

PYTHAGORAS



wiskunde tijdschrift voor jongeren



Bagage in de bocht

Verdwalen, een sport apart

Balanceren met torens

MÉMO |

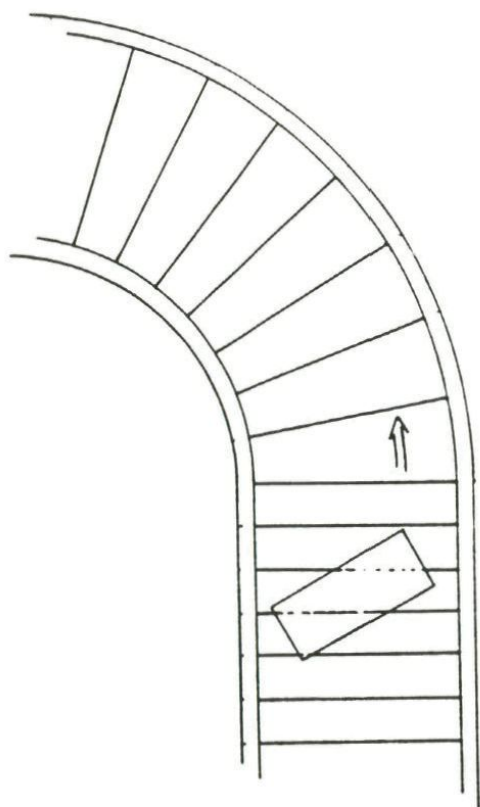
32e jaargang, januari 1993, nr. 3

Bagage in de bocht

Op vliegvelden wordt de bagage van de passagiers op een draaiende band gezet om die zo te distribueren. Het probleem is dat deze band ook bochten moet kunnen nemen. Daar zijn een aantal oplossingen voor.

Eenvoudig

Bochten maken lukt met trapeziumvormige lamellen die daarbij over elkaar schuiven. Op de rechte delen lopen de scheidslijnen van de stroken evenwijdig. In de bochten wordt de trapeziumvorm zichtbaar (fig.1).

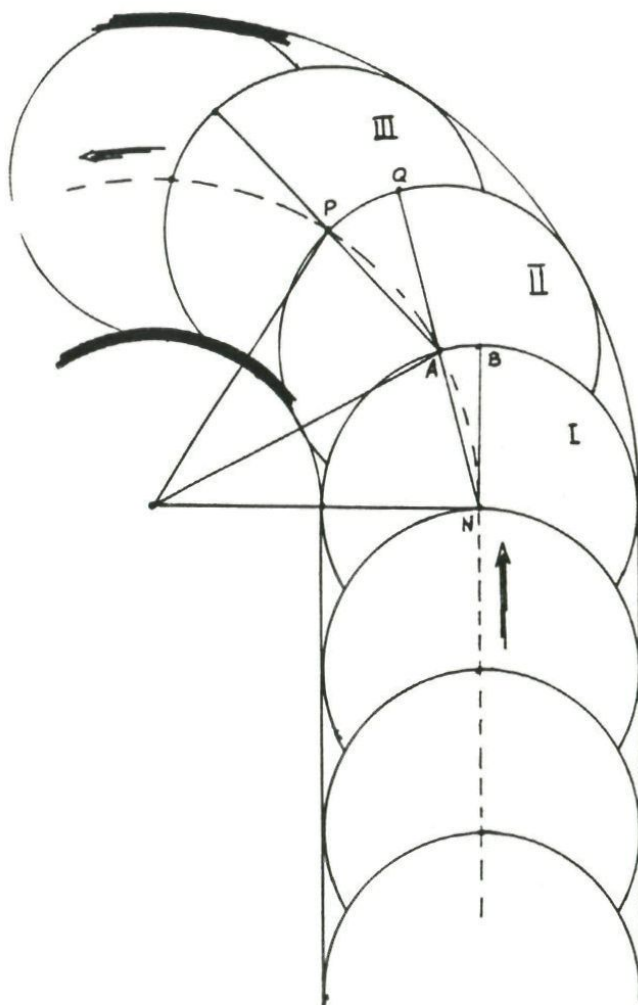


Figuur 1

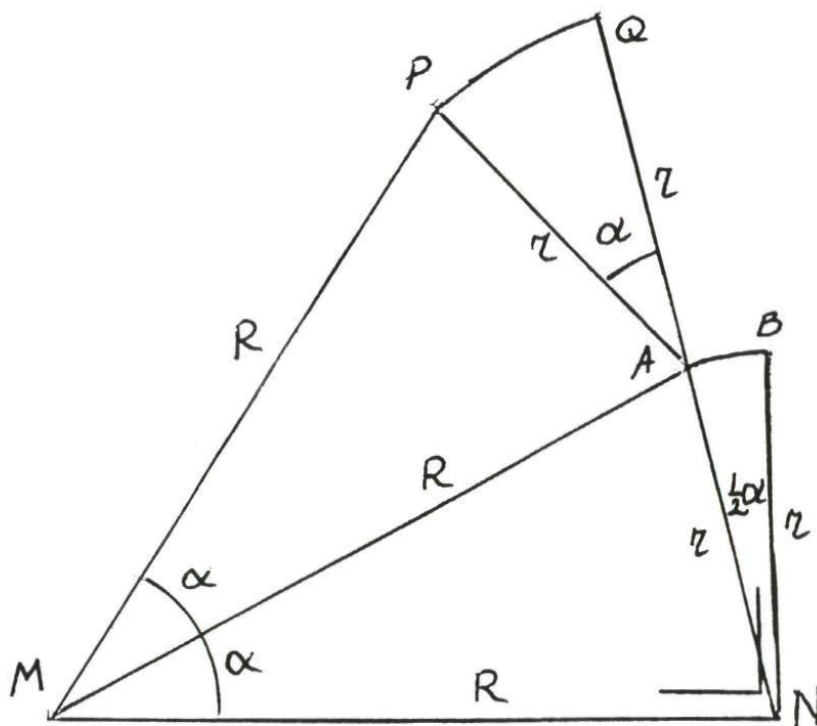
Een nadeel van zo'n constructie is dat de band niet vlak is omdat de stroken elkaar overlappen. Hier volgt een ontwerp voor een strakke constructie.

Cirkelschijven

Over een vlakke ondergrond worden schijven, begrensd door twee cirkels voorgetrokken. De schijven passen tegen elkaar. Ten opzichte van elkaar kunnen ze verschuiven (fig.2). Daarvoor moeten de begrenzende cirkels wel dezelfde straal hebben. Anders kunnen ze bij verschuiving in de bochten niet tegen elkaar



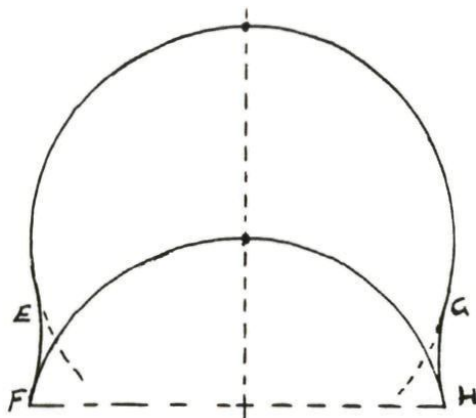
Figuur 2



Figuur 3

blijven passen. De middellijnen ervan zijn even groot als de breedte van de transportband. We gaan nu uit van een ontwerp waarbij de binnencirkel door het middelpunt van de buitencirkel gaat. De straal van de bocht $MA = R = 80 \text{ cm}$.

Figuur 4



Ontwerp

Wat ons vooral fascineert : hoeveel verschuiven de schijven ten opzichte van elkaar als ze door de bocht gaan? In figuur 2 staat schijf I op het punt weg te draaien. Schijf II is al maximaal verdraaid. AB is de boog waarover II ten opzichte van I is weggedraaid. In figuur 3 is dat beter te zien.

De schaal van beide schijfcirkels

stellen we r en de straal van de bocht R , geteld tot het midden van de transportband. Ga na dat hoek $ANB = \frac{1}{2} \alpha$. De verschuiving AB volgt dan uit de waarden voor r en R . Voor de bandbreedte hebben we opgemeten:

$2r = 80 \text{ cm}$. Denk in de gelijkbenige driehoek AMN de hoogtelijn uit M , dan volgt:

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} r / R = 20 / 80 = \frac{1}{4}$$

$$\text{of } \frac{1}{2} \alpha \approx 0,25 \text{ rad.}$$

Voor de boogsector vinden we dan:

$$AB = \frac{1}{2} \alpha r = 10 \text{ cm.}$$

In de bocht

Twee schijven die al beide in de bocht zitten zijn ten opzichte van elkaar over een dubbel zo grote boog verschoven. Ga dat zelf in figuur 3 maar na.

Bij de echte uitvoering worden

de beide cirkelbogen nog verbonden door twee overgangsbogen die beide cirkels raken en ook een straal R hebben.

Zie figuur 4.

Auteur: Henk Mulder

Meting aan een transportband



De eigenzinnige Pythagoras-driehoek

Een pythagoras-driehoek is een rechthoekige driehoek waarbij de lengten van alle drie de zijden door gehele getallen zijn aan te geven.

Bekende voorbeelden zijn:

3 – 4 – 5 en 5 – 12 – 13.

We stellen nu de vraag of het mogelijk is dat in zo'n driehoek een van de zijden een geheel aantal malen een van de anderen is.

Onmogelijk

Stel de zijden a , b en c waarbij c de schuine zijde.

Er zijn dan een drietal mogelijkheden:

$c = pa$ of $b = pa$ of $c = pb$ waarin p een positief geheel getal moet voorstellen. Ga na dat dit inderdaad alle mogelijkheden zijn.

In het eerste geval moet gelden:

$$b = \sqrt{(a^2 p^2 - a^2)} \text{ of}$$

$$b = a \sqrt{(p^2 - 1)}.$$

In dit geval kan b nooit een geheel getal zijn. Immers $p^2 - 1$ is nooit een kwadraat, anders zouden er twee opvolgende natuurlijke getallen bestaan die beide kwadraat zijn.

Overige gevallen

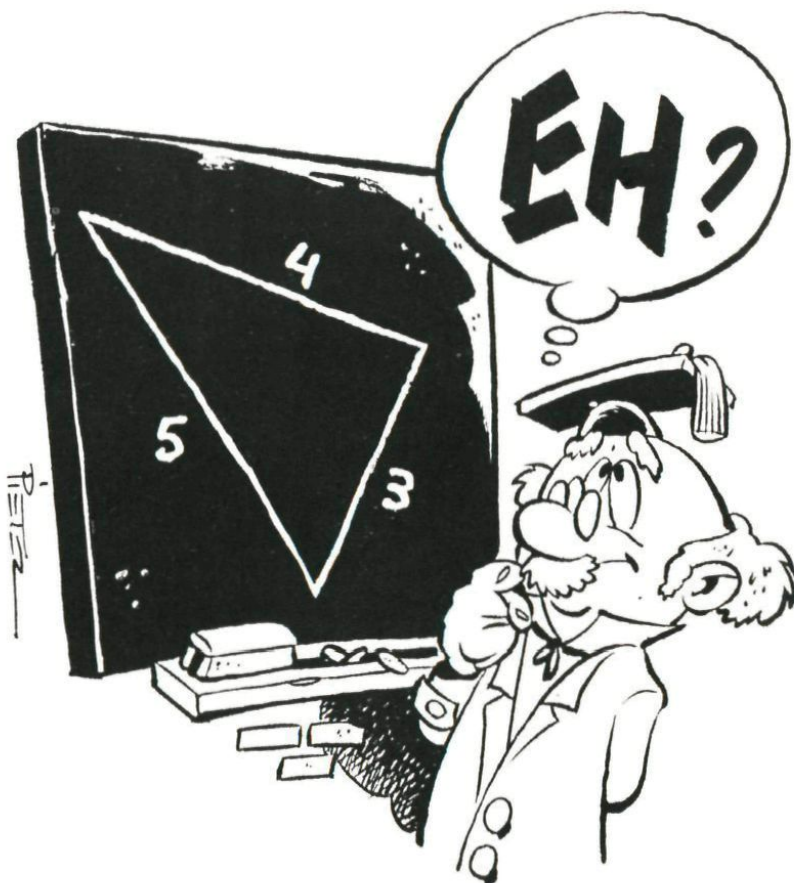
Ga nu zelf na dat ook de twee volgende veronderstellingen vast lopen.

