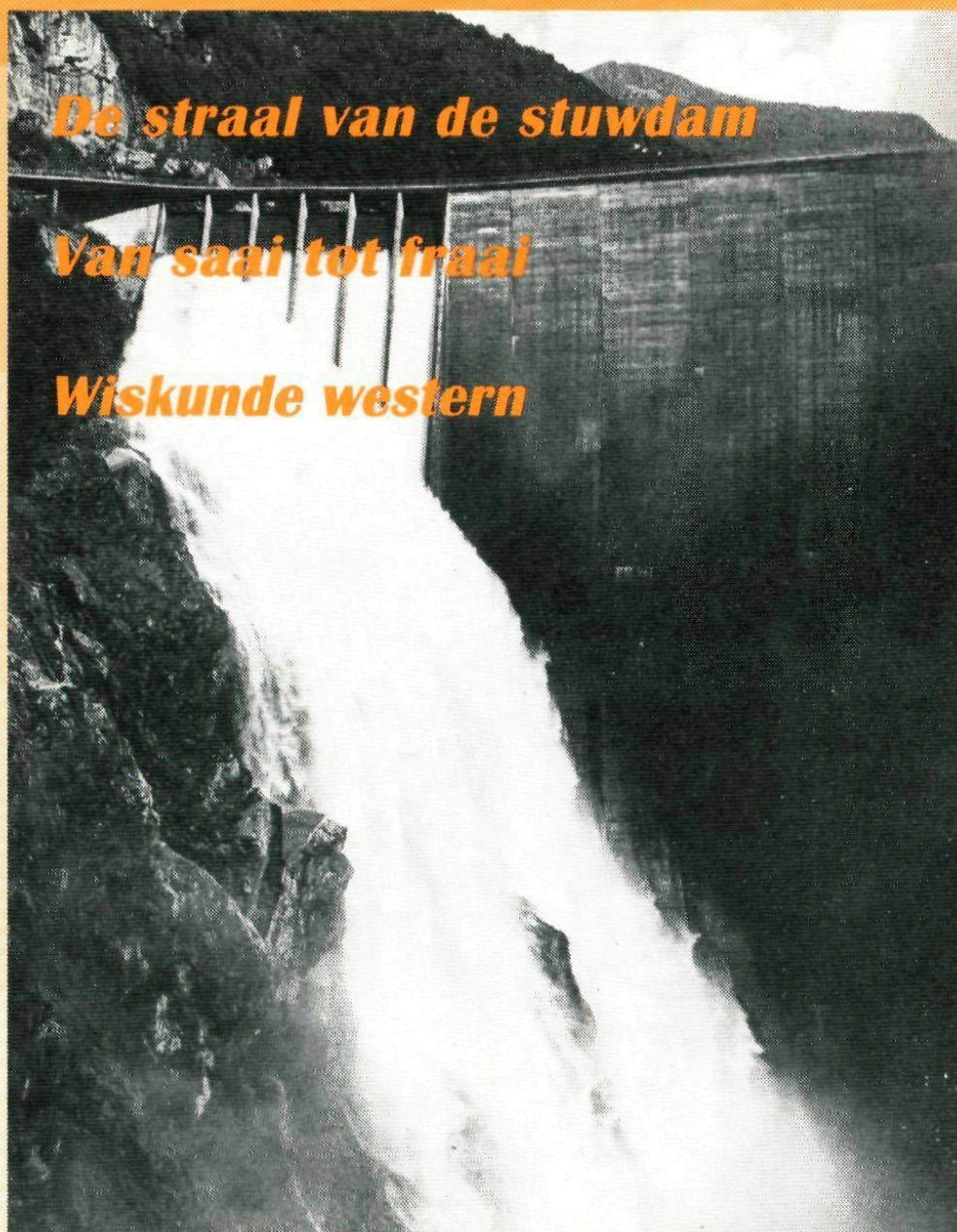


PYTHAGORAS



wiskunde tijdschrift voor jongeren



De straal van de stuwdam

Van saai tot fraai

Wiskunde western

MÉMO | 32e jaargang, november 1992, nr. 2

De straal van de stuwdam

Een onderdeel van een bergkamp voor de tweede klassers bij ons op school is de technische dag. We doen die dag metingen in de vrije natuur.

Dit jaar bivakkeerden we in het gebied van de Grote Sint Bernhard, de vallei van Valpelline die eindigt in Bionaz bij het grote stuwmeer (zie foto).

De wand ervan is bolvormig om weerstand te bieden aan de enorme waterdruk. De opdracht luidde: bepaal de straal van de stuwdam. Als enig materiaal kregen ze mee: een bordliniaal en een lang stuk vliegertouw.

Werkwijze

Span een touw tussen twee punten A en B van de damwand. Meet het midden uit en merk dit (paperclip). Bepaal vervolgens de kortste afstand tussen het midden van het touw en de muur. Het is nu mogelijk uit de lengte van de koorden ($2k$) en de pijl (p) de straal R te bepalen. In de rechthoekige driehoek geldt:

$$R^2 = (R-p)^2 + k^2$$

$$R^2 = R^2 - 2Rp + p^2 + k^2$$

$$2Rp = p^2 + k^2$$

$$R = \frac{p^2 + k^2}{2p}$$

Meting

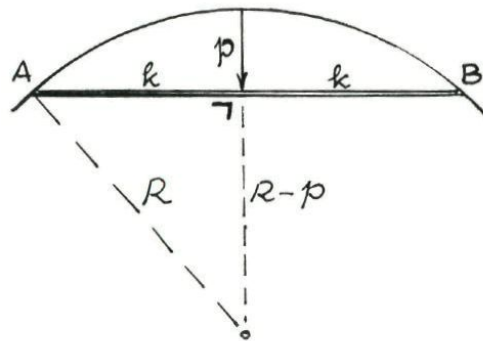
Een groep vond als meetgegevens: $k = 12$ m en $p = 45$ cm. In

dat geval is p^2 verwaarloosbaar ten opzichte van k^2 zodat we rustig kunnen stellen:

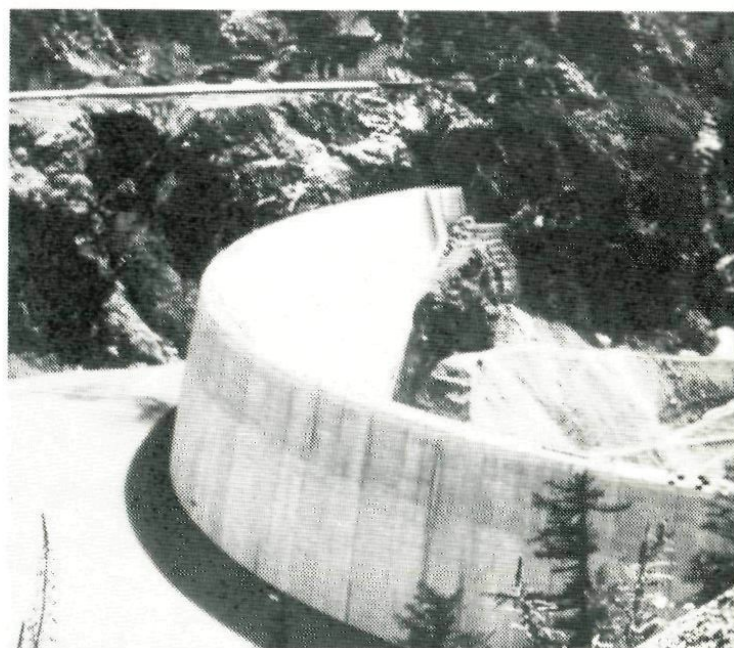
$$R = \frac{k^2}{2p}$$

$$R = \frac{12^2}{0.9} = 160 \text{ m.}$$

Auteur: Henk Mulder



Figuur 1



Stuwdam bij Bionaz

Van saai tot fraai

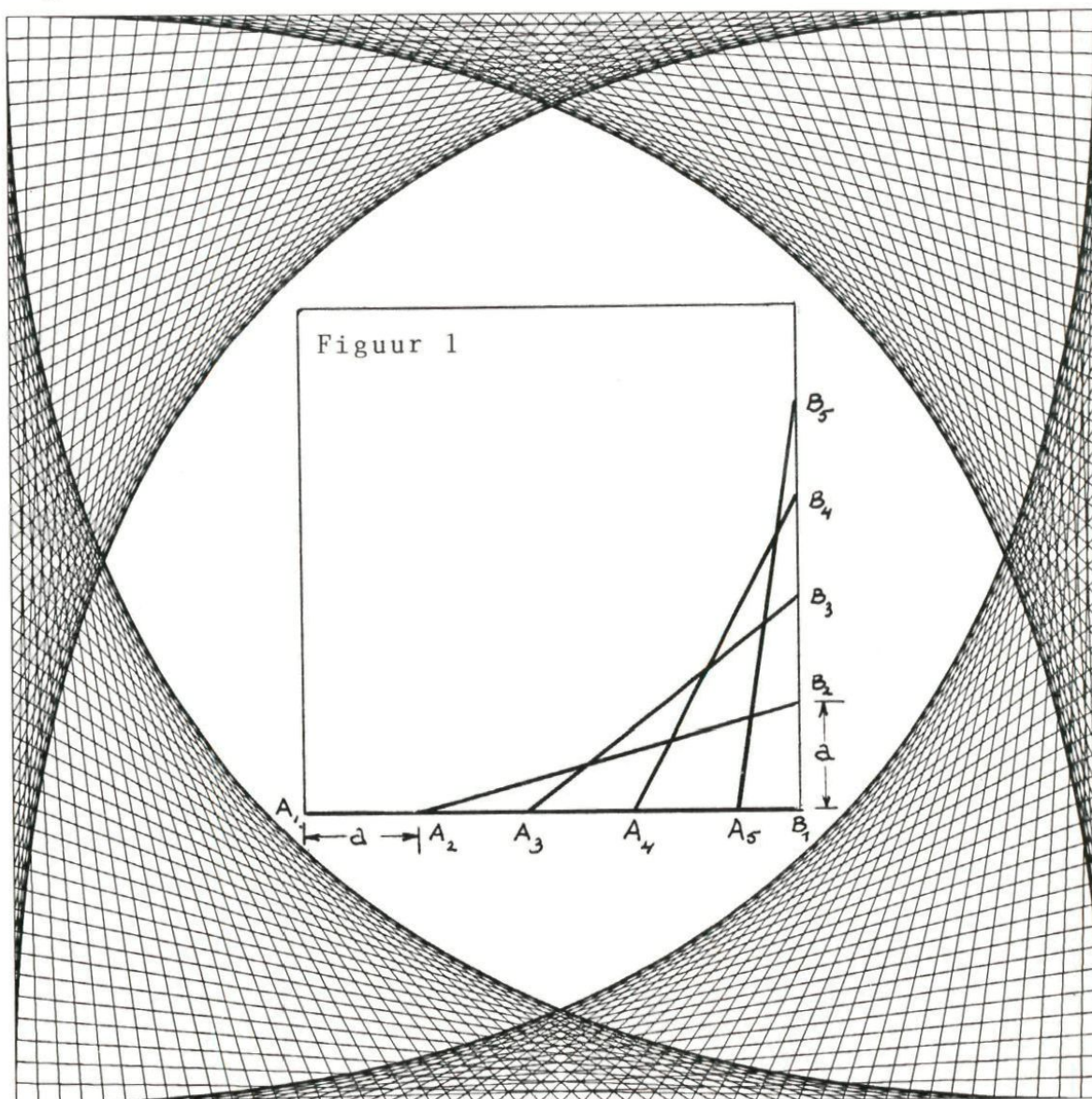
De tekening van figuur 1 is ontstaan door alsmaar lijntjes te trekken volgens een vast schema.

