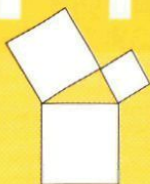
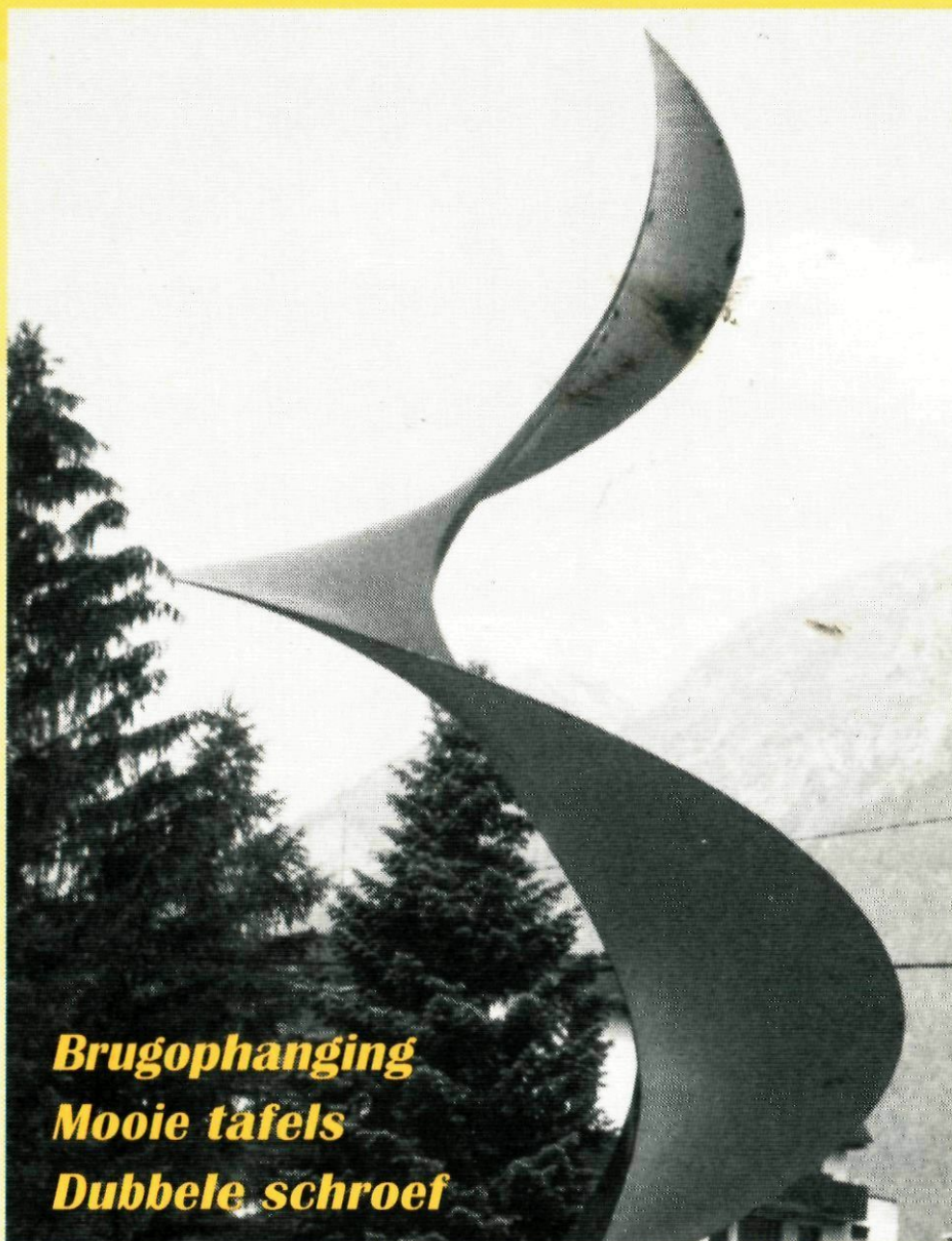


PYTHAGORAS



wiskunde tijdschrift voor jongeren



Brugophanging
Mooie tafels
Dubbele schroef

MÉMO |

32e jaargang, maart 1993, nr. 4

Brugophanging

Veel bruggen, zoals de Willem-Alexanderbrug over de Waal bij Beneden-Leeuwen, hebben een wegdek, via een aantal kabels opgehangen aan een bovenpunt van een centrale pijler Hoe zit dat met de spanning in de verschillende kabels?

Verdeling

Als voorbeeld een brug opgehangen aan tweemaal zes kabels. We verdelen dan het brugdek in twaalf gelijke delen, waarbij elke kabel z'n deel draagt. Zo draagt de vierde kabel

het gearceerde brugdeel.

Het gewicht van zo'n sectie (F) moet worden opgeheven door een tegenkracht $-F$, omhooggericht. Ontbind deze in een horizontale component AC en één langs de kabel BA . De eerste kracht wordt geleverd door druk van de links ervan gelegen sectie. Het gaat ons nu vooral om de spanning in de kabels.

Berekening

Voor de vierde kabel geldt:

$$\tan \alpha = \frac{21}{12} = 1,75 \text{ of } \alpha = 60^\circ.$$



$\tan \alpha$	α	$\frac{1}{\cos \alpha}$
0,25	14°	1,03
0,75	37°	1,25
1,25	51°	1,59
1,75	60°	2,00
2,25	66°	2,46
2,75	70°	2,92

Tabel 1

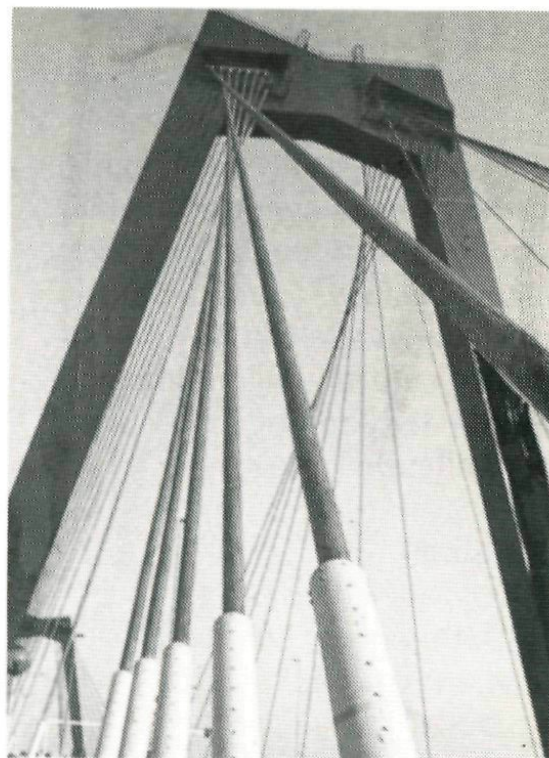
De spanning aldaar is

$\frac{F}{\cos \alpha}$ of voor de vierde kabel

$\frac{F}{\cos 60^\circ}$ of $2F$.

Zo staan in de tabel ook alle overige spanningen aangegeven. De spanning in de buitenste kabel is bijna drie keer zo groot als in de binnenste. De spanningsvectoren hebben hun eindpunten allemaal op een horizontale rechte.

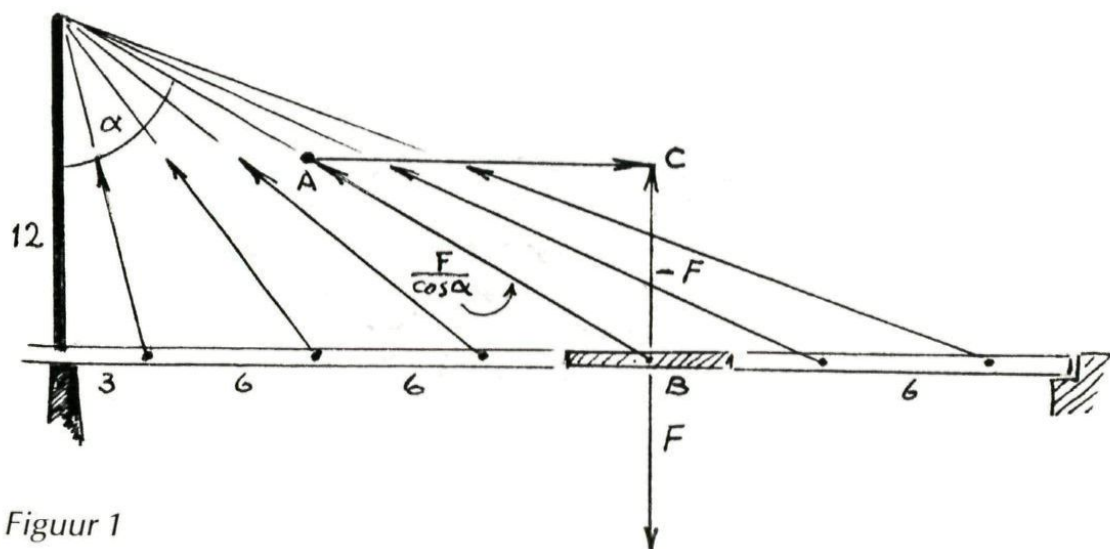
Eindconclusie: hoe schuiner de



Du Pont, Dordrecht

kabel, des te groter de trekspanning. Of anders gezegd: de trekspanning in een ophangkabel is evenredig met de horizontale krachten werkend in het linker brugdeel, worden opgeheven door die in het rechterdeel.

Auteur: Henk Mulder



Figuur 1

Verkiezingen

Bij de verkiezing van een gemeenteraad waren er vier kandidaten.
Er werden 5492 stemmen geteld.
De winnaar had 768, 517 en 1379 stemmen meer dan elk van

haar drie medestanders.
Hoeveel stemmen had elk van de kandidaten?

Oplossing op pagina: 16.

Auteur: Henk Mulder

Driehoek met vierkanten

In een driehoek waarvan basis en hoogte even groot zijn, zetten we een vierkant.
In de driehoek daarboven herhalen we dit weer.
We hebben hierover twee vragen:

1. Bewijs dat de hoogte van het eerste vierkant de helft is van die van de driehoek.
2. Welk deel van de oppervlakte van de driehoek beslaan de vierkanten, als we het proces oneindig lang zouden voortzetten?

Oplossing op pagina 16.

Auteur: Bob de Jongste

Vijver

In een tuin staat een vijver met prachtige rietpluimen. Eén rietstengel steekt 10 cm boven het water uit. Als je hem 50 cm over het oppervlak scheef wegtrekt,

verdwijnt de stengel in het water. Hoe diep is de vijver?
Oplossing op pagina: 22.

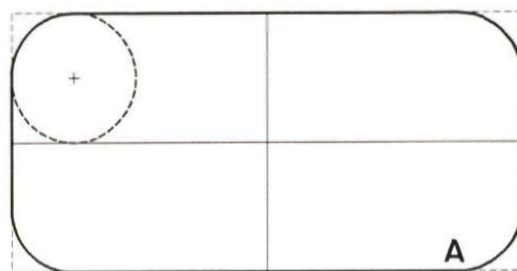
Auteur: Johan Koevoets

Mooie tafels

Wie heeft er wel eens een simpele tafel van vier poten en een tafelblad gemaakt? Misschien ben je dan met me eens dat een rechthoekig blad geen mooie en ook geen handige vorm is. Aan die uitstekende hoeken kun je je stoten terwijl ze eigenlijk nergens toe dienen, want er kan toch bijna niets op staan.