Samenvattend: In een pythagoras-driehoek kan een zijde nooit een geheel aantal malen een andere zijn.

Dus nooit bijvoorbeeld:

3 – 15 – n , waarin n een natuurlijk getal is.

Auteur: Frank Roos



Van cent tot miljonair

Als je 1 cent op de bank zet tegen een rente van 4% dan heb je na een jaar 1,04 cent. Bepaald geen bedrag om mee op vakantie te gaan.

Na 2 jaar is je bezit gestegen tot $1,04 \times 1,04$ of 1,08 cent. Nog weinig geschikt om de bloemetjes buiten te zetten. Na n jaar is je rijkdom $(1,04)^n$. Hoeveel jaar moet je wachten om je geld te verdubbelen?

Daarvoor moet je oplossen:

$(1,04)^n = 2$. Het zal je niet moeilijk vallen om met je rekenapparaat te vinden $n = 17,67$ jaar.

Dus telkens na bijna 18 jaar ben je twee keer zo rijk. Het verhaal dreigt een beetje saai te worden, maar wacht nog even. Heb geduld, op de duur komt er schot in de zaak. Als je ooit 1 miljoen bezit, heb je na bijna 18 jaar wel mooi twee miljoen en dat lijkt toch aantrekkelijk, niet waar? Maar hoe lang moet je dan wel wachten om aan je eerste miljoen te zijn? Hoe maak je van 1 cent een bedrag 10^6 gulden of 10^8 cent?

Los op: $(1,04)^n = 10^8$. Met je rekenapparaat vind je: $n = 470$ jaar. Dus na 470 jaar is die ene cent gegroeid tot 1 miljoen gulden!

Banco di Roma

Stel eens dat keizer Titus in het jaar 93 nu een 1 cent gezet zou hebben op een speciale rekening op de Banco di Roma tegen 4%



rente. Hoeveel zouden zijn nakomelingen, de huidige Titiaan-tjes, dan nu van hun verre voorvader erven?

Het jaar 93 is inmiddels 1900 jaar geleden. De koperen cent is dan inmiddels 1900 : 17,67 of 107 keer in waarde verdubbeld ofwel gestegen tot 2^{107} of $1,6 \cdot 10^{32}$ cent of $1,6 \cdot 10^{30}$ gulden.

Gouden aardbollen

We hebben natuurlijk geen flauw idee hoe rijk we inmiddels wel geworden zijn. Wat stelt dit bedrag eigenlijk voor? We proberen onszelf een eindje op weg te helpen.

De goudprijs op de wereldmarkt is 40.000 gulden per kg. De massa van de aardbol is $6 \cdot 10^{24}$ kg. Een beetje rekenen laat zien dat $1,6 \cdot 10^{30}$ gulden gelijk staat met ... 7 aardbollen van puur goud. En dat zoiets uit 1 cent kan komen. Eigenlijk heb je niet zoveel geld nodig om rijk te worden, alleen veel geduld en ... je moet je nakomelingen wat gunnen!

Auteur: Bob de Jongste

Verdwalen, een sport apart

In langvervlogen tijden, toen ons kleine landje nog niet volgeplant stond met richtingsborden ("bewegwijzering" noemt de ANWB dat met een mooi woord), kon je tenminste nog verdwalen. Het was toen nog een ware kunst de weg te zoeken, je te oriënteren.



Figuur 1

Als jongens klommen wij in het bos soms wel eens in een hoge boom om te kijken waar de toren van ons dorp stond. Zo vonden we de richting naar huis. Dat was nog puur avontuur! Nu is het zelfs in het bos of hei niet meer mogelijk te verdwalen. Daarvoor zijn de gebieden te klein, is er te veel verkeer en staan er teveel paddestoelen. Rode en gele paadjes brengen ons weer veilig bij moeder terug. Dat heet dan "geleid toerisme". Efficiënt, maar in de grond van de zaak oer-vervelend. In de VS

kun je hier en daar wildernistochten maken, ware oefeningen in verdwalen en de weg terugvinden.

Als wij nog willen verdwalen zullen we ons moeten behelpen met doolhoven en labirynthen. Ze staan op de kermis en in sommige pretparken tot vermaak van ons allemaal. Manshoge spiegels maken de chaos daarbij compleet. In Engeland zijn in de vorige eeuwen op landgoederen veel doolhoven gemaakt met ligusterbeuken en meidoornhagen. Wie wil oefenen in verdwalen kan daar zijn hart ophalen. Wij zullen ons alvast op papier trainen in deze edele en te weinig beoefende kunst. Ik heb me laten vertellen dat het oudste labirynth op Kreta stond, in het paleis van de legendarische Minotaurus. In het centrum van dat doolhof was deze half mens/half stier opgesloten. Een kaart van dat labirynth staat in figuur 1.

Het is een afbeelding van een zilveren munt uit de stad Knossos op Kreta (derde eeuw voor Christus). Het is allesbehalve moeilijk om de weg naar Minotaurus te vinden. Er zijn namelijk helemaal geen vertakkingen. Je kunt gewoon alsmaar rechtdoor gaan. Hooguit kun je de moed verliezen, want je moet namelijk wel het hele pad aflopen. Een moeilijker klus is het doolhof uit 1680 (fig. 2). De be-

doeling is vanaf de ingang bij de rand in het centrum terecht te komen. Omgekeerd is het dan nog een heel karwei de uitgang weer terug te vinden. In de oudheid hadden ze daar een effectief middel voor: een draad uitleggen. Probeer zelf de weg maar te vinden. Bij zo'n dwaaltocht zijn er eigenlijk twee problemen: doodlopende wegen en omwegen. Beide zaken brengen ons telkens op een vals spoor.

Wanhopige wandelaar

Als we de weg in het doolhof van figuur 2 gevonden hebben lijkt het moeilijk zo'n weg te onthouden. Voor de echte doolhofwandelaar is de zaak veel ingewikkelder dan voor ons, die er als het ware vanuit een helikopter op neer kijken. Zo zie je snel dat een weg dood loopt. De wanhopige wandelaar ziet enkel kronkelige paadjes, muren en heggen. Wie erg sportief wil zijn en zich als wandelaar op figuur 2 wil storten, moet een kaart met een gaatje nemen en daarmee over de doolhoffiguur schuiven. We zouden zo'n wandelaar een eenvoudige kaart mee kunnen geven. Geen plattegrond maar

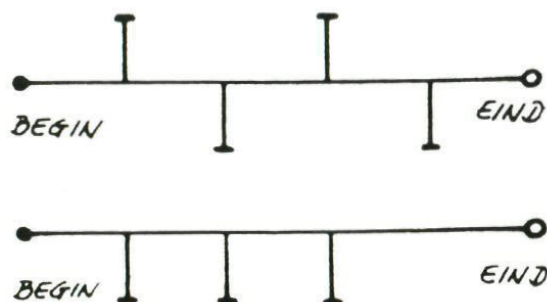
een voorschrift in de stijl van "linksaf", "rechtdoor" enz. In het geval van enkel T-kruisingen kunnen we "niet linksaf" vertalen in "rechtsaf" of "rechtdoor" en omgekeerd. In figuur 3 staat zo'n kaart voor de doolhof uit 1680. Die kaart is wel erg eenvoudig. Een zijstraat met een dwarseind betekent: die richting moeten we niet nemen. "Niet linksaf" is dan gelijkwaardig met rechtsaf of rechtdoor. Controleer



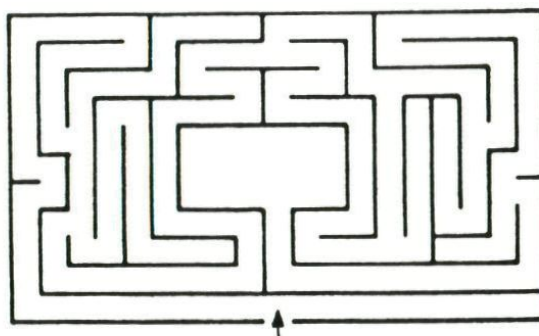
Figuur 2

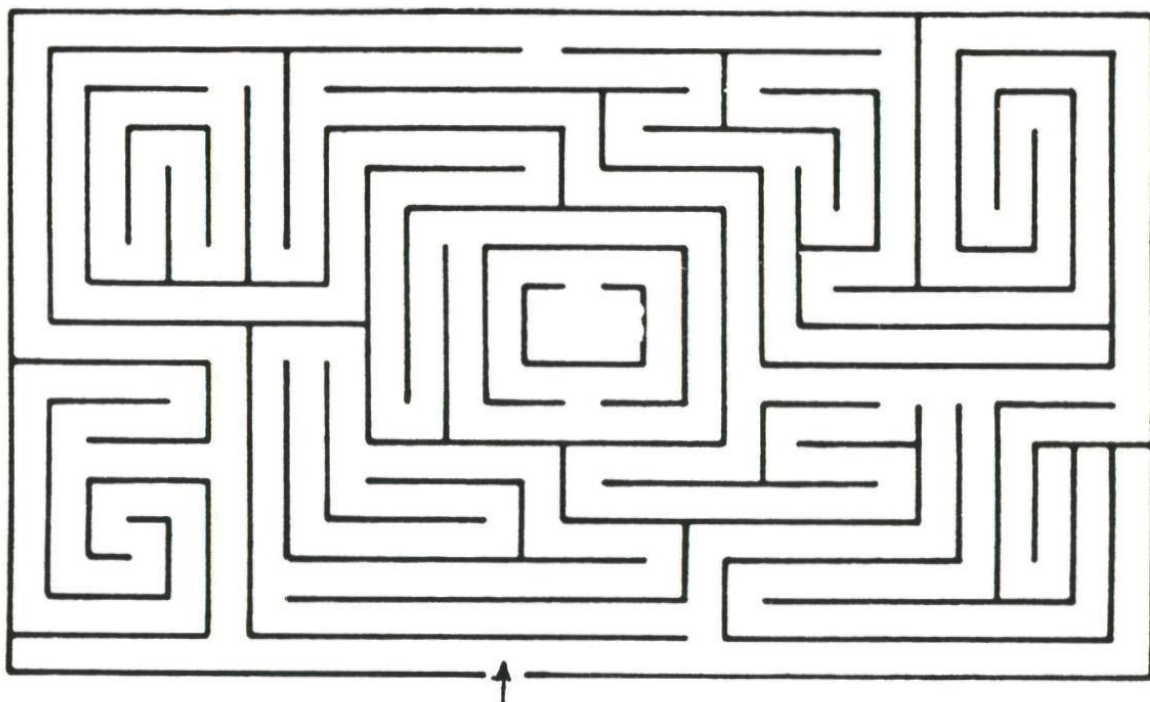
maar eens of deze wegenkaart klopt. Ontwerp nu zelf eens de wegenkaart voor iemand die vanuit het centrum het doolhof weer uit wil. In figuur 4 staat

Figuur 3



Figuur 4





Figuur 5

weer een andere doolhof. Zoek de weg en ontwerp een wegkaart. Dit schone labyrint is te vinden op het landgoed Hampton in Engeland.