Ogenschoijnlijk een saaie bezigheid, maar het resultaat is fascinerend. In het centrum staat de basisconstructie. Verdeel de zijden in een aantal gelijke stukjes. Maak nu de verbindingen. De eerste lijn is de basislijn van het

vierkant. De tweede begint een stukje a naar rechts en loopt naar een punt eenzelfde stukje hoger. Zo schuiven de punten A en B steeds verder gelijkmatig op.

We zetten de constructie voort tot punt A het vierkant eenmaal is rondgelopen. Daarom moet a wel een geheel aantal malen passen op de zijden van het vierkant.

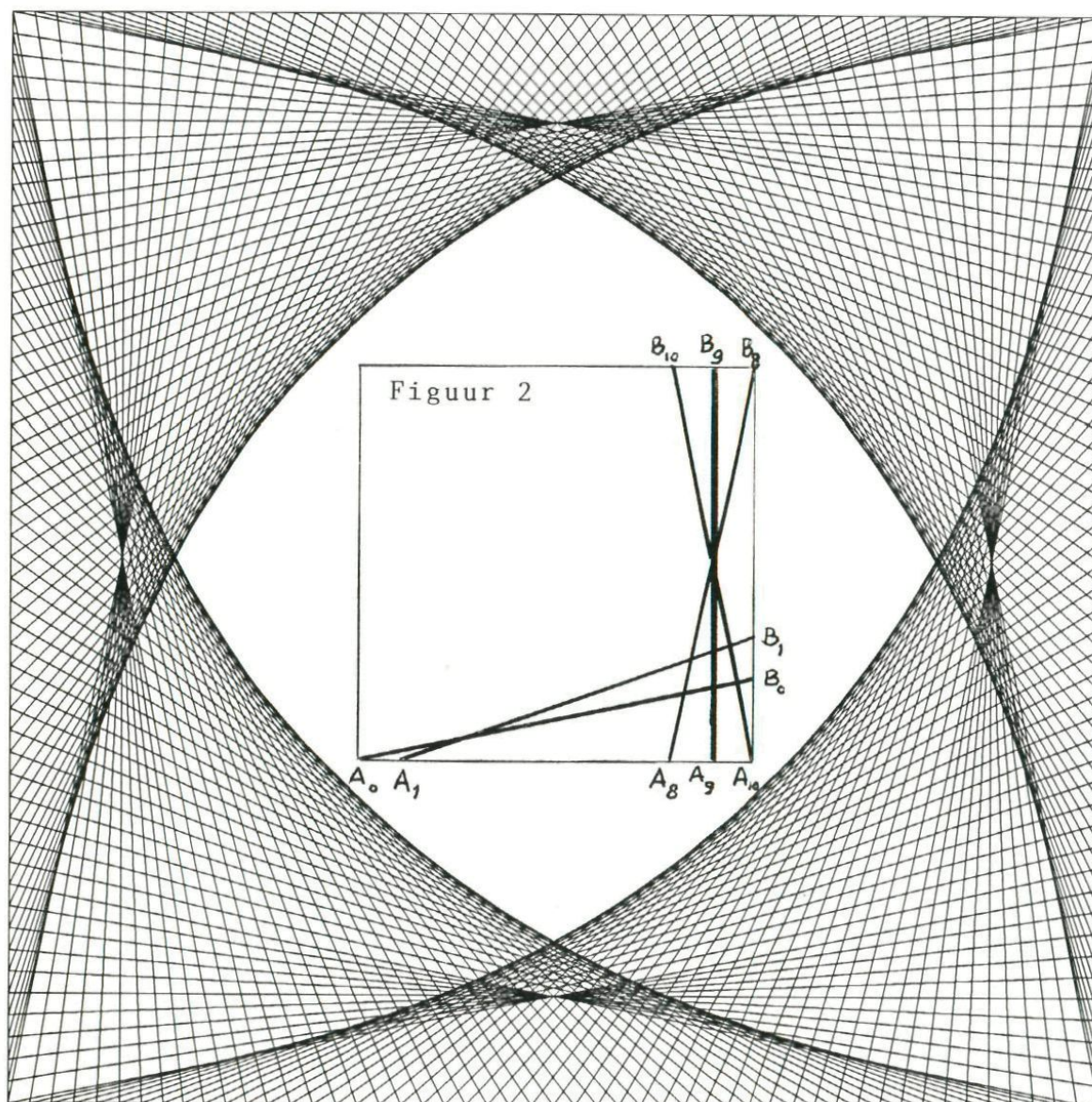
Figuur 1

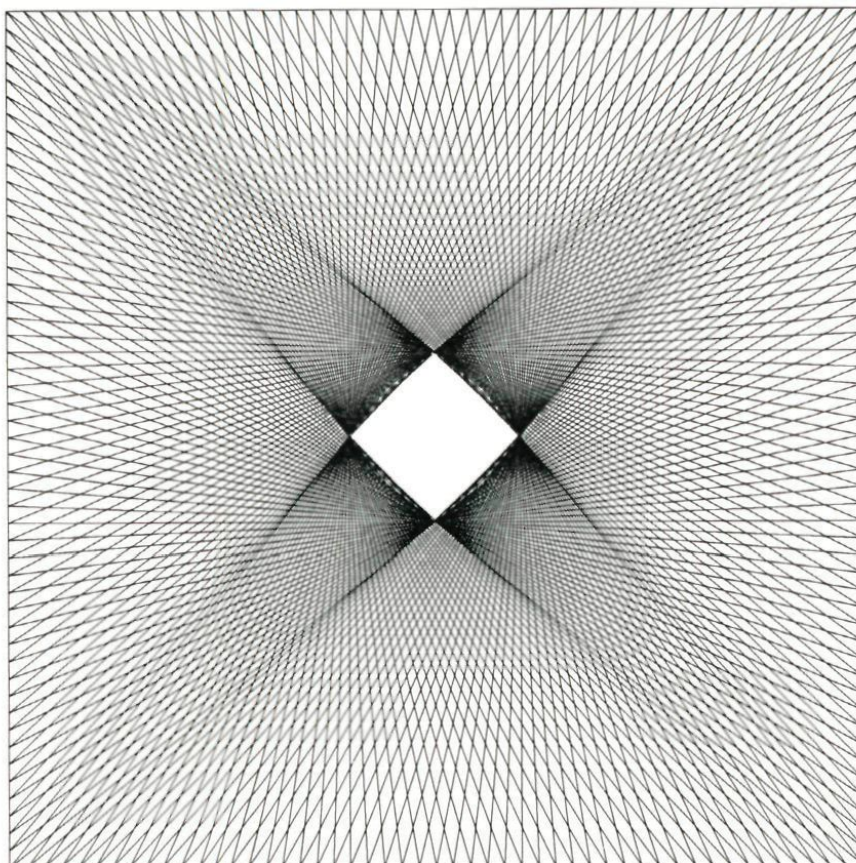


Hoe kleiner je a kiest, des te fijner wordt het patroon. Heb je ruitjespapier en een goede liniaal, dan is de zaak niet moeilijk. Je kunt ook spijkers in een plank slaan en draden spannen. En .. wie een computer heeft en met BASIC een lijn op het scherm weet te zetten, kan proberen de computer het werk te laten doen.

Kleine variaties kunnen verrassende veranderingen geven. In figuur 2 is de startlijn anders gekozen. B is nu eerder bij de rechter bovenhoek dan bijvoorbeeld A bij de rechter onderhoek. Daardoor wordt de figuur gecompliceerder.

Figuur 2

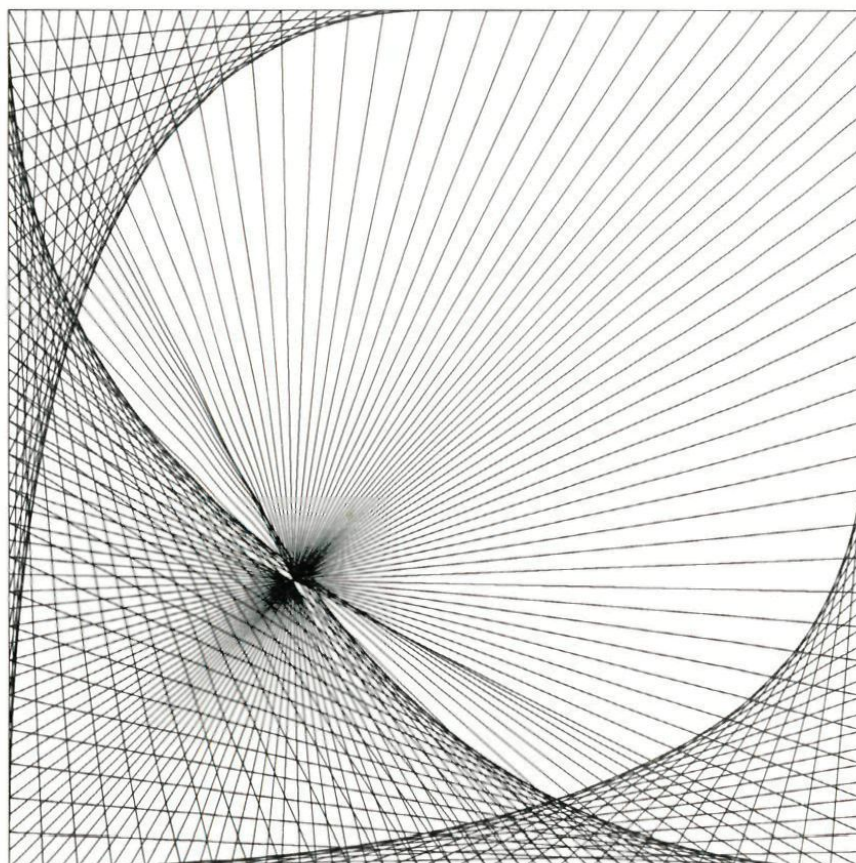




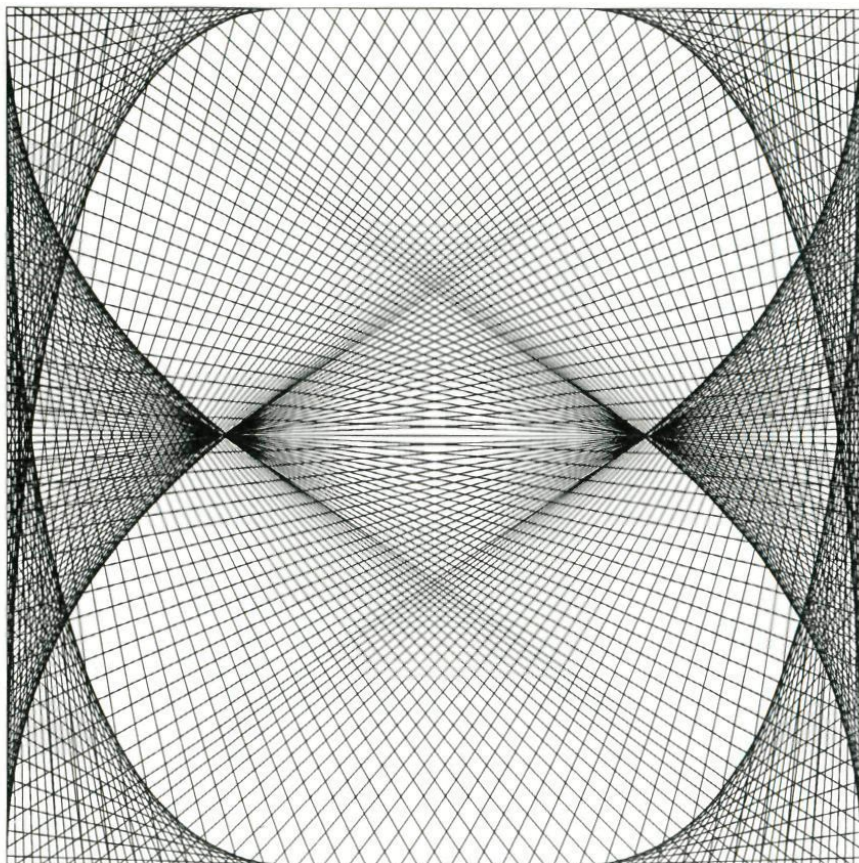
Figuur 3

In figuur 3 zie je het resultaat als de startlijn bijna in de diagonaal-richting gaat lopen. Het patroon is opvallend anders. Bijna alle lijnen gaan nu door vier brandpunten.