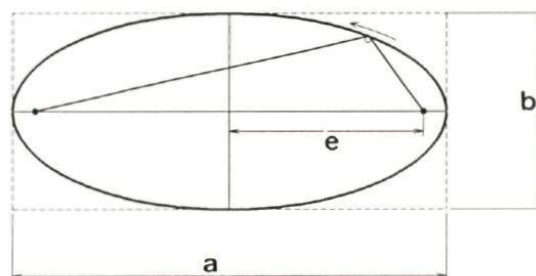
De tafel wordt veel mooier als je iets afhaalt van de hoeken, maar hoe?

Eén manier is het afronden van de hoeken door een kwart cirkel (fig.1). Is dit mooi? Smaken verschillen, maar wiskundig gezien is dit geen mooie vorm. Denk je eens in dat een miniatuur-autootje langs de tafelrand rijdt. Op het rechte stuk gaat alles prima, maar in A aangekomen moet de chauffeur ineens het stuur omgooien om het cirkelvormige stuk te kunnen volgen.



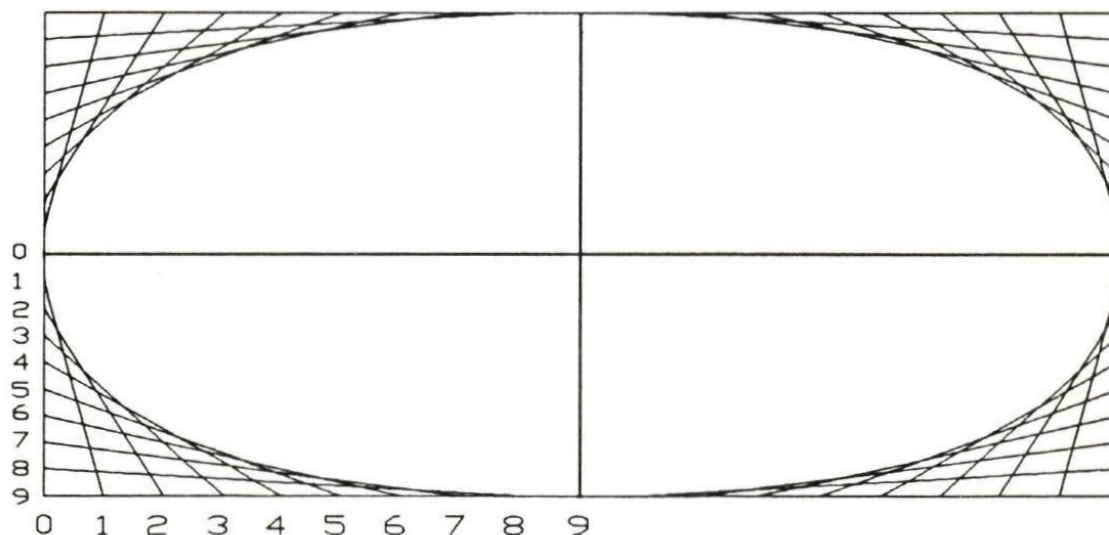
Figuur 1

Hoewel de rechte en de cirkel in A elkaar raken is er toch een abrupte overgang. Het rechte stuk is eigenlijk een gedeelte van een oneindig grote cirkel met een oneindig ver weg liggend middelpunt.



Figuur 2

Figuur 3





Figuur 4

Ellips

Het wordt veel mooier als we een ellips gebruiken. Daarvoor slaan we twee spijkers in het tafelblad (aan de onderkant natuurlijk) en spannen we een touwtje tussen de spijkers met een lengte a .

De spijkers komen op een afstand e van het midden, volgens:

$$e^2 = a^2 - b^2.$$

Plaats een potlood tegen het touw, trek het strak en beweeg het terwijl het touw strak blijft. Je krijgt nu een ellips.

Zie figuur 2.

Is dit een praktische tafel? Hij loopt mooi regelmatig rond zonder abrupte overgangen. Maar hij is wel erg spits aan de smalle kanten. Daar kan bijna geen bord meer staan. Zouden er nog meer manieren zijn om een mooie tafel te construeren op een eenvoudige manier?

Andere werkwijze

Een simpele manier die toch praktische - en mooie - tafels oplevert staat in figuur 3.

Verdeel alle zijanten van je rechthoekige tafelblad in twee delen en herhaal dat een aantal malen. Zo krijg je bijvoorbeeld 32 punten aan elke zijde van het blad. Nummer ze zoals in figuur 3 en verbind de punten met hetzelfde nummer met elkaar. Verbind de snijpunten door een vloeiende kromme die in het midden van de vier zijanten raakt aan de tafelranden.



Deze vorm is minder spits dan de ellips, (in figuur 4 zijn beide overgangen getekend, de binnenste is de ellips) heeft nergens abrupte overgangen en is heel eenvoudig te tekenen.

Je kunt dat zelfs aan de "goede" kant van het blad doen want bij het uitzagen valt het stuk waar de lijnen op getekend zijn er helemaal af!

Vergelijking

Je bent ook wel benieuwd naar de wiskundige formule van je tafelblad.

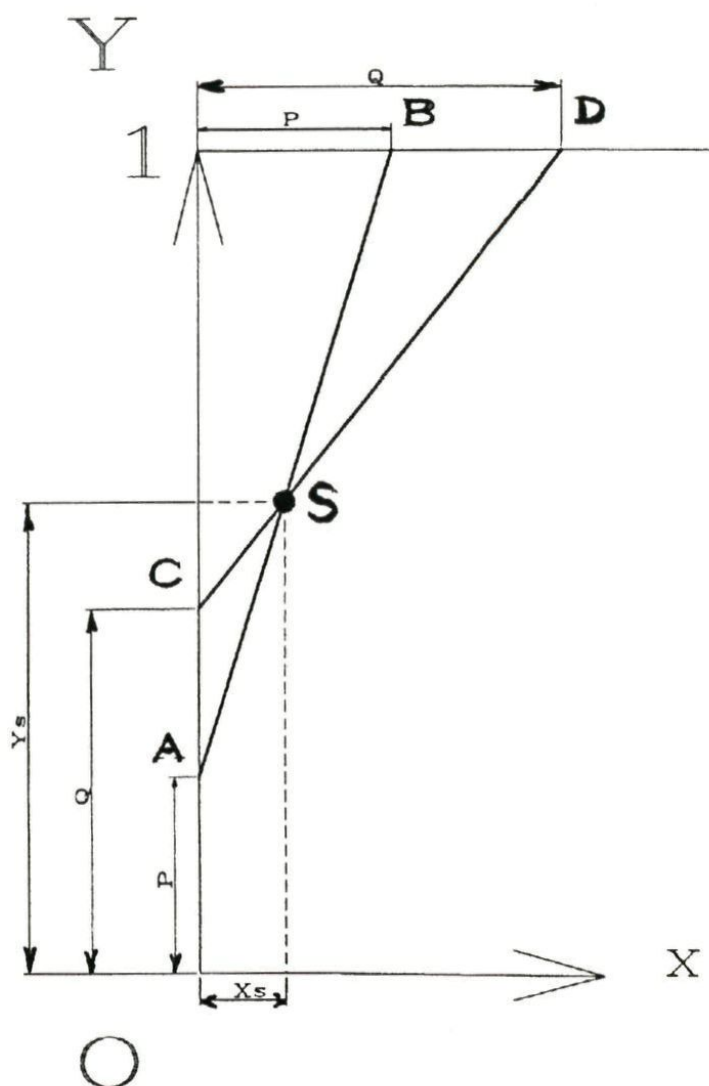
In figuur 5 zijn twee lijnen van

de constructie getekend.

Probeer nu met behulp van figuur 5 de vergelijkingen van de lijnen AB en CD op te schrijven. Druk dan de coördinaten van het snijpunt S uit in variabelen p en q. Dan moet je nog de limiet nemen en q laten naderen tot p. Dan kom je op deze vergelijking uit:

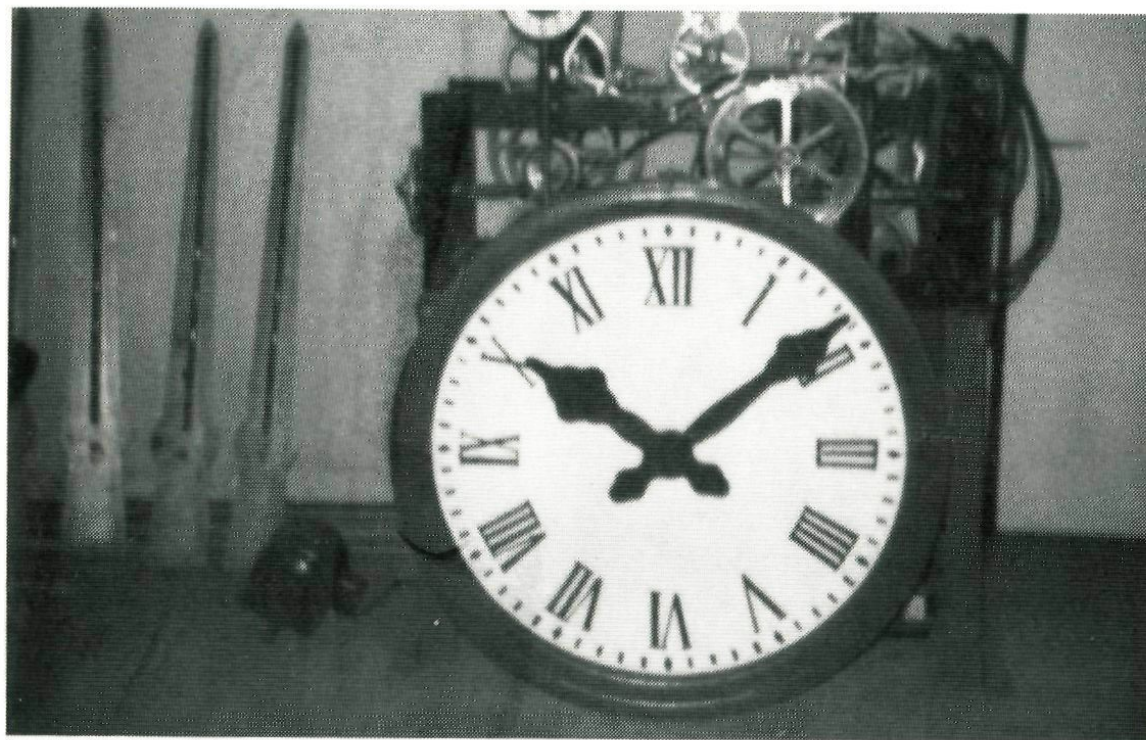
$$y = -x + 2\sqrt{x} \quad (\text{voor } x \geq 0).$$

Auteur: Paul van de Veen



Figuur 5

Tien over tien



Het is opmerkelijk dat je in reclamefolders van horloges en klokken de wijzers vrijwel altijd op 'tien over tien' ziet staan. Het is die stand waarbij de grote en de kleine wijzer symmetrisch staan ten opzichte van de 12-uurs lijn. Maar..... dat is niet precies 10 over 10. Als de grote wijzer op twee staat, is de kleine inmiddels de 10 al gepasseerd. Hoe laat is het precies als de wijzers echt symmetrisch staan?