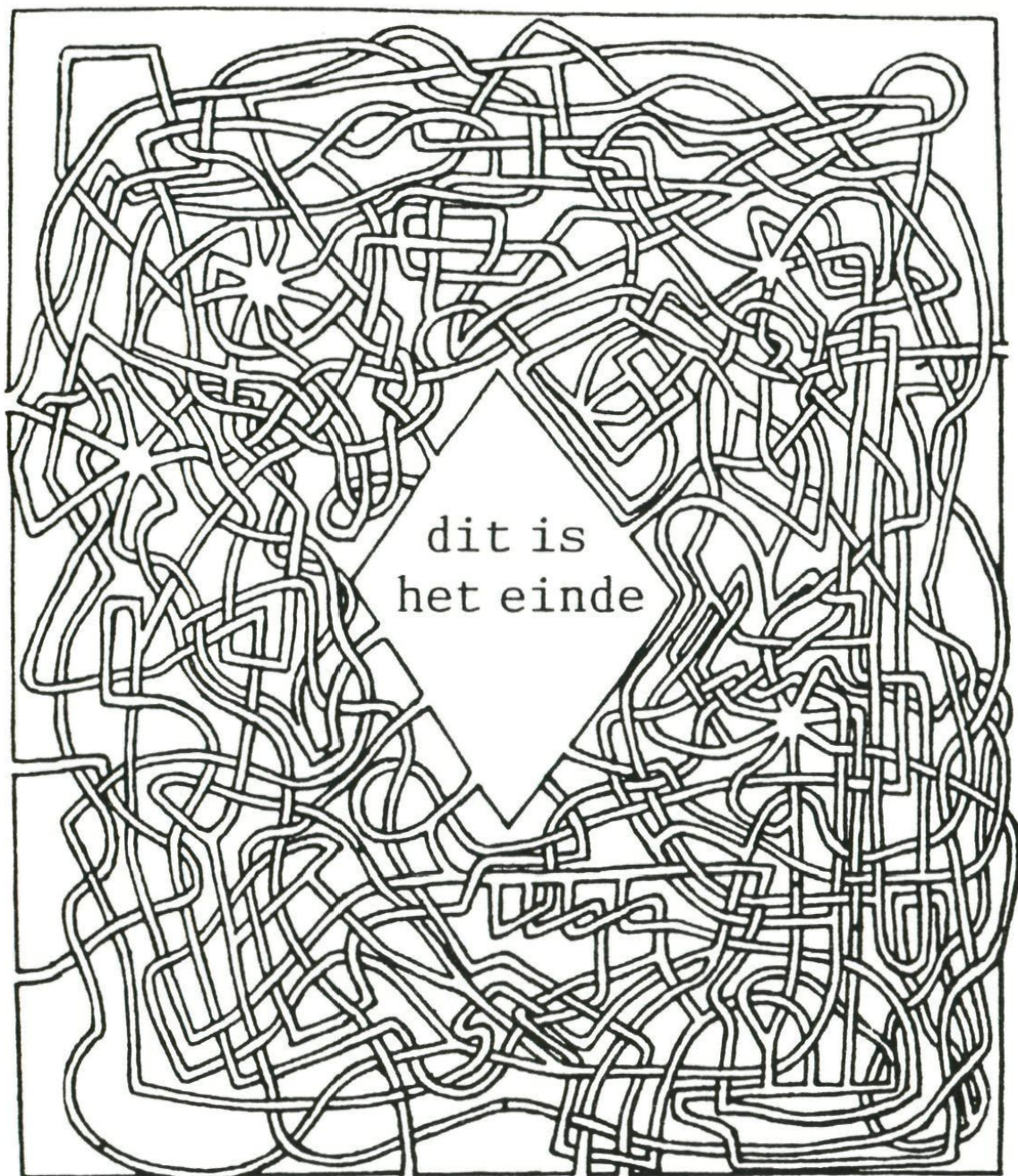
Geen paniek

Er zijn wat eenvoudige spelregels om zonder in paniek te raken door een doolhof - hoe ingewikkeld ook - te wandelen. Meestal wordt in dergelijke situaties het gezonde verstand uitgeschakeld. Niet doen! Enkel op het gevoel af komen we niet erg ver. Het lijkt normaal om in een doolhof midden op het pad te blijven lopen. Dat is nu juist een slechte manier! Om te vermijden dat we rondjes gaan lopen tot we een ons wegen, is het aan te bevelen om bijvoorbeeld steeds langs de linkerwand te lopen. Waar je linksaf kunt gaan moet je dit ook steeds doen. Sla dan ook nimmer rechtsaf! Als je dan doorloopt ga

je het doolhof keurig in- en uit. Pas deze methode steeds toe op de gegeven voorbeelden. Natuurlijk maken we daarbij omwegen, ook doodlopende stukken pikken we mee, maar we komen er! Wie bereid is de benenwagen meer te gebruiken dan zijn hersens heeft hiermee een uitweg. Natuurlijk kunnen we ook consequent steeds rechtsaf gaan, dan lukt het ook!

Nog meer tips

Ook hier hebben doolhofreizigers wat aan: op de kaart van het labyrint kunnen we bij alle doodlopende stukken borden plaatsen: doodlopende weg (fig. 5). Op onze kaarten kunnen we die paden bijvoorbeeld zwart maken. Ook alle lussen, die enkel als omwegen dienst doen, kunnen we zwart aangeven. Bij vertakkingen maken we de langste zijtakken zwart. Maar soms zijn er geen doodlopende we-



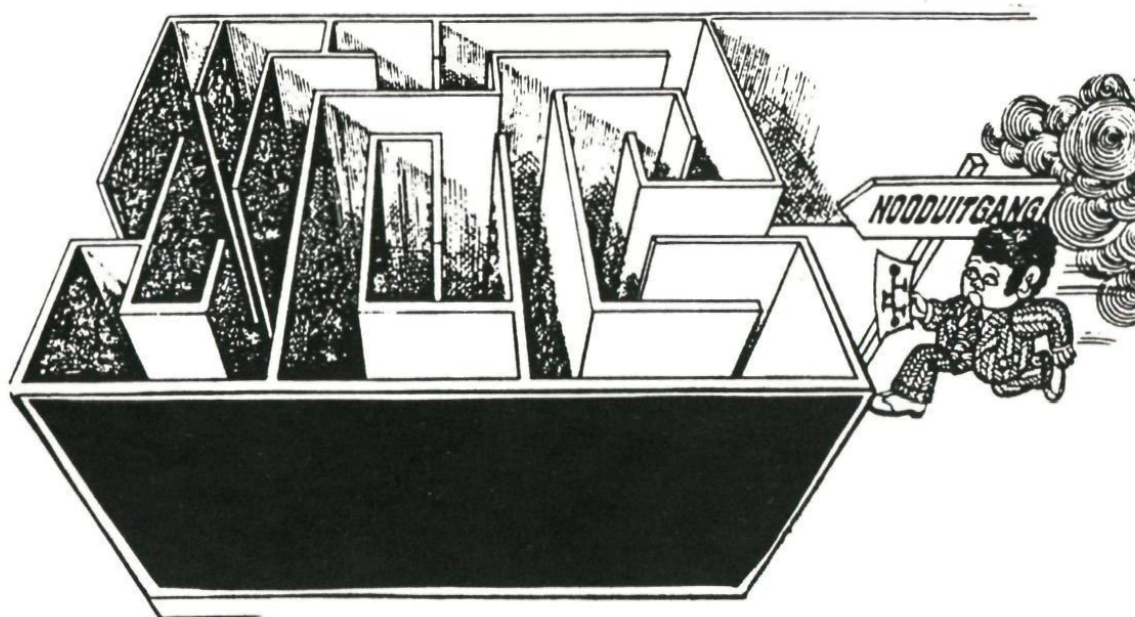
Figuur 6

gen, soms zijn de vertakkingen erg onoverzichtelijk. En hoe te werken als we helemaal geen kaart van het doolhof hebben? Dan resten ons nog deze tips: markeer elke weg waar je al geweest bent. Ga zo'n pad nooit meer in. En houd het dan verder maar op de grondregel: alleen aan de linkerkant langs heggen en muren lopen en niet langs de as van het pad.

Hier nog een doolhof dat als een tegeltableau is aangebracht op het station van de ondergrondse in Londen (fig. 7). Pas het geleerde daar eens toe.

Ook omhoog

De wiskundige Charles Dogson ontwierp in zijn jeugd een driedimensionaal doolhof (fig. 6). Langs zeven wegen kunnen we langs de zijkanten het terrein



Figuur 7

betreden. De bedoeling is om op het centrale plein te geraken. Het bijzondere van deze opgave is dat de nodige viaducten in het

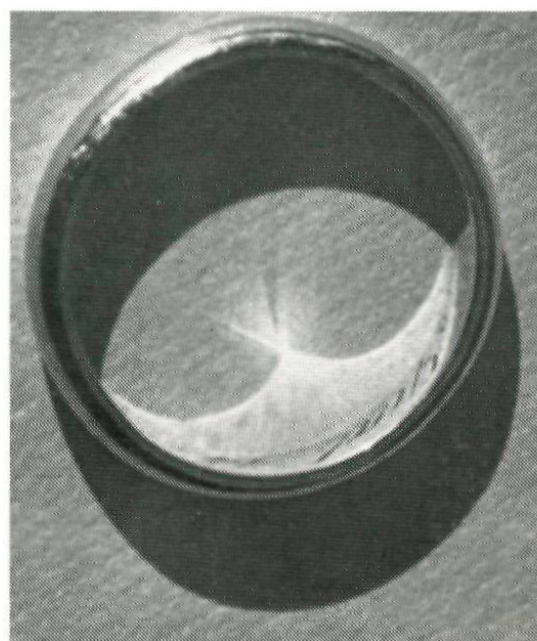
doolhof zitten. Het wordt dus een "ruimte-wandeling".

Auteur: Henk Mulder

Brandlijnen

Op de keukentafel ligt een ring waar zonlicht schuin invalt. We zien hoe het licht convergeert naar een brandpunt (fig.1). Het centrum ligt op een kwart van de middellijn van de ring. Daar gaan de stralen doorheen die dicht bij het middelpunt invallen.

In werkelijkheid is er geen zuiver brandpunt, maar een gebogen "kaustische lijn". Hoe is die al tekenend, in beeld te brengen?



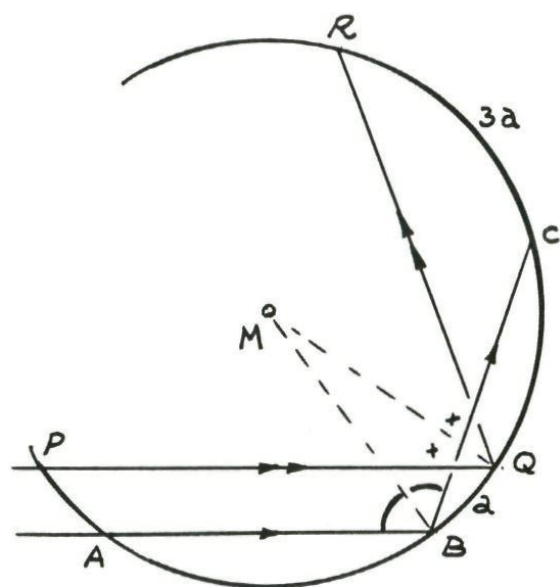
Figuur 1

Constructie

In figuur 2 zijn twee evenwijdige stralen AB en PQ getekend. Die moeten zo reflecteren dat hun hoek van inval gelijk is aan hun hoek van weerkaatsing.

