

PYTHAGORAS



wiskunde tijdschrift voor jongeren



Sterren, vliegers en pijlen
Onmogelijke driebalk
Poolcoördinaten en vectoren

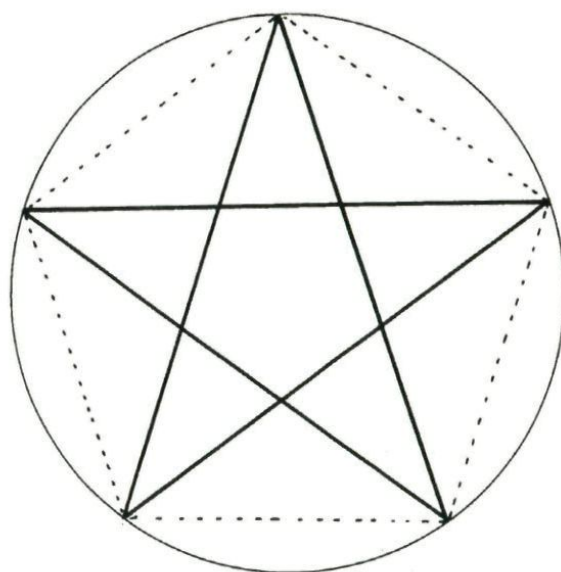
MÉMO |

32e jaargang, juli 1993, nr. 6

Sterren, vliegers en pijlen

De regelmatige vijfpuntige ster is een fraaie en interessante figuur. Het is dan ook niet verwonderlijk dat deze ster in de loop van de eeuwen vaak werd uitgekozen als symbool van wijsheid en kracht. De middeleeuwse bouwmeesters gebruikten de ster als insigne.

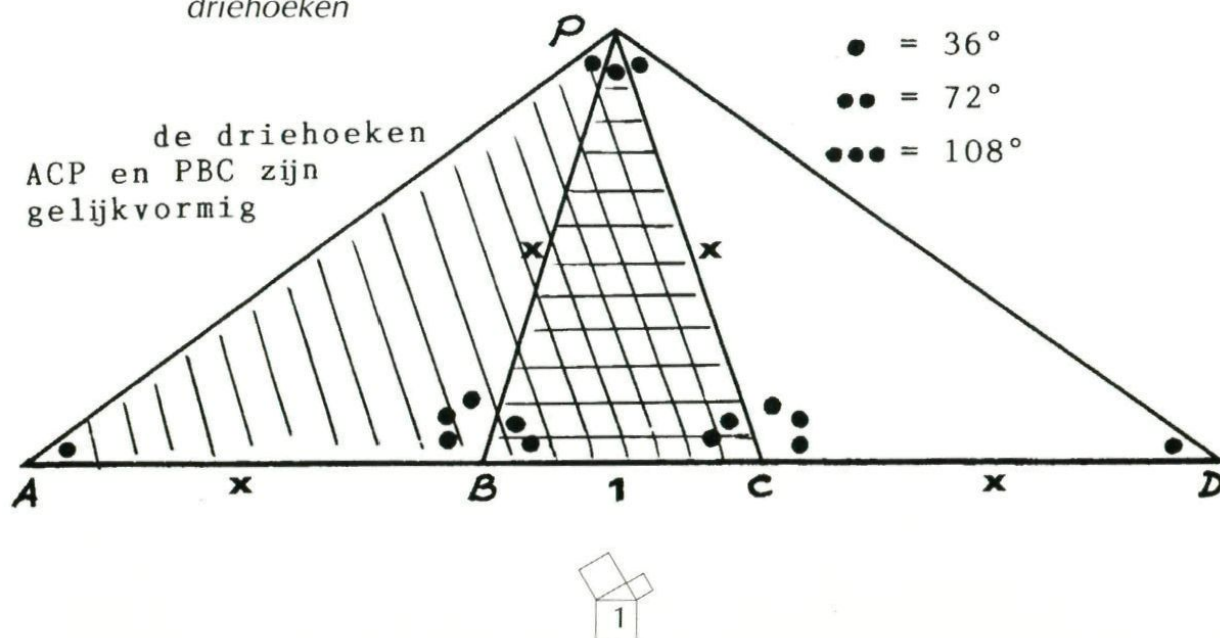
Al vanaf de verre oudheid hebben mensen getallen gekoppeld aan orde en regelmaat. Speciaal verhoudingen speelden een rol in de bouwkunst, bij de studie van de planeetbanen, jazelfs in de waardering van de schoonheid van het menselijk lichaam. In figuur 1 liggen de punten van de ster op een cirkel. Probeer eens uit te rekenen dat de hoeken bij de punten 36° zijn. In het centrum zie je een regelmatige vijfhoek en nog een als we de opeenvolgende punten van de ster met elkaar verbinden.



