

PYTHAGORAS



wiskunde tijdschrift voor jongeren

***100 vogels voor honderd gulden
Optellen, moeilijker dan je denkt
Grootste priemgetal***



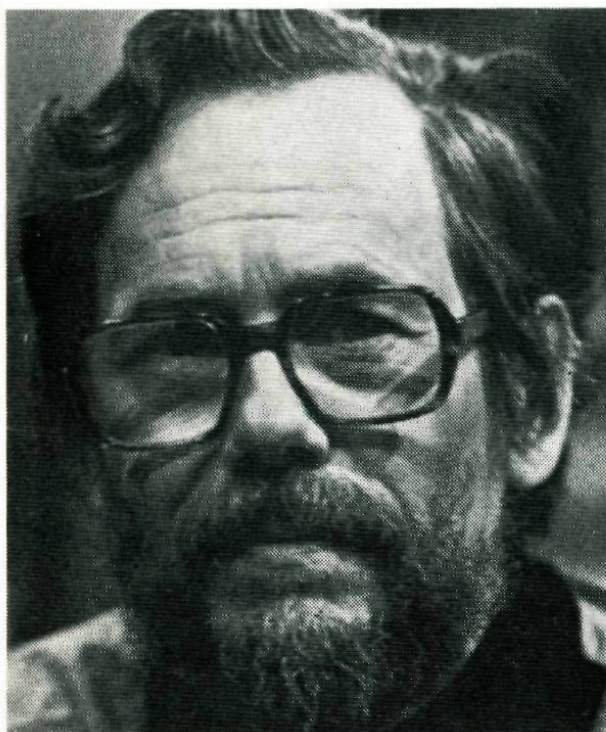
MÉMO |

32e jaargang, mei 1993, nr. 5

Afscheid van Henk Mulder

Om gezondheidsredenen heeft redactiesecretaris Henk Mulder besloten te stoppen met zijn werkzaamheden. Bijna vanaf het eerste moment is Henk betrokken geweest bij het tijdschrift Pythagoras.

In 1991 heeft Henk het redactiesecretariaat op zich genomen.



Henk Mulder

Op zijn eigen manier heeft Henk al die jaren meegewerkt aan het tijdschrift. Veel artikelen heeft hij geschreven waarin allerlei waarnemingen uit het dagelijks leven op een simpele manier in verband gebracht werden met de wiskunde die op school behandeld wordt. Hij bezit de gave om moeilijke problemen toch

inzichtelijk voor leerlingen te krijgen. Mede dankzij zijn inbreng wordt er over de behandeling van de wiskunde op school anders gedacht.

Als redactiesecretaris werkte Henk zeer nauwgezet en snel. De redactie en de wiskunde-docenten van België en Nederland zijn Henk veel dank verschuldigd.

De redactie bedankt Henk voor zijn grote inbreng en de prettige manier waarop er altijd is samengewerkt. Wij hopen dat Henk toch nog een tijd als medewerker kan blijven fungeren.

Als opvolger verwelkomt de redactie Frank Roos, reeds als medewerker betrokken bij het tijdschrift. De redactie verwacht in hem een waardige opvolger van Henk gevonden te hebben.

Henk Huijsmans

Optellen, moeilijker dan je denkt

Bij het oplossen van wiskundige problemen werken we vaak met onbekenden, die we dan door letters voorstellen. We zoeken dan naar vergelijkingen waarin die onbekenden zitten. Dan proberen we die vergelijkingen op te lossen. Dat laatste is soms niet eenvoudig.

Bovendien, als er meer onbekenden in het spel zijn, moeten we ook meer vergelijkingen hebben.

Wat te doen bij slechts één vergelijking met twee onbekenden? Vaak bieden randvoorwaarden dan nog uitkomst, zoals de onbekenden moeten gehele getallen zijn...

Daar kom je soms verder mee. Belangrijk blijft altijd om systematisch te werken, anders verdwaal je. Een wiskundige is een perfecte boekhouder.

In het volgende voorbeeld zul je wel zien wat we bedoelen.

Optellen

Neem een rij van opeenvolgende gehele getallen en tel die bij elkaar op. Bijvoorbeeld: hoeveel is $1+2+3+...+275=?$ Of hoeveel is de som van $57+58+59+...1133=?$ Of het omgekeerde: is er

een rij opeenvolgende gehele getallen die als som 1356 heeft? Zo ja, is er een oplossing of zijn er soms meer oplossingen mogelijk? En is er bij een gegeven som altijd een oplossing en zijn we er zeker van in een bepaald geval alle oplossingen te hebben?

Somformules

Van de grote wiskundige Gauss wordt verteld dat hij als jongetje op school aan het werk gezet werd om de getallen 1 t/m 100 bij elkaar op te tellen maar dat hij daar snel mee klaar was. Hij schreef:



$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 98 + 99 + 100$$

en daaronder:

$$100 + 99 + 98 + 97 + ... + 3 + 2 + 1$$

Elk tweetal getallen dat boven elkaar staat heeft als som 101, er zijn 100 van die tweetallen dus alle getallen bij elkaar opgeteld levert $100 \cdot 101$, maar dat is tweemaal de som van de getallen 1 tot en met 100.

De gevraagde som is dus

$$\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101 = 5050.$$

Op eenzelfde manier vind je

$$1+2+3+\dots+275 = \frac{1}{2} \cdot 275 \cdot (1+275) = 37950.$$

Als de rij niet met 1 begint kun je dezelfde methode gebruiken:

$$\begin{aligned} &57 + 58 + 59 + \dots + 1133 \\ &\quad \text{daaronder weer:} \\ &1133 + 1132 + 1131 + \dots + 57 \end{aligned}$$

Elk tweetal getallen dat boven elkaar staat heeft nu als som $57+1133$.

Hoeveel tweetallen staan er? $1133-57+1$ (Ga na!) en de gevraagde som is nu dus $\frac{1}{2} \cdot (1133-57+1)(57+1133) = 640815$.

Algemene formules

Na het vorenstaande is het niet moeilijk om algemene formules te vinden. Allereerst voor het geval $1+2+3+\dots+n$.

Uitschrijven zoals boven levert:

$$1+2+3+\dots+n-1+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Als we algemener de som van de rij opeenvolgende gehele getallen willen hebben die bij k

begint en bij n eindigt dan schrijven we weer:

$$\begin{aligned} &k + (k+1) + (k+2) + \dots + (n-1) + n \\ &\quad \text{met daaronder:} \\ &n + (n-1) + (n-2) + \dots + (k+1) + k \\ &\quad \text{en we vinden dus:} \\ &k+(k+1) + (k+2) = \dots + (n-1) + n = \frac{1}{2}(n-k+1)(n+k) \end{aligned}$$

waarbij $(n-k+1)$ het aantal getallen in de rij is en $(n+k)$ de som van het eerste en het laatste getal in de rij.

S = 1356

In de inleiding hebben we gesteld: welke rij opeenvolgende gehele getallen heeft een som

1356? Dan geldt dus: $2S = 2712$.
Of: $2712 = (n+k)(n-k+1)$. Dat
wordt moeilijk: één vergelijking
met twee onbekenden!

We moeten dus zien op te los-
sen: $(n+k)(n-k+1) = 2712$.

Daartoe gaan we 2712 in twee
factoren ontbinden p en q .

Dan krijgen we:

$$(n+k) = p \text{ en } (n-k+1) = q.$$

We merken allereerst op dat
 $(n+k)$ groter is dan $(n-k+1)$.

Dus p stelt de grotere factor voor
en q de kleinere.

Laten we eerst maar eens zien
hoe wij 2712 in twee factoren
kunnen ontbinden. Er blijken
acht mogelijkheden te zijn:

$$1 * 2712; 2 * 1356; 3 * 904;$$

$$4 * 678; 6 * 412; 8 * 339;$$

$$12 * 226 \text{ en } 24 * 113.$$

De eerste mogelijkheid heeft
weinig zin. Dan zou $n-k+1 = 1$
zijn of $n=k$. We hebben dan een
rij termen met slechts één exem-
plaar.

Vervolgens blijkt een combinatie
van twee even factoren ook geen
succes op te leveren.

Neem als voorbeeld: $p=1356$ en
 $q=2$. Dan is $n+k=1356$ en
 $n-k+1=2$. Optelling geeft:
 $2n+1 = 1356+2$ met als resultaat
voor n een gebroken getal en dat
mag niet. Om dezelfde reden
zou ook een combinatie van
twee oneven factoren niet
mogen, maar die hebben we hier
niet.

Dan houden we drie mogelijk-
heden over, te weten:

$$3 * 904; 8 * 339 \text{ en } 24 * 113.$$

We gaan de eerste uitwerken.
 $n+k=904$ en $n-k+1=3$. Je vindt

gemakkelijk: $k=451$ en $n=453$.

De rij is dus: 451, 452, 453 en
de som is inderdaad 1356.

En daarmee is de eerste oplos-
sing gevonden.

Los nu zelf op:

$$(n+k)(n-k+1) = 339 * 8.$$

Dat geeft: $k=166$ en $n=173$.

Dus de rij 166, 167, 168, ..., 173
(totaal 8 termen).

Vervolgens als laatste mogelijk-
heid:

$(n+k)(n-k+1) = 113 * 24$. Dat
geeft: $k=45$ en $n=68$.

Dus de rij: 45, 46, 47, ..., 68
(totaal 24 termen).

En hiermee weten we zeker dat
we alle mogelijke oplossingen
gevonden hebben. Je ziet, met
een beetje behoorlijke boekhou-
ding kom je een eind.

We hebben nog één vraag: is het
mogelijk bij elk willekeurig som-
getal een passende rij te vinden?
Nee, dat lukt bijvoorbeeld niet
bij 73, bij 169, bij 221, bij
1024 ...

Heb je zelf al in de gaten wan-
neer het bepalen van k en n mis-
lukt?