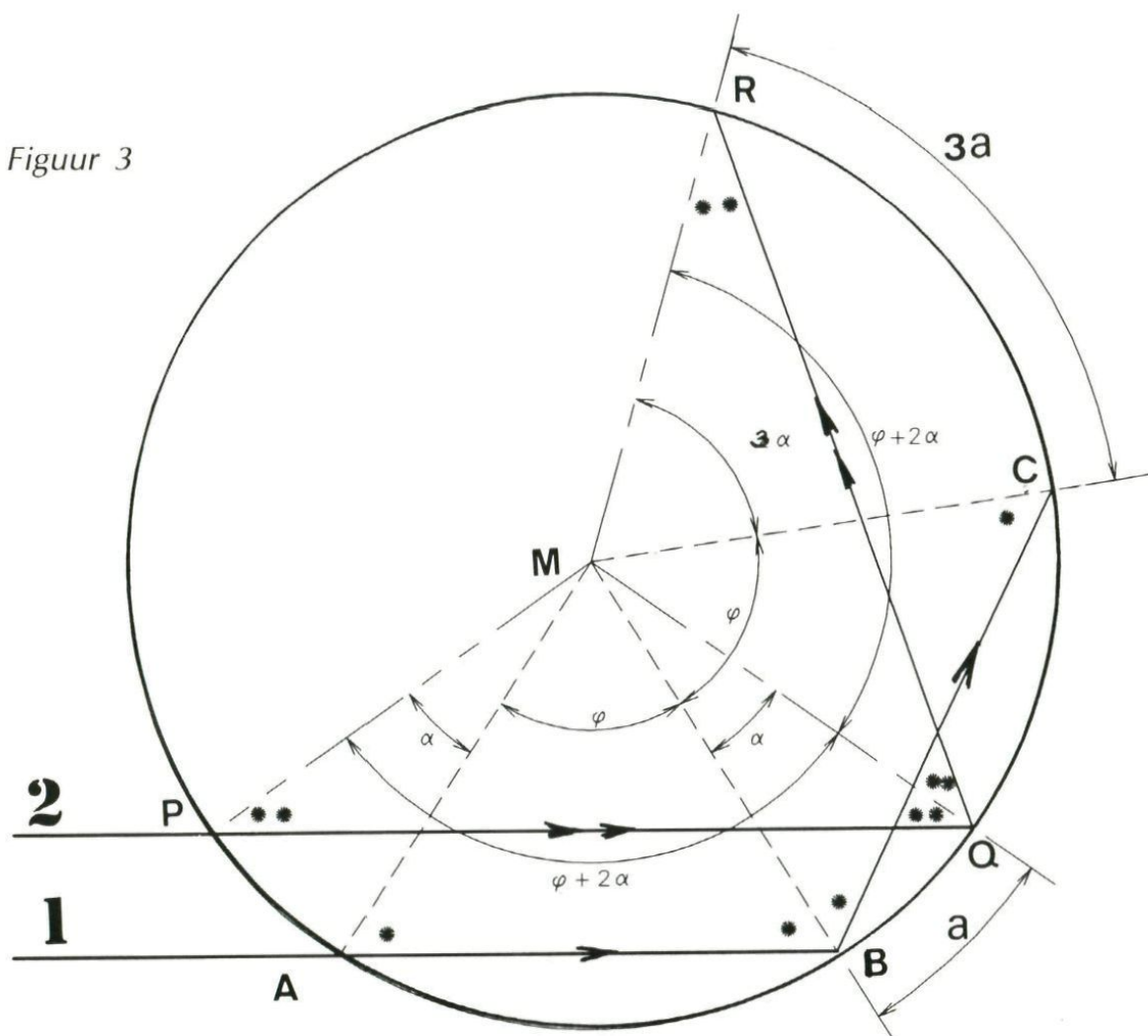
Deze hoeken zijn in de tekening gemerkt. In plaats van hoeken op te meten, zou je ook voor gelijke booglengten kunnen zorgen, dus boog AB = boog BC en boog PQ = boog QR.

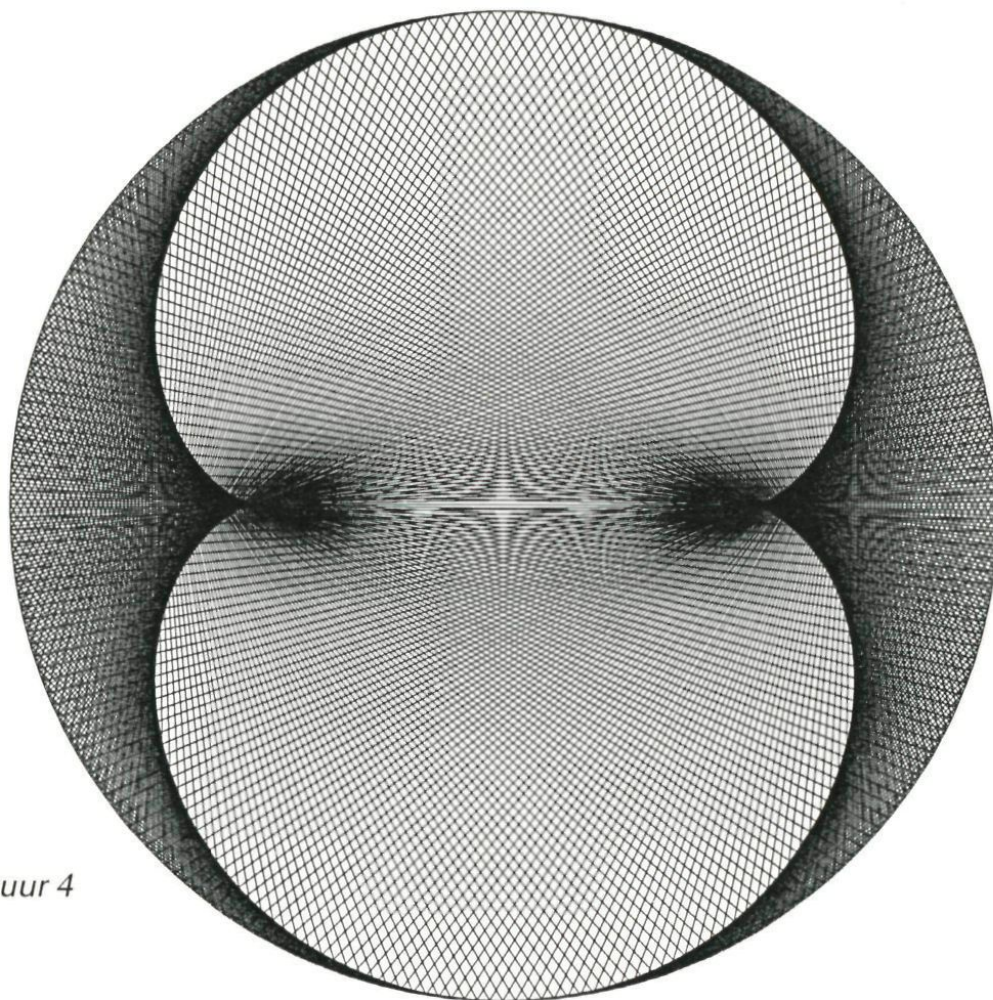
In plaats van de bogen gelijk te stellen, zou je ook de koorden gelijk kunnen maken.



Figuur 2

Figuur 3





Figuur 4

Stelling

Maar het kan nog anders.
Als straal 2 een booglengte a verder invalt dan straal 1, dan zal de teruggekaatste straal ervan de cirkel treffen een booglengte $3a$ verder dan waar de eerste teruggekaatste straal de cirkel snijdt, ofwel
boog $RC = 3 \times$ boog BQ .

Bewijs

Stel hoek $AMB = \varphi$ (fig.3).
De lichtstraal wordt gereflecteerd vanuit B naar C , dus is ook hoek $BMC = \varphi$. Nu treft de tweede lichtstraal de cirkel in Q , waarbij hoek $BMQ = \alpha$.
De hoek $PMQ = \varphi + 2\alpha$.
De teruggekaatste straal komt in

R terecht en dus is ook

hoek $QMR = \varphi + 2\alpha$.

Kijken we nu naar hoek BMR dan zien we:

hoek $BMR = \alpha + \varphi + 2\alpha = \varphi +$ hoek CMR , waaruit volgt:
hoek $CMR = 3\alpha$.

Fraai netwerk

Als we een computer opdracht geven om er telkens voor te zorgen dat boog $RC = 3 \times$ boog BQ , kan op grond hiervan een fraai netwerk getekend worden (fig.4).

We zien hoe de kaustische lijn hier tweemaal is afgebeeld.

Auteur: Paul van de Veen

Hoek in drieën

Tussen de post van de redactie zitten wel eens brieven uit het buitenland, soms zelfs uit Indonesië of Tanzania. Deze keer ontvingen we een artikel uit Oost-Europa. Het kostte veel moeite de tekst eerst in het Engels en vervolgens in het Nederlands vertaald te krijgen. Niets is ons echter teveel om de internationale reputatie van Pythagoras in stand te houden!

Probleem

Een oeroud probleem is de trisectie van een hoek. Velen hebben in de loop van de tijd geprobeerd daarvoor iets uit te vinden met behulp van van passer en liniaal. In 1837 toonde P. Wetzell aan, dat zoiets nooit zou lukken. Sindsdien zoeken meer technisch ingestelde mensen naar manieren om zoiets te realiseren.

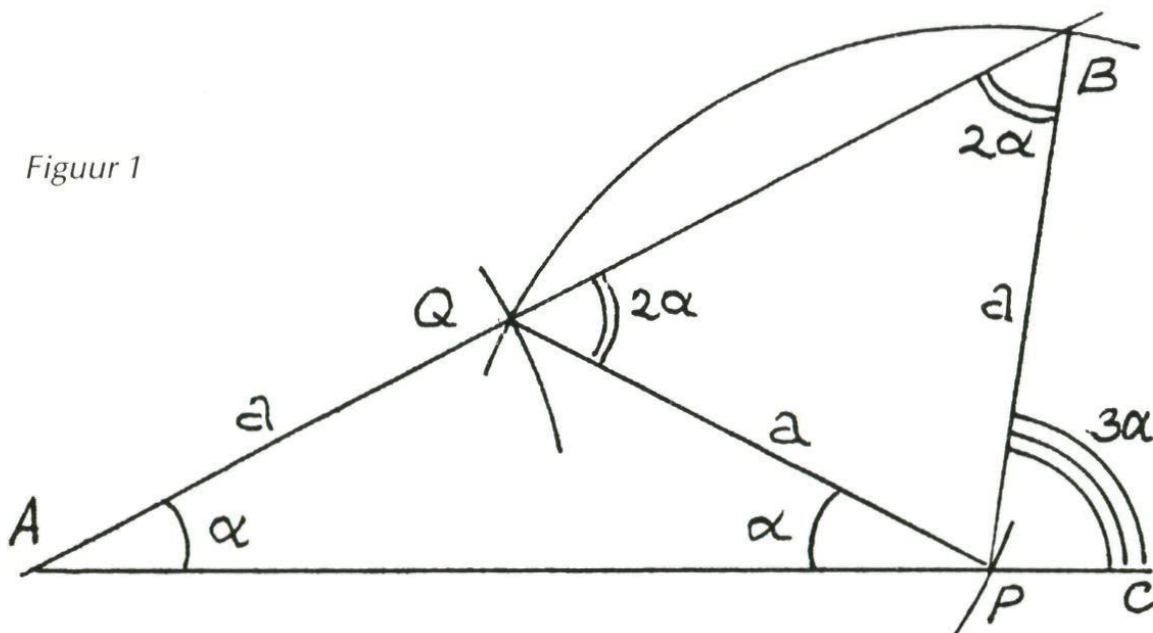
Principe

In figuur 1 tekenen we een hoek $CAB = \alpha$. Pas op een been een willekeurig stuk AQ af. Prik in bij Q en cirkel hetzelfde stuk af op het andere been. Trek PQ . Prik in bij P en cirkel om naar B . Trek PB . De bewering luidt nu: hoek $CPB = 3\alpha$. Het bewijs is eenvoudig. De buitenhoek bij Q is 2α , evenals hoek B . In driehoek APB is hoek CPB weer buitenhoek, waardoor geldt: hoek $CPB = 3\alpha$.