Figuur 1. Het Pentagram.

Je herkent hierin vast wel het beroemde gebouw, het Pentagon in de Verenigde Staten. Pentagon betekent zoveel als vijfhoek. De hoeken van zo'n vijfhoek zijn alle 108° . Kun je dat aantonen? Neem eens het bovenste deel van de figuur. Het is een tekening vol verrassingen (fig.2). Ze bestaat uit een viertal ineengevlochten gelijkbenige drie-

Figuur 2. Een deel van het pentagram: ineengestrengelde gelijkbenige driehoeken



hoeken, waarin telkens hoeken voorkomen die eenmaal, twee-maal of driemaal 36° zijn (36° , 72° en 108°). Ga dat maar na.

Rekenen

De verhoudingen in deze figuur hebben de mensen altijd gebio-logeerd. Een bepaalde verhouding noemden ze zelfs 'de gouden verdeling'.

De Italiaan Luca Pacioli noemt het in zijn boek van 1509 zelfs 'divina proportione' ofwel de goddelijke verdeling. Begrijpelijk dat men in de bouwkunst en bij de studie van de natuur er voortdurend rekening mee hield.

Stel het middelste stuk $BC = 1$, dan proberen we de overige stukken uit te rekenen. Je ziet de gelijkbenige driehoeken ACP en PBC , die met elkaar gelijkvormig zijn. Stel $AB = BP = x$. Dan volgt:

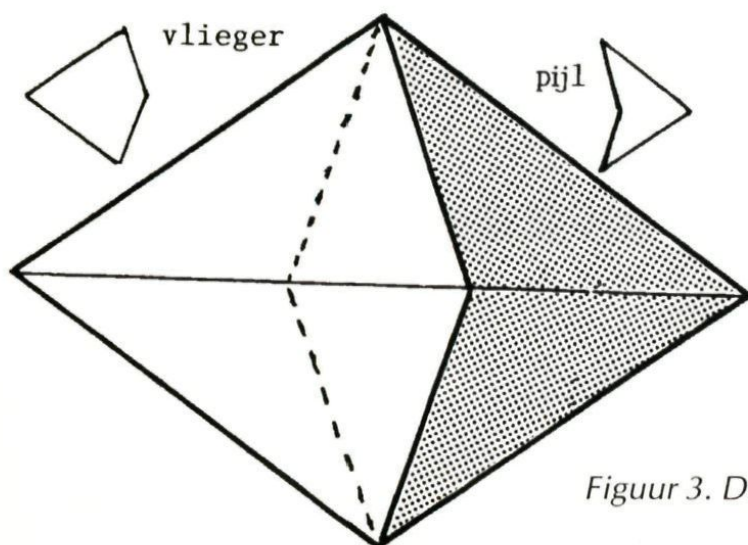
$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$$

of $x^2 = x+1$, dus $x^2 - x - 1 = 0$. Je kunt nu zelf vast wel de positieve wortel uitrekenen. Daar komt dan uit: $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ of ongeveer 1,62.