- Wel, 73 is een priemgetal en
dat kun je alleen maar schrijven
als $1 * 73$

- 169 is het kwadraat van een
priemgetal $169 = 13 * 13$ en p en
 q mogen niet gelijk worden.

- $221 = 17 * 13$ ofwel uitsluitend
het produkt van twee oneven
getallen.

- $1024 = 2^{10}$ dus enkel te schrij-
ven als het produkt van twee
even getallen en dat mag ook
niet.

Weet je nog meer gevallen te bedenken?
En wanneer is er maar één oplossing?

Opgave

Probeer eens alle rijen te vinden met een som 126.
Er zijn vier oplossingen.
De oplossingen kun je vinden op pagina 23.

Henk Mulder

Olympiade opdracht

Een paar jaar geleden was er een olympiade-opgave die lijkt op dit probleem:

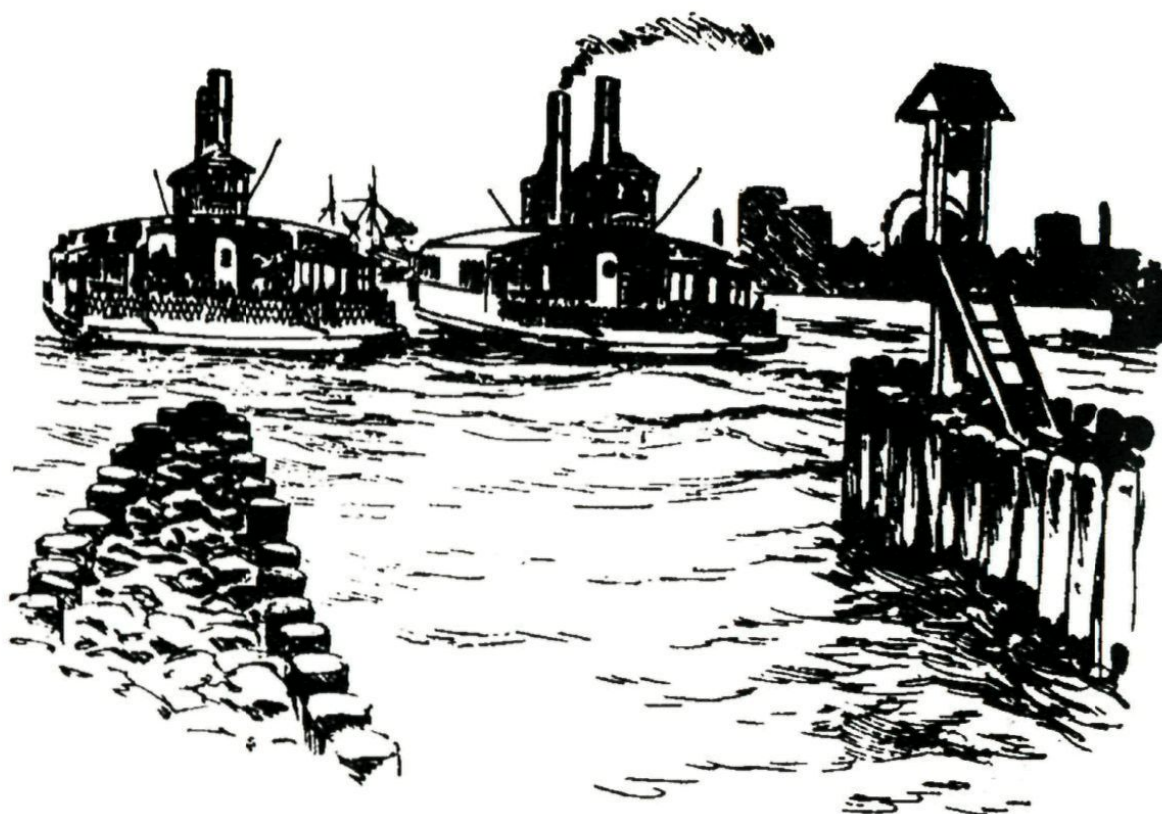
Elke deelnemer aan een Marathonloop krijgt een rugnummer. De rugnummers zijn de opeenvolgende getallen $1, 2, 3, \dots, n$ waarbij n het aantal deelnemers is. Er is één deelnemer die vaststelt dat de som van alle rugnummers die kleiner zijn dan zijn rugnummer gelijk is aan de som van alle rugnummers die

groter zijn dan zijn rugnummer. Gevraagd wordt het totaal aantal deelnemers te bepalen en het rugnummer van die ene (maffe) deelnemer als nog gegeven is dat er ongeveer 300 deelnemers zijn.

Kijk voor de oplossing op pagina 7.

Thijs Notenboom

Goochelen met grafieken



Twee boten onderhouden bij Manaus in Brazilië een op en neer veerdienst over de Amazone.

Hun snelheden zijn niet gelijk. Het zijn de Transito (T) en de Riverside (R).

T en R vertrekken op hetzelfde moment van de tegenover elkaar gelegen oevers. Ze passeren elkaar op 720 m van de haven waar R vertrok. Aangekomen

aan de overkant blijven ze daar 10 minuten liggen om passagiers te wisselen en steken dan weer over.

Op de terugweg komen ze elkaar weer tegen op 400 m van de andere haven.

De vraag: hoe breed is de Amazone daar ter plaatse? Kijk voor de oplossing op pagina 24.

Andreascollege Drachten

Mathemadics

In nummer 2 van deze jaargang hebben we enkele voorbeelden van mathemadics gegeven.

Voor de heer Schenk uit Ovezande is dat de aanleiding geweest om een aantal andere mathemadics aan de redactie te sturen.

In dit en de komende nummers zullen er steeds enkele in het blad opgenomen worden. Ook andere lezers kunnen reageren en suggesties aan de redactie sturen.

Redactie

Sinus

mathemadic

Zeven

mathemadic

Oplossing: olympiade-opgave

Zeg dat er n deelnemers zijn en dat de deelnemer rugnummer k heeft. Dan moet gelden:

$$1+2+\dots+(k-1) =$$

$$(k+1)+(k+2)+\dots+(n-1)+n$$

Toepassen van de formules geeft:

$$\frac{1}{2}(k-1)k = \frac{1}{2}(n-k)(k+1+n) \text{ ofwel } k^2-k = n^2-k^2+n-k \text{ wat te herleiden is tot } 2k^2 = n(n+1). \text{ Omdat } n \text{ en}$$

$(n+1)$ geen gemeenschappelijke priemfactoren hebben moet gelden: als n even is dan is er een p met $n=2p^2$ en een q met $q^2=n+1$ of als n oneven is dan is er een p met $n+1=2p^2$ en weer een q met $q^2=n$. Gezocht worden dan twee getallen p en q waarvoor geldt $p^2-2q^2=\pm 1$. Door proberen vinden we:

p	q	$2p^2$	q^2	n	k
2	3	8	9	8	6
5	7	50	49	49	35

Het lijkt me een aardige maar lastige opgave, die overigens door een handige programmeur

met een "brute force" zoekprogramma ook gekraakt kan worden.

Ellipsen en spiralen

In de bouwkunde en de techniek is het soms handig om ellipsen en spiralen te benaderen met behulp van cirkelbogen. De opeenvolgende cirkelbogen moeten dan delen zijn van elkaar rakende cirkels, anders is de aansluiting niet vloeiend.

Ellipsen

Figuur 1 geeft een voorbeeld van zo'n "ellips"-constructie. Deze ellips wordt opgebouwd uit vier cirkelbogen en het constructievorschrift is als volgt:

- A. Teken een vierkant met de hoekpunten 1 tot en met 4.
- B. Zet de passerpunt in 1 en maak cirkelboog I.
- C. Passerpunt in 2 geeft cirkelboog II (gestippeld).
- D. Passerpunt in 3 geeft boog III.

- E. Passerpunt in 4 geeft boog IV (gestippeld).

Merk op dat we de boog steeds linksdraaiend tekenen en dat de verplaatsing van de passerpunt rechtsdraaiend is.

Nemen we de straal van de eerste cirkel groter, dan ontstaat een grotere "ellips", die overal even ver van de reeds getekende ligt.

De oppervlakte van een echte ellips is eenvoudig te berekenen.

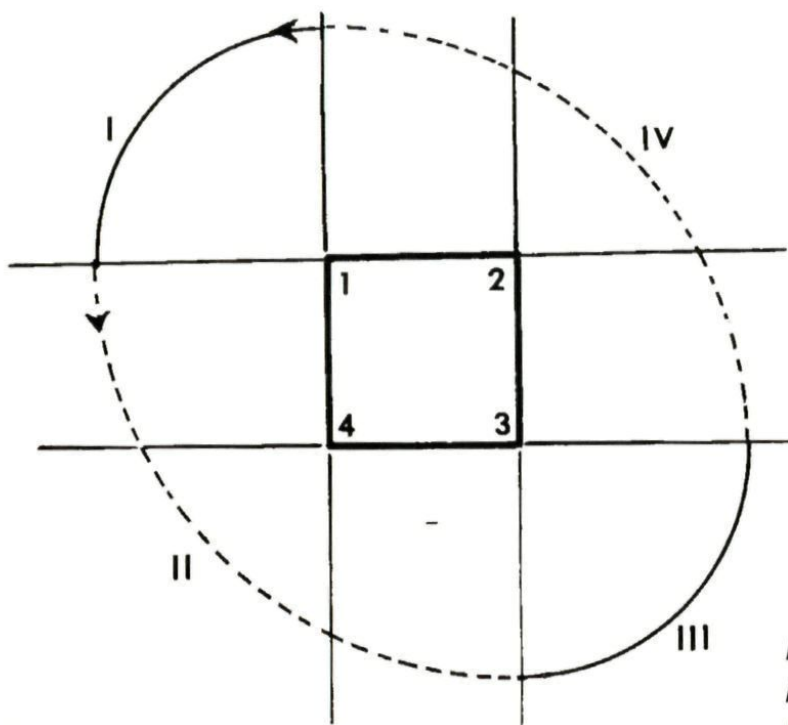
Als de halve korte as a is en de halve lange as b , dan is die oppervlakte $\frac{a}{b}\pi b^2$ ofwel πab .