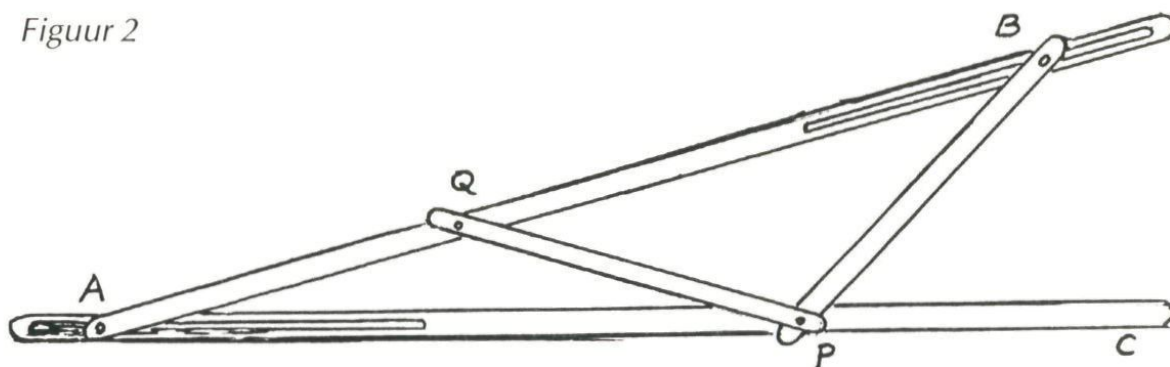
Mechaniek

Op basis hiervan is een mechaniek te maken. In figuur 2 zijn P en Q vaste draaipunten. De punten A en B zijn ook draaipunten maar kunnen tevens schuiven door middel van gleuven in beide benen van hoek A .

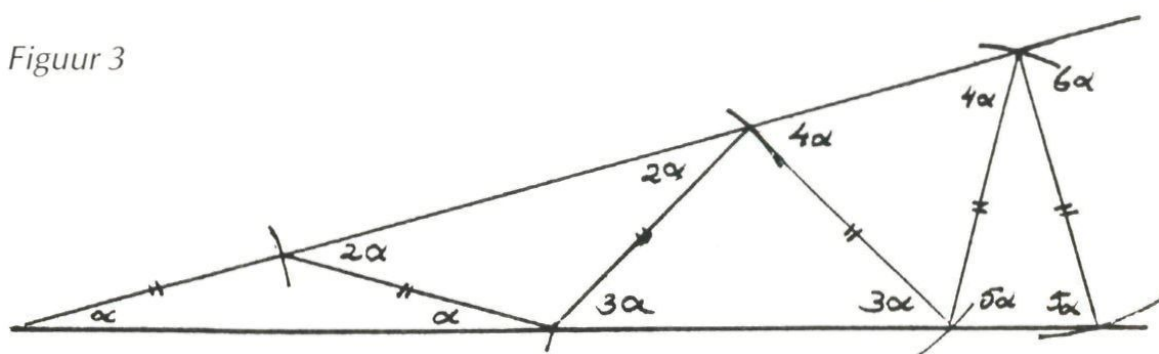
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3



Werkwijze

Als je nu een zekere hoek in drieën wilt delen, zorg dan dat hoek BPC daarmee samenvalt. Een drie keer zo kleine hoek vind je dan bij A.

Grenzen

De eerste hoek mag niet al te groot worden, anders werkt de mechaniek niet meer. Welke hoek lijkt je de grootst toelaatbare? Waarom zou je zelf niet

zoiets maken en ermee experimenteren? De volgende vragen kunnen ook gesteld worden: kun je een stompe hoek ook zo in drieën verdelen? Lukt het misschien met langere gleuven? In figuur 3 is aangegeven hoe je het principe uit kunt breiden voor andere verdelingen. Waar komen telkens de draaipunten en waar de gleuven?

Auteur: Branislav Cabrio

Balanceren met torens



Figuur 1

Lego is een goed middel om allerlei fraaie dingen te maken, en niet alleen voor kinderen! Wij gebruiken het om torens te bouwen. We bouwen ze met blokken met lengte 2 cm, breedte 1 cm en hoogte 1 cm. Maar laten we eerst definiëren wat we hier onder een toren verstaan: een toren is een stapeling van een aantal blokken. Op elk niveau is maar één blok. Elk blok kan maar op drie manieren op het vorige blok eronder geklikt worden: er precies bovenop, half naar links uitstekend of half naar rechts.

In figuur 1 staan alle torens van hoogte 3 in vooraanzicht getekend. Je kunt nu alle torens van hoogte 4 tekenen. Trouwens, hoeveel torens zijn er van hoogte 5? Als we een toren neerzetten zijn er twee mogelijkheden: hij valt om of hij blijft staan.

Welke torens van figuur 1 vallen niet om?

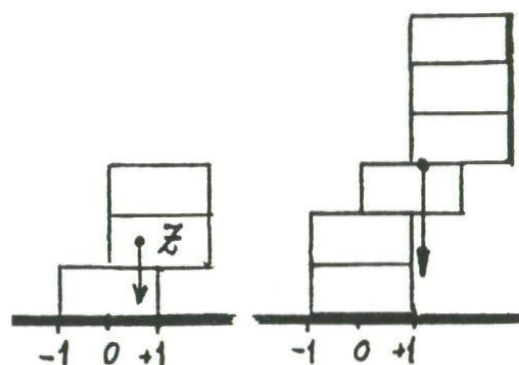
Er zijn een paar twijfelaars bij....

Evenwicht

We brengen een x- en een y-as aan en we plaatsen iedere toren op de x-as tussen -1 en +1 (fig.2). De oorzaak van het eventueel omvallen moeten we

zoeken in de ligging van het zwaartepunt (Z). Het zwaartepunt van een toren heeft een x- en een y-coördinaat. De x-coördinaat van Z is het gemiddelde van de x-coördinaten van de zwaartepunten van van alle blokken waaruit de toren is opgebouwd. Hetzelfde geldt voor voor de y-coördinaat. Het zwaartepunt van het blok stellen we precies in het midden. Als de x van punt Z van de hele toren groter is dan 1, dan werkt de zwaartekracht rechts van het rechthoekpunt van het basis-blokje en gaat de toren kantelen. De y-waarde van Z is dus van geen belang voor het al dan niet omvallen. Deze blijft daarom vanaf nu buiten beschouwing. De x van Z noemen we x_z .

Figuur 2



Voor de linkertoren van figuur 2 vinden we:

$$x_z = \frac{1.0 + 2.1}{3} = \frac{2}{3}$$

Die valt dus niet om.
Hoe groot is x_z bij de rechter toren van figuur 2?
Wat wordt de conclusie?

Regel

We kunnen nu wel inzien dat een toren blijft staan of stabiel is, als voor de toren geldt:
 $-1 < x_z < +1$. De gevallen $x_z = -1$ en $x_z = +1$ sluiten we uit omdat dan bij de geringste aanraking zo'n toren om zal vallen. Je kunt nu nagaan welke torens uit de figuren 3, 4, 5 en 6 zullen blijven staan. Een beetje rekenen is daarvoor wel noodzakelijk...

Uitwijking

We stellen dat de toren uit figuur 3 een uitwijking 1 naar rechts heeft. De torens in figuur 4 en 5 hebben dan beide een uitwijking 2 naar links. Zo komen we aan onze derde definitie: de uitwijking van een toren is de afstand waarover de toren maximaal uitsteekt, geteld van de rand van het basisblok. De uitwijking is steeds een natuurlijk getal. Dat

stabiliteit en uitwijking heel wat met elkaar te maken hebben, zal spoedig blijken.

Monotoon buigend.

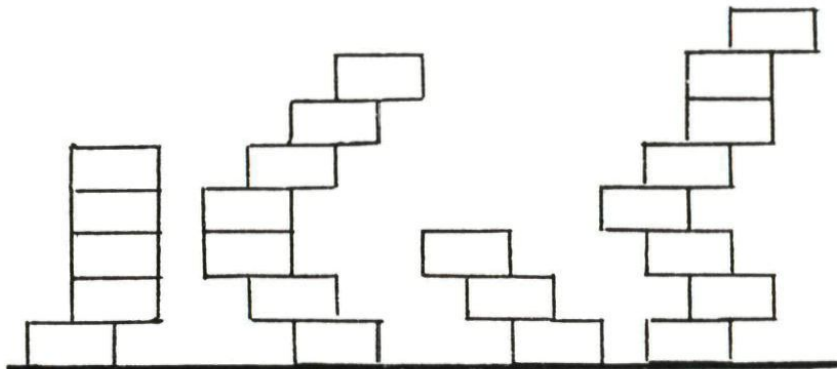
Een toren is monotoon naar rechts buigend als ieder blokje precies of rechts boven op het onderliggende blokje geklikt is. Zo voldoet de middelste toren van figuur 1 ook aan deze definitie! Nu is ook duidelijk wat een monotoon naar links buigende toren is. Welke torens uit figuur 1 voldoen aan deze definities?

Probleem:

Hoe hoog moet een monotoon naar rechts buigende stabiele toren minstens zijn om een uitwijking 9 te hebben? Hoe zal die toren er dan uitzien?

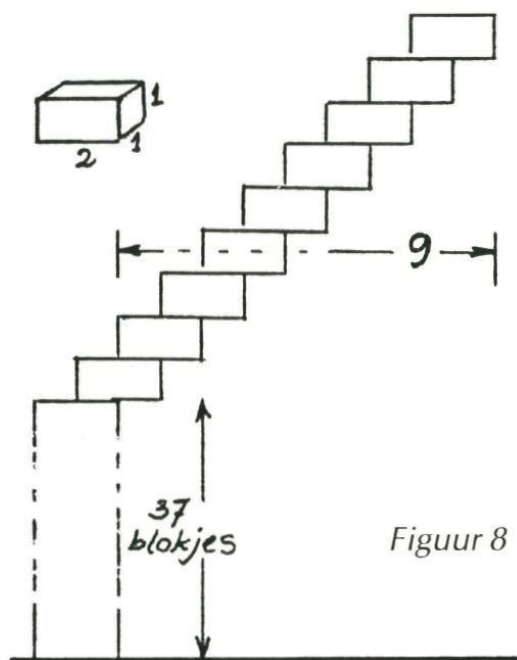
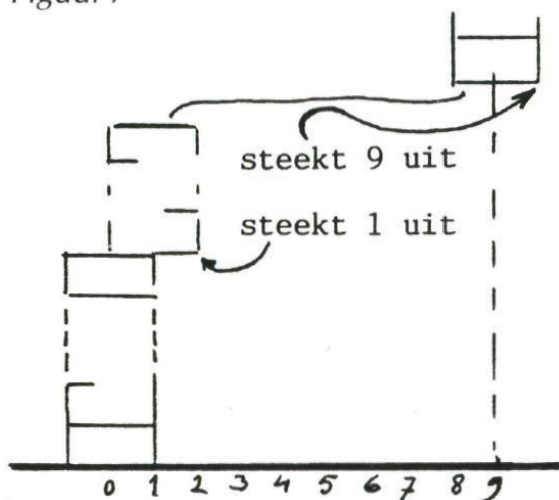
Oplossing:

Bouw een stapeltje blokjes, allemaal centraal op elkaar. Ga verder met telkens volgende stapeltjes, die steeds een half blokje naar rechts verspringen (fig.7). Duw alle blokjes op elkaar, één verspringen naar rechts en een stapel van b stuks erop en zo verder tot we 9 verspringen.



Figuur 3, 4, 5 en 6

Figuur 7



Figuur 8

De hoogte van de toren wordt dan:

$$a + b + c + d + e + f + g + h + i + j$$

(10 stapeltjes).

Hoeveel stuks moeten er dan in dat stapeltje? Het wordt snel duidelijk dat de oplossing van figuur 8 de beste is. Dat betekent een eerste stapel recht omhoog en dan telkens maar één blokje verspringen. Maar uit hoeveel blokjes moet het recht omhooggaande deel opgebouwd zijn zonder dat het geheel omvalt? We bepalen het aantal a in de grondtoren. We berekenen x_z .

$$x_z = \frac{0 \cdot a + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + \dots + 8 \cdot 1 + 9 \cdot 1}{a + 9}$$

$$\text{of}$$

$$x_z = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 8 + 9}{a + 9} = \frac{45}{a + 9}$$

Als $x_z < 1$ dan $a + 9 > 45$ of $a > 36$ dus minimaal 37.