Vliegers en pijlen

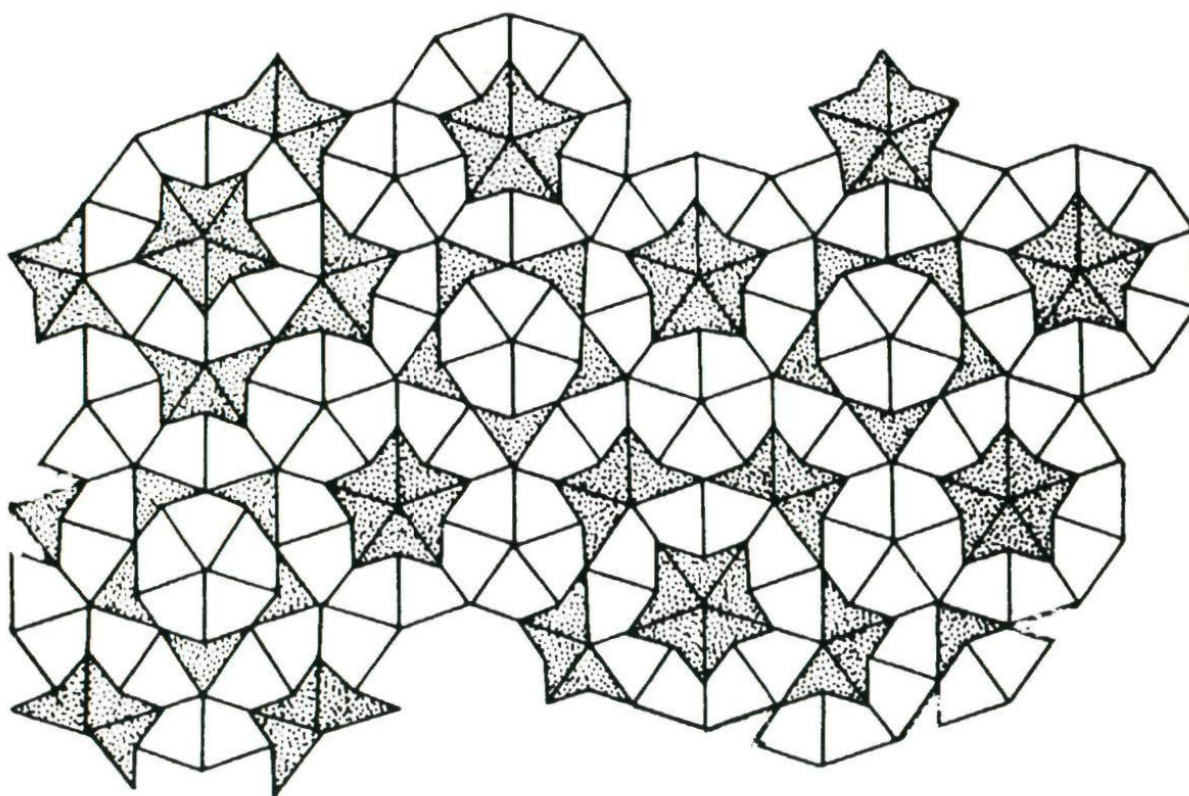
De Engelsman Roger Penrose spiegelde in 1970 figuur 2 in AD .

Zo krijg je figuur 3. Deze heeft de vorm van een ruit. Hij deelde deze op in een 'vlieger' en een 'pijl'.



Als je tegeltjes bakt in deze vormen, kun je daarvan een vloer leggen waarbij alles overal past (fig.4). Maar... het merkwaardige is, dat het patroon dat zo ontstaat helemaal geen regelmaat vertoont!

Figuur 3. De vlieger en de pijl van Penrose.



Figuur 4. Een willekeurige vlakvulling met vliegers en pijlen.

Punten

Het menselijk lichaam heeft een aantal kenmerkende punten. Zo wordt op een houtsnijcursus geleerd hoe je een beeld kunt opmeten uitgaande van drie

punten: de neus en de beide knieën. Vanuit die basisdriehoek kun je alle overige punten vastleggen.

Bruno Ernst

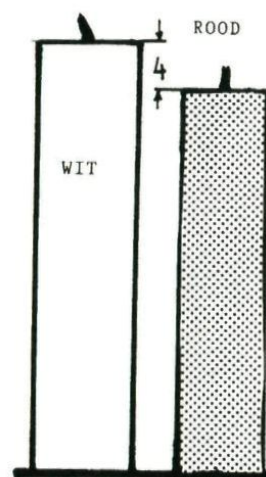
Twée kaarsen-puzzel

Twée cilindrische kaarsen hebben verschillende lengte. De witte is 4 cm langer dan de rode. De witte brandt op in 6 uur, de rode in 4 uur.