Oplossing

Stel dat dit gebeurt om x minuten na 10 uur. Dan heeft de grote wijzer $6x$ graden afgelegd en de kleine wijzer $\frac{1}{12}$ deel van $6x$, want die gaat 12 keer zo langzaam. De hoek met de 12-uurslijn is dan $60 - \frac{1}{2}x$.

Bij gelijke hoeken geldt dan:

$$6x = 60 - \frac{1}{2}x \quad \text{of} \quad x = 9,23 \text{ min.}$$

Dus ongeveer $\frac{3}{4}$ minuut vóór staan de wijzers symmetrisch en dat klopt wel met de foto.

Opgave

Onderzoek datzelfde eens voor de gespiegelde stand, dus 10 voor 2. Hoe laat is het dan, weer in geval van symmetrie? Er is nog iets. Er zijn momenten waarop de wijzers elkaar bedekken, bijvoorbeeld precies om 12 uur. Ga na dat telkens na bijna 1 uur en 5,5 minuten weer zo'n stand bereikt wordt. De echte uitkomst is: telkens na $\frac{12}{11}$ uur.

Auteur: Henk Mulder

Reacties van lezers

In ons nummer van juli 1992 stelden we de vraag: voor welke kleinste gehele waarde van x wordt $999x^2 + 1$ een kwadraat van een geheel getal of los op: $999x^2 + 1 = y^2$ voort x en y een geheel getal.

1. Herman Sallé uit Bussum maakte een programma voor zijn computer die vervolgens 'in een fractie van een seconde' de uitkomst leverde:

$$991 * 1205573579033139447442538767^2 + 1 = 379516400906811930638014896080^2$$

2. Jan Sloff uit Gasselte gaat nog verder op dit probleem in. Hij zegt: in het geval $992x^2 + 1$ was je vlugger klaar geweest. Daar voldoet $x=2$ al. Kijk zelf maar. Hij wil kennelijk de coëfficiënt van x^2 eens anders kiezen en kijken wat er dan gebeurt. Hij gaat dan uit van $ax^2 + 1$, met de vraag: als x een natuurlijk getal is, voor welke waarde van x is de tweeterm dan een kwadraat van een geheel getal? Voor $a = 1$ vind je niets. Voor $a = 2$ achtereenvolgens: $x = 2, 12, 70...$ Voor $a = 3$ achtereenvolgens: $x = 1, 4, 15, 56...$ Zo komt hij bijvoorbeeld uit bij $a = 13$, dan $x = 180, 233640....$ en daarna worden de getallen te groot voor zijn rekenapparaat.

Regel?

Je begrijpt dat $x = 233640$ niet door proberen is gevonden, anders was hij nu nog bezig. Daar heeft hij een experimenteel gevonden 'regeltje' voor ge-

bruikt. Neem eens $a = 2$.

Je vindt dan: 2, 12, 70.

Jan Sloff merkt op: $70 = 6 \cdot 12 - 2$.

Ga zo eens door:

$6 \cdot 70 - 12 = 408$; dat blijkt de volgende te zijn. En dan:

$6 \cdot 408 - 70 = 2378$. Dat is er weer eentje. Zo kun je een hele stoet uitkomsten op gang brengen.

Probeer het zelf maar eens met $a = 3$, $a = 5$, $a = 6....$

Bij $a=4$ zijn er geen uitkomsten. Dat is allemaal heel creatief verzonnen, maar:

kan het gebeuren dat deze regel ergens niet klopt?

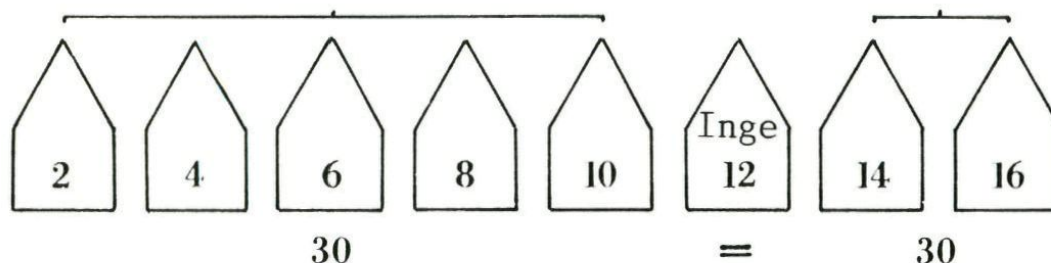
Wie garandeert dat er tussen de zo gevonden waarden nog niet andere uitkomsten liggen?

Dat laat Jan Sloff weer aan andere lezers over.

3. Frank Laforce uit Wilrijk (B) heeft ook zijn krachten op dit soort vergelijkingen beproefd. Alleen het aardige is dat hij ook aangeeft waar je zulke vreemde vraagstellingen in het dagelijks leven tegenkomt.

Vergelijkingen in huisnummers

Inge woont in een straat aan de kant van de even huisnummers. Ze woont in het zesde huis met het nummer 12, en er staan acht huizen in haar straat (fig. 1)



Figuur 1

Op zekere dag merkt ze op: als ik alle nummers rechts van mij optel kom ik op 30 uit en doe ik dat aan de andere kant dan vind ik het-zelfde. Komt zoiets vaker voor? Zelf vond ze al vlug een ander antwoord: er staat maar één huis in de straat en ik woon op nummer 2. Dat bracht een heel gepuzzel op gang. Zijn er meer oplossingen? Wat denk je van 49 huizen en jij woont op nummer 70? Schrijf dit maar eens uit en kijk of 'som links = som rechts'. Je kunt de zaken natuurlijk ook algemener aanpakken.

Algemeen

Stel dat er aan die even kant n huizen staan en daarvan staan er aan de kant van de lage nummers k stuks. Jij woont dan in het $(k+1)$ de huis met nummer $2k+2$. De huisnummers vormen een rekenkundige rij. De bedoeling is om een relatie te vinden tussen n en k . Je zou natuurlijk een soortgelijke vraag kunnen stellen

aan de overzijde met de oneven nummers. Daarover straks.

Relatie

Hoe vind je de som van een aantal termen van zo'n rij?

In het algemeen komt daaruit: de gemiddelde waarde keer het aantal. Voor de gemiddelde waarde neem je:

$$\frac{1}{2} (\text{eerste} + \text{laatste}).$$

Zo krijg je als je de getallen van figuur 1 wilt optellen:

$$\frac{1}{2} (2 + 16) \cdot 8 = 72$$

n	k	nummer
1	0	2
8	5	12
49	34	70
288	203	408
1681	1188	2378
9800	6929	13860
57121	40390	80782
332929	235415	470832

Tabel 1

Voor de linkersom geldt dan:

$$S = \frac{1}{2} (2 + 2k) k \text{ en evenzo rechts}$$

$S = \frac{1}{2} (2k + 4 + 2n) (n - k - 1)$
Gelijkstelling heeft:

$$2k^2 + 4k - (n^2 + n - 2) = 0.$$

Dit is een vierkantsvergelijking in k met als positieve oplossing:

$$k = -1 + \sqrt{\frac{1}{2} (n^2 + n)} \text{ of}$$

$$k+1 = \sqrt{\frac{1}{2} (n^2 + n)}.$$

Er is alleen maar een oplossing mogelijk als $\frac{1}{2} (n^2 + n)$ een volkomen kwadraat is.

We hadden al gevonden:

$$n = 1, 8, 49.$$

Om zelf verder te snuffelen... dat is bepaald ontmoedigend. Een computer verliest niet gauw de moed, tenminste als je er een goed programma voor ontwerpt. Een volgende uitkomst wordt dan: $n = 288$ en $k = 203$.

De straten worden nu al langer dan de Laan van Meerdervoort in Den Haag. In tabel 1 vind je verdere uitkomsten die je met je rekenmachine kunt testen.

Oneven nummers

Probeer nu zelf eens een opzet te maken voor de overzijde met de oneven nummers. Als je nu weer invult: $S(\text{links}) = S(\text{rechts})$ kom je uit op een relatie:

$2k^2 + 2k = n^2 - 1$, waaruit weer volgt:

$$k = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(2n^2 - 1)}.$$

De voorwaarde is dus dat $2n^2 - 1$ een oneven kwadraat moet zijn.

In tabel 2 staan weer een aantal uitkomsten.

n	k	nummer
1	0	1
5	3	7
29	20	41
169	119	239
985	696	1393
5741	4059	8119

Tabel 2

Het is nu nog niet duidelijk wat het huisjesprobleem te maken heeft met de vergelijking $ax^2 + 1 = y^2$.

Ga nog eens terug naar de formule behorend bij de even nummers.

$$2(k+1)^2 = n^2 + n$$

$$8(k+1)^2 = 4n^2 + 4n$$

$$2(2k+2)^2 = (2n+1)^2 - 1.$$

Stel nu $2k+2 = x$ en $2n+1 = y$, dan staat er $2x^2 + 1 = y^2$. En dat is juist de vergelijking van de vorige schrijver waarbij $a = 2$.

Geschiedenis

Deze problemen duiken al op in de geschiedenis rond het jaar 250. In 1657 schreef Fermat aan een landgenoot een brief met de opgave: los op de vergelijkingen $61x^2 + 1 = y^2$ en $109x^2 + 1 = y^2$. Er ontstonden toen discussies over voor welke waarden van a er oplossingen mogelijk zouden zijn.

Auteurs: Frank Laforce,
Herman Sallé
en Jan Sloff

Goocheltruc met passer

Gegeven een lijn waarop een lijnstuk AB.

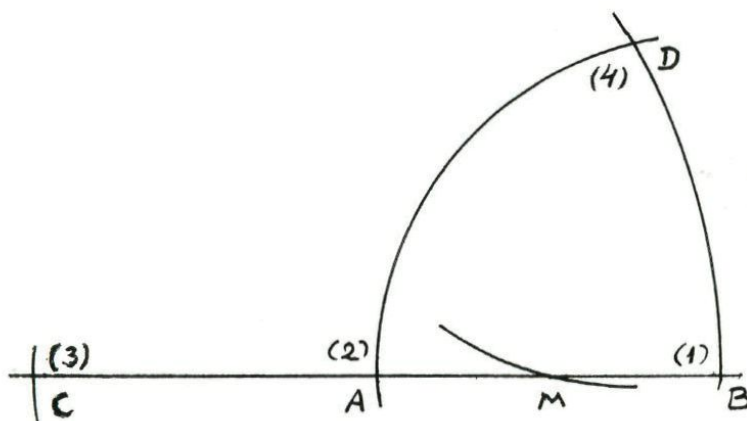
1. Prik je passer in bij B en cirkel AB om.
2. Prik je passer in bij A en cirkel AB 180° om. Zo krijg je C.
3. Prik in bij C en cirkel CB om. Waar deze de eerste boog snijdt ligt D
4. Ten slotte: prik in bij D en cirkel DB om.