Figuur 4

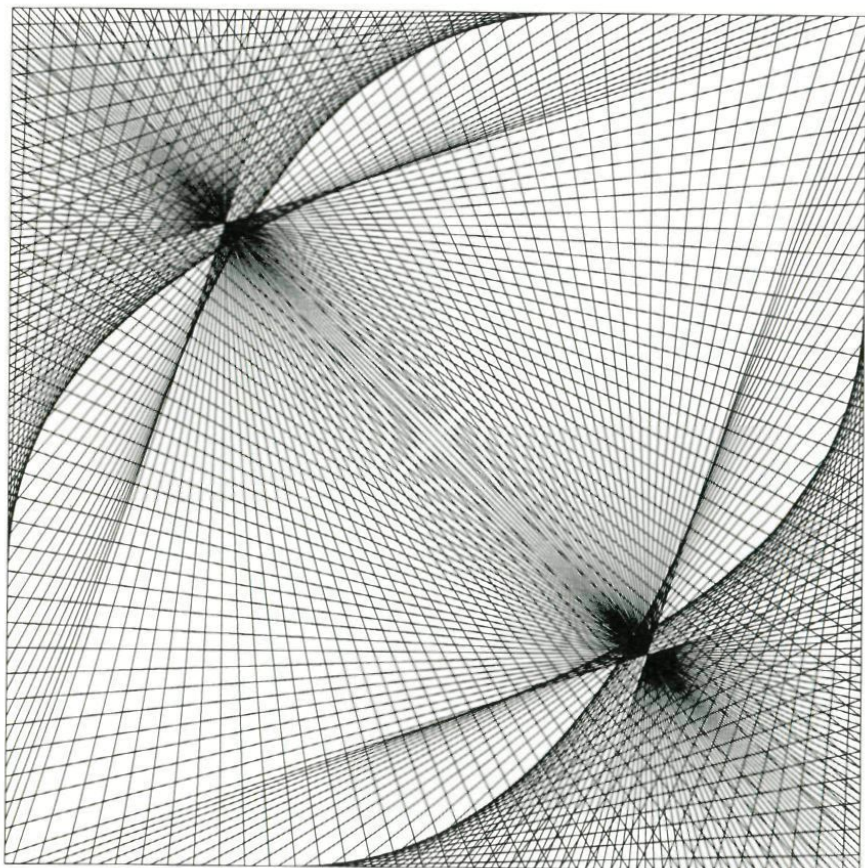


We hoeven natuurlijk A en B niet even hard te laten lopen. Stel, B gaat tweemaal zo hard als A. Kies als startlijn bijvoorbeeld een diagonaal. In figuur 4 staat het resultaat. We hadden ook van een zijde uit kunnen gaan.



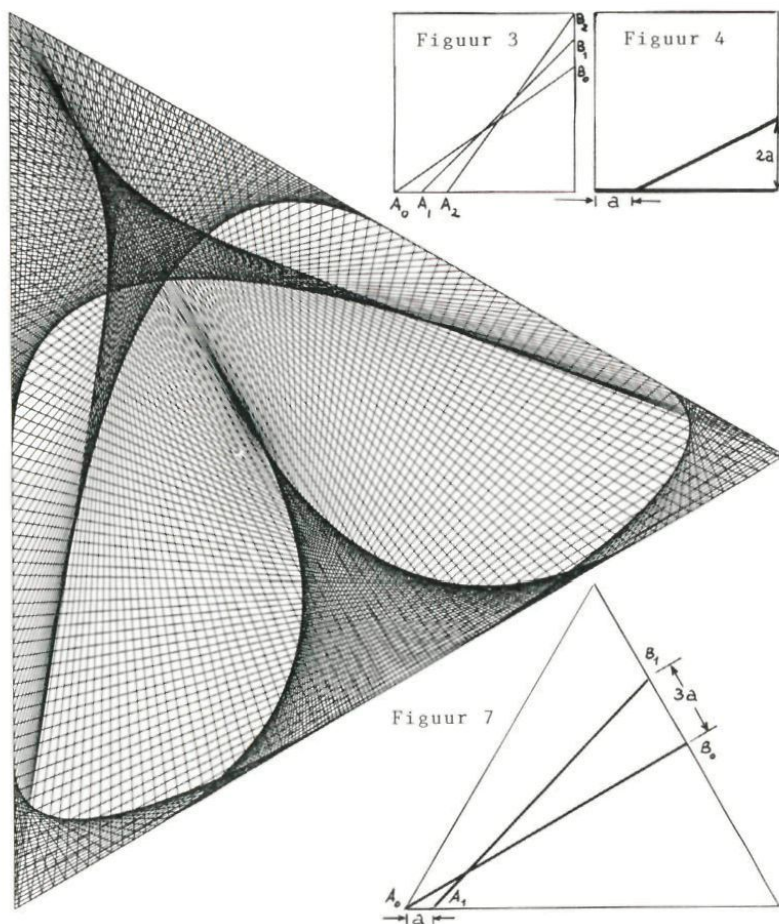
Figuur 5

Figuur 6



Als we B
driemaal zo
hard laten
lopen (fig.5),
maakt het veel
uit met welke
lijn we begin-
nen.

In figuur 5 is
gestart met een
zijde; in figuur
6 met een
diagonaal.



Je hoeft je niet tot vierkanten te beperken om van saai naar fraai te gaan. In figuur 7 proberen we het eens met een driehoek. Ook hier moet $3a$ weer een heel aantal malen passen op een zijde.

Auteur:
Paul van de Veen

Figuur 7

Vouwen is ook wiskunde

Eén van de meest vervelende eigenschappen van landkaarten, of het nu gaat om stadsplattegronden, wandel-, fiets-, of autokaarten, is het feit dat het vaak een hele kunst is om de kaart op de juiste wijze weer dicht te vouwen (en al helemaal als het hard waait).

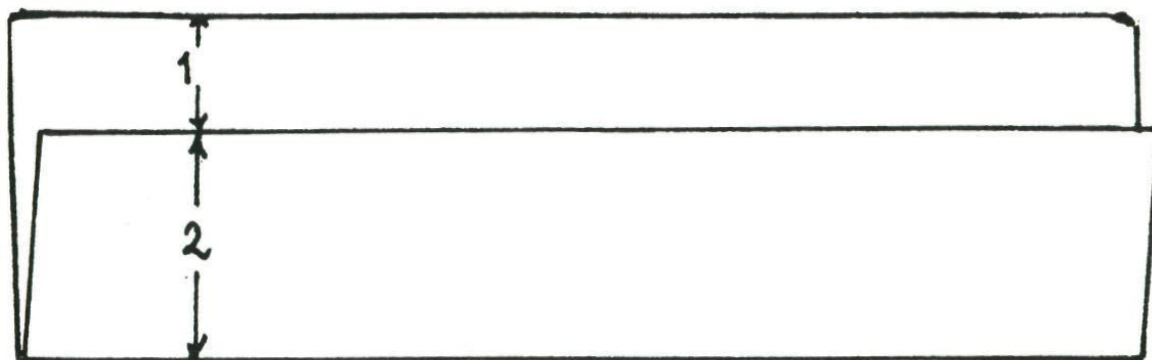
Hoe je dit probleem echter kunt omzeilen werd laatst verteld op een origami-bijeenkomst in Italië, en wel door de heer Koryo Miura, directeur van een afdeling van een Japans ruimtevaart-instituut. Hij beschreef een methode waarop je een vel papier dusdanig kunt op-

vouwen, dat het zichzelf met behulp van een geringe druk steeds weer op dezelfde wijze dichtvouwt.

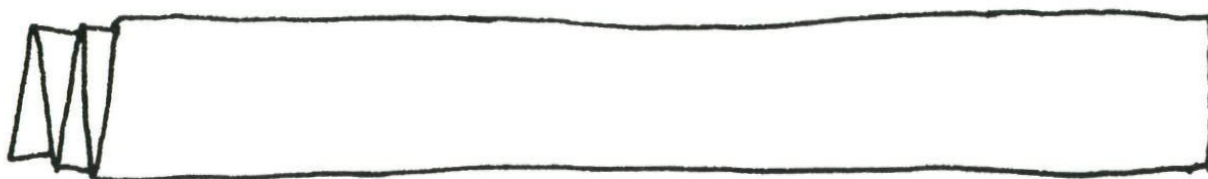
Ik zal pogen om deze vouwmethode hieronder uit te leggen. Het leukste is om tijdens de uitleg mee te vouwen: het resultaat zal je zelfs bij enigszins onnauwkeurig vouwen, waarschijnlijk nogelijk verbazen.

Aan de slag

Neem maar eens een velletje A4, leg het voor je neer met de langste kant boven en vouw het zig-zag tot een strip, zoals aangegeven in de figuren 1 en 2. Denk er wel aan om te vouwen



Figuur 1

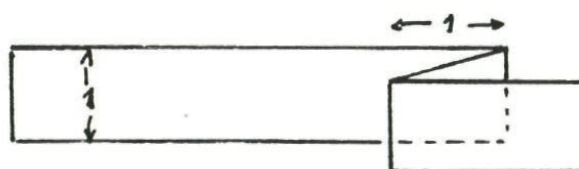


Figuur 2

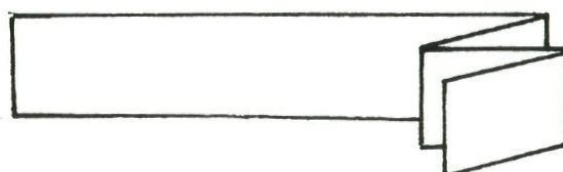
in de verhoudingen zoals deze naast deze figuren staan aangegeven ; in totaal verdeel je de breedte van je vel dus in vijven. Nu teken je aan de linkerkant van de strip een vierkantje. Op de rechterzijde van dit vierkant teken je een punt A, dat deze zijde verdeelt in een verhouding van 2:1 met het grootste deel boven (je hoeft dit eventueel niet heel precies te tekenen; als je het "op het oog" doet lukt het verder ook wel). Vouw vervolgens de rechterkant van de strip naar dit punt A, als in figuur 3. Vouw nu van het bovenste stuk strip een deel terug, zodat er op het alleronderste stuk strip als het ware een vierkantje wordt afgebakend, met zijden gelijk aan de breedte van de strip (fig. 4). Zorg wel dat na het vouwen de bovenranden van het onderste en het bovenste stuk



Figuur 3



Figuur 4



Figuur 5

strip evenwijdig lopen!
Vouw vervolgens het bovenste stuk strip net zo naar links als je



Figuur 6

dat deed bij figuur 3 (dus een beetje scheef), en wel zo dat er geen flap meer aan de rechterkant uitsteekt (fig. 5).

Let er op dat nu de schuine zijden

evenwijdig moeten lopen!

Mocht er van het bovenste stuk strip nog steeds een stukje links van het dikke gedeelte uitsteken, vouw dat dan weg door de stappen van figuur 4 en figuur 5 te herhalen.