Als de witte 4 uur heeft gebrand is deze even lang als wanneer de rode $2\frac{1}{2}$ uur heeft gebrand. Hoe lang are beide kaarsen ?

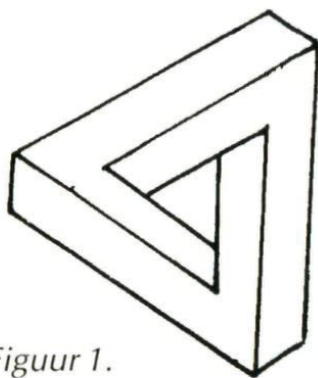
De oplossing staat op pagina 20.

Auteur:
Theo van Velzen



Onmogelijke drie balk

We kregen op de redactietafel een bijzonder kaartje met daarop de werktekening voor een onmogelijke figuur.



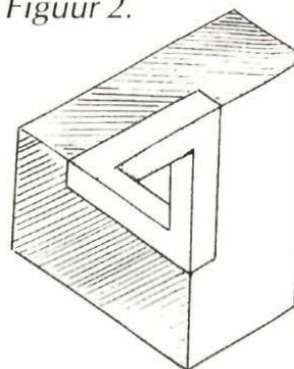
Figuur 1.

wordt als maar onwezenlijker. Het wordt nog gekker.

In figuur 1 zie je het model van een niet bestaande drie-balk.

In figuur 2 zie je een suggestie in de hoek van een vreemdsoortige kubus. Het

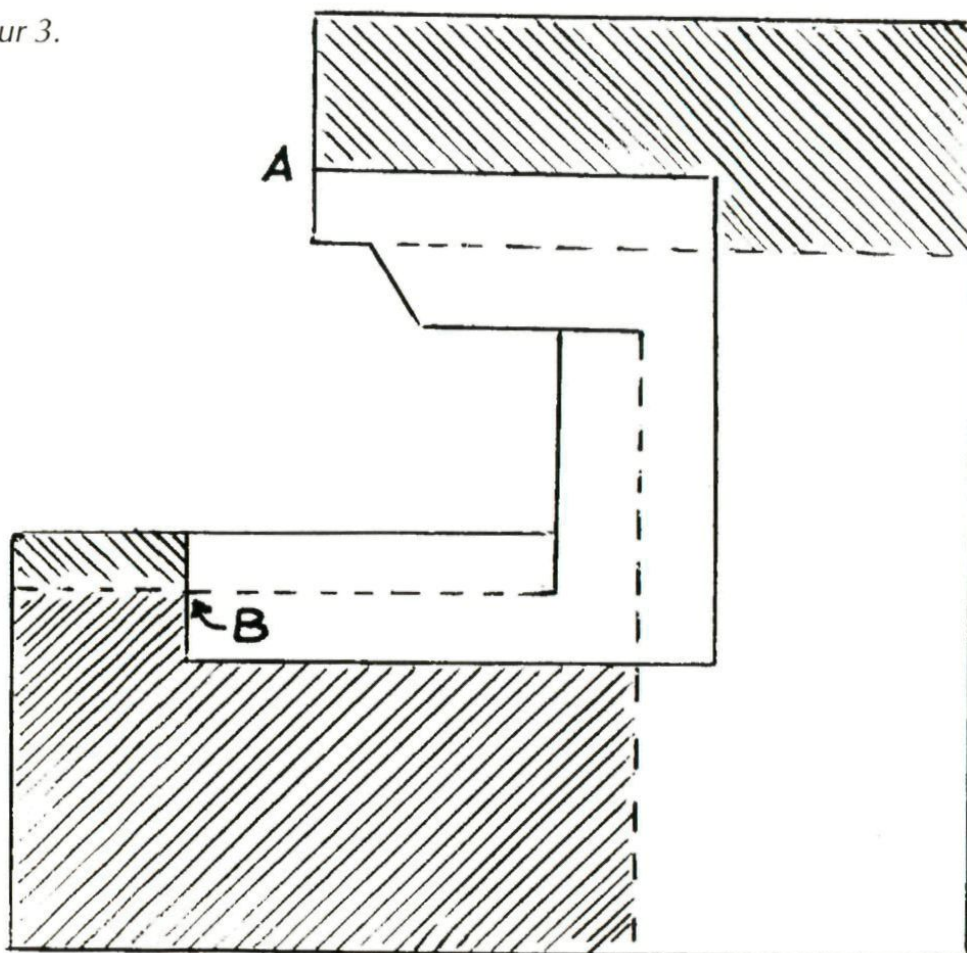
Figuur 2.