De hoogte van de toren is dan $37 + 9 = 46$.

Algemeen

Nu kan er een algemene regel gesteld worden voor het geval dat de stabiele monotoon naar rechts buigende toren een uitwijking u heeft. Dan ontstaat de vergelijking:

$$x_z = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + u}{a + u} = \frac{\frac{1}{2} u (u + 1)}{a + u}$$

Voorwaarde: $a + u > \frac{1}{2} u (u + 1)$

of $a > \frac{1}{2} u (u + 1) - u$

of $a > \frac{1}{2} u (u - 1)$ dus a minstens

$\frac{1}{2} u (u - 1) + 1$. De hoogte van de toren wordt dan:

$\frac{1}{2} u (u - 1) + 1 + u$

of $\frac{1}{2} u (u + 1) + 1$.

Superstabiel

Het probleem is nu opgelost: monotoon naar rechts, uitwijking 9. Maar er is nog een variatie mogelijk. De toren wordt op

een willekeurige hoogte gesneden, waar hij verspringt. Dan moet het bovenste deel steeds weer stabiel zijn, en minimaal van hoogte.

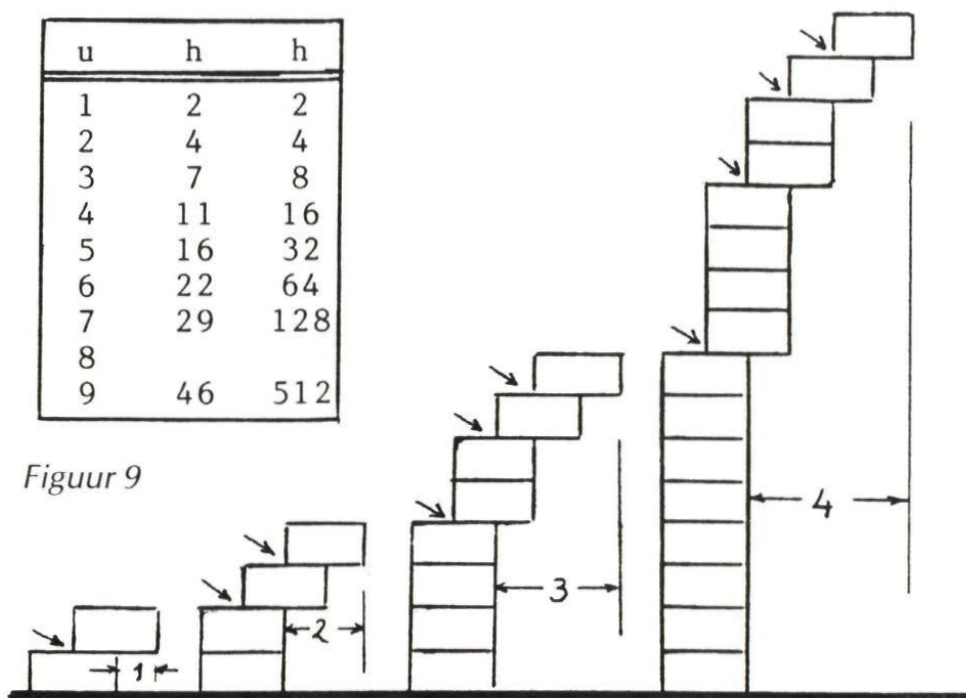
Bij 2 blokjes is de zaak al heel simpel. De tweede toren in figuur 9 geeft de uitkomst bij uitwijking 2. Als deze bij één van de pijltjes wordt doorgezaagd, is het bovendeel stabiel. De derde toren geeft de uitkomst voor uitwijking 3. De truc wordt nu misschien al duidelijk: je neemt een passende basistoren en zet de volgende toren er weer

gewoon bovenop. Maar hoeveel blokjes zitten er in de basistoren? Wie dit allemaal verder uit wil werken, kan even vooruit. In de tabel (fig. 9) staan de uitkomsten. De uitwijking is u , de minimale hoogte voor stabiliteit is h , en tenslotte h' de hoogte van de superstabiele. Bij een uitwijking 9 kom je dan uit op 512 blokjes. De uitkomsten bij $u = 8$ hebben we maar weggelaten. Zo is er tenminste nog enig werk voor u .

Auteur: Freek van Megen

u	h	h'
1	2	2
2	4	4
3	7	8
4	11	16
5	16	32
6	22	64
7	29	128
8		
9	46	512

Figuur 9



$$a^3 + b^3 = c^4$$

Vind twee getallen waarvan de som van de derde machten gelijk is aan de vierde macht van een ander heel getal. En als je zo'n paar gevonden hebt, zou je dan een methode weten om er meer te vinden?

$$A^3 + B^3 = C^4$$

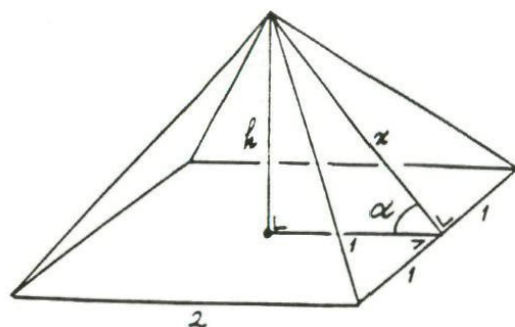
Oplossing op pagina 27

Magische getallen in piramide



De grote piramide van Cheops in het oude Egypte heeft de vorm van een regelmatige vierzijdige piramide.

Het grondvlak ervan is een vierkant en de zijvlakken zijn gelijkbenige driehoeken, die allemaal dezelfde hoek met dat grondvlak maken. De projectie van de top op het grondvlak valt dan samen met het middelpunt ervan. De vorm van de piramide wordt bepaald door de hoek α tussen het grondvlak en de zijvlakken. Alle regelmatige vierzijdige piramiden met dezelfde hoek α zijn dus gelijkvormig.



Figuur 1

Fantasieën

Een tiental jaren geleden werden we verrast door allerlei bespiegelingen rond die piramidevorm. Er werden plastic modellen verkocht. Als je daarin een dode rups legde, kwam die weer tot leven, een bot scheermesje werd weer scherp en vlees erin bedierf niet meer ...

Deze praatjes vonden hun oorsprong in het feit dat de mummies in de Egyptische piramide er zo puntgaaf bijlagen. Overigens, in latere jaren werden er betere mummies gevonden en niet in een piramide!

Men ging ervan uit dat de afmetingen en speciaal de verhoudingen een rol zouden spelen bij die magische werkingen.

Uit metingen aan de piramide zelf volgde: $\alpha = 52^\circ$.

Waarom 52° , that was the big question!

Taylor

Taylor geeft in zijn geschriften een mogelijk antwoord. Hij stelt: de hoogte van de piramide verhoudt zich tot de omtrek van het grondvierkant, als straal en omtrek bij een cirkel.

Omdat het om verhoudingen gaat, stellen we voor het gemak de halve zijde van het vierkant op 1. Verder stellen we de hoogte van het lichaam h en van de zijvlakken x .

Dan geldt nu: $h/8 = \frac{1}{2\pi}$ of $h = 4/\pi \approx 1,273$.

Verder: $x^2 = 16/\pi^2 + 1$ of $x \approx 1,619$.

Daaruit volgt: $\sin \alpha = h/x \approx 0,786$ ofwel $\alpha \approx 52^\circ$.

En dat klopt heel aardig met de metingen aan de steenmassa. Je moet het maar verzinnen.

Herodotus

Overigens in de verre oudheid deed de Griekse geschiedschrijver Herodotus ook al een bewering over de mogelijke verklaring voor de keuze van de verhoudingen.

Hij stelt: de oppervlakte van een opstaand zijvlak is evenveel als die van een vierkant met zijde h .

In ons schrift: $x = h^2$ en verder geldt nog $x^2 - 1 = h^2$.

Dus $x^2 - 1 = x$ of $x^2 - x - 1 = 0$ met als positieve oplossing:

$$x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 1,618$$

en $h = 1,272$.

Dus $\sin \alpha = h/x \approx 0,786$ of $\alpha \approx 52^\circ$.

Ook dat zou kunnen. Maar wat zouden de Egyptische bouwers zeggen als we ze het nog konden vragen? Wat dacht u: toeval!

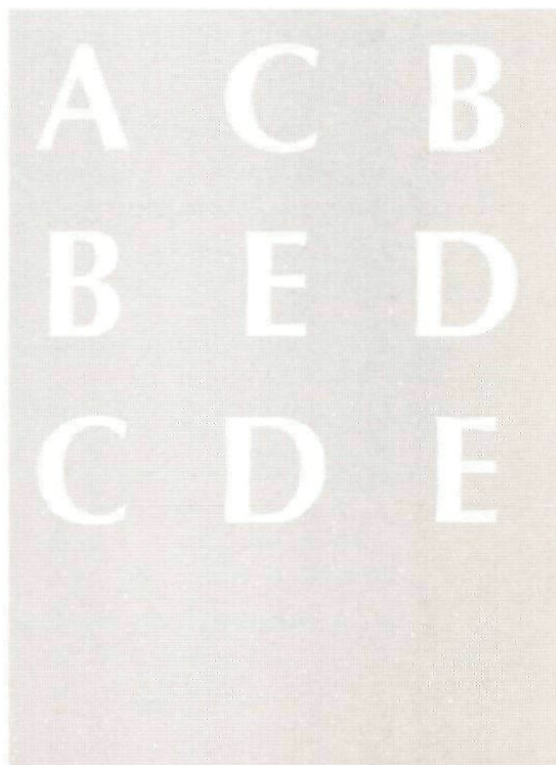
Auteur: Bob de Jongste

Letters en cijfers

We nemen een getal van vijf verschillende cijfers, vermenigvuldigen dat met 4 en krijgen als uitkomst weer een vijfcijferig getal, maar alleen in omgekeerde volgorde. Welk getal bedoelen we?

$$\begin{array}{r} \text{ABCDE} \\ \times 4 \\ \hline \text{EDCBA} \end{array}$$

Auteur: Hans den Braven
Oplossing op pagina 28



Plooi in tentdak



Op de foto is een primitieve tent te zien, gemaakt van een rechthoekig stuk plastic.

We leggen dit vlak op het gras en zetten twee punten aan een korte zijde met haringen vast. Dan brengen we de beide andere hoekpunten enigzins naar elkaar toe en zetten die punten ook vast. Vervolgens duwen we met een stok het midden aan de voorkant omhoog en doen datzelfde op een centraal punt, meer naar achteren. Zo verschijnt een dakconstructie en hebben we een eenvoudig bivak gefabriceerd. Het lijkt op een lichaam bestaande uit een gelijkbenige driehoek

en twee rechthoekige trapezia. De opening krijgt ook de vorm van een gelijkbenige driehoek. Het is opvallend dat, als we de zaak goed opspannen, er in de trapezia in één van beide diagonaalrichtingen forse plooien verschijnen.

Waarom en waarom daar? Het heeft met wiskunde te maken!

Wie schrijft een goed verhaal op om dit verschijnsel uit te leggen? Opsturen naar de redactie in Ulvenhout.

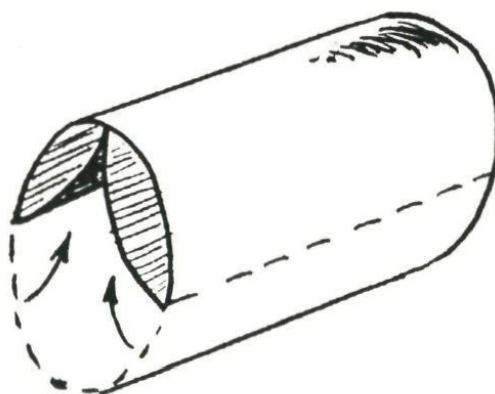
Het beste verhaal zullen we publiceren in een volgend nummer.