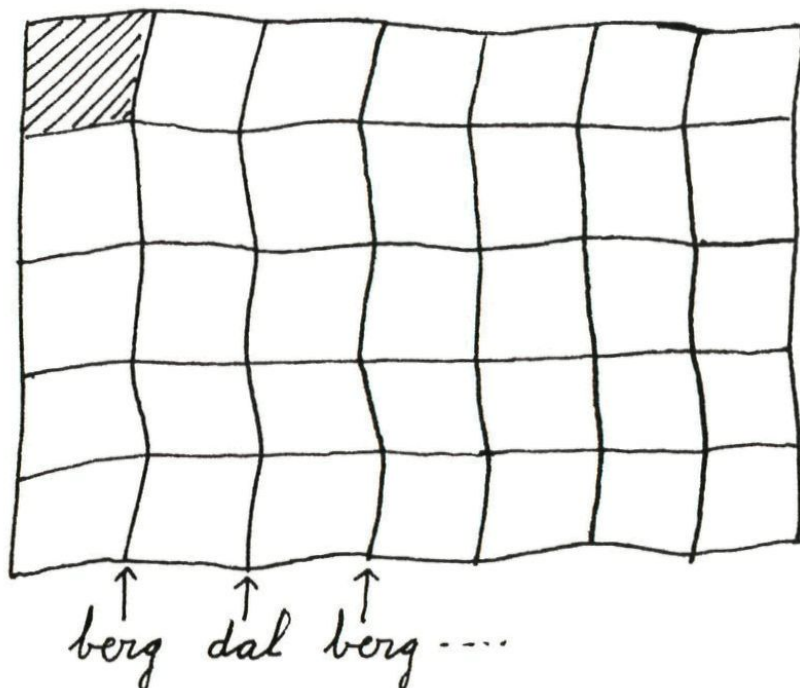
Draai het pakketje om en vouw de rest van de strip op dezelfde wijze als in de figuren 4 en 5, net zolang totdat je een dik pakketje in je handen hebt (fig. 6).

Na de vouwen nog wat extra geplet te hebben, vouw je het geheel open. Je ziet dan een patroon van parallellogrammen die door de vouwlijnen afgetekend worden.

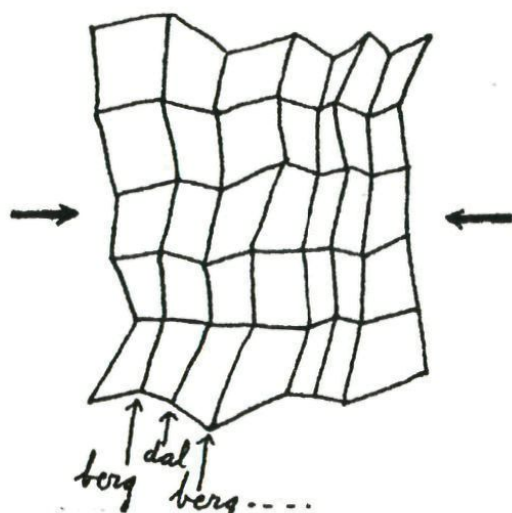
stuk als in figuur 3). De verticaal lopende zig-zaglijnen zijn voor de helft de verkeerde kant opgevouwen. Al deze stukjes moet je zo terugvouwen, dat de meest linkse zig-zaglijn een bergkam wordt, de tweede een dal, de derde weer een bergkam, enz. (fig. 7). Dit is een lastig karweitje, maar het moet toch wel goed gedaan worden: hoe beter en scherper je deze bergkammen en dalen vouwt, hoe beter straks je eindresultaat zal worden!! Als je met dit alles klaar bent, vouw je de bergkammen tegen elkaar aan door tegen de zijkanten van het vel te drukken (zie de pijlen in figuur 8). Je zult merken dat het vel zodoende ook van onder naar boven wat samenkrimpt. En dat is nou net het bijzondere aan deze vouwwijze: de druk die je op de zijkanten van het vel uitoefent plant zich over het hele vel voort, en trekt het papier ook

De laatste loodjes ...

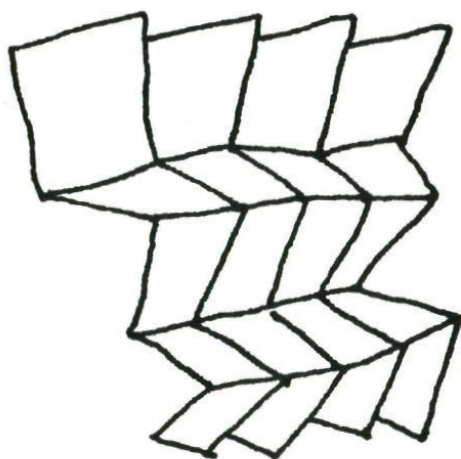
Leg nu het opengevouwen blad met de langste zijde boven voor je (let ook op de positie van het gearceerde stuk: dit is hetzelfde gearceerde



Figuur 7



Figuur 8



Figuur 9

in verticale richting samen (fig. 9)!! Nu kun je het geheel tot een pakketje samenknijpen. Merk hierbij op dat de horizontale vouwen die je in figuur 1 en 2 gevouwen hebt nu voor de helft de verkeerde kant opgevouwen moeten worden. Voor zover dit bij het samenknijpen al niet gebeurt zul je zelf even mee moeten helpen. Verder zal je nog iets bijzonders opvallen: de opeenstapeling van papier binnen één vouw blijft aardig beperkt, in tegenstelling tot wat er bijvoorbeeld gebeurt als je een vel steeds dubbel vouwt.

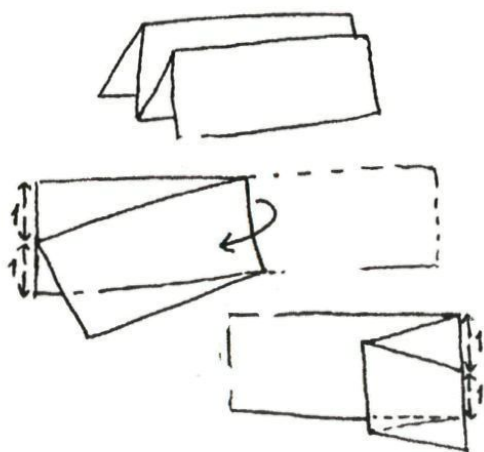
Als je nu de buitenste 'vierkantjes' beetpakt en van elkaar trekt opent het vel zich, en als je het daarna weer bij de hoeken van deze 'vierkantjes' samendrukt, vouwt het geheel zich (als het ware vanzelf) weer op. Hoewel je de eerste keer hierbij misschien wel wat moet 'meehelpen' zul je merken dat het elke daaropvolgende keer beter gaat.

Toepassingen

Behalve dat een dergelijke vouwwijze zo z'n voordelen heeft voor het samenvouwen van kaarten, kan ze ook worden gebruikt voor het in- en uitklappen van zonnepanelen van ruimtevaartuigen. En wellicht zijn er nog andere toepassingen mogelijk.

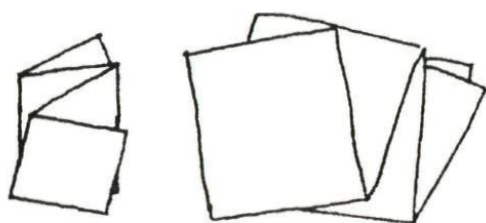
Eenvoudige varianten

We begonnen in het voorgaande verhaal met het vouwen van 5 banen, en dat is, zonder echt te gaan meten, niet zo eenvoudig. Vervolgens is het "mikken" op een derde deel van een onzichtbare zijde van een onzichtbaar vierkant ook niet echt eenvoudig. Het kan ook eenvoudiger: vouw het vel eerst maar eens in vieren (fig. 10), en vouw dan de zo verkregen strips om naar het midden van de linkerkant (fig. 11). Daarna vouw je het bovenste stuk strip naar het midden van de rechterkant (fig. 12). Tenslotte vouw je het overgebleven lange stuk strip naar achteren en naar het midden van de rechterkant (fig. 13). Nu komt weer het



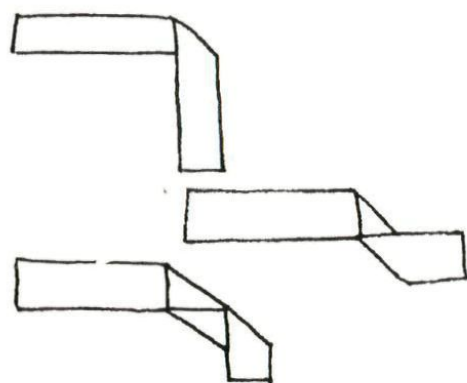
Figuur 10, 11 en 12

lastige karweitje van het vouwen van de bergkammen en dalen, maar als dit eenmaal gebeurd is blijkt ons stuk papier alle eigen-



Figuur 13 en 14

schappen te hebben die het oorspronkelijke voorbeeld ook had (hoewel het nu iets moeilijker is om de horizontale vouwen de verkeerde kant op te krijgen). Het vel papier in samengedrukte toestand ziet er dan uit als in figuur 14.



Figuur 15, 16 en 17

Nu ligt het natuurlijk voor de hand om nog meer varianten te bedenken. In plaats van de strip te vouwen naar het midden of in de verhouding 1:2 kun je ook eens de verhoudingen 1:3, 1:4, 1:5, enz. uitproberen. Ook kun je eens proberen om helemaal in het begin geen 4 of 5, maar veel meer banen te vouwen.

En wat let je om tijdens het vouwen met de strip eens wat verschillende verhoudingen door elkaar te gebruiken? Of om al helemaal in het begin te starten met het vouwen van banen van ongelijke breedte? We horen graag wat over de door jullie verkregen resultaten!!

Decoratief

Nog een bijzonder geval. Begin met lengtevouwen zoals in figuur 10. Vouw dan de strip zo dat beide delen loodrecht op elkaar komen te staan (fig. 15) en herhaal deze manier van vouwen (fig. 16 en 17) totdat de strip "op" is. Behandel het overgebleven deel van de strip op dezelfde manier. Vouw het blad open en vouw weer de bekende bergkammen en dalen. Zo krijg je na na het vel eerst dichtgeduwd en dan weer opengetrokken te hebben, een prachtig reliëfpatroon. Ook met dit uitgangspunt kun je natuurlijk weer verder experimenteren. Maak de hoek maar eens groter of kleiner dan 90°. Veel plezier ermee!

Auteurs: Hans de Rijk en
Hans Oomis

Magische vierkanten

Het eenvoudigste magische vierkant bevat de getallen 1 tot en met 9 en heeft afmetingen 3 bij 3 (fig.1). In elke richting, horizontaal, verticaal of schuin, is de som steeds 15. Dit getal noemen we de constante c van het vierkant.

De oorsprong ervan is meer dan 2500 jaar oud en komt uit China, waar het als een mystiek symbool werd gezien.

Het volgende magische vierkant heeft afmetingen 4 bij 4 en heeft als constante 34 (fig.2).

In de 16e en 17e eeuw was het zoeken naar magische vierkanten net zo'n sport als in onze tijd het oplossen van kruiswoordpuzzels.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Figuur 1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Figuur 2

is dus: $c = \frac{1}{2} n(1 + n^2)$ of $\frac{1}{2} (n + n^3)$.

5 bij 5

Probeer nu zelf eens een 5 bij 5 vierkant te ontwerpen. Begin met een getal dat in het centrale hokje komt.

Merk op dat de som van twee getallen die rotatie-symmetrisch ten opzichte van elkaar liggen steeds gelijk is en wel het dubbele van het centrale getal.

Figuur 3

Constante

We zoeken een formule voor de constante c bij een magisch n bij n vierkant. De rij getallen is dan: 1, 2, 3, ..., n^2 . De gemiddelde waarde daarvan is: $\frac{1}{2}(\text{eerste} + \text{laatste})$ of $\frac{1}{2}(1 + n^2)$.

Ga na dat de gemiddelde waarde van twee getallen die symmetrisch ten opzichte van het centrum staan, dezelfde waarde $\frac{1}{2}(1 + n^2)$ heeft. Op een diagonaal staan n getallen. Hun som

	48	59	70	81	2	13	24	35	46	
47	58	69	80	1	12	23	34	45		47
57	68	79	9	11	22	33	44	46		57
67	78	8	10	21	32	43	54	56		67
77	7	18	20	31	42	53	55	66		77
6	17	19	30	41	52	63	65	76		6
16	27	29	40	51	62	64	75	5		16
26	28	39	50	61	72	74	4	15		26
36	38	49	60	71	73	3	14	25		36
37	48	59	70	81	2	13	24	35		

	2	3	
5			8
9			12
	14	15	

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Figuur 4

Oneven vierkant

Om een groter vierkant te ontwerpen, komt er nogal wat kijken. Echter, voor oneven vierkanten is er een methode ontwikkeld om zoiets vlot uit te schrijven.