In figuur 3 staat een bouwplaatje om het te maken. Neem een fotokopie van figuur 3 en plak die op stevig papier. Knip alles uit en neem de stippellijnen

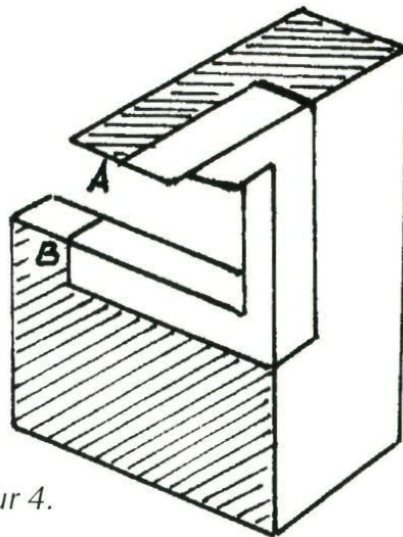
als vouwlijnen. Vouw daarlangs de delen naar binnen. Zorg dat de betreffende vlakken steeds keurig loodrecht op elkaar komen (fig.4). Bekijk het model nu vanaf ongeveer een meter afstand met één oog, zodat de punten A en B samenvallen.

Figuur 3.



Daardoor wordt de opening tussen de gearceerde delen onzichtbaar en je krijgt een figuur te zien, bestaande uit drie loodrecht op elkaar staande balkjes zoals in figuur 2. En zo kijk je naar de onmogelijke drie balk. Al met al is het dus een optisch effect; in werkelijkheid bestaat zo iets natuurlijk niet.

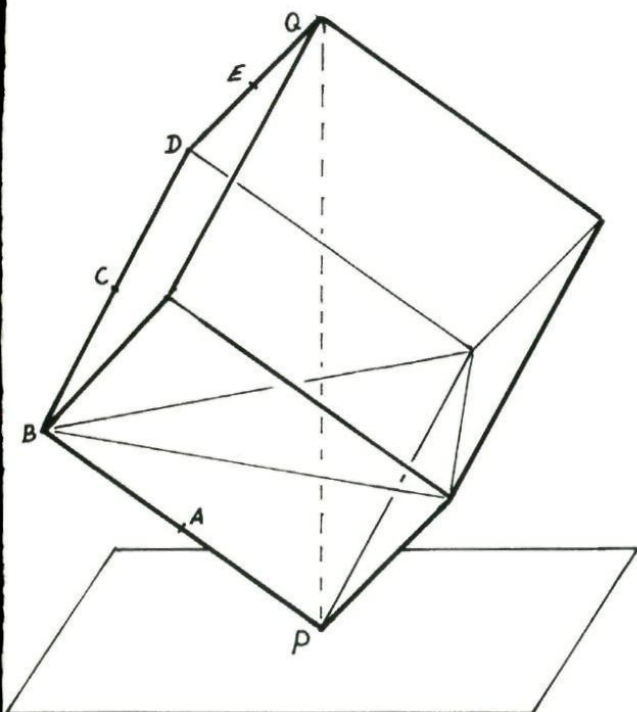
Ontwerp: Hans de Rijk



Figuur 4.

Kubus met water

**Een kubus met glazen wanden heeft ribben van 1 dm.
Het volume is dus 1 liter.**



We zetten de kubus met de diagonaal PQ verticaal. Door een klein gaatje bij Q laten we water in de kubus lopen. A, C en E zijn middens van ribben. Bepaal het volume van het water als het oppervlak door A, door B, door C of door E gaat. Teken telkens ook de stand van het water. Waar snijdt PQ elk van de vijf vlakken? Welke vorm hebben de doorsnijdingen?

De oplossing kun je vinden op pagina 25.

Jan van Breda

Hoeveel dagen telt een jaar?