Auteur: Henk Mulder

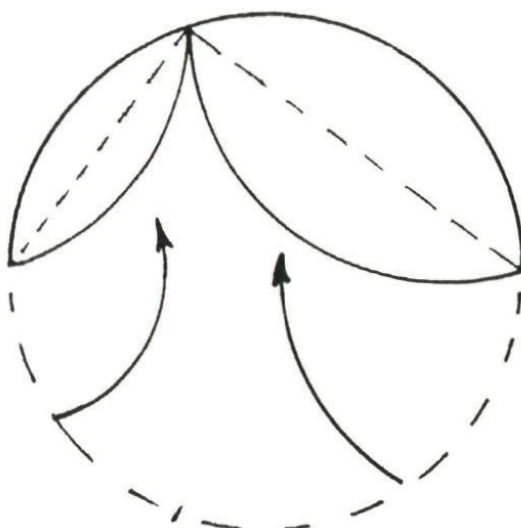
Ingedrukte cilinder

Als je een rol toiletpapier helemaal hebt afgewikkeld, houd je een kartonnen cilindertje over.

Als je zo'n ding dan netjes in elkaar drukt, zonder de boel te verfrommelen, dan verschijnen spontaan drie vouwlijnen (fig.1), waarbij langs twee ervan het karton naar binnen wordt gedrukt en langs een naar buiten. Welke vervorming treedt daarbij op? Welke mogelijkheden zijn er? Experimenteer eerst zelf maar eens.



Figuur 1



Figuur 2

Vlakke cirkels

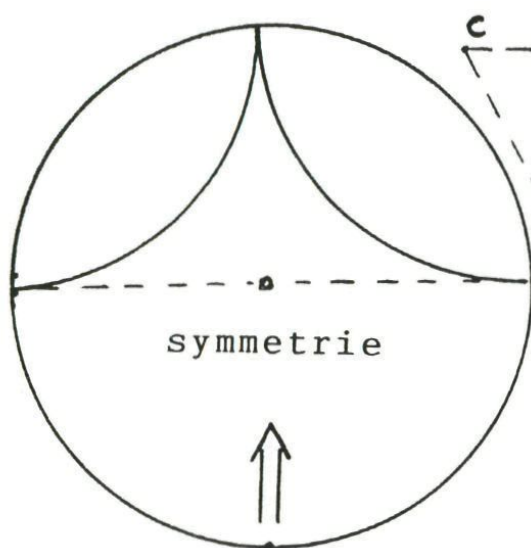
We bekijken de zaak nu verder vanuit het platte vlak. Het gaat dan om een drietal cirkelbogen (fig.2). De omtrek van de drie bogen samen is juist een hele cirkel en ... de omtrek van de twee naar binnen gebogen delen moet gelijk zijn aan die van het resterende deel en wel een halve cirkel. Waarom?

In figuur 2 hebben we de koorde bij de betreffende bogen getekend. Deze zijn steeds symmetrieassen van een tweetal bogen. Daaruit volgt dat bij correcte aansluiting, de tegenover elkaar liggende vouwlijnen op een afstand liggen gelijk aan de middellijn van de cilinder. De gestippelde symmetrieassen staan daarom ook steeds loodrecht op elkaar.

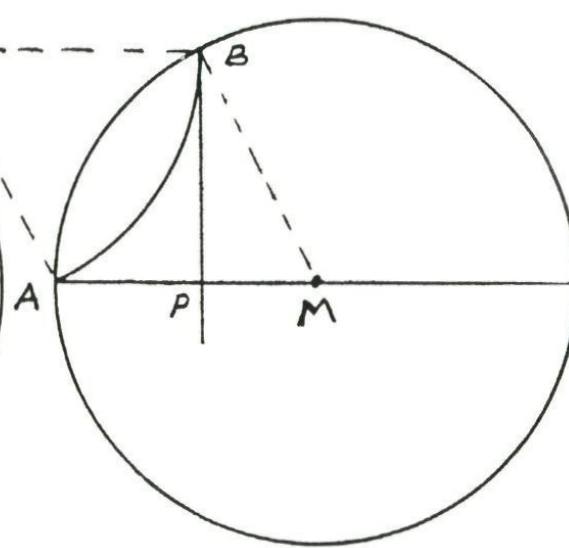
Mogelijkheden

De eenvoudigste vouwwijze is die waarbij de naar binnen gevouwen delen gelijk zijn. De cilinder wordt dan opgedeeld in een halve cilinder en twee kwarten.

In het algemeen zullen beide vouwdelen niet gelijk worden. Overigens is dat wel waarschijnlijk omdat je in het midden duwt (zie pijl). Hoe is het als de bogen verschillend zijn?



Figuur 3

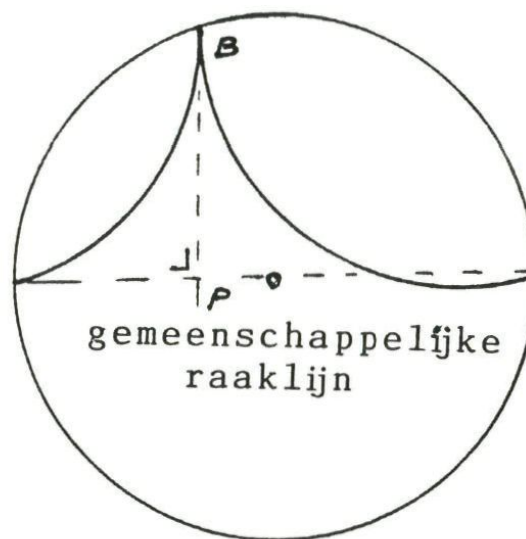


Figuur 4

Stelling

In figuur 4 hebben we een cirkelboog AB ingetekend die kleiner is dan een kwart cirkel. Het middelpunt van de buitenboog is M en van de binnenboog C, waarbij AMBC een ruit wordt.

Dat betekent dat de raaklijn aan de binnenboog in B loodrecht staat op CB en dus ook op AM. Of anders gezegd: de raaklijn aan de binnenboog in B staat loodrecht op AM.



Figuur 5

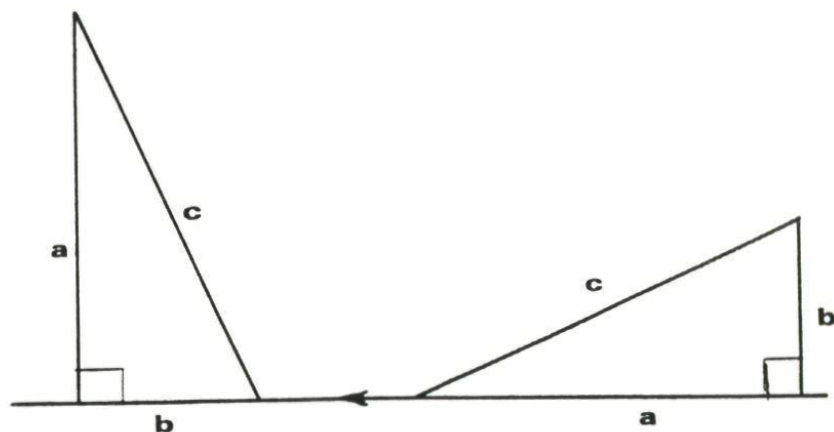
Algemeen

Maar dat heeft gevolgen voor het algemene geval van figuur 5. Daar staan beide bogen ingetekend. Ze moeten elkaar raken in punt B omdat ze daar de gemeenschappelijke raaklijn BP hebben. En daarmee is het raadsel van de ingedeukte kartonnen rol opgelost.

Auteur: Henk Mulder

De stelling van P.

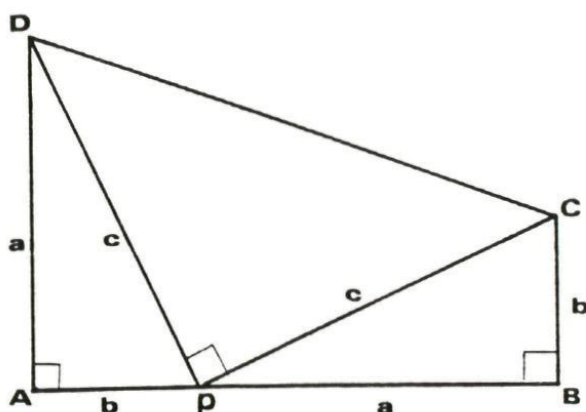
Het zal de lezer niet verbazen dat in ons tijdschrift dat de naam PYTHAGORAS draagt, nog al eens een bewijs van de beroemdste stelling uit de wiskunde voorkomt.



Figuur 1

Hier een bewijs met weinig rekenwerk en weinig hulplijnen. Neem twee gelijke rechthoekige driehoeken met zijden a, b en c . Zet ze op één lijn zoals aangegeven in figuur 1. Schuif ze vervolgens tegen elkaar tot ze een gemeenschappelijk punt P hebben. Trek DC . Het is niet moeilijk om in te zien dat bij P een rechte hoek verschijnt (fig. 2). Zo wordt trapezium $ABCD$ opgebouwd uit drie rechthoekige driehoeken met oppervlakten: $\frac{1}{2} ab$, $\frac{1}{2} c^2$ en nog eens $\frac{1}{2} ab$.

Figuur 2



Het trapezium heeft een oppervlakte gelijk aan de hoogte maal de halve som van de evenwijdige zijden.

Dus geldt:

$$\frac{1}{2}(a+b)(a+b) = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}ab$$

Als je dit uitwerkt, kom je vanzelf uit op:

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ en daar gaat het om.}$$

Zelf doen

Trek nog eens lijnen door D en C , elkaar snijdend in Q , zodat $ABQD$ een rechthoek wordt. Deze is dan opgebouwd uit vier rechthoekige driehoeken. Kun je nu, zonder de trapezium-formule te gebruiken, de stelling van P nog eens bewijzen?

Auteur: Hans de Rijk

In het circus



Een klein Parijs circus "les Jongleurs" had een voorstelling gegeven, die totaal 1200 FF had opgebracht.

De toegangsprijzen waren: volwassenen 50 FF, senioren 20 FF en kinderen 1 FF (ongeveer 34 cent).

Acheraf wilde de directeur wel weten hoeveel personen van elke categorie de voorstelling hadden bijgewoond. Kun jij daaruit komen?

Auteur: Hans den Braven

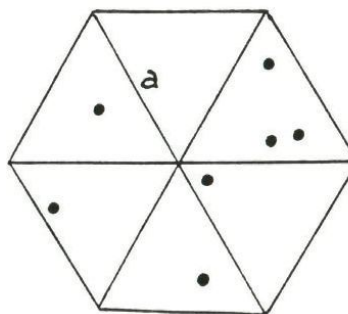
Oplossing op pagina 28

Punten in een zeshoek

Binnen een regelmatige zeshoek met zijde a , worden willekeurig zeven stippen gezet. Het maakt niet uit waar je die zet, maar we beweren dat er altijd minstens twee zijn waarvan de onderlinge afstand gelijk of minder is dan a . We gaan dit bewijzen.

Verdeel de zeshoek door de drie lange diagonalen in zes gelijkzijdige driehoeken, elk met zijde a . Als we nu de zeven punten zetten, moet er minstens één driehoek zijn waarbinnen twee punten liggen.

Die punten kunnen dan hoogstens op een afstand a van elkaar liggen. De afstand is maximaal als de bedoelde punten toevallig samenvallen met de hoekpunten van die driehoek.



Auteur: Ton Kuiper

Even zware ringen

Je kunt een ring maken door een gat te boren in een bol (fig.1). Het uitgeboorde deel bestaat dan uit een cilinder met straal r en hoogte $2d$ en twee gelijke bolsegmenten met straal r en hoogte h . Het volume van zo'n ring kunnen we dan bepalen door het bolvolume te verminderen met dat van de cilinder en de beide bolsegmenten. Eerst wat formules.