Als voorbeeld een 9 bij 9 exemplaar (fig.3).

In het vierkant komen dan de cijfers 1 tot en met 81 met als centraal getal 41 en $c=369$... maar hoe nu verder?

Begin met 1 te plaatsen, midden boven.

Elk volgend cijfer komt nu schuin omhoog en naar rechts. Dat geeft direct al problemen omdat 2 dan buiten het vierkant zou komen. Geen nood, je moet dat cijfer dan een hele kolom laten zakken en dan vanuit die positie weer verder gaan.

Zo vind je de plaatsen voor 3, 4 en 5. Bij 6 dreigt het weer mis te gaan, het zou er weer buiten vallen. Verspring nu naar uiterst links en dan weer verder schuin omhoog met 7, 8 en 9. Als je zo doorgaat kom je met 10 op de positie van 1 terecht. Ga dan verder één plaats recht onder 9 en dan weer schuin omhoog. Je komt er nu vast verder wel uit.

Even vierkanten

Voor bepaalde even vierkanten zijn er in de loop van de tijd ook wel "montage-voorschriften" ontwikkeld. Als voorbeeld een vier bij vier exemplaar. In figuur 4 staat links het begin en rechts het eindresultaat.

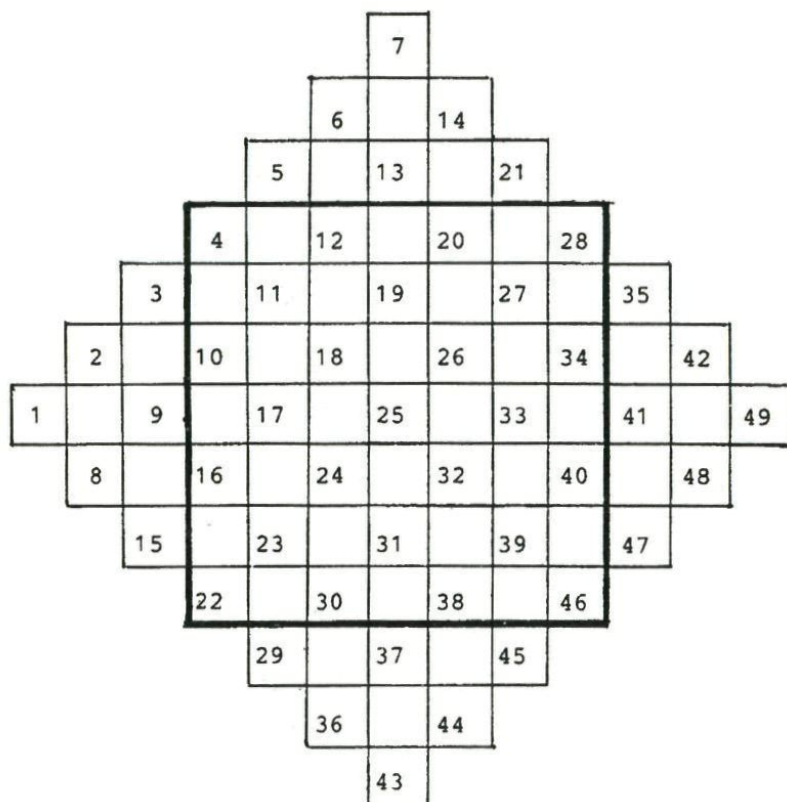
We nummeren de hokjes van links naar rechts, rij na rij. De diagonalen vullen we nog niet in. Dan vullen we de resterende getallen in. Begin rechtsonder en ga dan verder naar links, dus 1, 4, 6, 7, 10, 11, 13 en 16.

Willen we grotere vierkanten ontwerpen dan lukt dat bij een 8 bij 8 exemplaar door het grote vierkant te splitsen in 4 kleinere

Figuur 5

	2	3			6	7	
9			12	13			16
17			20	21			24
	26	27			30	31	
	34	35			38	39	
41			44	45			48
49			52	53			56
	58	59			62	63	

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1



Figuur 6

(fig.5 links). Vul eerst links in en maak daarna volgens het voorschrift van figuur 5 de zaak af.

Andere werkwijze

Er is voor dit soort vierkanten nog een variant bedacht. We nemen als voorbeeld een 7 bij 7 exemplaar (fig.6).

Voorzie het vierkant van de

Figuur 7

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

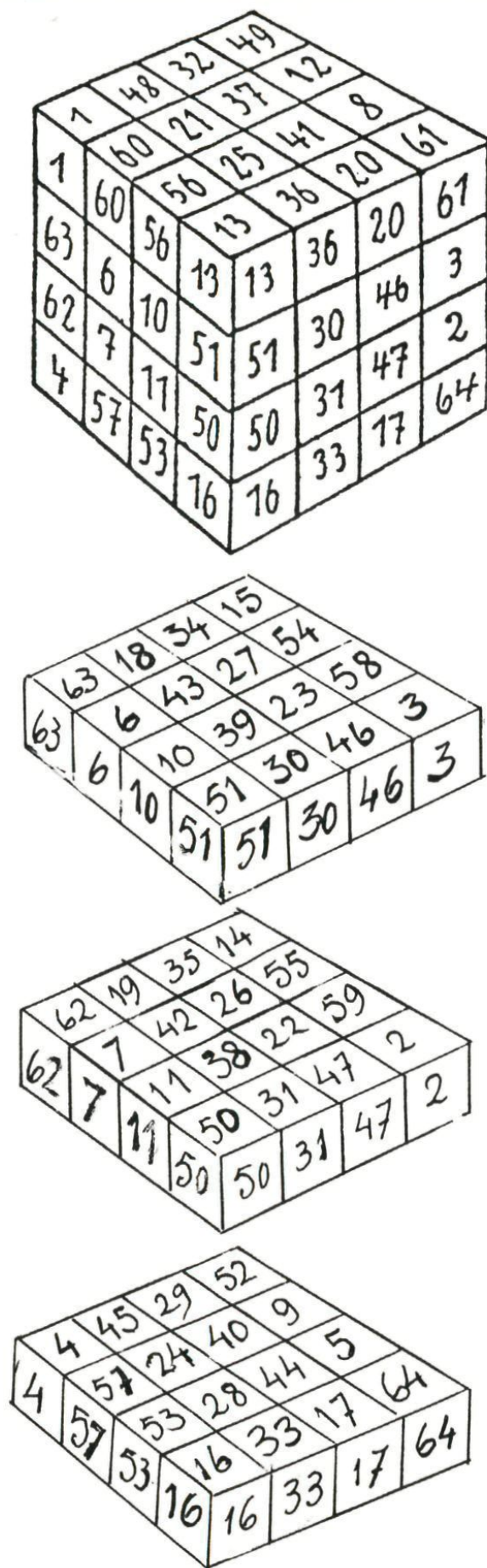
getekende uitbouwsels. Vul de eerste diagonaal in van 1 tot 7. Sla er dan een over en ga door in de derde en zo verder. Zo kom je tenslotte uit op 49. Sla nu de vier flappen om en je hebt de overige posities. Zo komt 1 tussen 17 en 25 en 9 tussen 10 en 16. De constante is 175.

Magisch en schaken

De wiskundige Euler koppelde magische vierkanten en het schaakspel. Hij ontwierp een paardesprongvierkant. Een naar rechts, twee naar beneden of twee naar rechts een naar boven (fig.7) ... Hij wist zo rond te springen tot alle cellen bezet waren, en toen bleek nog dat de som van alle cijfers in een rij of een kolom telkens 260 geworden is. Dus aardig magisch. De diagonalen geven andere uitkomsten, daarom wordt het Euler-vierkant niet tot de echte magische vierkanten gerekend.

Computer

Pas met de komst van de computer is een uitgebreider onderzoek begonnen naar magische vierkanten. Zo blijkt dat een 4



Figuur 7

bij 4 exemplaar op 880 manieren te realiseren valt, waarbij getallen die door rotatie of spiegeling uit een andere kunnen ontstaan, niet meetellen. Bij een 5 bij 5 geval loopt dit aantal al op tot 275305224.

Kubus

Er bestaat ook zoiets als een magische kubus. Voor $n = 2, 3$ en 4 zijn er geen mogelijkheden. Een 8 bij 8 exemplaar werd voor het eerst gepubliceerd in 1905. Kort geleden werd een 7 bij 7 voorbeeld gevonden. Het vermoeden bestaat dat er voor $n > 7$ steeds zo'n kubus te bedenken is.

Opgave

Schrijf nu zelf eens de 5 bij 5 en de 7 bij 7 vierkanten uit. Dat moet nu lukken.

Ten slotte

We eindigen met een kubus bestaande uit $4 \times 4 \times 4$ of 64 blokjes. Op alle zes de zijvlakken van zo'n blokje staat steeds hetzelfde cijfer van 1 tot en met 64. Om je het inwendige te laten zien hebben we de onderste drie lagen apart getekend (fig.8). Ga maar na dat hier op alle rijen en kolommen uit de optelling van 4 cijfers steeds 130 als uitkomst verschijnt. Op de diagonalen wordt de som niet 130, dus niet echt magisch!

Auteur: Bob de Jongste

Grootste priemgetal vult 32 pagina's



Wiskundigen hebben met behulp van een supercomputer in Oxford het grootste tot nu toe bekende priemgetal gevonden, zo is bekend gemaakt. Priemgetallen zijn alleen deelbaar door zichzelf en het getal 1. 1, 2, 3, 5, 7 en 11 zijn de eerste priemgetallen.

Het nieuwe priemgetal telt 227832 cijfers, die ruim dertig pagina's computerpapier vullen. Het begint met de cijferreeks 174135906820087097325. Het meest opmerkelijke aan de vondst is, dat het een zogeheten Mersenne-priemgetal betreft. Priemgetallen van dat type, genoemd naar de zeventiende-eeuwse Franse monnik Mersenne, hebben de eigenschap dat ze gebruikt kunnen worden om zogeheten perfecte getallen te berekenen. In perfecte getallen is de optelsom van

de priemfactoren (de priemgetallen waarvan het perfecte getal het produkt is) precies weer hetzelfde getal. Het getal zes is hiervan een simpel voorbeeld. De som van de priemfactoren 1, 2 en 3 is weer precies 6. Mersenne ontdekte vlak voor zijn dood in 1648 de eerste Mersenne-priemgetallen. Inclusief het nieuwe exemplaar zijn er nu 32 Mersenne-priemgetallen bekend. Het perfecte getal dat met de nieuwe vondst is geassocieerd telt 455633 cijfers, aldus de ontdekkers.

Het is niet waarschijnlijk dat de nieuwe vondst grote betekenis zal krijgen voor de wiskundige getaltheorie. De intensieve rekenmethodes zijn echter wel zeer bruikbaar om supercomputers te testen.

Auteur: Jan de Bie

Wiskunde in een televisiekwis

Laatst zag ik op vakantie in de U.S.A. een kwis op t.v. waarin de eindronde het spannendste was. In deze eindronde werd de winnaar voor drie kasten gezet.

Deze kasten waren alle drie afgesloten door een gordijn, zodat de winnaar niet kon zien wat er in een kast verborgen zat. De winnaar wist echter wel dat er in precies één kast een auto op hem te wachten stond. In de andere twee kasten bevonden zich troostprijzen (een strijkijzer of iets dergelijks).