Maar het berekenen van de omtrek van een echte ellips is een moeilijk wiskundig probleem.

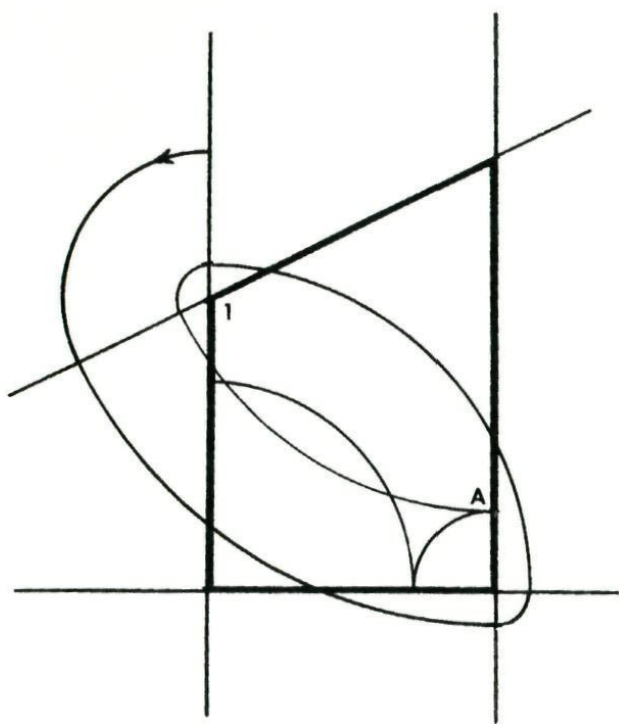
De omtrek en oppervlakte van onze pseudo-ellips zijn echter bijzonder gemakkelijk te bereke-

nen. De lengte ervan is de som van vier cirkelbogen en de oppervlakte is gelijk aan de som van vier kwart cirkels min de oppervlakte van het vierkant.

Probeer de constructie ook eens met een ruit als uitgangspunt. Er ontstaat nu ook een pseudo-ellips.



Figuur 1. Een ovaal uit vier kwart cirkels rond een vierkant.



Figuur 2. Een kromme spiraliseert rond een trapezium.

Andere uitgangsfiguren

Als we het constructievoorschrift toepassen op een willekeurige vierhoek ontstaat een quasi-spiraal. In figuur 2 is uitgegaan van een trapezium. De eerste zes cirkelbogen zorgen voor een keurig naar binnen spiraliserende figuur. Bij verdere voortzetting van de constructie gebeurt iets eigenaardigs: het eindpunt van de zesde boog komt op een van de zijden van het trapezium (bij A). Omdat we dan door moeten gaan met linksdraaiende bogen, ontstaat een scherpe punt. En dit blijft zich herhalen: we kunnen het trapezium niet meer uit. Het is interessant om als uitgangspunt van de constructie allerlei veelhoeken te nemen; regelmatige en onregelmatige en dan het gedrag van de kromme die ontstaat te volgen.

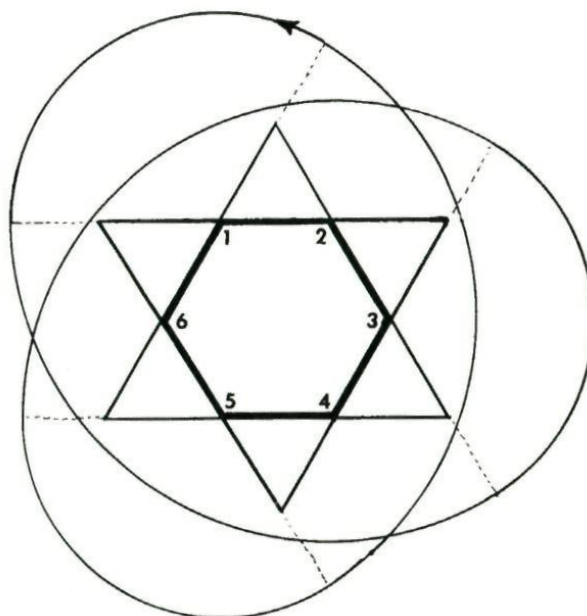
Twee bijzondere gevallen zijn uitgewerkt in figuur 3 en 4. Een regelmatige zeshoek (figuur 3) geeft een kromme die mooi sluit als we alle zes hoekpunten als middelpunten van cirkels gebruikt hebben. Bij een regelmatige vijfhoek (figuur 4) is het wat ingewikkelder. Na gebruik van alle vijf hoekpunten is de kromme nog niet gesloten, dus gaan we weer door vanaf het beginpunt. Na nog eens alle hoekpunten doorlopen te hebben is de kromme gesloten.

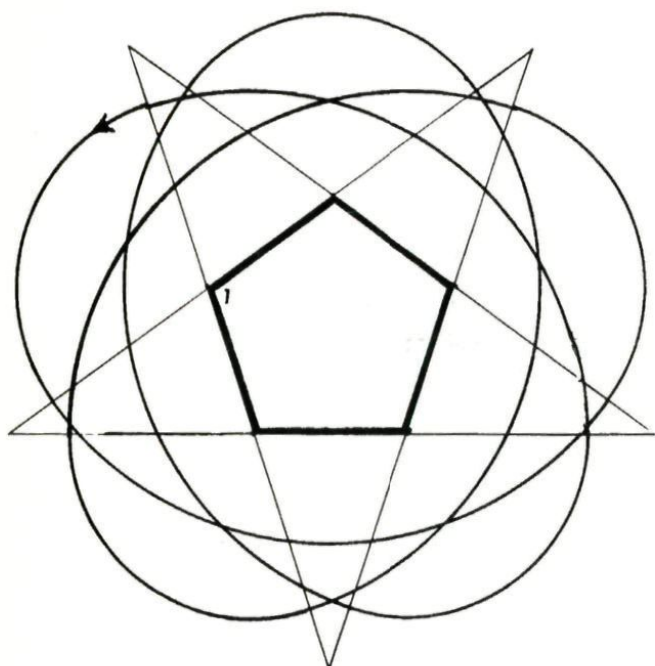
Spiralen

In figuur 5 beginnen we weer met een vierkant. Het constructievoorschrift luidt nu:

- A. Passerpunt in 4; trek een kwart cirkel met de straal PR.
- B. Passerpunt in 3, trek een kwart cirkel.
- C. Passerpunt in 2.... en zo voort.

Figuur 3. Een gesloten kromme bij een regelmatige zeshoek.





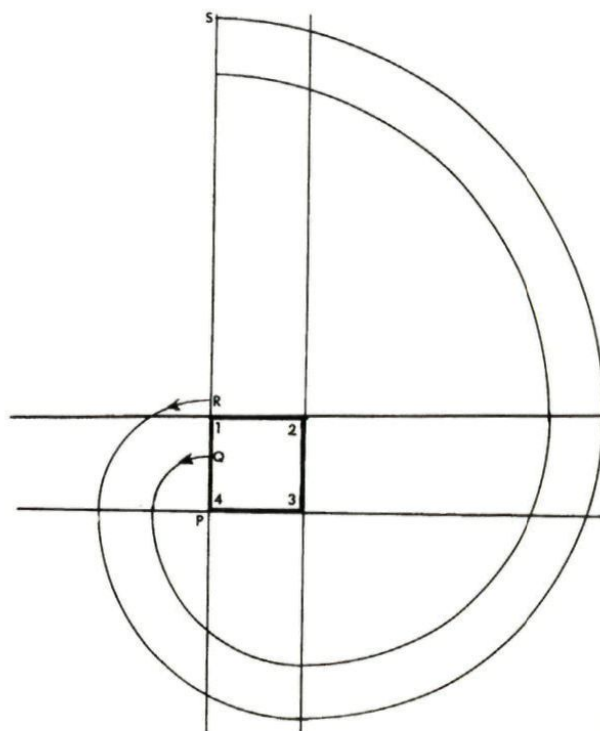
Figuur 4. Bij een regelmatige vijfhoek ontstaat een gesloten figuur na twee keer rond.

Er ontstaat een quasi-spiraal opgebouwd uit kwart cirkels. In figuur 5 is nog een tweede "spiraal" getekend, die begint met een iets kleinere cirkel (straal PQ). Vanzelfsprekend lopen beide krommen evenwijdig aan elkaar.

Met dit constructievoorschrift (dat ook op vele andere uitgangsfiguren kan worden toegepast) wordt het vierkant als het ware afgewikkeld. Het vierkant kunnen we ons voorstellen als een vierkante paal waaromheen een touw is gewonden. Aan het losse einde maken we een potlood vast. Als we nu met het potlood over de grond gaan en tegelijkertijd het touw strak houden ontstaat dezelfde figuur. Een van de echte spiralen (de spiraal van Archimedes) kan op dezelfde manier getekend worden.

Lees het artikel op pagina 12. De quasi-spiraal uit figuur 5 heeft, net als de Archimedische spiraal, de eigenschap dat de windingen evenwijdig lopen. Dat is gemakkelijk aan te tonen. Het touw wordt namelijk na elke omloop langer en wel precies zoveel als de omtrek van de uitgangsfiguur. In figuur 5 is RS bijvoorbeeld vier maal zo lang als de zijde van het vierkant. De eenvoudigste quasi spiraal
Wie zoekt naar een bijzonder eenvoudige spiraalbenadering kan deze ook uit halve cirkels samenstellen. Figuur 6 laat zien hoe dat gaat.
We beginnen met het lijnstuk AB. Zet de passerpunt in A en trek de eerste halve cirkel.