Sinds het begin van onze jaartelling, die een voortzetting is van de Romeinse tijdrekening, zijn er ruim 700 000 dagen verlopen. Om precies te zijn 727930, geteld vanaf 1 januari van het jaar 1 tot en met 31 december 1993.

Schrikkelen

We vinden het wel vreemd als de elfstedentocht in juni gereden zou worden of de tulpen in december buiten bloeien.

We willen dat de seizoenen hun plaats in de kalender behouden. Beter gezegd: 21 december moet de kortste dag blijven en 21 juni de langste. Dan moet de lengte van het jaar afgestemd zijn op die van het tropische jaar, volgens onze laatste berekeningen 365,2422 dagen.

Een gewoon kalenderjaar heeft een geheel aantal dagen:

$$7 \times 31 + 4 \times 30 + 28 = 365.$$

Door nu in sommige jaren aan de maand februari een schrikkel dag toe te voegen kan worden bereikt dat de gemiddelde lengte van de kalenderjaren 365,25 wordt en dat is al een aardige benadering.

Julius en Gregorius

Onze oudste kalender stamt van keizer Julius Caesar en heet daarom de Juliaanse kalender. Daar was elk door 4 deelbaar jaar een schrikkeljaar en bedroeg dus de gemiddelde jaarlengte 365,2500 dagen. Dat is

dus, zoals we dan nu weten, 0,0078 dag ofwel 11 minuten te lang. Dat lijkt allemaal niet veel. Maar in de 16-de eeuw was het verschil toch opgelopen tot 10 dagen.

Paus Gregorius de Grote besloot daarom op een andere kalenderindeling over te stappen die wij nu de Gregoriaanse noemen.

Deze wijkt in zoverre van de Juliaanse af door eenvoudigweg een aantal data over te slaan en wel de 10 dagen van 5 tot en met 14 oktober 1582 en in de verdere tijd alle schrikkeldata in de niet door 400 deelbare eeuwjaren.

Op donderdag 4 oktober 1582 (Juliaans) volgde dus vrijdag 15 oktober 1582 (Gregoriaans) en van de eeuwjaren na 1500 zouden alleen 1600, 2000, 2400 nog schrikkeljaar zijn.

Beter bij de tijd

In de 400 jaar tussen 1 januari 1600 tot en met 31 december 1999 vielen dus 3 data uit, te weten 29 februari 1700, 1800 en 1900. De gemiddelde jaarlengte werd daardoor $\frac{3}{400}$ dag korter en kwam daardoor op 365,2425 dagen.

Maar... dat is altijd nog 0,0003 dagen of 26 seconde te lang. Dit verschil komt nu overeen met 1 dag in 3000 jaar. Een nadere correctie zal ooit in een verre toekomst weer nodig zijn.

Weekdagen

Eerste Kerstdag viel in 1992 op een vrijdag en dit jaar zal het op een zaterdag zijn. Zo verschuiven de weekdagen in het jaar. In de Juliaanse kalender vallen na 28 jaar alle data weer op dezelfde dag. Bij de Gregoriaanse tijdrekening moet je 400 jaar wachten voor dat alles zich in de zelfde volgorde herhaalt. Zo is 3 januari 1584 een dinsdag en 3 januari 1984 ook. En dat geldt evenzo voor alle andere dagen.

Engeland en Rusland

De invoering van de Gregoriaanse tijdrekening is in Europa

bepaald niet vlot verlopen. Sommige landen zoals onder andere Nederland hebben de kalender snel overgenomen. Andere landen bleven nog lange tijd Juliaans tellen. Maar dat betekende 10 dagen verschil. Vanaf 1 maart 1700 werd dat 11 dagen, vanaf 1 maart 1800 12 dagen en vanaf 1 maart 1900 al 13 dagen. In die landen deed zich het ongemak van de achterlopende kalender steeds meer gevoelen met als gevolg dat uiteindelijk alle landen de overstap maakten.

Dat gebeurde in Engeland in 1752 en in Rusland pas in 1918. In Engeland werd 2 september 1752 (j) gevolgd door 14 sep-

Parade op het Rode Plein



tember 1752 (G), waarbij dus 11 data werden overgeslagen.