De winnaar van de kwis moest vervolgens één van de drie kasten uitkiezen. Daarna schoof de kwismaster het gordijn van één van de overgebleven kasten open, en wel van een kast waar de auto niet in stond. Nu begon het echte spektakel, want nu moest de winnaar kiezen: ofwel blijven staan en de prijs mee naar huis krijgen uit de kast waar hij al voor stond, ofwel wisselen van kast en zodoende de prijs krijgen die achter de andere kast stond. Publiek en familieleden uit de zaal begonnen naar de winnaar te schreeuwen wat hij doen moest, en de kwismaster deed er een schepje bovenop door de winnaar goed zenuwachtig te maken en aan het twijfelen te brengen over zijn keuze. Had de winnaar ten langen leste zijn keuze gemaakt, dan werd het gordijn van de kast waar hij voorstond opengeschoven (na-

tuurlijk door een bevallige assistente) en was grote vreugde of grote droefenis zijn deel.

Geen moeilijke keus.

Mijzelf verbaasde het getwijfel in dit eindspel ten zeerste, want de keuze is, kanstechnisch gezien, overduidelijk: wisselen van kast!! Ik zal proberen met wat kansrekenen duidelijk te maken waarom wisselen inderdaad de juiste keus is.

Laten we er eerst maar eens van uit gaan dat de winnaar blijft staan voor de kast die hij in eerste instantie heeft gekozen. Dan is de kans op het winnen van de auto gelijk aan de kans dat hij in eerste instantie al de goede kast heeft gekozen, ofwel $1/3$ (de ene juiste kast van de drie mogelijke kasten).

Wisselt hij echter van kast, dan is de kans op het winnen van een auto gelijk aan de kans dat hij in eerste instantie niet een kast met een auto had gekozen, want alleen dan staat de auto in één van de andere twee kasten; maar in de al geopende kast staat hij niet, en dus moet de auto dan wel in de nog niet geopende kast staan. Deze kans is $2/3$: in twee van de drie kasten staat er immers geen auto. En dat is toch nog altijd een ruime 33% meer kans om te winnen dan wanneer hij bij zijn eerste keus blijft staan!!

Als winnaar van deze kwis kun je dus maar het beste al bij voor-



baat voor jezelf de beslissing nemen om van kast te verwisselen: dan is je kans om de auto te winnen het hoogste.

Niet meer dan drie kasten.

Uit oogpunt van het televisie-station dat deze kwis uitzendt is het natuurlijk logisch dat ze niet meer dan drie kasten nemen. De kans om een auto te winnen wordt namelijk groter naarmate er meer kasten zijn.

Ga maar na: als er vier kasten zouden zijn (en de kwismaster na de eerste keuze twee kasten zou openen zonder auto), dan zou de kans om een auto te winnen wederom het grootst zijn als je van kast zou wisselen. Zou je namelijk blijven staan, dan is je winstkans gelijk aan de kans dat

je in eerste instantie al de auto gekozen hebt, ofwel $1/4$. Wissel je echter van kast dan is je winstkans gelijk aan de kans dat je in eerste instantie niet een kast met een auto gekozen hebt, ofwel $3/4$. En $3/4$ (de winstkans bij vier kasten) is nu eenmaal groter dan $2/3$ (de winstkans bij drie kasten). Het is nu eenvoudig na te gaan dat, als het spel gespeeld zou worden met n kasten, je winstkans het hoogst is als je je van te voren voorneemt om van kast te wisselen: deze winstkans is dan namelijk gelijk aan $(n - 1)/n$. Zou je je van te voren voorneemen om te blijven staan bij je eerste keus, dan zou je winstkans slechts $1/n$ zijn.

Auteur: Hans Oomis

Ladenkasten

Meestal worden laden van een ladenkastje allemaal even hoog gemaakt en daarop de handvaten telkens in het midden. Alle handvaten hebben dan onderling ook gelijke afstanden. De foto's tonen een wat afwijkend ontwerp.

Omlaaggaande treffen we hogere laden. De bovenste is erg plat, bestemd voor papier. De onderste is het hoogst; daar kun je nog flesjes rechtop inzetten. Maar ... het oog wil ook wat. Het is natuurlijk niet zo'n fraai gezicht, al die afwijkende maten. Zetten we de handvaten telkens weer in het midden, dan wordt dat effect nog versterkt.

Afwijkende oplossing

Als we het nou eens zo zouden maken dat, omlaag gaande, de afstanden van de handvaten tel-

kens met eenzelfde bedrag verder uit elkaar zouden komen. Als je er dan schuin van boven opkijkt, lijkt dat een fraaie oplossing, temeer omdat door de perspectiefvertekening de afstanden dan meer gelijk lijken.

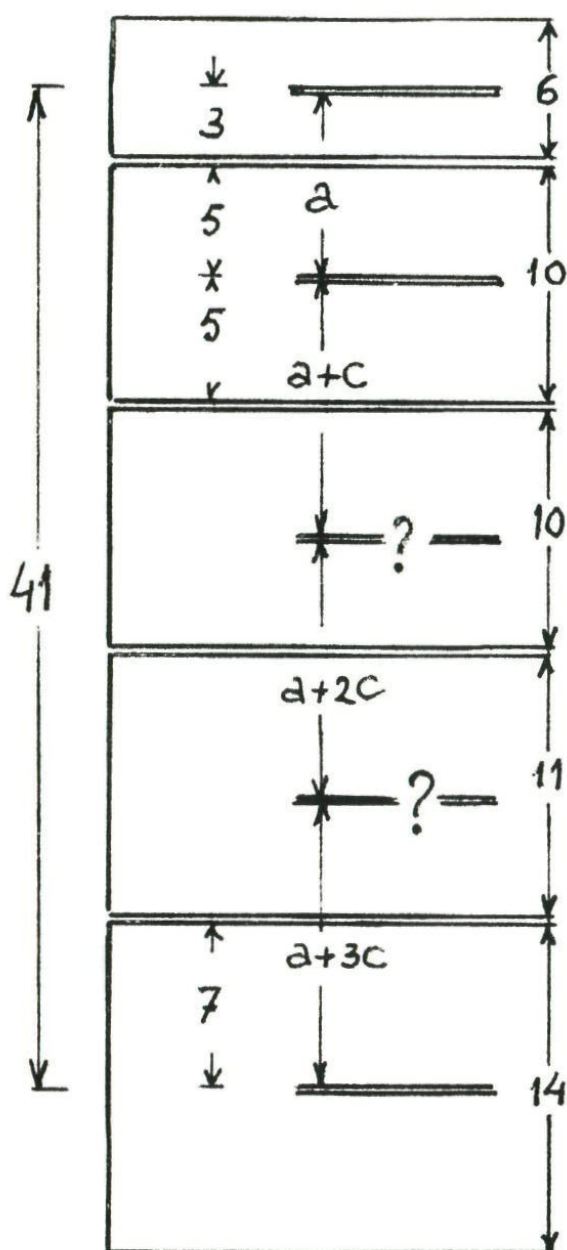
Toen we het ontwerp gerealiseerd hadden, zagen de toeschouwers niet eens dat de verschillende laden niet even hoog waren!

Ontwerp

Het is nu aan de wiskundigen om dit idee in getallen om te zetten. We verwaarlozen even de minimale spleten tussen de diverse laden.

De vijf laden hebben hoogten: 6, 10, 10, 11 en 14 cm. We verstrekken onszelf nog wat gegevens, niet teveel en niet te weinig.





We beginnen met het bovenste handvat gewoon middenop te zetten en evenzo bij de onderste lade.

Stel nu dat we de afstand tussen de beide bovenste handgrepen op a stellen en de constante toename per afstand op c . Dan worden de afstanden respectievelijk: a , $a+c$, $a+2c$ en $a+3c$.

De enige vergelijking wordt dan:
 $(a)+(a+c)+(a+2c)+(a+3c)=41$
 of $4a+6c=41$

Maar dat betekent dat we nog één van beide variabelen vrij kunnen kiezen. Zo zouden we kunnen besluiten om ook bij het op één na bovenste laadje het handvat op het midden aan te brengen, zodat geldt: $a = 8$.

De vergelijking gaat dan over in:
 $32 + 6c = 41$ of $6c = 9$
 of $c = 1,5$.

En daarmee is het probleem opgelost. De afstanden worden omlaaggaande:
 $8 - 9,5 - 11 - 12,5$.
 En dat is samen 41.

Misschien lijkt dit hele verhaal wat overdreven, maar als je echt van plan bent 1000 van deze ladenkasten in serie te ontwerpen, is een beetje wiskunde niet overbodig.

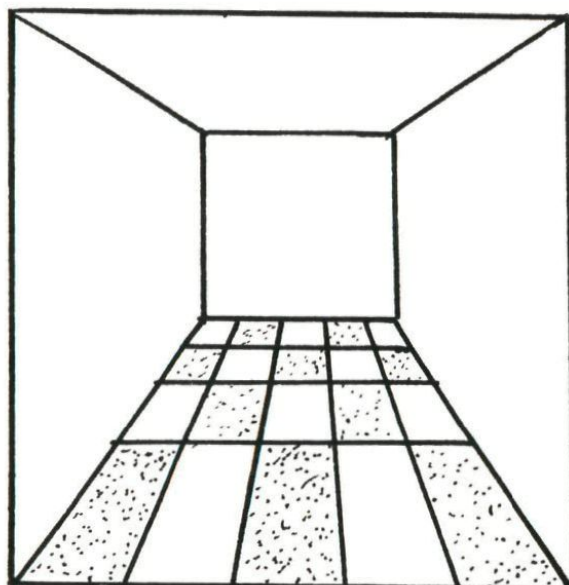
Spleten

De laden sluiten natuurlijk niet perfect op elkaar. Er moeten kleine spleten over blijven, anders gaat de zaak open noch dicht. Moet je nu bijvoorbeeld bij een spleetbreedte van 2 mm de hele berekening opnieuw opzetten? Zijn de gevonden uitkomsten nog bruikbaar als we het idee van de rekenkundige rij willen handhaven?

Auteur: Henk Mulder

Zijn die tegeltjes niet veel te lang?

In een boek over perspectief kwam ik een afbeelding tegen van een kamer met een tegelvloer. In figuur 1 is dat schematisch weergegeven. Uit de tekst bleek dat de afgebeelde tegels vierkanten waren. Het valt echter meteen op, dat in de eerste rij de tegels héél lang gerekt zijn en dat kan toch niet! In perspectief moet zo'n tegel toch juist verkort worden weergegeven. Conclusie: deze tekening is perspectivisch onjuist.



Figuur 1

Dit oordeel is echter voorbarig. In figuur 2 is een tegelvloer getekend en loodrecht daarop het tafereel (T) waarop de tegelvloer afgebeeld moet worden. AO stelt de tekenaar voor waarbij O de plaats van zijn oog is.

Om te weten waar de punten B, C en D van de tegelvloer op het tafereel komen, trekken we vanuit O lijnen naar B, C en D. Waar deze het tafereel snijden vinden we de perspectivische afbeelding van deze punten. Zo wordt de zijde BC afgebeeld als het stukje 1 en de zijde CD als het stukje 2. De vraag is nu: kan bij deze perspectivische projectie het stukje 1 groter zijn dan de zijde van een der vierkante tegels, bijvoorbeeld: groter dan BC zelf. Hierboven hebben we intuïtief gezegd: dat kan onmogelijk.

Bekijken we nu figuur 3. Dit is

een deel van figuur 2, namelijk de driehoek AOD en de doorsnede van het tafereel T.

Hier is direct te zien dat het stukje 1 kleiner is dan BC en dat komt overeen met onze intuïtie. In figuur 4 hebben we het oog veel dichterbij het tafereel gezet en nu zien we heel iets anders: het stukje 1 is duidelijk langer dan BC.

De tekening van de vloer met vierkante tegels van figuur 1 hoeft dus helemaal niet in strijd te zijn met de regels van de perspectief.

Toch kunnen we figuur 1 maar moeilijk accepteren als een "goede" afbeelding van de vierkante tegels. En dat is ook de reden waarom elke tekenaar of schilder zo'n standpunt ten opzichte van zijn tafereel vermijdt.