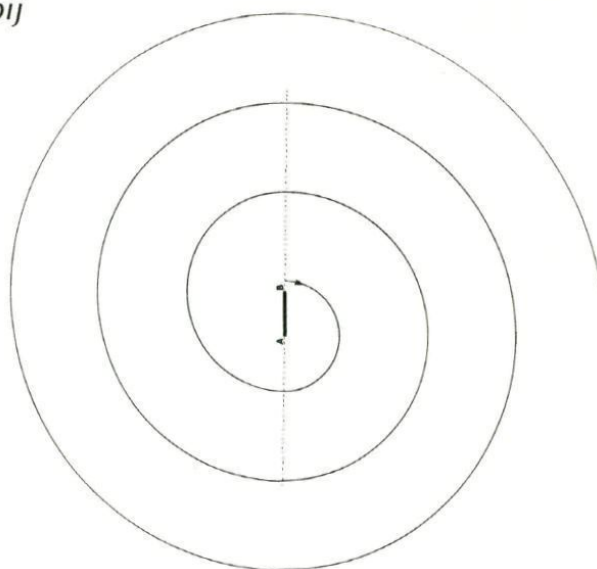
Figuur 5. Een spiraalvormige kromme bij en vierkant.



Figuur 6. Een spiraal van halve cirkels bij een lijnstuk.

Daarna de passerpunt in B en trek de tweede halve cirkel. Dan weer de passerpunt in A en zo voort. We krijgen weer een quasi-spiraal die lijkt op de spiraal van Archimedes.

Hans de Rijk



Getal en cijfer

De woorden getal en cijfer worden vaak verkeerd gebruikt. Kijk zelf maar eens naar de volgende zinnen: juist of niet juist?

In "je bent een grote nul" wordt het cijfer nul merkwaardig gebruikt.

Als we schrijven $n = 3,14$ hebben we twee cijfers achter de komma.

Op oude zonnewijzers vindt je vaak Romeinse getallen.

Kijk eerst eens wat het woordenboek ervan zegt. Een cijfer is een getalteken en een getal is een voorstelling van een hoeveelheid door middel van cijfers. Dat zijn geen geweldige definities. Zoiets als een cijfer is een soort getal en een getal is een soort cijfer.

Hoe zit het?

Cijfers zijn afgesproken tekens om mee te rekenen; wanneer het

duidelijk om een aanduiding van een hoeveelheid door middel van cijfers gaat spreken we over een getal.

In de zin: als de kleine wijzer op 4 staat, is het 4 uur, is de eerste vier een cijfer en de tweede een getal.

Nog wat voorbeelden.

In $n = 3,14$ hebben we twee cijfers achter de komma. Het Romeinse cijfer voor 5 is V. Het cijfer 0 in het getal 19C6 is onduidelijk leesbaar.

Vermenigvuldigen met het getal 2 is een optelling van twee dezelfde getallen.

Nummer

We gebruiken ook nog het woord 'nummer' als het een volgorde betreft. Zoals in: nummer 4 is nu aan de beurt: de politie heeft mijn nummer opgenomen...

Henk Mulder

De spiraal van Archimedes

In de natuur kom je op allerlei plaatsen spiralen tegen. In een vorig artikel heb je kunnen zien hoe je spiralen kunt construeren. Er is in dat artikel ook gesproken over de spiraal van Archimedes. Deze gaan we een nader bekijken.

In figuur 1 zijn een aantal concentrische cirkels getekend op gelijke afstanden van elkaar en tevens stralen die een hoek van $22\frac{1}{2}^\circ$ met elkaar maken. Het snijpunt van MQ met de eerste cirkel is A, dat van de tweede cirkel met MR is B enzovoort.

Als we de punten M, A, B, C, D, enzovoort met elkaar verbinden ontstaat een spiraalvormige figuur opgebouwd uit rechte lijnstukjes.

Als we het aantal stralen verdubbelen en er tussen elke cirkel nog een tekenen, gaat de figuur er wat vloeiender uitzien.

Zo kunnen we eindeloos doorgaan tot we een volkomen vloeiende kromme krijgen:

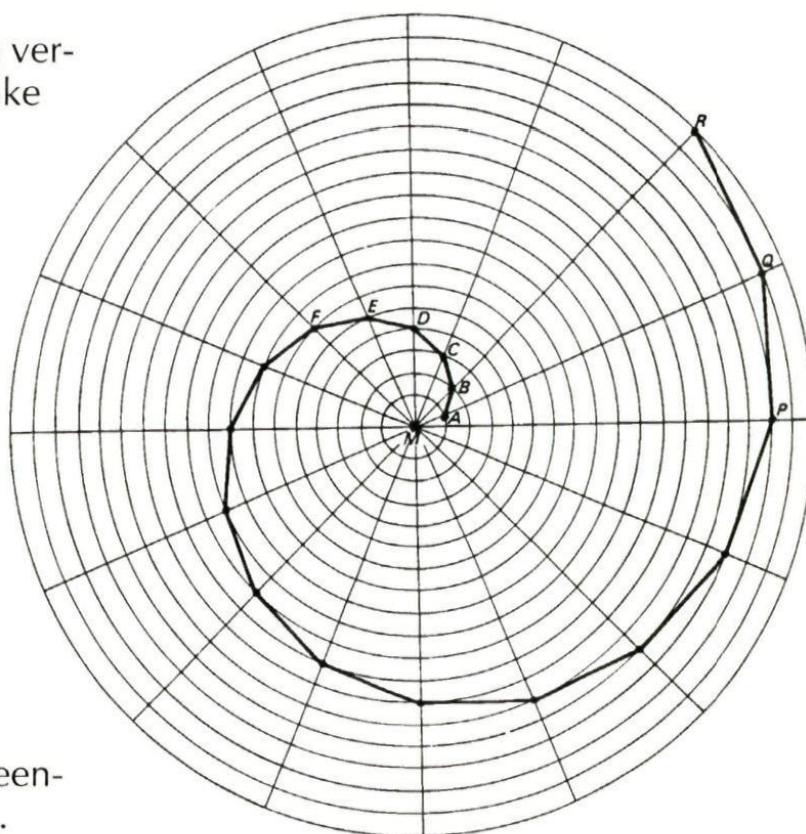
de spiraal van Archimedes.

We kunnen deze spiraal ook als volgt laten ontstaan: we laten de straal MP gelijkmatig ronddraaien en tegelijk een punt op deze straal gelijkmatig (eenparig) naar buiten lopen.

Je kunt dat zo uitvoeren: om een balpen of een garenklosje wordt een touw gewonden. Aan het losse uiteinde maken we een potlood vast. Als we nu met het potlood over de grond of over een vel papier gaan en tegelijktijd het touw strak houden ontstaat een spiraal van Archimedes.

In figuur 1 zien we dat $MP = AQ = BR$ enzovoort. Het is niet moeilijk in te zien dat de windingen even ver van elkaar blijven. Alleen heeft dat even ver van elkaar blijven hier een andere betekenis dan bij de afwikkelingslijn van een cirkel.

Figuur 1.



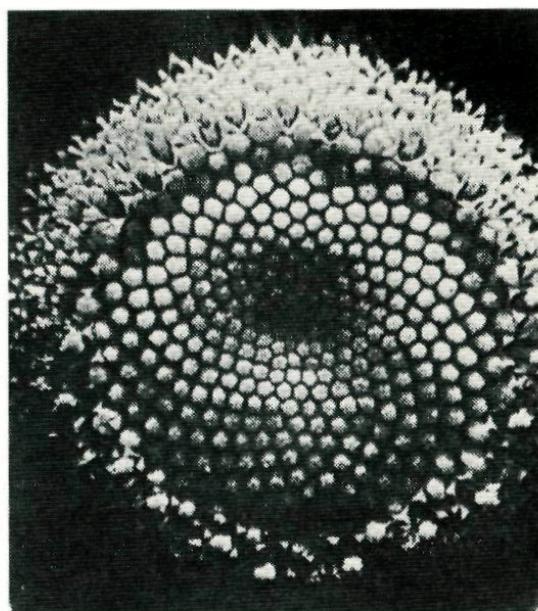
Daar zijn de gelijkblijvende afstanden loodlijnen die twee windingen van de spiraal verbinden.

Merk op dat de spiraal aanvankelijk een kleine hoek met de stralen maakt, maar dat die hoek voortdurend groter wordt.

We zouden kunnen vermoeden dat deze hoek na een aantal windingen tot 90° zal naderen.

De eerst persoon die deze spiraal grondig bestudeerd heeft is Archimedes zelf geweest.

Bruno Ernst



Figuur 2. De bloemhoofden van alle composieten bestaan uit vele bloempjes die in spiralen gerangschikt zijn.

Allemaal 1993



Aan het begin van dit jaar ontvingen wij van een lezer uit België de volgende opdracht.

Probeer de getallen van 0 tot 100 te maken met de cijfers 1-9-9-3 en wel steeds in deze volgorde. Elk van die cijfers mag maar één keer gebruikt worden.

Verder kun je werken met de tekens +, -, x en :.

De tweedemachtswortel is ook toegestaan, haakjes, faculteitten, machtsverheffing ... als je maar aan de volgorde denkt.

Kun je ze allemaal vinden?

Op pagina 19 vind je een aantal oplossingen.

Wilfried Maertens

De kalender nader bekeken

Een voorproefje

Iedereen weet precies hoe lang elke maand duurt: april, juni, september en november duren 30 dagen, februari 28 of 29 dagen en de overige maanden 31 dagen.

Maar wist je, dat april en juli altijd met dezelfde dag van de week beginnen? En dat maart en november ook altijd met de zelfde dag beginnen? Hetzelfde geldt voor september en december. Ook beginnen mei en de januari erna met dezelfde dag. Zoiets kan ook gezegd worden voor juni en de februari, die er op volgt.

1. Kun je bedenken, hoe dat kan?

In een gewoon jaar beginnen januari en augustus op dezelfde dag van de week. Ook februari en maart hebben dan dezelfde startdag.