Waar deze boog AB snijdt, ligt M.

M blijkt midden op AB te zijn uitgekomen. Maar waarom? Probeer te bewijzen waarom $AM=MB$.

Oplossing: zie pagina 16.

Auteur: Bob de Jongste

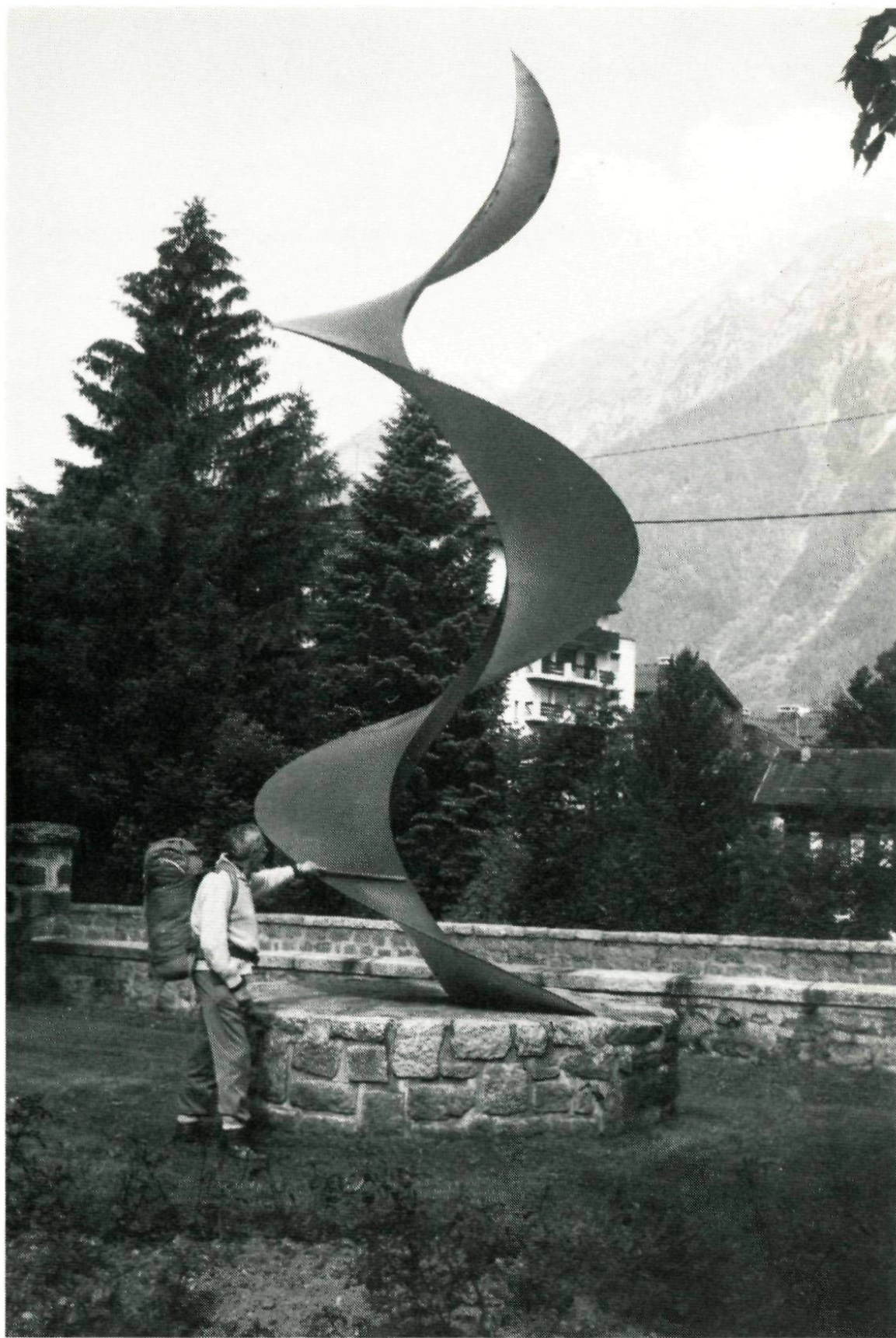


Dubbele schroef

In de Franse Alpen staat een monument, begrensd door twee schroeflijnen. Een schroef is een ruimtelijke kromme. Ze ontstaat door een éénparige cirkelvormige beweging te koppelen aan een éénparige rechtlijnige beweging, loodrecht daarop.

Of anders gezegd: het is de verzameling punten op een cilindermantel waarbij je rond

gaat en tevens voorwaarts in de asrichting. Beide verplaatsingen zijn met elkaar evenredig. De afstand afgelegd in de asrichting na één omwenteling heet de spoed van de schroef. De straal van de cilinder is de amplitudo. Het kunstwerk op de foto heeft als begrenzingen twee schroeven met dezelfde as, dezelfde spoed en verschillende amplitudo r en R .



Beide schroeven zijn in fase. Als je ergens een horizontaal vlak loodrecht op de as aanbrengt, snijdt je beide schroeven en de as. Die drie snijpunten liggen steeds op één lijn. De eerste punten hebben daarbij een afstand R-r. De stok geeft op de foto zo'n verbinding aan.

Bergweg

Het kunstwerk lijkt op een steile bergweg. De beide schroeflijnen zijn de begrenzingen en bepalen binnen- en buitenbocht. De weg is overal even breed. Aan de binnenrand is de weg het steilst, aan de buitenrand het minst steil. Een automobilist is daarom geneigd langs de buitenbocht te

gaan. Die weg is wel de langste, maar vereist de minste klimkracht. Natuurkundig gezien blijft de arbeid om te klimmen langs elke weg hetzelfde. Bij een auto is immers de verbruikte energie: kracht x verplaatsing.

Samenvatting

Het getordeerde staalblad is op te vatten als een verzameling schroeflijnen met gelijke spoed en fase, maar met verschillende amplitudo en steilte. Welke weg omhoog je ook kiest, ze kosten allemaal evenveel energie, maar het gemakkelijkst is de buitenbocht.

Auteur: Henk Mulder

Kubussen stapelen

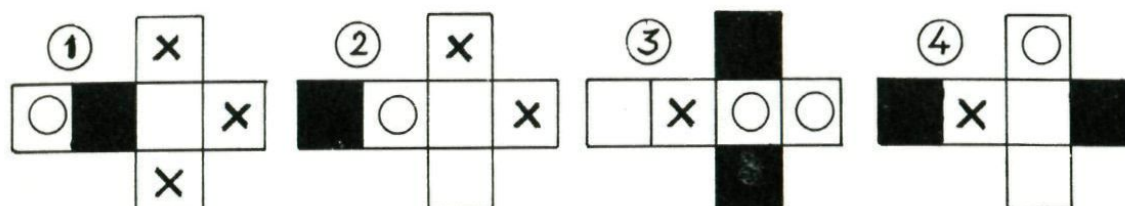
Een kubus heeft zes zijvlakken. We verven zo'n zijvlak wit of zwart, of zetten er een kruisje (x) of een nulletje (0) op. We hebben vier van zulke kubussen. Elk van de vier genoemde mogelijkheden komt op elke kubus minstens één keer voor.

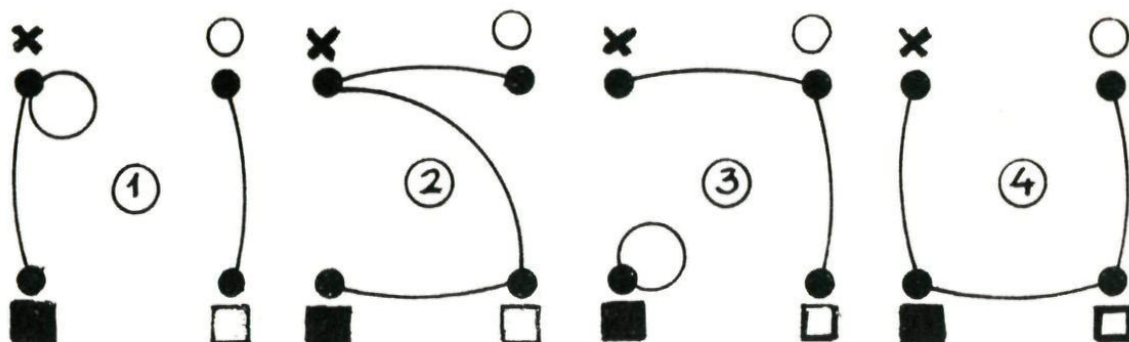
De bedoe ling is de vier kubussen zo op te stapelen, dat op elke zijkant van de toren elk van de vier mogelijkheden te zien is.

Uitslagen

We geven de situatie bij elk van de vier kubussen aan door middel van een uitslag (fig. 1).

Figuur 1





Figuur 2

Het zal niet meevallen door uitproberen de oplossing te vinden. Het blijkt dat er wel meer dan 5000 oplossingen zijn!

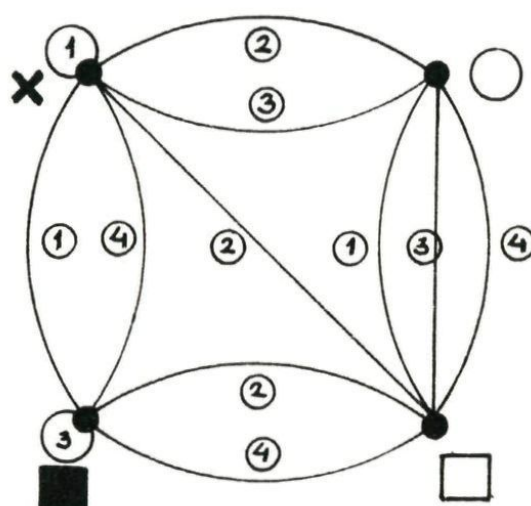
We moeten dus een soort wiskundige boekhouding opzetten. Dit kan met behulp van grafen. Grafen zijn lijntjes die punten verbinden. Dat lijkt nogal simpel. We zetten de vier mogelijkheden als vier hoekpunten van een vierkant (fig. 2).

Een verbinding tussen twee van die punten betekent dat die mogelijkheden op twee tegen-over elkaar liggende zijvlakken voorkomen. Zo zijn er in het geval van de eerste kubus: kruisje tegenover zwart, kruisje tegenover nulletje. Zo is de situatie bij elke kubus door een graaf verbeeld.

Werken met grafen

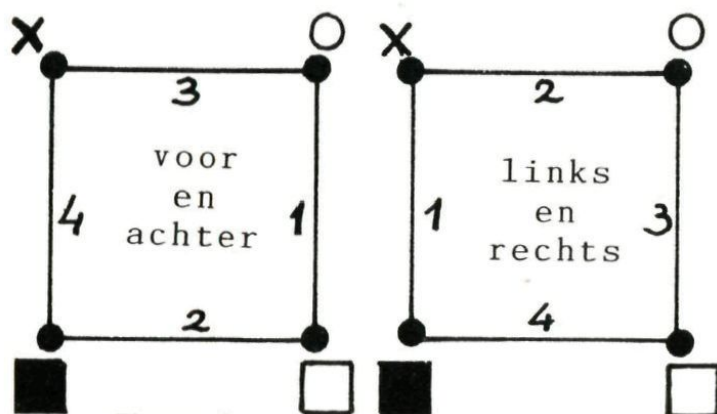
In figuur 3 zijn de vier grafen over elkaar heengelegd, een soort stapeling van de vier kubussen.