Stand van het oog

Ook in figuur 4 is te zien, dat zo'n stand van een tekenaar ten opzichte van het tafereel erg ongewoon is: hier zou de hoek BOT het weer te geven gezichtsveld begrenzen. En dat is dan wel uitzonderlijk groot: bijna 150° !

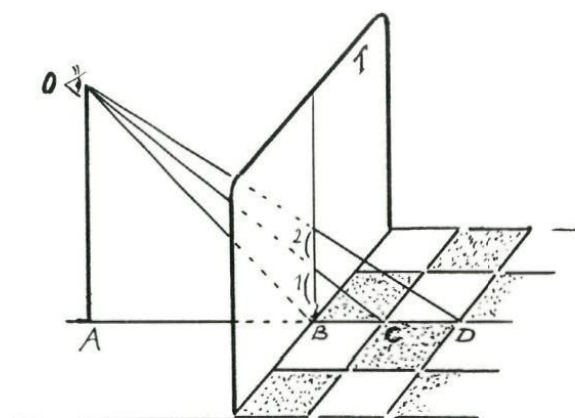
Als we bedenken dat dit bij een kleinbeeldcamera met normale optiek niet groter is dan 50° en dat de door schilders gebruikte beeldhoek meestal niet veel groter is, dan is duidelijk, waarom figuur 1 op het eerste gezicht geen correcte afbeelding lijkt.

Euclides

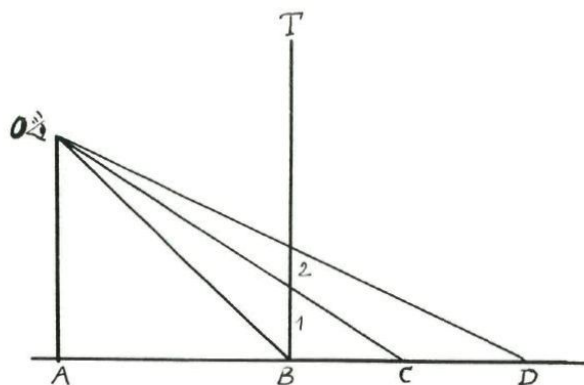
Misschien blijft er toch nog een vraag over. Euclides (de bekendste Griekse wiskundige, die leefde rond 300 v. Chr.), merkt in zijn boek over Optica al op, dat we van twee even grote voorwerpen, het verst verwijderde het kleinst zien. Gaat dat hier nu niet op?

Zeker wel, als we weten dat Euclides hiermee bedoelde dat we het verst verwijderde onder een kleinere hoek zien en dat blijft waar, óók voor die “langgerekte” tegeltjes.

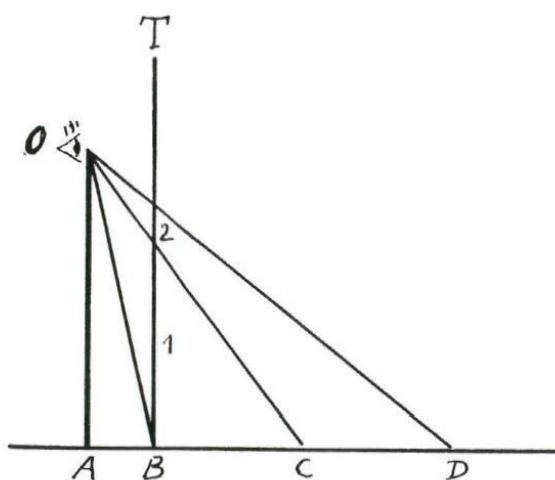
Euclides had het niet over een perspectivische projectie; die was in zijn tijd nog niet bekend.



Figuur 2



Figuur 3



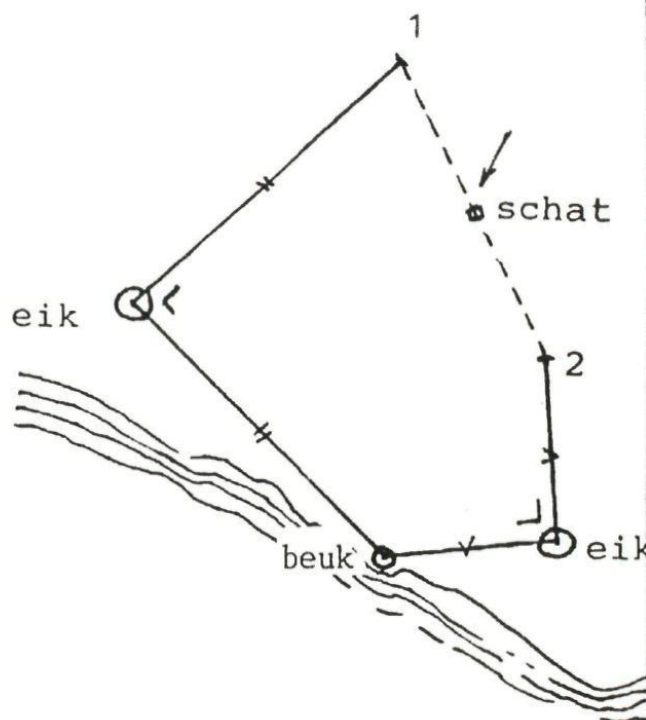
Figuur 4

Schatgravers

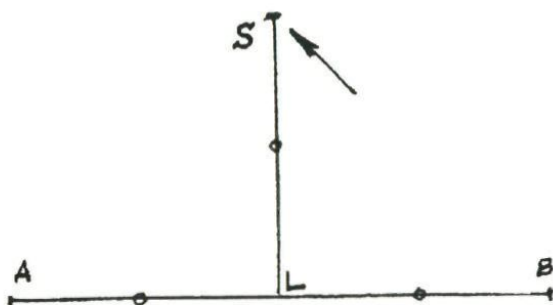


Wie kent niet Piet Hein en de zilvervloot? Maar onze beroemde admiraal had een neef, die ook een berucht piraat was en ook zilverschat vergaarde.

Op een dag toen hij opgejaagd werd door de Spanjaarden, de Engelsen en de Nederlanders, besloten hij en zijn eerste stuurman de buit te verbergen op een onbewoond eiland. Men had geen tijd om een kaart te maken, maar er stonden drie bomen, een beuk vlak aan de zeekant en twee eiken meer land inwaarts. Hij gaf zijn stuurman opdracht een touw te spannen tussen de beuk en de eerste eik en dan de



zelfde afstand in passen af te meten haaks op het touw. Dit is punt 1.



Zij deden hetzelfde bij de tweede eik en zo vonden zij punt 2. Halverwege punt 1 en punt 2 begroeven zij de schat. Een jaar later ging de stuurman zelf naar het eiland terug met de bedoeling de schat in het geheim te lichten. Toen hij bij het eiland kwam ontdekte hij dat de beuk door de zee verzwolgen was met een deel van het strand. Alleen de eiken waren nog overgebleven.

Het eerste moment was hij radeloos. Hoe was de schat terug te vinden? Toen bedacht hij het volgende: span een touw tussen de beide eiken A en B en zet halverwege een touweind, evenlang als de helft van AB, haaks op AB. In het eindpunt daarvan zou de schat liggen. Was dat juist?

Bewijs

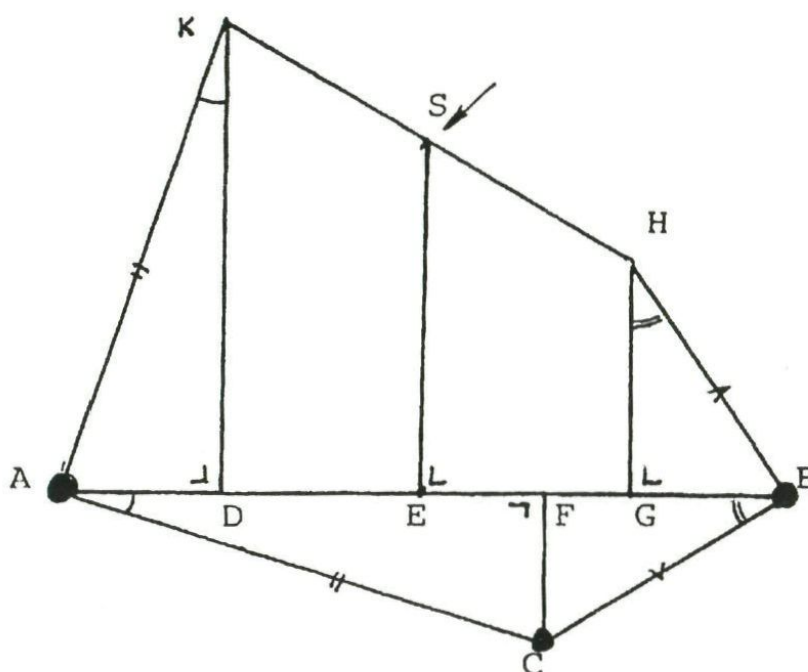
Om het bewijs te leveren, dat de stuurman het bij het goede eind had, tekenen we de situatie zoals hij vóór de stormramp was. A en B zijn de eiken en C is de beuk. In de figuur KACBH laten we uit K en H en C loodlijnen neer op AB. De driehoeken ADK en CFA alsmede de driehoeken GBH en FCB zijn congruent en hieruit volgt dat $GB=FC=AD$. We weten dat $AE=EB$ en derhalve is $AE-AD=EB-GB$ of $DE=EG$.

In het rechthoekige trapezium KDGH loopt ES evenwijdig aan de evenwijdige zijden.

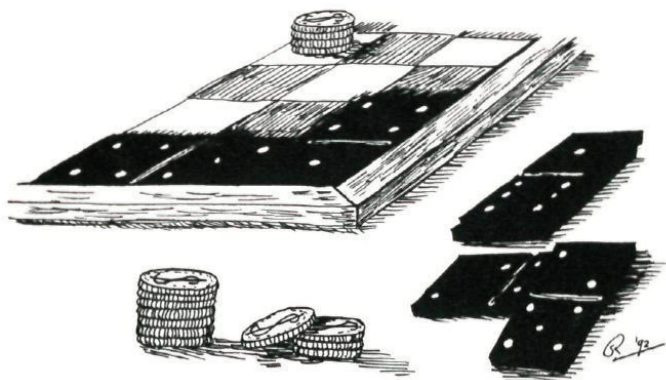
Omdat $DE=EG$ geldt nu ook: $KS=SH$.

In punt S ligt dus inderdaad de schat begraven.

Auteur: Bob de Jongste



Wiskunde western



Het was een warme, broeierige dag toen Mat Puzzles op zijn paard binnen kwam rijden in Tombstone. Het was rustig op straat. Alleen uit de plaatselijke saloon klonk een hoop lawaai.

Benieuwd naar de oorzaak van al dit kabaal stapte Mat van zijn paard, liet het achter bij de drinkbak van de saloon en ging naar binnen.

Het lawaai bleek afkomstig van een tafel waaraan stevig gegokt werd. Het gokspel zelf was Mat onbekend, maar het scheen te draaien rond een schaakbord, een aantal dominostenen en, natuurlijk, geld.

"En, vreemdeling, wat kan ik voor je inschenken?" riep de barman vanachter zijn toog.

"Iets fris," antwoordde Mat, "want ik moet nog rijden!"

Verbaasd zette de barman de fles whiskey, die hij al in zijn handen had, terug, en opende een be-

stofte fles sinas. Mat liep onder-tussen naar de goktafel en ging het spel dat daar gaande was eens staan bekijken.

Wat later kwam de barman met zijn bestelling naar hem toe. "Ik zie dat je nogal geïnteresseerd bent in ons plaatselijke gokspelletje?"

"Dat klopt," zei Mat. "Ik heb namelijk al veel meegemaakt op mijn reizen, maar dit spel heb ik nog nooit ergens zien spelen. Wat zijn de regels ervan eigenlijk?"