2. Kun jij bedenken hoe dat in een schrikkeljaar is?

Stel dat je in een bepaald jaar jarig bent op een vrijdag. Weet je dan, dat je een jaar later jarig bent op een zaterdag? En het jaar daarna op een zondag. Weet je ook, dat het door een schrikkeljaar een dag overslaat?

Een jaar kan op 7 verschillende manieren beginnen: of op zondag, of op maandag, of ... Een jaar kan gewoon of schrikkel zijn. Er bestaan dus 14 verschillende soorten kalenders.

3. Welk eerstvolgende jaar na 1993 heeft dezelfde kalenderblad als 1993?

De oplossingen kun je vinden op pagina 23.

Na 28 jaren herhalen de verschillende kalenderbladen elkaar in dezelfde volgorde. Met g1 bedoel ik een gewoon jaar, dat begint met een maandag. Met s6 bedoel ik een schrikkeljaar, dat begint met een vrijdag. De nul staat voor zaterdag. Die 28-jarige cyclus ziet er dan zo uit:

g1 g2 g3 s4
g0 g1 g2 s3

g6 g0 g1 s2
g5 g6 g0 s1

g4 g5 g6 s0
g3 g4 g5 s6

g2 g3 g4 s5

Waarom zijn er schrikkeljaren?

De aarde beweegt in 365,242199... dagen om de zon. De seizoenen wisselen elkaar

dus met deze periode af. Deze tijd heet officieel een tropisch jaar. De kalender moet een geheel aantal dagen bevatten.



Het getal 365 is het meest voor de hand liggende. Maar dan is het kalenderjaar iets korter dan het tropische jaar. Na vier kalenderjaren is het verschil aangegroeid tot vrijwel 1 dag. Daarom wordt er om de vier jaar een kalenderjaar van 366 dagen gemaakt en dat is dan een schrikkeljaar met de schrikkel-dag 29 februari.

Wanneer zijn er schrikkeljaren ?

Om de vier jaar moet er dus een schrikkeljaar komen. Men heeft er voor gekozen om een jaar als schrikkeljaar te bestempelen, als het jaartal deelbaar is door 4.

Maar..., omdat 365,242199... niet precies 365,25 is, blijft er een klein verschil over tussen 4

tropische jaren en de som van drie gewone kalenderjaren en één schrikkeljaar. Dat wordt als volgt opgelost: de eeuwjaren (b.v. 1800, 1900 en 2000) zijn in principe alle schrikkeljaren, omdat ze deelbaar zijn door 4. De jaartallen, die deelbaar zijn door 100, maar niet door 400, zullen geen schrikkeljaar zijn. Dus in 400 jaren worden er 4 schrikkeljaren gewoon. Dat waren de jaartallen 1700, 1800 en 1900. De jaren 1600, 2000 en 2400 zijn wel schrikkeljaren. De jaren 2100, 2200 en 2300 weer niet.

Resultaat

Met deze regeling, die de Gregoriaanse kalender heet, bevatten 400 jaren ($3 \times 365 +$

$1 \times 366) \times 100 - 3$ dagen = 146097 dagen. Het gemiddelde kalenderjaar is nu 365,2425 dagen. Het verschil met het tropische jaar is nu 0,000301 dagen of (1 : 3322) dagen. Dus pas na 3322 jaren loopt de

kalender één volle dag uit de pas met de zon.

Berekening van de dag in de week.

Eerst codeer ik de dagen van de week volgens de volgende tabel:

dagtabel	zondag = 1	maandag = 2	dinsdag = 3
woensdag = 4	donderdag = 5	vrijdag = 6	zaterdag = 0

Vervolgens krijgt elke maand een getal, die ik mc noem:

maandtabel				algemene maandcode = mc			
jan	+0	apr	-1	jul	-1	okt	+0
feb	+3	mei	+1	aug	+2	nov	+3
maa	+3	jun	-3	sep	-2	dec	-2

Deze tabel vereist een toelichting:

Bij augustus staat b.v. +2. Dat betekent, dat augustus 2 dagen in de week later begint dan januari. Een minteken betekent het genoemde aantal (hooguit drie) dagen terug tellen.

Ik noem 31 december 1992 voor het gemak 0 januari 1993. Die dag valt op donderdag = 5 in de code van de dagtabel. Dit getal noem ik s = de startcode (van 1993). Dat is "de gelijkzetter van dat jaar".

Stel, dat je wil weten op welke dag 27 juli 1993 valt.

Bereken nu s + gewenste datum + c . Dat is $5 + 27 + -1 = 31$. Deel 31 door 7 en bepaal de rest. $31 : 7 = 4$ rest 3.

Deze rest = 3 bepaalt volgens de dagtabel, dat de gezochte dag dinsdag is. Dus 27 juli 1993 valt op dinsdag.

Als je beide tabellen uit je hoofd leert, kan je dus op elke gewenste datum de dag van de week berekenen. Sommige mensen kunnen dat wel.

Frank Roos

Pythagoras-driehoek

Een Pythagoras-driehoek is een rechthoekige driehoek waarvan de drie zijden gehele getallen zijn.

Twee rechthoekzijden daarbij even groot, kan niet.

Waarom eigenlijk niet?

Hun verschil kan wel 1 zijn, zoals in figuur 1 met (3,4,5) en (20,21,22). Het lijkt aantrekkelijk om naar nog meer oplossingen te zoeken. In de kortste keren komen we daarbij uit op: $2x^2 - 1 = y^2$. Dit keer staat er dus een min teken!

We zoeken naar oplossingen van: $a^2 = b^2 + (b+1)^2$.

Zie figuur 2.

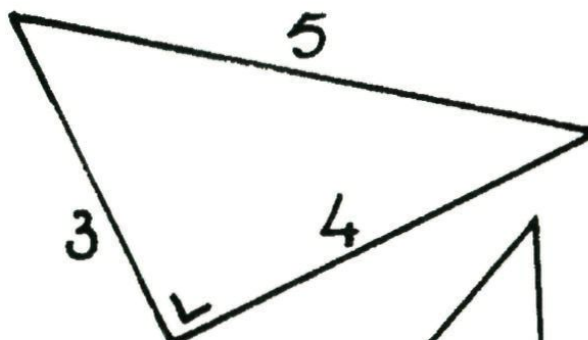
Kijk maar dat deze vergelijking echt dezelfde is:

$$2a^2 = (2b+1)^2 + 1.$$

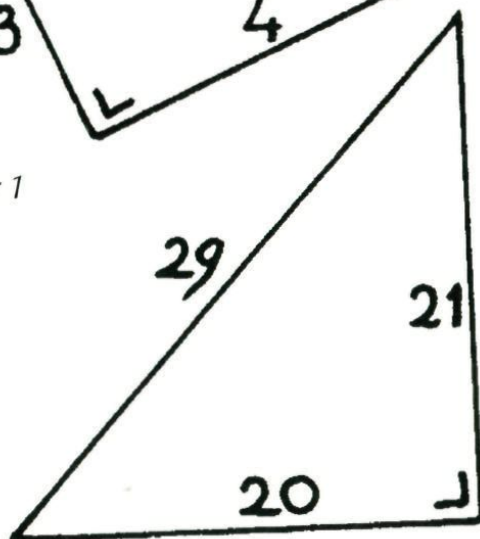
Stel hier weer $a=x$ en $2b+1=y$ en je komt uit op :

$$2x^2 - 1 = y^2.$$

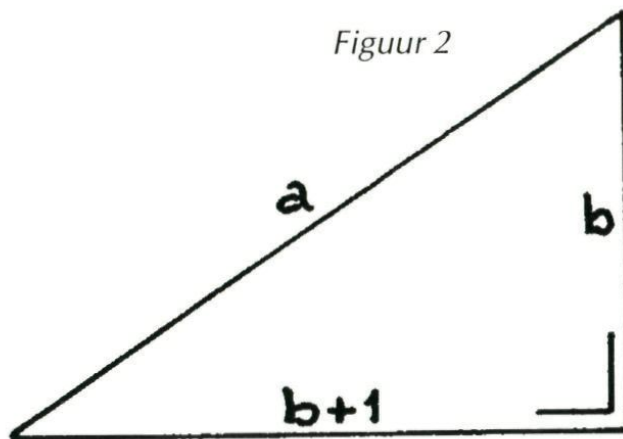
Jan Sloff heeft hiervoor al, in de vorige bijdrage, voldoende tips gegeven om dit soort rechthoekige driehoeken op te sporen.



Figuur 1



Figuur 2



Henk Mulder

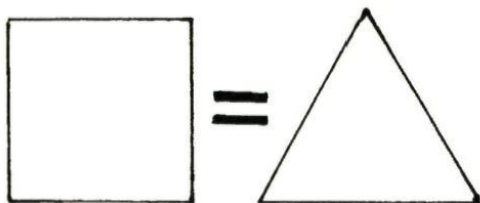
100 vogels voor honderd gulden

Een boer gaat naar de markt en koopt daar voor 100 gulden 100 vogels. Een kip kost 10 gulden, een haan 3 gulden en een kuiken 50 cent.

Hoeveel heeft hij er van elke soort gekocht?

De oplossing staat op pagina 26.

Bob de Jongste



De kop van dit artikel lijkt wat op geheimschrift.

Betekent het: maak een gelijkzijdige driehoek en een vierkant met gelijke oppervlakte? Bijna goed, de bedoeling is een tikkel-tje anders.

In figuur 1 zie je 36 balletjes, gerangschikt in een vierkant en datzelfde aantal vervolgens in een keurige gelijkzijdige driehoek. De basis van het vierkant is 6 en van de gelijkzijdige driehoek 8. Tel maar na. Aantal balletjes beide keren 36.

Dit grapje geldt kennelijk alleen maar voor kwadraten.

Je mag het ook eens proberen met 4, 9, 16 en 25. Maar daar lukt het niet mee.

De eerste keer dat het wel weer lukt is bij 1225 (fig.2).