Figuur 3



Bij elke graaf staat een nummer om aan te geven van welke kubus deze afkomstig is. Nu is

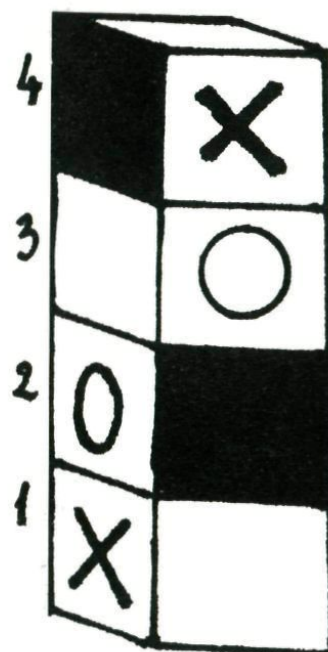
het mogelijk om in figuur 3 af te lezen hoe de oplossing eruit ziet. Probeer rond te lopen, waarbij je dus vier mogelijkheden passeert en daarbij tegelijkertijd de combinatie 1, 2, 3, 4 krijgt.



Figuur 4

Je hebt dan alle mogelijkheden en tevens alle kubussen te pakken. De combinatie van de vier binnenbogen is de eerste mogelijkheid voor een eventuele toren. Zie je zelf een tweede? In figuur 4 staan beide oplossingen. Het zal nu niet moeilijk zijn om een mogelijke oplossing voor de toren te verzinnen. Er staat er één in figuur 5. Grafen zijn een prima middel om lastige problemen aan te pakken. De postbode die zo snel mogelijk door zijn wijk wil, zou er iets aan kunnen hebben, maar ook de ingenieur die een net van pijpleidingen moet aanleggen met een minimale hoeveelheid buis.

Figuur 5



Ga eens na dat het aantal mogelijkheden gelijk is aan: $4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ of 5184

Auteur: Jaap van Wezel

Een vernuftig bewijs van de stelling van P

In een rechthoekige driehoek hebben we een hoogtelijn getrokken.

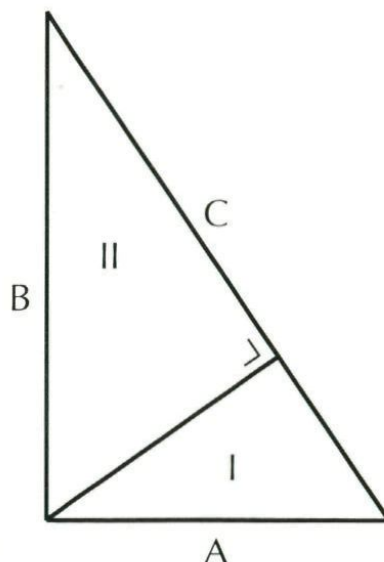
De driehoek is daarmee verdeeld in twee driehoeken die gelijkvormig zijn met elkaar en met de grote. Ze hebben immers alle drie hoeken van de zelfde grootte. Nu verhouden oppervlakten van gelijkvormige figuren als de kwadraten van twee gelijkstandige zijden. In dit geval geldt dan:

$$I : I : (I + II) = a^2 : b^2 : c^2 \text{ ofwel}$$

$$I = k a^2, II = k b^2 \text{ en } I + II = k c^2$$

waarin k dezelfde evenredigheidsconstante voorstelt. Daaruit volgt: $a^2 + b^2 = c^2$.

Auteur: Hans de Rijk



Oplossing: verkiezingen

Kies vier letters en stel vier vergelijkingen op.

De oplossing wordt dan: 1270, 1521, 663 en 2038.

Oplossing: driehoek met vierkanten

De oppervlakte van de driehoek is $\frac{1}{2}c^2$ (c stelt basis en hoogte van driehoek voor).

Het eerste vierkant heeft een oppervlakte $\frac{1}{4}c^2$, het tweede $\frac{1}{16}c^2$, het derde $\frac{1}{64}c^2$ en zo verder.

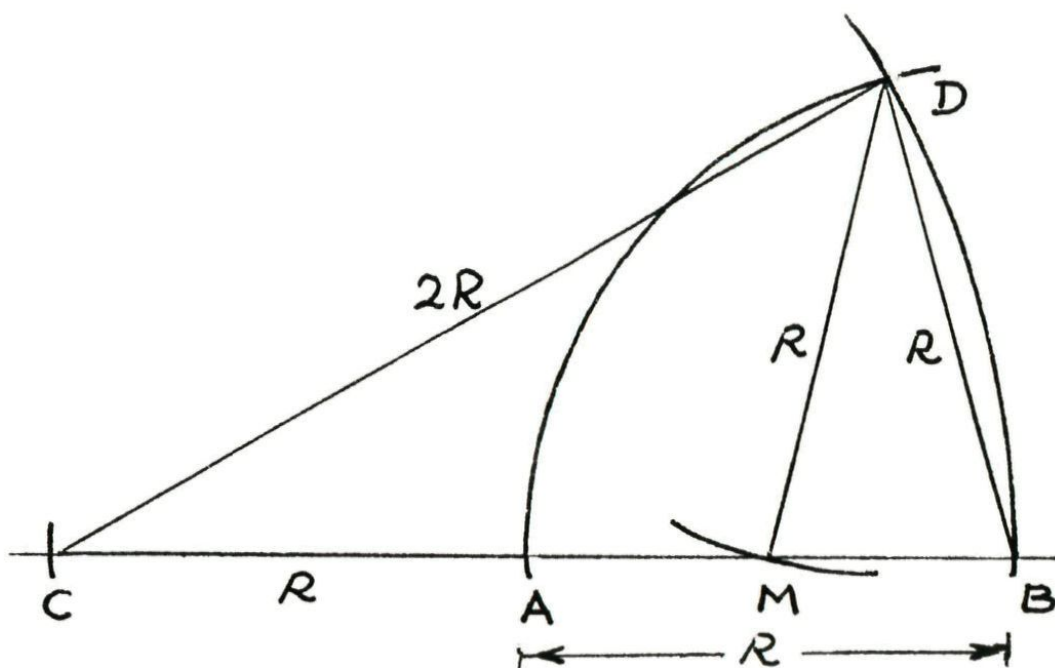
De somlimiet van de oppervlakten wordt dan $\frac{1}{3}c^2$. En dat is $\frac{2}{3}$ deel van de totale driehoek.

Oplossing: goocheltruc met passer

Trek de lijnstukken van C, M en B naar D.
De gelijkbenige driehoeken DMB en CBD zijn gelijkvormig. Zie je in waarom?

De overeenkomstige lijnstukken verhouden zich als 1:2, dus geldt:

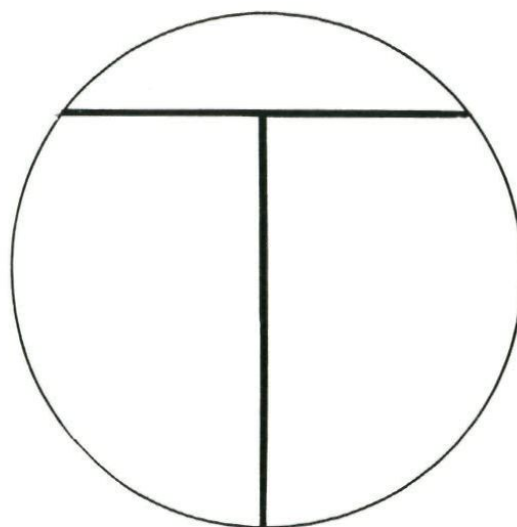
$$MB = \frac{1}{2} DB = \frac{1}{2} AB.$$



T in cirkel

In de figuur staat een hoofdletter T met zijn omgeschreven cirkel. De horizontale en verticale balk van de T zijn even lang.

We hebben twee vragen.
Construeer, bij gegeven T, het middelpunt van de omgeschreven cirkel.
En verder: bereken welk deel de cirkelstraal is van de lengten van de beide balken.
Oplossing zie pagina 24.



Figuur

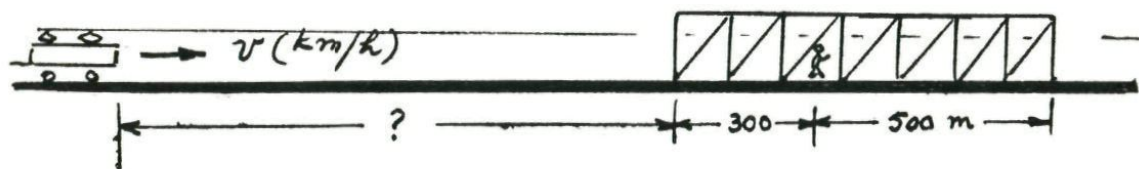
Auteur: Bob de Jongste

Narrow escape

Iemand loopt over een spoorbrug van 800 meter lengte. Als hij 300 m heeft afgelegd, hoort hij achter zich de fluit van een naderende goederentrein. Hij kan nu twee dingen doen: of terugrennen en zorgen net op tijd van de brug af te zijn, of het

voorwaarts op een lopen zetten en zorgen net van de brug af te zijn, alvorens de trein het eind daarvan heeft bereikt.

Als hij moet rennen voor zijn leven, kan hij wel een paar minuten lopen met een snelheid van 10 km/h. Nu is de snelheid



van de trein toevallig zo, dat het niet uitmaakt welke keuze hij zou maken.
In beide richtingen zou hij het net redden.
Hoever was de trein van de brug

verwijderd, op het moment dat de fluit klonk?

Oplossing: pagina 22.