Formules

Hier volgen de formules voor de diverse lichamen.

Het volume van een bol: $\frac{4}{3}\pi R^3$

cilindervolume: $\pi r^2 (2d)$

bolsegment: $\frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h)$.

Voorbeeld

Probeer maar eens met deze formules te werken.

We nemen eens enkele maten.

Stel dat $R = 5$, $r = 3$, $d = 4$.

Daaruit volgt: $h = 5 - 4 = 1$.

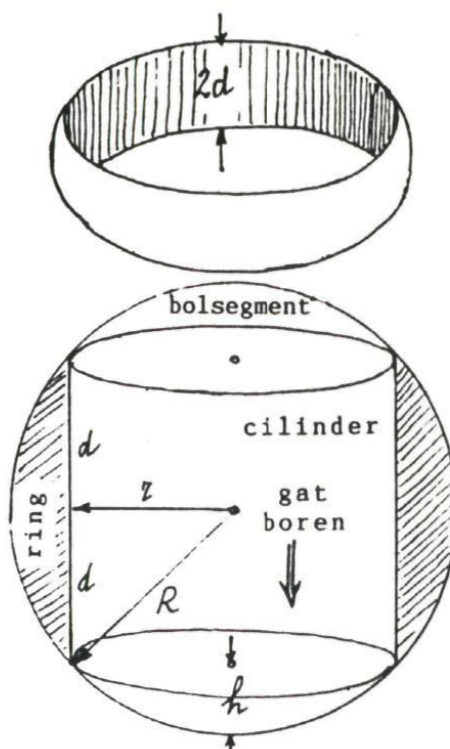
Ingevuld geeft dit voor het

bolvolume: $\frac{1}{3}(500)\pi$

voor het cilindervolume: 72π

en voor de bolsegmenten samen:

$\frac{1}{3}(28\pi)$.



Figuur 1

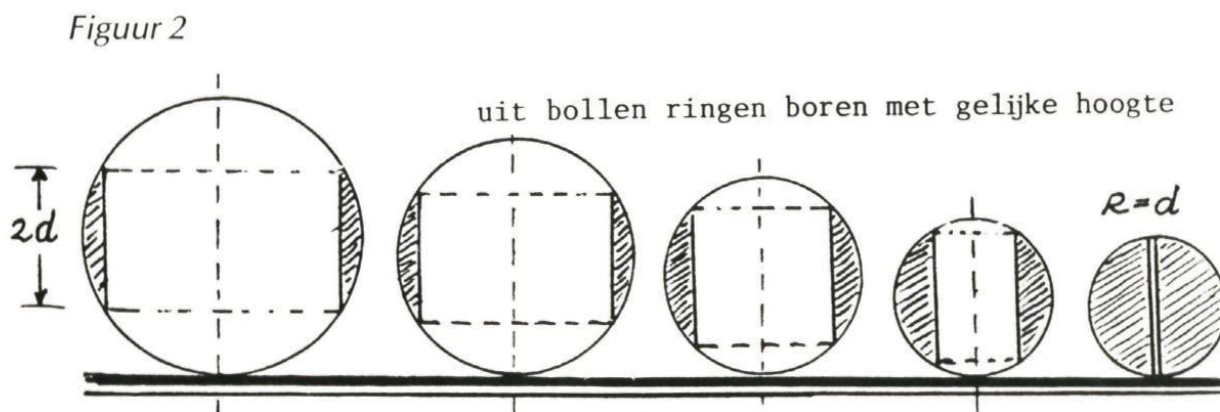
Het ringvolume

$\frac{1}{3}(256\pi)$ of ongeveer 268.

Even hoge ringen

In figuur 2 hebben we een aantal bollen van verschillende diameter doorboord, maar telkens zodanig dat de overblijvende ring even hoog blijft.

Je kunt nu bewijzen dat al die ringen een gelijk volume hebben. Of anders gezegd: het volume is alleen afhankelijk van de hoogte $2d$ en niet van de maten R , r en h .



Figuur 2

Ander voorbeeld

We hadden zojuist de 3,4,5-combinatie, nu nemen we de bekende 5,12,13-combinatie. We houden d gelijk en wel $d = 4$ en verder $R = 10,4$ en $r = 9,6$. Probeer weer het ringvolume te bepalen. Als je goed rekt kom je op precies dezelfde uitkomst uit.

Extreem

De kleinste bol waarin we nog een gat met $2d = 8$ kunnen boren is die met een straal $R = 4$. Dit is het geval met de meest rechtse bol in figuur 2.

Het lijkt op een kraal waarin een piepsmal gaatje is geboord.

Hierbij geldt: $r = 0$ en ... het ringvolume is nu gelijk geworden aan dat van de bol: $\frac{4}{3}\pi d^3$.

Vul maar in: $d = 4$ en laat maar zien dat daar weer ongeveer 268 uitkomt.

Algemeen

Probeer eens in het algemeen te bewijzen dat alle ringen met gelijke hoogte $2d$ ook een gelijk volume hebben.

Je krijgt een uitkomst waarin de variabelen R , r en h zitten, maar met enige handigheid kun je die elimineren zodat je alleen maar $\frac{4}{3}\pi d^3$ overhoudt.

Hiertoe zijn nog twee relaties beschikbaar, en wel:

$$d^2 = R^2 - r^2 \text{ en } R = h + d.$$

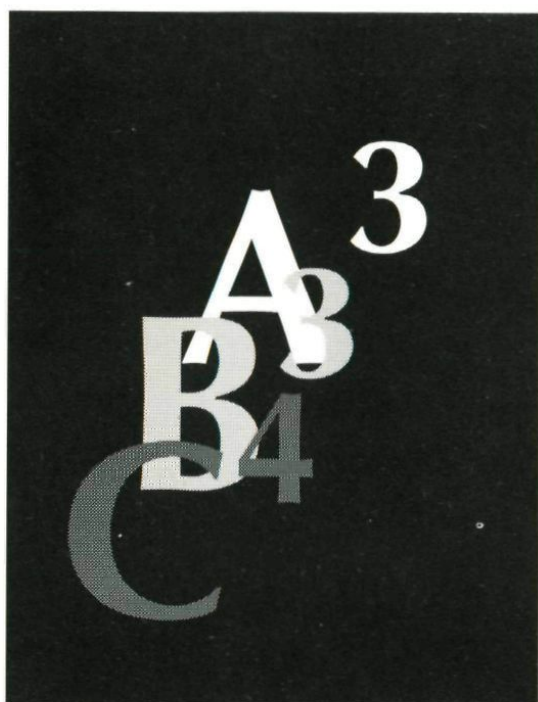
Probeer het maar eens.

Eindconclusie

Alle ringen met gelijke hoogte $2d$ en van hetzelfde metaal zijn alle even zwaar. En dat is een merkwaardige uitkomst!

Auteur: Bob de Jongste

Oplossing $a^3 + b^3 = c^4$



De meest eenvoudige methode is om beide zijden van de vergelijking te delen door c^3 . Je krijgt dan $(a/c)^3 + (b/c)^3 = c$. Geef a/c en b/c nu een willekeurige gehele waarde.

We kiezen $a/c = 3$ en $b/c = 5$.

Nu zien we dat $3^3 + 5^3 = 152$.

De getallen zijn nu $(152 \times 3) = 456$ en $(152 \times 5) = 760$.

Nu is dus $456^3 + 760^3 = c^4$ en $94818816 + 438976000 = 152^4$

Zoek zelf nog twee andere oplossingen voor a , b en c .

Er zijn er oneindig veel, dat blijkt nu wel.

Auteur: Bob de Jongste

Oplossing letters en cijfers

1. Omdat $A \times 4$ een getal geeft dat eindigt op slechts één cijfer, moet $A = 1$ of $A = 2$ zijn.
 2. Omdat $E \times 4$ altijd even is, moet $A = 2$ zijn.
 3. Omdat $E \times 4$ een getal moet geven, waarvan het laatste cijfer een 2 is, moet $E = 3$ of $E = 8$ zijn.
 4. Omdat $A \times 4$ niet 13 kan zijn ofwel geen getal van twee cijfers, moet $E = 8$ zijn.
 5. $4 \times 8 = 32$, 3 onthouden, dus $4 \times D + 3 = .B$
 $B \times 4$ moet een getal geven van één cijfer,
dus $B = 2$ of $B = 1$.
Als $B = 2$ dan $4 \times D + 3 = .2$;
dat is onjuist want $4 \times D + 3$ is oneven. Dus $B = 1$.
 6. $4 \times D + 3 = .1$, dus $D = 7$ of $D = 2$. Ga zelf na dat $D = 2$ niet kan omdat $4 \times B$ een getal van één cijfer moet geven.
Dus $D = 7$.
 7. $4 \times C + 3 = 3C$. Dan blijft alleen over:
 $C = 9$.
- Conclusie: ABCDE = 21978 en verder $21978 \times 4 = 87912$.

Oplossing in het circus

$$1200 = 17 \times (50) + 13 \times (20) + 90 \times (1).$$

Auteur : Hans den Braven

Bronvermelding

Foto voorpagina: ANP
Foto 'Bagage in de bocht': Henk Mulder
Cartoon 'De eigenzinnige Pythagoras-driehoek': Pieter Hogenbirk
Cartoon 'Van cent tot miljonair': Pieter Hogenbirk
Illustraties 'Verdwalen, een sport apart': Piet Smolders

Foto 'Brandlijnen': Paul van de Veen
Foto 'Magische getallen in een pyramide': Marjet van Baggum
Foto 'Plooi in tentdak': Henk Mulder
Foto 'In het circus': ANP
Vormgeving en druk: OMI.

PYTHAGORAS wiskunde tijdschrift voor jongeren

Pythagoras is een uitgave van MEMO Media marketing organisatie n.v., en verschijnt zes maal per jaar. Een jaargang loopt van september tot en met augustus.

Redactie: Henk Huijsmans, Henk Mulder, Hans Oomis

Eindredactie: Henk Huijsmans

Redactiesecretariaat: Henk Mulder, Geersbroekseweg 27, 4851 RD Ulvenhout

Medewerkers: Bob de Jongste, Thijs Nooteboom, Hans de Rijk, Frank Roos, Paul van de Veen

Uitgever: MEMO n.v., Hengeveldstraat 29, Postbus 9822, 3506 GV Utrecht

Telefoon: 030-736400, Fax: 030-734774

Bank: 69.93.65.937, Giro: 51.39.755

Verantwoordelijk uitgever: Ton Fokker

Inhoud

Bagage in de bocht	1
De eigenninnige Pythagoras-driehoek	4
Van cent tot miljonair	5
Verdwalen, een sport apart	6
Brandlijnen	10
Hoek in drieën	13
Balanceren met torens	15
$a^3 + b^3 = c^4$	18
Magische getallen in piramide	19
Letters en cijfers	20
Plooi in tentdak	21
Ingedrukte cilinder	22
De stelling van P.	24
In het circus	25
Punten in een zeshoek	25
Even zware ringen	26
Oplossing $a^3 + b^3 = c^4$	27
Oplossing letters en cijfers	28
Bronvermelding foto's	28

Nederlandse en Belgische abonnees:

Aanmelden telefonisch, 030-736400
of schriftelijk, MEMO n.v.,

Antwoordnummer 6236, 3500 VC
Utrecht.

Een jaarabonnement is f 25,- of
BF450,-

Wacht met betalen op de factuur.

Bij tussentijdse abonnering ontvang
je ook de reeds verschenen nummers
van het lopende jaar.

Abonnementen zijn doorlopend, ten-
zij voor 1 juli schriftelijk bij de uitge-
ver is opgezegd.

Tarieven:

Abonnement Pythagoras f 25,- of
BF450,-

Luchtpost toeslag f 10,-

Inclusief Archimedes f 45,- of
BF 800,-

Luchtpost toeslag f 20,-

Losse nummers f 5,- of BF 90,-