De basis van het vierkant wordt dan 35 en van de driehoek 49.

Controleer dat maar. Bij het vierkant ben je gauw klaar;

$35 \times 35 = 1225$. Maar bij de driehoek moet je optellen:

$1+2+3+4+5+\dots+49$. De gemiddelde grootte van de termen van deze rekenkundige rij is $\frac{1}{2}(1+49)$ of 25. Er zijn 49 termen, dus de som wordt $25 \times 49 = 1225$.

Algemeen

Als we meer van zulke oplossingen willen vinden, moeten we het toch anders aanpakken.

Hoe vind je zulke voorbeelden? Is daar een vergelijking voor op te stellen?

Als we uitgaan van een vierkant met a balletjes langs een zijde en een driehoek met b balletjes, dan moet gelden:

$$a \times a = 1+2+3+4+5+\dots+b.$$

$$a^2 = \frac{1}{2}(1+b)b$$

of

$$2a^2 = b^2 + b.$$

In deze vergelijking moeten we gehele waarden voor a en b bepalen.

Het is mogelijk met enige trucage de vergelijking eenvoudiger te maken. Kijk maar.

$$2(2a)^2 = 4b^2 + 4b.$$

$$2(2a)^2 + 1 = (2b + 1)^2.$$

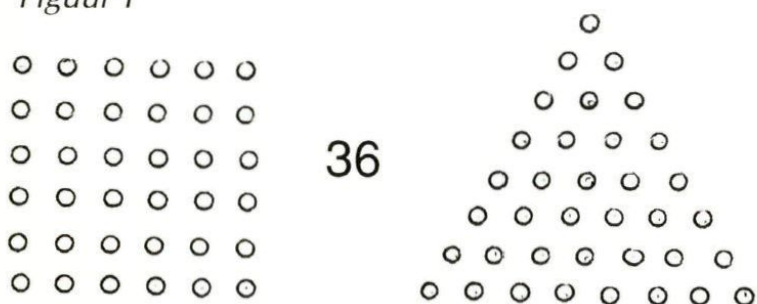
Stel nu $2a=x$ en $2b+1=y$.

Dan staat er: $2x^2 + 1 = y^2$.

En dat is veel plezieriger voor onze zoektocht dan die vergelijking in a en b .

Twee keer een kwadraat plus één moet weer een kwadraat worden.

Figuur 1



Neem $x=2$ en $y=3$;
dat geeft $a=1$ en $b=1$.
Dat is geen interessante oplossing.
Al probeerend vinden we dan: $x=12$ en $y=17$, waaruit $a=8$ en $b=6$ en dat staat keurig in figuur 1.

De oplossing van figuur 2 komt voort uit: $x=70$ en $y=99$.

Kijk maar of het klopt.
Zo kun je verder zoeken. Maar daar is een computer beter in dan wij.

In zijn bijdrage in "reacties van lezers" ging Jan Sloff verder in op

Figuur 2



deze merkwaardige vergelijking:
 $2x^2 + 1 = y^2$.
Hij gaf daar ook nieuwe trucjes om volgende oplossingen te vinden.

Henk Mulder

Oplossing: Van 0 tot 100 met 1993

Uit de complete verzameling van Wilfried hebben we twee rijtjes gelicht.

$$0 = 19 \times (-\sqrt{9} + 3)$$

$$1 = -1 - 9 : 9 + 3$$

$$2 = -1 + 9 - 9 + 3$$

$$3 = 1 \times (9 - 9) + 3$$

$$4 = 1 + 9 - 9 + 3$$

$$5 = -1 + 9 - 9 : 3$$

$$6 = 1 \times (9 + 9) : 3$$

$$7 = 19 - 9 - 3$$

$$8 = -19 + 9 \times 3$$

$$9 = 1 \times 9 - \sqrt{9} + 3$$

$$10 = 1 + \sqrt{9} + \sqrt{9} + 3$$

$$11 = -1 + \sqrt{(9 \times 9)} + 3$$

$$12 = 1^9 \times (9 + 3)$$

$$13 = 19 - 9 + 3$$

$$81 = 1 \times \sqrt{9 \times 9 \times 3}$$

$$82 = 1 + (\sqrt{9 \times 9 \times 3})$$

$$83 = -(1 + 9) + 93$$

$$84 = 1 \times 9 \times 9 + 3$$

$$85 = 1 + 9 \times 9 + 3$$

$$86 = -(1 + \sqrt{9!}) + 93$$

$$87 = (1 + 9) \times 9 - 3$$

$$88 = 1 - \sqrt{9!} + 93$$

$$89 = -1 - \sqrt{9} + 93$$

$$90 = -(1 \times \sqrt{9}) + 93$$

$$91 = 1 - \sqrt{9} + 93$$

$$92 = -1^9 + 93$$

$$93 = (1 + 9) \times 9 + 3$$

$$94 = 1^9 + 93$$

Het wordt saai om ze allemaal te laten zien.

Voor de getallen 65, 67, 68, 70 en 71 echter zoeken we nog naar oplossingen. Welke lezer helpt ons daarbij? Eventuele mogelijkheden graag opsturen aan de redactiesecretaris. In een volgend nummer zullen wij de inzendingen plaatsen.

Wilfried Maertens

Algemene oplossing van $2x^2 + 1 = y^2$

We hebben nu een aantal keren vergelijkingen van het type: $2x^2 + 1 = y^2$ ontmoet.

We laten voor de laatste keer Frank Laforce aan het woord. Hij geeft een methode om systematisch naar oplossingen te zoeken en op te houden met alleen maar te proberen.

De truc is eenvoudig: als je de kleinste (niet triviale) oplossing door proberen hebt gevonden, kun je oneindig veel andere oplossingen te voorschijn brengen.

Kleinste oplossing

De eerste oplossing luidt: $x=2$ en $y=3$.

Schrijf de vergelijking als: $y^2 - 2x^2 = 1$. Ontbind het linkerlid en vul tevens (2,3) in.

Dat geeft:

$$(y + x\sqrt{2})(y - x\sqrt{2}) = 1 = (3 + 2\sqrt{2})^m(3 - 2\sqrt{2})^m.$$

Immers, als geldt: $ab=1$ dan ook $(ab)^m = 1$ waarbij wij in ons geval m als een geheel positief getal bedoelen.

We kunnen dat veilig opsplitsen als:

$$y + x\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^m \text{ en}$$

$$y - x\sqrt{2} = (3 - 2\sqrt{2})^m \text{ en dat}$$

geeft twee vergelijkingen voor x en y .

Als je $m=0$ neemt kom je op $x=2$ en $y=3$ uit (de basisoplossing).

Probeer er eens uit te komen voor $m=2$. Dat kost wat moeite en levert: $x=12$ en $y=17$ en dat is weer de volgende oplossing.

Voor $m=3$ kost het oplossen meer werk, maar een goede speurder krijgt dat ook wel weer klaar. En ... je kunt voor zulke karweien computerprogramma's ontwerpen.

$$kx^2 + 1 = y^2$$

Als je in plaats van 2 een andere coëfficiënt kiest, verloopt de oplossingswijze analoog.

Misschien denk je: hoe groter deze coëfficiënt, hoe verderweg de eerste oplossingen voor x en y liggen. Maar daar blijkt geen relatie tussen te bestaan.

Zo heeft $61x^2 + 1 = y^2$ als eerste duo:

$$x = 226153980 \text{ en}$$

$$y = 1766319049.$$

Maar bij $1620x^2 + 1 = y^2$ vinden we de combinatie (4,161).

Bij $9781x^2 + 1 = y^2$ heeft x totaal 154 cijfers en y heeft er 155!!!

Frank Laforce

≡ quival ≡ nt

mathemadic

Eigenaardigheden van getallen ?

Sommige eigenschappen van getallen hangen samen met het feit, dat we gebruik maken van het tientallige talstelsel.

Als in dit talstelsel een getal eindigt op een nul, dan is dat getal deelbaar door tien. In het tweetalige stelsel is een getal, dat op een nul eindigt even.

De delers van 12 zijn 1, 2, 3, 4, 6 en 12. Dertien is een priemgetal. Deze twee voorbeelden zijn eigenschappen, die niets te maken hebben met het talstelsel, maar wel met het aantal, dat het getal vertegenwoordigt.

Wat denk je van de volgende aardigheden ?

		$3^2 = 9$	
		$33^2 = 1089$	
$6^2 = 36$	$333^2 = 110889$	$9^2 = 81$	
$66^2 = 4356$	$3333^2 = 11108889$	$99^2 = 9801$	
$666^2 = 443556$		$999^2 = 998001$	
$6666^2 = 44435556$		$9999^2 = 99980001$	
$66666^2 = 4444355556$		$99999^2 = 9999800001$	
$666666^2 = 444443555556$	$88^2 = 7744$	$999999^2 = 999998000001$	

Ook de volgende voorbeelden zijn aardige eigenschappen, gebaseerd op de keus van het tientallige talstelsel:

$$\sqrt{11,1111...} = 3,3333...$$

$$\sqrt{44,4444...} = 6,6666...$$

$$\sqrt{99,9999...} = 9,9999...$$

Kun je aantonen, dat deze beweringen exact kloppen ?