Auteur: Hans den Braven

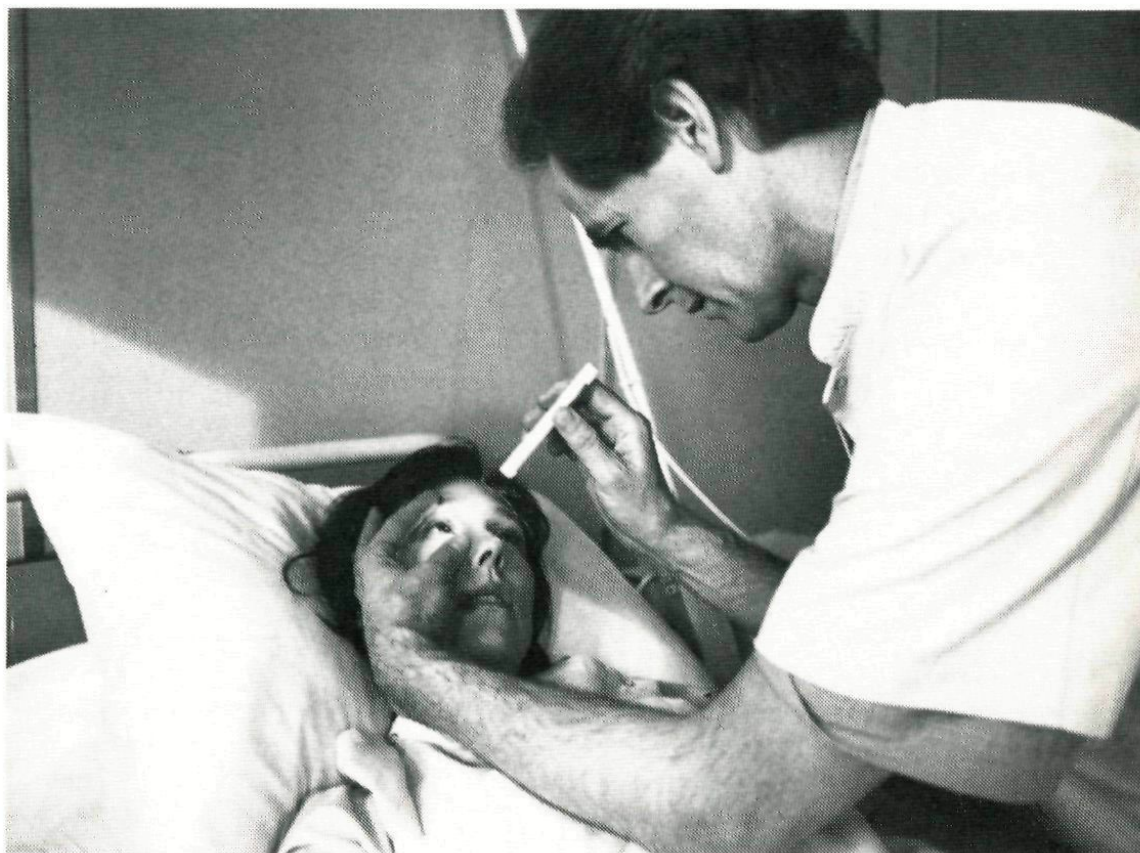
Patiënten

Als in het patiëntenbestand van een groot ziekenhuis 70% van de patiënten heupklachten heeft, 75% met het hart tobt, 80% problemen heeft met de maag en 85% last heeft van spataderen.

Hoeveel procent van de patiënten heeft dan tenminste alle vier de kwalen?

Oplossing: pagina 20.

Auteur: Bob de Jongste



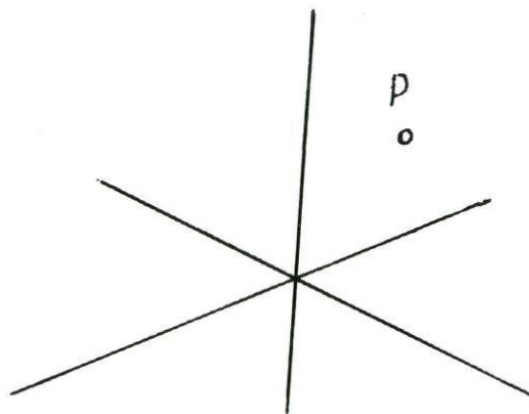
Spiegelen

We nemen een driehoek ABC en trekken daarin de drie bissectrices. Dan nemen we een punt op één van de zijden, bijvoorbeeld P_1 op BC.

Als we dit punt spiegelen in bissectrice CF, komen we uit in P_2 . Als we vervolgens P_2 weer spiegelen in bissectrice AD, komen we terecht in P_3 , en ga zo maar door. We eindigen dan in P_6 . Als je verder gaat kom je weer in P_1 terug. Bewijs nu eens dat het circuit na zes stappen weer gesloten is. Je kunt ook omgekeerd te werk gaan, dus van P_1 naar P_6 , naar P_5 en zo verder.

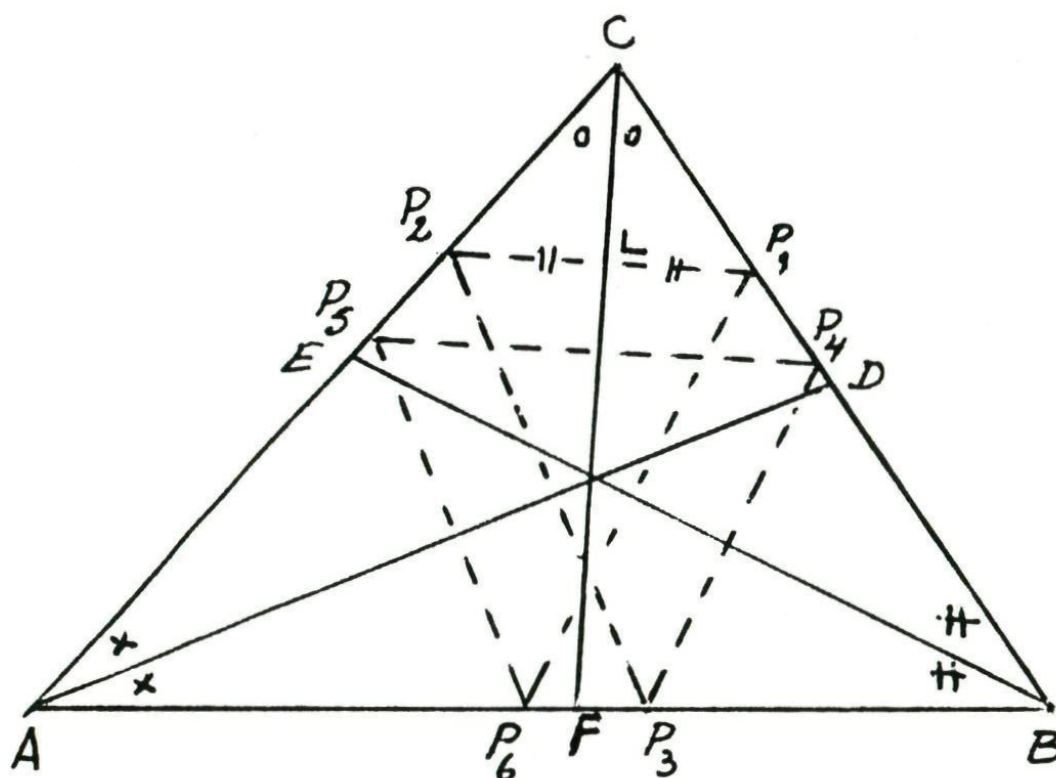
Opgave

Gegeven drie lijnen door één punt. Ze tellen de dragers van de



bissectrices van een driehoek voor. Verder een punt P op één van de zijden. Probeer de driehoek ABC te construeren. Ga na dat er nog een tweede driehoek te bedenken valt.

Auteur: Mark Mieras



Oplossing patiënten

Laten we eerst eens kijken naar de 70% heupklachten en de 75% hartklachten. Tel je deze percentages bij elkaar op dan vind je 145% klachten over 100% patiënten. Er is dus een overschot van 45%. Tel je hierbij op de 80% maagklachten, dan krijg je een overschot van 25%.

Als je nu de laatste groep spataderen van 85% optelt, dan heb je een overschot van 10%. Je kunt dus concluderen, dat tenminste 10% van de patiënten aan alle vier de kwalen lijdt.

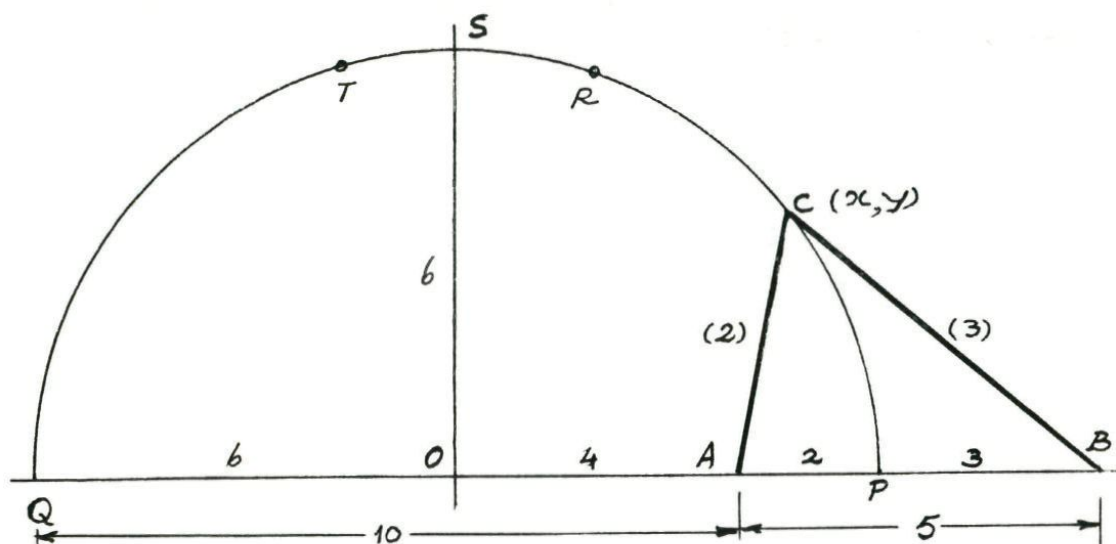
Auteur: Bob de Jongste



Een cirkel in een driehoek

Neem een driehoek met basis $AB=5$.
De opstaande zijden moeten zich verhouden als 2:3 of $AC:BC = 2:3$.

We hebben nu twee vragen.
1. Bepaal posities voor de toppunten.
2. Hoe hoog kan de driehoek maximaal worden?



Baan voor punt C

We proberen een aantal posities voor de top C te vinden.

De laagst mogelijke standen zijn de punten P en Q. De driehoek heeft in die gevallen een hoogte nul. Voor P geldt:

$$AP:BP = 2:3 \text{ en } BP + AP = 5$$

Voor Q geldt:

$$AQ:BQ = 2:3 \text{ en } BQ - AQ = 5, \text{ zodat } AQ = 10.$$

We kunnen al probeerend meer punten voor C vinden.

Zo geldt voor R: $AR = 6$ en $BR = 9$.

Zo geldt voor T: $AT = 8$ en $BT = 12$ en zo voorts.

Teken maar meer zulke punten in. Je ontdekt dan dat AC en BC niet onbeperkt groot of klein kunnen worden. Hun mogelijke waarden liggen tussen grenzen en wel:

$$2 < AC < 10 \text{ en } 3 < BC < 12.$$

Al verder onderzoekend kom je erachter dat C bij deze activiteit een kromme baan doorloopt, die sprekend lijkt op een cirkel met een straal 6 en middellijn PQ.

Tevens blijkt dat de driehoek niet onbeperkt hoog kan worden en wel niet meer dan de straal van de vermoede cirkel dus $OS = 6$.

Maar dat van die cirkel moeten we eerst dan nog wel bewijzen.

Cirkel

We gaan nu de verzameling punten C exact opsporen.

Stel de coördinaten van $C(x, y)$.

$$\text{Dan } AC^2 = (x - 4)^2 + y^2 \text{ en}$$

$$BC^2 = (9 - x)^2 + y^2$$

Verder weten we:

$$AC^2:BC^2 = 4:9.$$

Als je dat allemaal netjes uitwerkt, krijg je als eindresultaat:

$$x^2 + y^2 = 36$$

en dat is juist de vergelijking met PQ als middellijn en 6 als straal.