"Heel simpel", legde de barman uit. "Je hebt twee spelers nodig: een uitdager en een tegenspeler. De uitdager legt een aantal dollars op een vakje van het schaakbord, en vervolgens legt de tegenspeler evenveel dollars op een ander vakje. Dan moet de uitdager proberen om met de 31 dominostenen die naast het schaakbord liggen de resterende 62 vakken van het schaakbord te bedekken. Zoals je ziet gaat dat net, want één dominosteen kan precies twee vakjes bedekken. Krijgt de uitdager deze 62 vakken niet binnen tien minuten bedekt, dan zijn alle dollars voor de tegenspeler. Krijgt hij het wel binnen tien minuten voor elkaar, dan zijn de dollars voor hem. Je hebt trouwens geluk, want op dit moment is de beste speler van het dorp, Fast Freddie, de uitdager. Moet je maar eens kijken hoe vlug hij steeds de vakken weet te bedekken."

En daarmee had de barman niets te veel gezegd. Waar zijn tegenspelers hun stapeltje dollars ook plaatsten, meestal had Freddie het spel al binnen een paar minuten gewonnen. Bliksemsnel bewogen zijn handen met de dominostenen over het schaakbord, en binnen de kortste keren wist hij steeds de juiste bedekking van het schaakbord te vinden.

"Trouwens," zei de barman na enige tijd, "je glas frisdrank kost anderhalve dollar."

Mats hand verdween in zijn geldbuidel en kwam weer tevoorschijn met al zijn geld: één dollar.

"Nou," zei de barman, "het ziet er naar uit dat ik je bestelling weer mee terug kan nemen!"

"Oh nee, hoor," antwoordde Mat. "Wacht maar eventjes tot ik een paar spelletjes tegen Freddie gespeeld heb!"

De barman barstte in lachen uit. "Hé, Freddie, hoor je dat! Deze vreemdeling hier wil zijn laatste dollar aan je kwijtraken!"

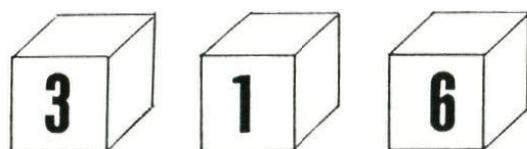
"Laat hem dan maar eens plaats nemen," antwoordde Freddie, en legde een dollar op een vakje van het schaakbord....

Enige tijd later kwam Mat Puzzles, heel wat dollars rijker, weer naar buiten. Achter hem in de kroeg hoorde hij nog iemand zeggen: "Snapte jij hoe hij hem dat nou flikte?" Met een grote grijns op zijn gezicht stapte Mat weer op zijn paard en reed Tombstone uit, de zonsondergang tegemoet.

Snap jij wel hoe Mat hem dat nou flikte? Zo niet, dan kun je de oplossing vinden op blz. 28

Auteur: Hans Oomis

Drie dozen



Kun je deze drie dozen zo naast elkaar zetten dat het driecijferige getal dat dan verschijnt deelbaar is door 7? Er hoort wel een klein trucje bij!

Oplossing op pagina 28

De passertruc



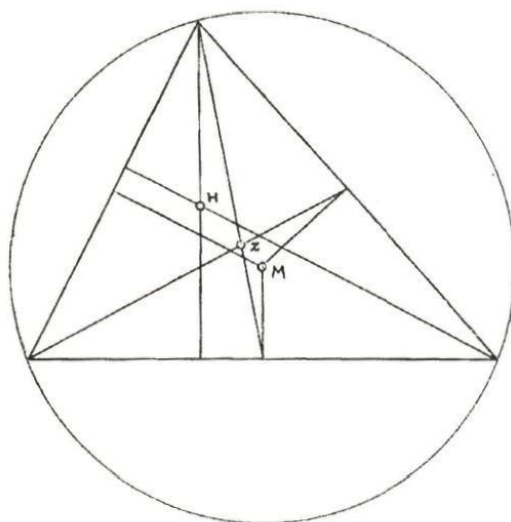
Zou je, alleen door middel van cirkelbogen, een punt kunnen vinden dat op het verlengde van AB ligt, zodat $AB=BP$? Je mag daarbij dus AB niet doortrekken met behulp van een liniaal.

Oplossing op pagina 28.

De rechte van Euler op rijm

In een oud meetkundeboek trof
Frank Roos het verhaal over de
rechte van Euler, een lijn door
M, Z en H.

Ter ere van de Sinterklaastijd, dit
keer een stukje Pythagoras op
rijm.



*In een heel oud stoffig
meetkund' boek
Lees ik over een heel gewone
driehoek.
Het betreft een doodgewoon
figuur,
niets bijzonders en niet duur.*

*Kijk, een driehoek met ongelijke
zijden.
Niets om over uit te wijden.
Een driehoek zonder speciale
eigenschap.
Schijnbaar flauw voor de
wetenschap.*

*Eerst gaat het over het punt M.
Wat weten we dan van hem?
Het is het midden van een kring;
door de hoeken loopt het
cirkelvormig ding.*

*Dan volgt het zwaartepunt, de
tweede van de set.
't Is mooi: de zwaartelijnen gaan
door Z.
De zwaart'lijn deelt de
overstaande zijde
in twee stukken: gelijk van maat
zijn beide.*

*Nu dan letterlijk het hoogt'punt
H
Dat komt Z en H mooi achterna.
Een hoogtelijn snijdt de zij'
loodrecht.
De hoogtelijnen gaan door H,
heus waar, echt.*

*Maar nu volgt er nog een
prachtig wonder.
Dat schrijf ik hier graag nog even
onder.
De punten Z, M en H liggen op
een rechte lijn.
Dat is het wonder in dit zesde
kwatrijn.*

*Toch zijn we er nog niet.
Ik zeg 't maar expliciet:
ZM is half zo lang als ZH
Da's toch wel heel erg gaaf en
prima.*

Euclides wist het al

Om de grootste gemeenschappelijke factor van twee hele getallen te vinden, kun je gebruik maken van een methode die Euclides in de verre oudheid al kende.

Neem bijvoorbeeld twee getallen 161 en 552.
Je gaat dan als volgt te werk.

$$\begin{array}{r} 161 / 552 \setminus 3 \\ - \quad 483 \\ \hline 69 / 161 \setminus 2 \\ - \quad 138 \\ \hline 23 / 69 \setminus 3 \\ - \quad 69 \\ \hline 0 \end{array}$$

Nu is 23 de gezochte factor. Je deelt dus het kleinste getal op het grootste. De rest, mits niet gelijk aan nul, deel je opnieuw op het kleinste getal en je gaat zo door tot de uiteindelijke rest nul wordt. De rest die aan deze nulrest vooraf gaat, is de gevraagde factor. De getallen 161 en 552 zijn dus beide hoogstens door 23 deelbaar.

Zelf doen

Doe hetzelfde eens met de getallen 949 en 1241.

Auteur: Bob de Jongste

Mathemadics

Het Engels leent zich blijkbaar voor prachtige samentrekkingen. Behalve mathemagics is er ook 'mathemadics', met de nadruk op 'mad'. Het woord is geïntroduceerd door Martin Gardner, die in Amerika behalve door zijn boeken vooral beroemd is door zijn puzzelrubriek in het tijdschrift "Scientific American". Wat houdt mathemadics in? Dat is moeilijk uit te leggen. Kijk zelf maar, hier volgen een aantal. De redactie houdt zich aanbevolen voor nieuwe vondsten.

Parallel
optellen
integraal
perumtatie
exponent

Oplossingen

Oplossing Wiskunde-western pagina 24:

Het enige wat Mat als tegenspe-
ler hoefde te doen om te winnen
was het volgende: hij moest zijn
stapeltje dollars steeds op een
vakje leggen met dezelfde kleur
als dat waarop de uitdager zijn
dollars had neergelegd.

Mat had namelijk in de gaten dat
een dominosteen, hoe je hem
ook op het schaakbord legt,
altijd een wit en een zwart vakje
bedekt. Met 31 dominostenen
kun je dus alleen maar evenveel
witte als zwarte vakjes bedekken
(namelijk 31 witte en 31 zwarte
vakjes).

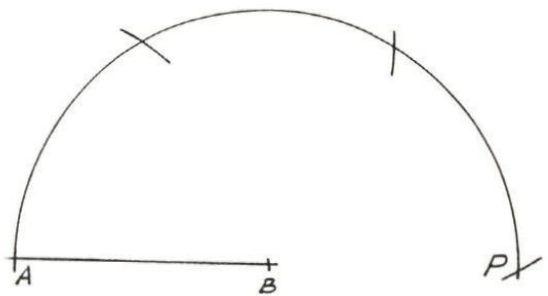
Nu heeft een schaakbord 32 wit-
te en 32 zwarte vakjes. Doordat
Mat er echter steeds voor zorgde
dat de dollars op twee vakjes
van dezelfde kleur kwamen te
liggen moest Freddie met de
dominostenen 30 vakjes van de
ene kleur en 32 vakjes van de
andere kleur bedekken. En dat
kan dus niet!

Oplossing drie dozen pagina 25:

Als je de derde doos op zijn kop
zet, kun je krijgen 931 en dat is
deelbaar door 7 ($931 = 133 \times 7$).

Oplossing passertruc pagina 25:

Door een halve cirkelboog te
trekken met middelpunt B en
straal AB en verder nog drie
kleine boogjes eveneens met
straal AB, kun je P vinden. Kijk
maar of het zo klopt.



Auteur: Bob de Jongste

Bronvermelding

Omslag: stuwdam in
Zwitserland, ANP
Foto stuwdam Bionaz,
Henk Mulder
Cartoon Grootste priemgetal,
Pieter Hogenbirk
Foto Televiesiekwis,
Joop van den Ende Productions
Foto's Ladenkastje,
Henk Mulder

Cartoon Schatgravers,
Pieter Hogenbirk
Cartoon Wiskunde Western,
Carry Oomis

Vormgeving en druk: OMI

PYTHAGORAS wiskunde tijdschrift voor jongeren

Pythagoras is een uitgave van MEMO Media marketing organisatie n.v., en verschijnt zes maal per jaar. Een jaargang loopt van september tot en met augustus.

Redactie: Henk Huijsmans, Henk Mulder, Hans Oomis

Eindredactie: Henk Huijsmans

Redactiesecretariaat: Henk Mulder, Geersbroekseweg 27, 4851 RD Ulvenhout

Medewerkers: Bob de Jongste, Hans de Rijk, Frank Roos, Paul van de Veen.

Uitgever: MEMO n.v., Hengeveldstraat 29, Postbus 9822, 3506 GV Utrecht

Telefoon: 030-736400, Fax: 030-734774

Bank: 69.93.65.937, Giro: 51.39.755

Verantwoordelijk uitgever: Ton Fokker

Inhoud

De straal van de stuwdam	1
Van saai tot fraai	2
Vouwen is ook wiskunde	6
Magische vierkanten	11
Grootste priemgetal vult 32 pagina's	15
Wiskunde in een televisiekwis	16
Ladenkasten	18
Zijn die tegeltjes niet veel te lang?	20
Schatgravers	22
Wiskunde western	24
Drie dozen	25
De passertruc	25
De rechte van Euler op rijm	26
Euclides wist het al	27
Mathemadics	27
Oplossingen puzzels	28
Bronvermelding foto's	28

Nederlandse en Belgische abonnees:

Aanmelden telefonisch, 030-736400

of schriftelijk, MEMO n.v.,

Antwoordnummer 6236, 3500 VC

Utrecht.

Een jaarabonnement is f 25,- of

BF450,-

Wacht met betalen op de factuur.

Bij tussentijdse abbonering ontvang je ook de reeds verschenen nummers van het lopende jaar.

Abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk bij de uitgever is opgezegd.

Tarieven:

Abonnement Pythagoras f 25,- of

BF450,-

Luchtpost toeslag f 10,-

Inclusief Archimedes f 45,- of

BF 800,-

Luchtpost toeslag f 20,-

Losse nummers f 5,- of BF 90,-