Tenslotte deze nog, die wat minder mooi is, maar toch nog de moeite waard:

$$\sqrt{27,2727...} = 5,22233333...$$

$$6\frac{2}{3} \times 6\frac{2}{3} = \frac{400}{9}$$

$$6,666666... = 6\frac{2}{3}$$

$$\frac{400}{9} = 44,44444$$

zo werkt dat

Frank Roos

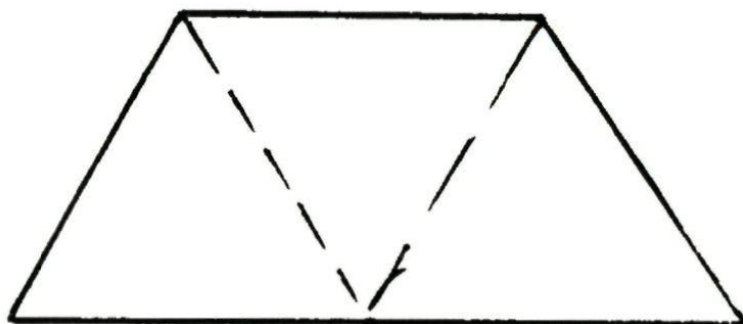
Tafels schakelen

Vaak hebben tafels rechthoekige vormen. Die zijn dan te schakelen door een aantal ervan achter elkaar of loodrecht op elkaar te zetten.

Bij conferenties is zo iets gemakkelijk.

Veel beter gaat dat met een gewijzigd model. Er is een type in de handel dat opgebouwd is uit drie gelijkzijdige driehoeken aaneen. zij vormen dan een gelijkbenig trapezium (fig.1). De hoeken zijn steeds 60° of 120° .

Figuur 1

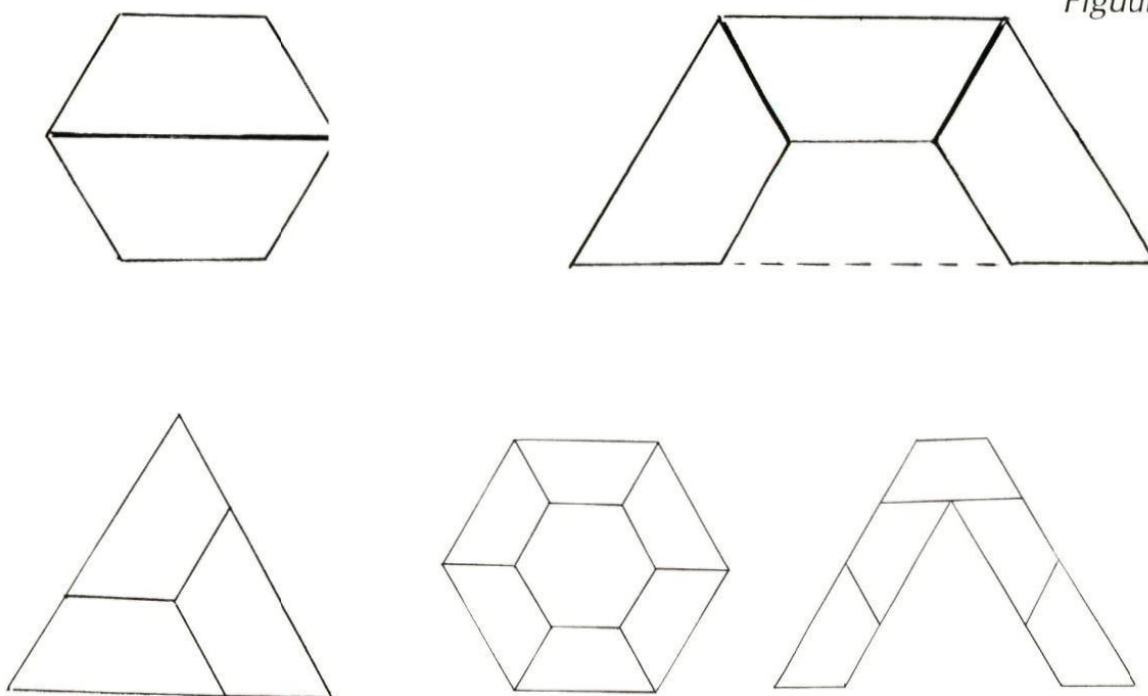


In figuur 2 staan een aantal geschikte schakelingen getekend.

Bedenk zelf nog een paar andere.

Henk Mulder

Figuur 2



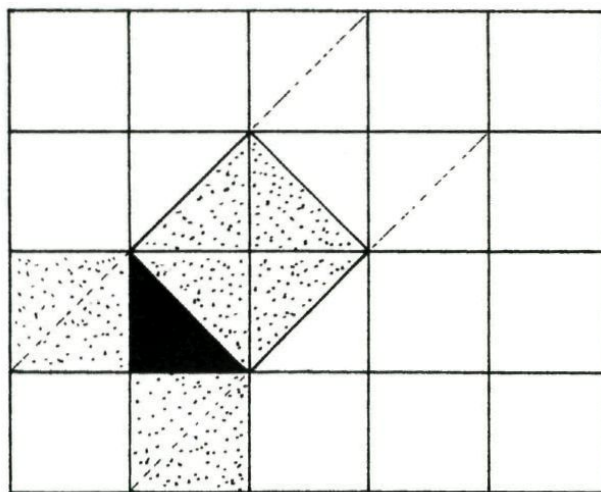
De stelling van P

Het bewijs van de stelling van P is al erg eenvoudig voor een gelijkbenige rechthoekige driehoek.

Ik zag dat eens keurig uitgebeeld op een tegelvloer.

Zie jij ook waarom het grootste vierkant gelijk is aan de som van de beide andere? Immers één tegel is twee keer zo groot als de zwarte driehoek.

Hans de Rijk



Oplossing:

De kalender nader bekeken

1. Het paar data ligt steeds een geheel aantal weken uit elkaar.
2. In een schrikkeljaar begint augustus een dag later in de week dan januari; maart begint dan een dag later in de week dan februari.
3. Nieuwjaarsdag:
Op dezelfde datum van een volgend jaar gebeurt alles 'n dag in de week later. Dus na zeven jaren denk je herhaling te krijgen. Het schrikkeljaar 1996 veroorzaakt een sprong van twee dagen. 1993 heeft dan de zelfde kalender als 1999.

Oplossing: Optellen

We hebben gevraagd alle rijen te zoeken met een som 126.

Als je het goed gedaan hebt dan heb je de volgende oplossingen gevonden:

$$126 = 10+11+12+ \dots +18$$

$$126 = 15+16+17+ \dots +21$$

$$126 = 30+31+32+33$$

$$126 = 41+42+43.$$

Henk Mulder

Oplossing: Goochelen met grafieken

We zetten de zaak uit in een grafiek.

Horizontaal zetten we de tijd, verticaal de afstand tot een van beide oevers.

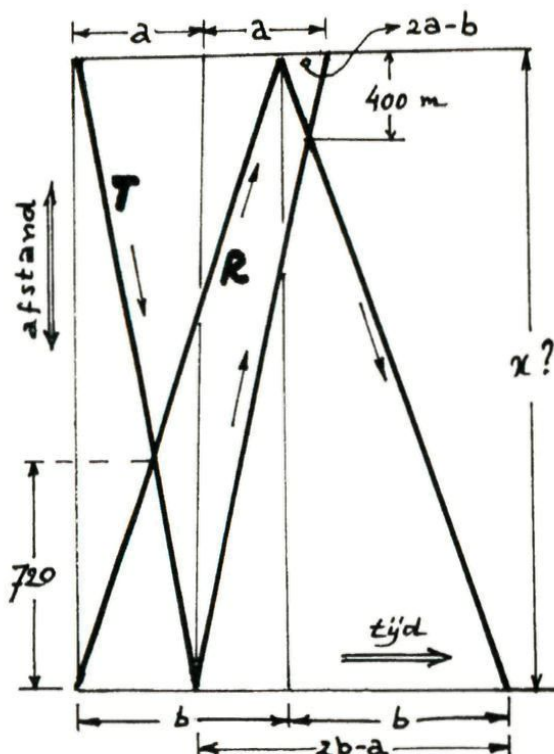
Omdat beide schepen ieder met een constante snelheid varen, wordt de grafiek van de afstand als functie van de tijd in beide gevallen een rechte.

Ga eerst zelf maar na dat in figuur 1 het vaarschema goed in beeld gebracht is. Waarom zijn het twee gelijkbenige trapezia over elkaar heen?

Kun je al aflezen dat T sneller vaart dan R?

Overigens de vaartijd is telkens heen en terug dezelfde.

We merken op dat de grootte van de stoptijd in het vraagstuk helemaal geen rol speelt. We zouden de schepen dus na aan-



Figuur 2

komst gelijk terug kunnen laten varen; dat zou geen gevolgen voor de uitkomst hebben.

Translatie

In figuur 2 hebben we de stoptijden er tussen uitgeknipt en het tweede deel van figuur 1 over 10 minuten naar links verschoven, zodat de driehoeken aansluiten. Wat we zien, zijn nu twee gelijkbenige driehoeken, over elkaar heen. De basis van driehoek T is $2a$, van driehoek R is dat $2b$.

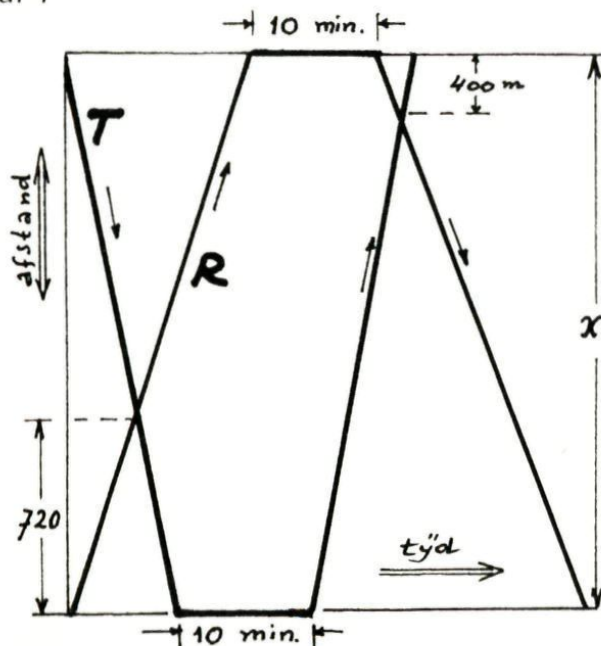
In figuur 3 hebben we het linkse stel even apart getekend.