Auteur: Bob de Jongste

Oplossing: narrow escape

Kies letters voor de onbekenden.
Probeer één of twee vergelijkingen op te stellen om die onbekenden op te lossen.
We geven je hierbij ons resultaat.
De trein was op het fluitsignaal

1,2 km van de brug verwijderd.
Terug lopen zou 1,8 minuut gevegd hebben, vooruit rennen 3 minuten.
De goederentrein naderde met een snelheid van 40 km/h.

Oplossing: vijver

De vijver is 120 cm diep

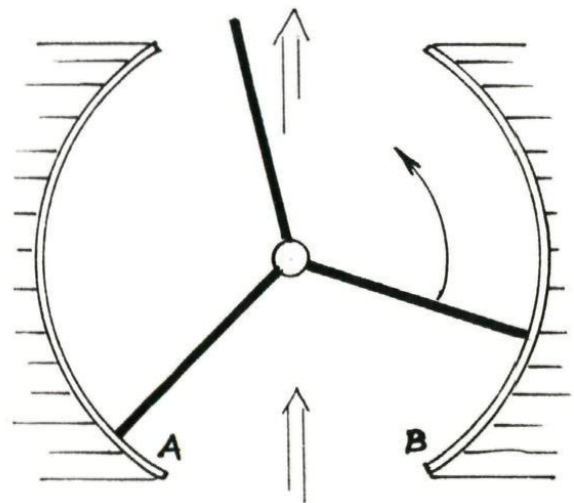
Draaideur als sluis

Aan de weg tussen Breda en Tilburg staat een groot motel. Opvallend is dat de draaideur waardoor je het motel binnenkomt uit drie glazen vlakken bestaat, die onder 120° staan.

Voor en achter zijn in de cirkel openingen gehouden, zodat je erin en eruit kunt. De functie van het mechanisme is natuurlijk te voorkomen dat lucht rechtstreeks naar binnen of naar buiten stroomt.

Als je de breedte van de opening AB te groot maakt, gaat de sluis lekken.

Toch blijft het aantrekkelijk AB zo groot mogelijk te kiezen.



Als we de straal van de cirkel R stellen, bepaal dan de ideale breedte AB, uitgedrukt in R. De draaideur reageert op een

lichtsignaal en gaat dan automatisch draaien in de pijl-richting.

Als iemand door de deur naar binnen komt draait de sluis nog enkele malen rond en wordt tenslotte gefixeerd in een

rustpositie. Welke stand zou dat zijn?

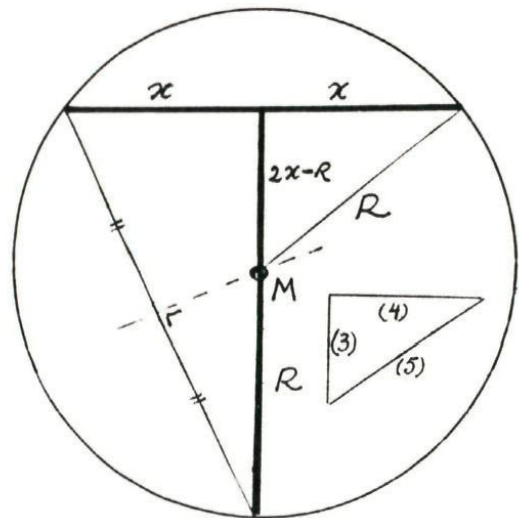
Oplossing op pagina: 25.

Auteur: Henk Mulder



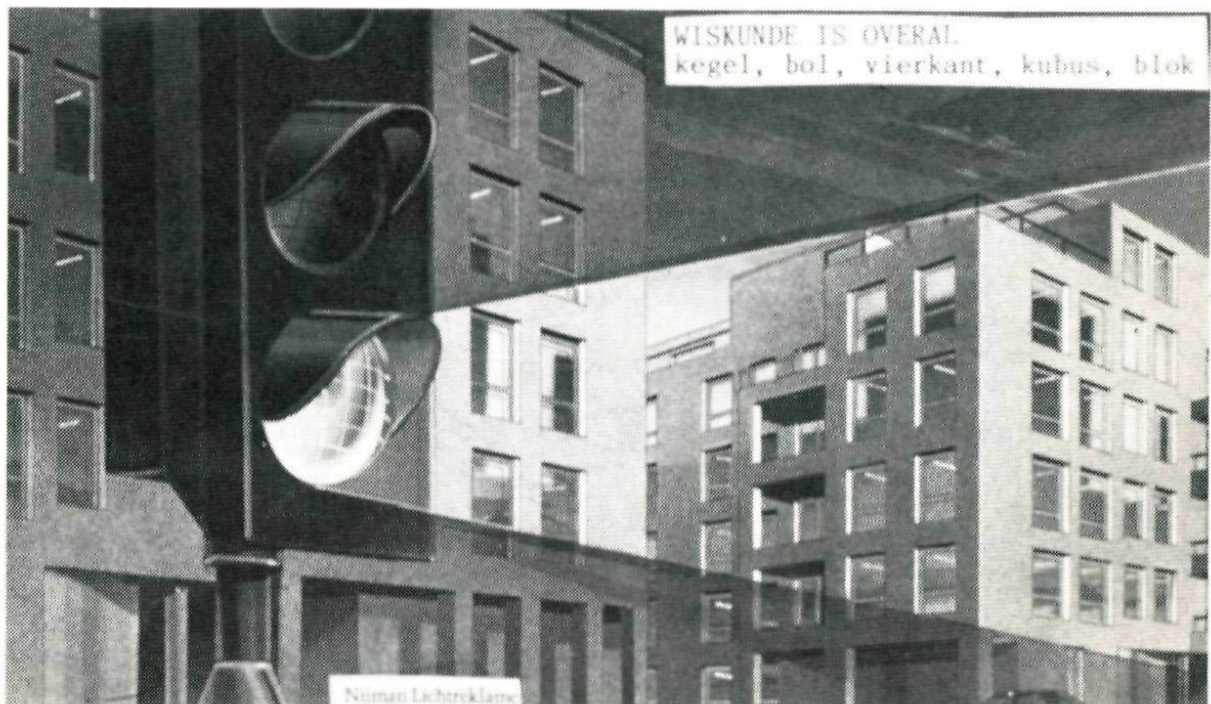
Oplossing: T in cirkel

Verbind een eind van de horizontale balk met het onderste punt van de verticale balk. Het middelpunt van de omgeschreven cirkel moet dan liggen op de middelloodlijn van dit lijnstuk. Waar deze lijn de verticale balk snijdt, ligt het middelpunt M van de cirkel.



Stel de lengten van de beide helften van de horizontale balk x en de straal van de cirkel R . Verbind verder het middelpunt M met een eind van de horizontale balk. Er verschijnt nu een rechthoekige driehoek met zijden: x , R en $2x - R$. Met behulp van de stelling van Pythagoras kun je een

eenvoudige vierkantsvergelijking opstellen. Resultaat: $5x^2 - 4Rx = 0$ met als enig bruikbare oplossing: $x = 0,8 R$ of $R = \frac{5}{4} x$ of $\frac{5}{8}$ (balklengte). Merk op dat de rechthoekige driehoek van het bekende 3,4,5-type is.

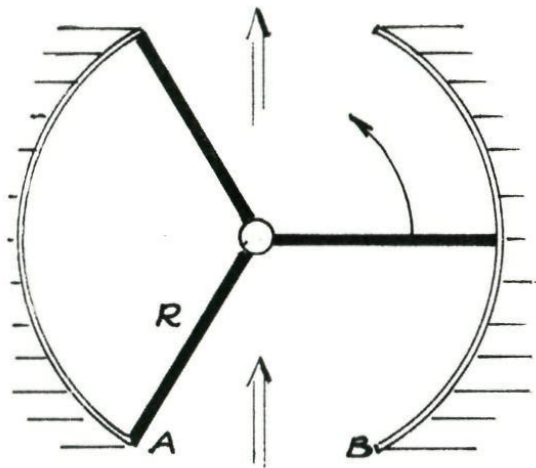


Oplossing: draaideur als sluis

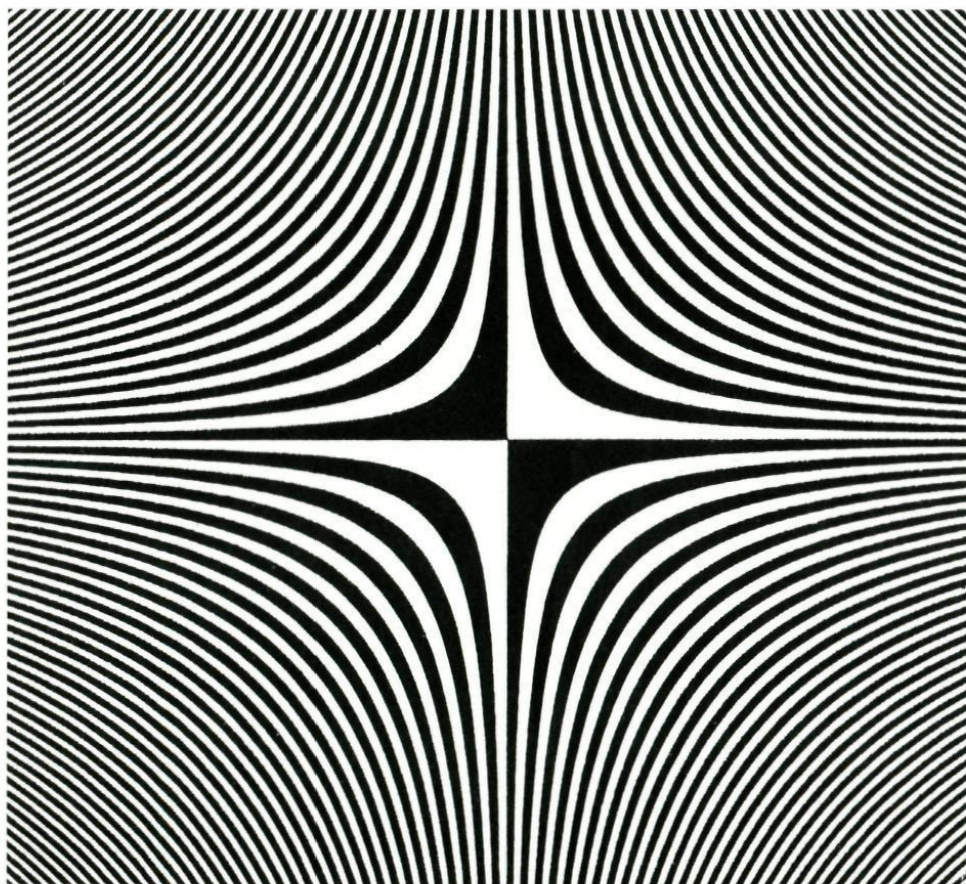
We vroegen de ideale breedte voor de sluisopening AB te bepalen uitgedrukt in R . De oplossing is erg eenvoudig: $AB + R$. trek de drie getekende spaken door: je krijgt dan een wiel met 6 spaken. B komt bij de ruststand van de deur op het verlengde van zo'n spaak. Je weet natuurlijk al dat de zijde van een regelmatige zeshoek gelijk is aan de straal van de omschreven cirkel.

In de tekening staat de ideale ruststand voor de deur. Spiegelning rond de lijn van de pijlen geeft een

tweede mogelijkheid.

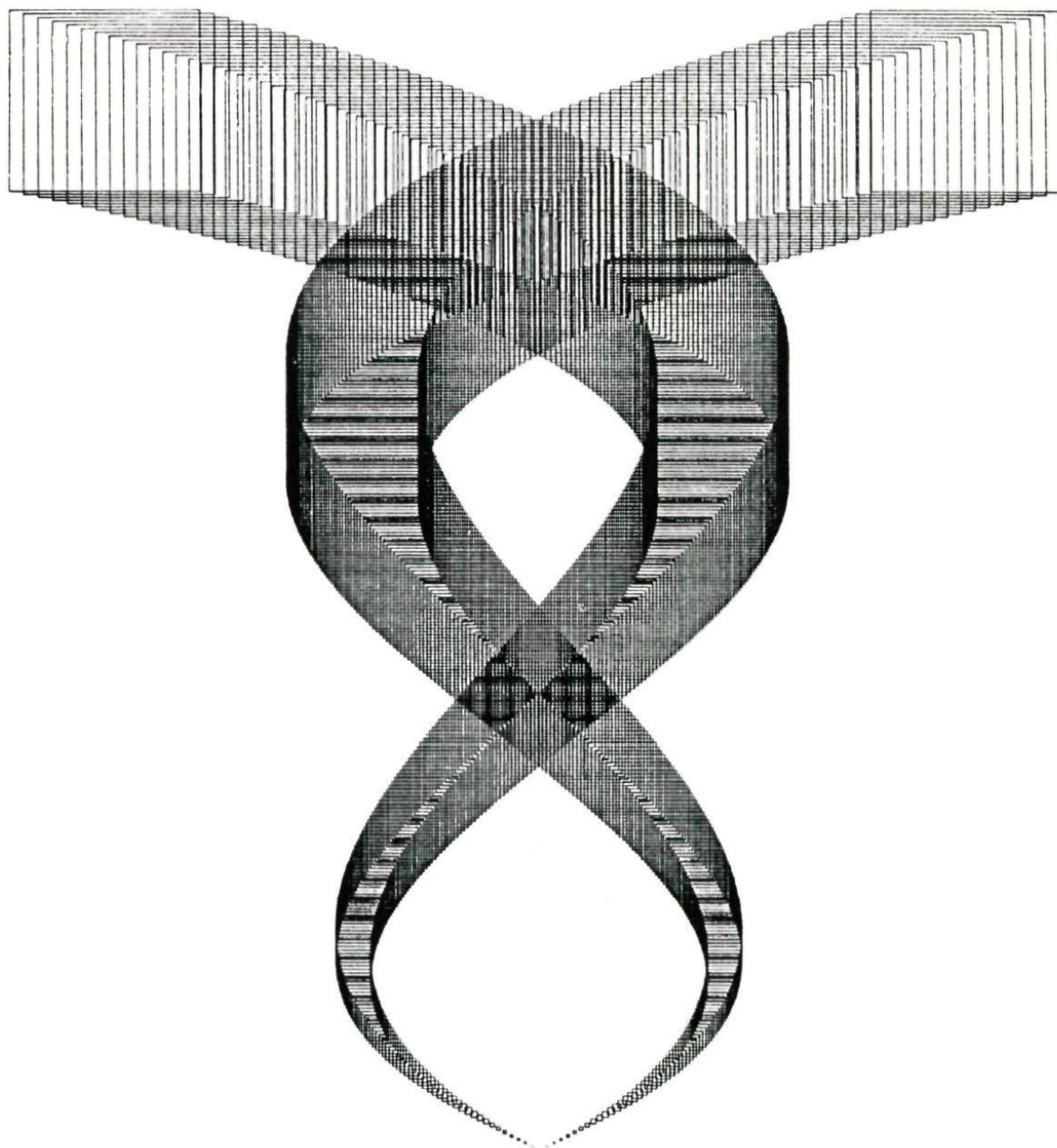


Hyperbolen



De tussenruimten zijn afwisselend en zwart. Gewoon mooi om naar te kijken. Je mag er ook bij nadenken. We geven enige suggesties: Als op de x-as en de y-as centimeters zijn afgezet, zou je dan de vergelijkingen van

de hyperbolen kunnen vinden? Wat zou de vergelijking van het assenkruis zijn? Vreemde vraag? Hier dringt hij zich aan ons op, want we kunnen steeds meer hyperbolen in het vlak rond de oorsprong tekenen.



Deze figuur is getekend door een tekenmachine, gestuurd door een computer. De opdracht was: teken vierkanten waarvan de zijden lineair toenemen, zoade te middelpunten liggen op de kromme $y = x(x - 1)(x - 2)$. Je ziet waarschijnlijk zelf wel, dat de x-as hier verticaal loopt en dat óók het spiegelbeeld van de vierkantenreeks is getekend

Eén keer wegen

Op een tafel staat een weegschaal en tien stapeltjes van elk tien munten. Negen stapeltjes bevatten normale munten van 10 g en één allemaal valse munten van elk 11 g.

De vraag is nu: welk stapeltje is hetgene met vals geld?

Om hierachter te komen mag je van elk stapeltje een aantal zelf te kiezen munten nemen en die op de weegschaal leggen. Met de juiste tactiek kun je door één meting de valse munten opsporen

valse munten bestaat.

Hoe dan wel?

De kleinste uitkomst krijgen we als we toevallig van de stapel valse munten er maar 1 nemen en van de overige 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 stuks, in zelf te kiezen volgorde. Ga maar na dat de weegschaal 551 g aangeeft.

Het hoogste komt eruit als we van de 'valse' stapel alle 10 nemen en van de wegen overige 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, stuks.

De aanwijzing wordt dan 560 g.



Oplossing

Neem van elk stapeltje telkens een ander aantal munten. Je kunt kiezen uit de aantallen van 1 tot en met 10. Van de eerste stapel neem je bijvoorbeeld 3 stuks, van de tweede 7, van de derde alle 10 en zo verder. Nu is het mogelijk uit de aanwijzing van de weegschaal direct af te lezen welke stapel uit

Als je van de valse stapel 7 munten genomen had, dan was het totale gewicht 557 geweest. het laatste cijfer geeft dus aan waar de valse stapel zich bevindt: daar waar je 7 munten vanaf gehaald hebt!

Auteur:

Noordelijke Hogeschool, Leeuwarden

Het NIM-spel

Twee personen spelen een spel met lucifers.

Ze hebben de lucifers verdeeld in drie stapeltjes die elk een willekeurig aantal lucifers bevatten.

Elke speler neemt nu om de beurt één of meer lucifers van zo'n stapeltje. Hoeveel mag je zelf kiezen, maar wel van hetzelfde stapeltje.

De speler die de laatste lucifer wegneemt is de winnaar.

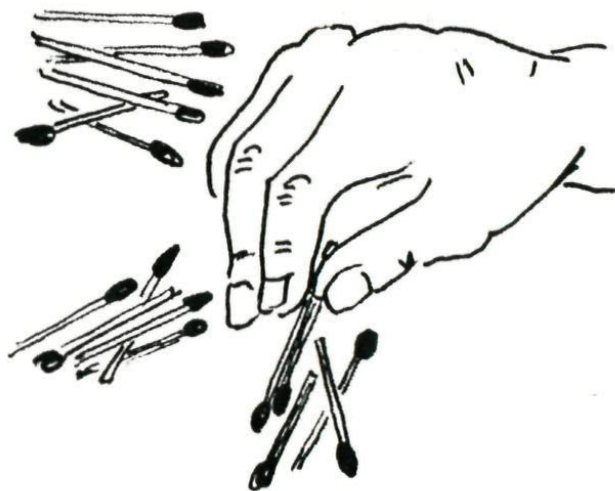
Er is een trucje dat je kan gebruiken, waarmee je dit spel vrijwel zeker wint.

Vrijwel zeker, want als je tegenspeler het trucje ook kent, werkt het natuurlijk niet meer. Kun je bedenken wat het trucje is?

We kunnen wel iets verklappen: het heeft te maken met even of oneven. Wie schrijft de redactie wat de oplossing is?

Auteur:

Noordelijke Hogeschool Leeuwarden



Bronvermelding

Foto omslag: *Henk Mulder*

Foto's 'Brugophanging': *Henk Mulder*

Cartoon 'Mooie tafels':

Pieter Hogenbirk

Foto 'Tien over tien': *Toine Daelmans*

Klokken & Uurwerken

Foto 'Dubbele schroef': *Henk Mulder*

Foto's 'Patienten': *TROS (M.C.-West)*

Cartoon 'Draaideur als sluis':

Pieter Hogenbirk

Illustratie 'Wiskunde is overal':

Nijman Lichtreclame

Illustratie 'Een keer wegen':

Noordelijke Hogeschool Leeuwarden

Illustratie 'Het NIM-spel':

Noordelijke Hogeschool Leeuwarden

PYTHAGORAS wiskunde tijdschrift voor jongeren

Pythagoras is een uitgave van MEMO Media marketing organisatie n.v., en verschijnt zes maal per jaar. Een jaargang loopt van september tot en met augustus.

Redactie: Henk Huijsmans, Henk Mulder, Frank Roos

Eindredactie: Henk Huijsmans

Redactiesecretariaat: Henk Huijsmans, Molenstraat 31, 4841 CA Prinsenbeek

Medewerkers: Bob de Jongste, Thijs Notenboom, Hans Oomis, Hans de Rijk, Frank Roos, Paul van de Veen

Uitgever: MEMO n.v., Hengeveldstraat 29, Postbus 9822, 3506 GV Utrecht

Telefoon: 030-736400, Fax: 030-734774

Bank: 69.93.65.937, Giro: 51.39.755

Verantwoordelijk uitgever: Ton Fokker

Inhoud	
Brugophanging	1
Verkiezingen	3
Driehoek met vierkanten	3
Vijver	3
Mooie tafels	4
Tien over tien	7
Reacties van lezers	8
Goocheltruc met passer	11
Dubbele schroef	11
Kubussen stapelen	13
Een vernuftig bewijs van de stelling van P	15
T in cirkel	17
Narrow escape	17
Patiënten	18
Spiegelen	19
Een cirkel in een driehoek	20
Draaideur als sluis	22
Wiskunde is overal	24
Hyperbolen	25
Eén keer wegen	27
Het NIM-spel	28
Bronvermelding	28

Nederlandse en Belgische abonnees:
Aanmelden telefonisch, 030-736400
of schriftelijk, MEMO n.v.,
Antwoordnummer 6236, 3500 VC
Utrecht.

Een jaarabonnement is f 25,- of
BF 450,-

Wacht met betalen op de factuur.

Bij tussentijdse abbonering ontvang
je ook de reeds verschenen nummers
van het lopende jaar.

Abonnementen zijn doorlopend, ten-
zij voor 1 juli schriftelijk bij de uitge-
ver is opgezegd.

Tarieven:

Abonnement Pythagoras f 25,- of
BF 450,-

Luchtpost toeslag f 10,-

Inclusief Archimedes f 45,- of
BF 800,-

Luchtpost toeslag f 20,-

Losse nummers f 5,- of BF 90,-