Daar kun je aflezen:

$$\frac{x}{720} = \frac{a+b}{a}$$

In de tweede zandloperfiguur is de bovenzijde $2a-b$ en de onder-

Figuur 1



zijde $2b-a$. Ga dat maar na.
Dat geeft:

$$\frac{x}{400} = \frac{a+b}{2a-b}$$

want $(2a-b) + (2b-a) = a+b$.
En zo hebben we twee vergelijkingen met ... drie onbekenden, a, b en x . Het gaat om x .

Je moet het zelf maar afmaken.
Je kunt x berekenen en de verhouding van a en b .

Wij vinden: $x=1760$ en
 $a/b = 9/13$.

Wat is de werkelijke betekenis van a/b ?

Als T een vaarsnelheid van 26 km/h heeft, hoe snel vaart R dan?

Formule

Als je algemener aan het werk gaat en $720=p$ stelt en $400=q$, kun je een algemene uitkomst vinden.

Tot onze grote verrassing levert dat: $x=3p-q$, ongeacht de waarden van a en b . Controleer eerst even: $1760=3 \times 720 - 400$.

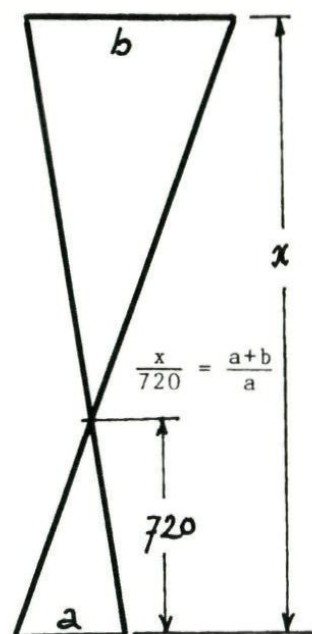
Als je dit ziet stel je de vraag: kan het hele verhaal niet eenvoudiger.

Een uitdaging voor de lezer; de redactie houdt zich aanbevolen.

Model

Het is opmerkelijk hoe wij het vaarschema teruggebracht hebben tot tenslotte twee gelijkbenige driehoeken.

De spoorwegen werken voortdurend met dat soort grafieken.



Figuur 3

Je kunt overigens figuur 2 ook als een biljart zien, waarbij twee ballen uit twee hoeken zijn weggeschoten. De beide botsingshoeken zijn daarbij gelijk.

Of ... als twee lichtstralen die weerkaatsen op evenwijdige spiegels.

Het terugbrengen van een bepaald probleem tot een dergelijke vorm noemen wij: het werken met een model.

Zo hebben we hier veerboten veranderd in biljartballen en lichtstralen.

Zulke modellen hebben altijd hun beperkingen.

Andreascollege Drachten

Oplossing: 100 vogels

We hebben twee vergelijkingen:

$$x + y + z = 100 \text{ en}$$

$$10x + 3y + \frac{1}{2}z = 100.$$

Vermenigvuldig de eerste met 2 en trek de tweede er van af.

$$\text{Je krijgt dan: } 19x + 5y = 100.$$

Hierbij moeten x en y wel gehele getallen zijn, want halve kippen krijg je alleen bij de poelier.

Merk op dat $5y$ op een 5 of een 0 moet eindigen.

Als $5y$ op een 0 eindigt, dan moet $19x$ ook op een 0 eindigen en dat kan niet als de som honderd moet worden.

Dus eindigen $5y$ en $19x$ elk op een 5.

Nu kan $19x$ alleen maar op een 5 eindigen als $x=5$. Dan volgt $y=1$ en dan ten slotte $z=94$.

De boer kocht dus 5 kippen, 1 haan en 94 kuikens.

Bob de Jongste

Symposium Artificial Life

Deze zomer viert 'Het Delftsch Studenten Corps' haar 29e lustrum

Ter gelegenheid daarvan wordt op 2 juli a.s. een symposium over 'Artificial Life' georganiseerd. Het symposium vindt plaats in de aula van de Technische Universiteit te Delft. Er worden lezingen gehouden en er is een tentoonstelling van verschillende toepassingen zoals computer simulaties en autonome robos.

Het symposium is voor iedereen toegankelijk.

Inlichtingen zijn verkrijgbaar bij TUCO, Jeroen Quaegebeur, Phoenixstraat 30, 2611 AL Delft. Tel. 015-159168. Fax 015-125120.

Spiegeling

mathemadic

Grootste priemgetal

Vaak genoeg is er melding van gemaakt, dat er geen grootste priemgetal bestaat. Je hebt er recentelijk ook het bewijs van kunnen lezen. Met computers vindt men steeds weer grotere priemgetallen. Van nieuwe vondsten houden we je steeds op de hoogte.

Met de titel van dit stukje bedoelde ik: wat is het grootste priemgetal, dat jij uit je hoofd weet?

Voor mij is dat 333.667. Ik ontdekte hem, toen ik de delers zocht van 111, 1111, 11.111, enz. Zo is $11.111 = 41 \times 271$.

Het aardige van deze delers is, dat hun omgekeerde een verrassend korte herhaling in de cijfers hebben. Kijk:

$$1/41 = 0,02439024390...$$

De herhaling komt steeds om de vijf cijfers.

$$\text{Overigens } 1/2439 =$$

0,0004100041000410..., ook met een herhaling van vijf cijfers.

$$\text{Enne... } 2439 \times 41 = 99.999 !$$

In dit verband noem ik (on-officieel) 41 en 2439 broertje en zusje.

333.667 is een deler van 111.111.111. Kun je ook het zusje van deze grote broer ontdekken? Kan je ook de periodiciteit van hun omgekeerde ontdekken?

Doordat 333.667 in verband met bovenstaande een interessant geval is, kon ik dit priemgetal, mede dank zij zijn "uiterlijk", gemakkelijk onthouden. Weet jij een ander groot, priemgetal met iets interessants?

Kan jij nu ook andere getallen n ontdekken met een verrassend korte periode van $1/n$? En kan je ze als broer en zus vinden?

Frank Roos



mathemadic



mathemadic

Met 4x2

Hendrik Casimir beschrijft in zijn boek 'Het toeval van de werkelijkheid' een spel met enkel tweeën.

Je moet proberen gehele getallen te schrijven met vier keer het cijfer 2 en geen andere.

Algemene wiskundige tekens mag je vrij gebruiken.

Het begint eenvoudig:

$$1 = (2+2) : (2+2)$$

$$2 = \frac{2}{2} + \frac{2}{2}$$

$$3 = 2 \times 2 - \frac{2}{2}$$

$$4 = 2+2+2-2$$

$$5 = 2+2+\frac{2}{2}$$

$$6 = 2 \times 2 \times 2 - 2$$

Er zijn soms meer oplossingen mogelijk. Maar de zaak wordt gaandeweg moeilijker.

Hoe ver kom jij?

Stuur je pogingen naar de redactiesecretaris.

Het grootste getal komt in PYTHAGORAS.

Henk Mulder

Bronvermelding

Foto omslag: *Henk Mulder*

Foto 'afscheid van Henk Mulder': *Willy Mulder*

Cartoon 'Optellen, moeilijker dan je denkt': *Pieter Hogenbirk*

Illustratie 'Goochelen met grafieken': *Andreascollege Drachten*

Illustraties Mathemadics: *Henk Mulder*

Illustraties en foto 'Ellipsen en spiralen': *Bruno Ernst*

Cartoon 'De kalender nader bekeken': *Pieter Hogenbirk*

Illustraties pag. 13 en 21: *Henk Mulder*

PYTHAGORAS wiskunde tijdschrift voor jongeren

Pythagoras is een uitgave van MEMO Media marketing organisatie n.v., en verschijnt zes maal per jaar. Een jaargang loopt van september tot en met augustus.

Redactie: Henk Huijsmans, Frank Roos

Eindredactie: Henk Huijsmans

Redactiesecretariaat: Henk Huijsmans, Molenstraat 31, 4841 CA Prinsenbeek

Medewerkers: Bob de Jongste, Thijs Notenboom, Hans Oomis, Hans de Rijk, Paul van de Veen, Henk Mulder

Uitgever: MEMO n.v., Hengeveldstraat 29, Postbus 9822, 3506 GV Utrecht

Telefoon: 030-736400, Fax: 030-734774

Bank: 69.93.65.937, Giro: 51.39.755

Verantwoordelijk uitgever: Ton Fokker

Inhoud

Afscheid van Henk Mulder	1
Optellen, moeilijker dan je denkt	2
Olympiade opdracht	5
Goochelen met grafieken	6
Mathemadics	7
Ellipsen en spiralen	8
Getal en cijfer	11
De spiraal van Archimedes	12
Allemaal 1993	13
De kalender nader bekeken	14
Pythagoras-driehoek	17
100 vogels voor honderd gulden	17
Vierkant en driehoek	18
Algemene oplossing van $2x^2 + 1 = y^2$	20
Eigenaardigheden van getallen?	21
Tafels schakelen	22
De stelling van P	23
Symposium Artificial Life	26
Grootste priemgetal	27
Met 4×2	28
Bronvermelding	28

Nederlandse en Belgische abonnees:
Aanmelden telefonisch, 030-736400
of schriftelijk, MEMO n.v.,
Antwoordnummer 6236, 3500 VC
Utrecht.

Een jaarabonnement is f 25,- of
BF 450,-

Wacht met betalen op de factuur.

Bij tussentijdse abonnering ontvang
je ook de reeds verschenen nummers
van het lopende jaar.

Abonnementen zijn doorlopend, ten-
zij voor 1 juli schriftelijk bij de uitge-
ver is opgezegd.

Tarieven:

Abonnement Pythagoras f 25,- of
BF 450,-

Luchtpost toeslag f 10,-

Inclusief Archimedes f 45,- of
BF 800,-

Luchtpost toeslag f 20,-

Losse nummers f 5,- of BF 90,-