In Rusland werd woensdag 31 januari 1918 (J) gevolgd door 14 februari 1918 (G). Daar vielen toen ineens 13 dagen uit.

De jaren 1700, 1800 en 1900 waren volgens de Juliaanse kalender immers schrikkeljaren gebleven.

De Russische oktoberrevolutie greep plaats op 25 oktober 1917

(J), overeenkomend met 7 november 1917 (G).

Vandaar dat de oktoberrevolutie vele jaren op 7 november werd herdacht met de beroemde parade op het Rode Plein in Moskou!

Jac Kieft

Silhouetten

Een ronde ommuurde stad vertoont boven de muren uitkomend drie hoge gebouwen: een watertoren (W), een schoorsteen (S) en een kerktoeren (K).

Op grote afstand vanuit zuidelijke richting liggen W op (-4), S op (-1) en K op (+3), waarbij we de straal van de stad op 5 gesteld hebben.

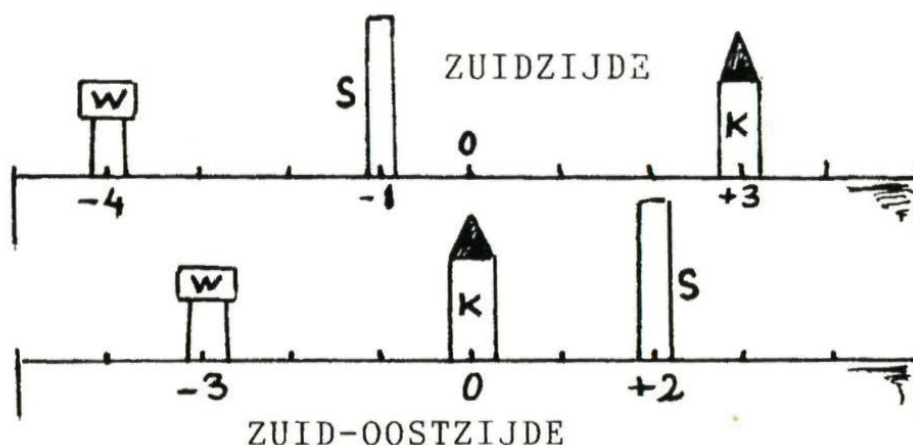
Nu lopen we een stuk om de stad heen naar rechts en meten opnieuw vanuit zuid-oostelijke richting de posities op.

Wat we nu zien staat in de tweede figuur: W op (-3), K op (0) en S op (+2). Eerst stond S dus tussen W en K en nu staat K schijnbaar tussen W en S.

Opgave: bepaal het silhouet van de stad, gezien vanuit westelijke richting. Bepaal de posities grafisch en ben je heel fanatiek dan zou je de coördinaten nog uit kunnen rekenen ook.

De oplossing kun je vinden op pagina 16.

Jan Westenhove



De KLOK nader bekeken

In een tijdsduur van twaalf uren gebeurt het elf maal, dat de grote wijzer de kleine inhaalt. De inhaaltijd is dus $\frac{12}{11}$ de uur.

Deze periode van 1 uur + 5 minuten + $(27 + \frac{3}{11})$ seconden heet een synodisch uur. Er gaan dus elf synodische uren in 12 uren. "Synodisch" wijst op de samenstand, de zelfde richting van de wijzers.

De grootte van het synodische uur kan je ook als volgt te weten komen. De minutenwijzer beweegt met 360° per uur ten opzichte van de wijzerplaat. De uurwijzer doet dat met 30° per uur. De snelheid van de minutenwijzer is dus 330° per uur ten opzichte van de uurwijzer. Dan maakt de minutenwijzer de 360° ten opzichte van de uurwijzer vol in $\frac{12}{11}$ uur; immers $330^\circ \times \frac{12}{11} = 360^\circ$. Dus om de $\frac{12}{11}$ uur haalt de minutenwijzer de uurwijzer in.

Een kwartier is een kwart uur. Elk kwartier draait de minuten

wijzer 90° ten opzichte van de wijzerplaat. Een kwartief is een kwart synodisch uur. Elk kwartief draait de minutenwijzer 90° ten opzichte van de uurwijzer.

Precies te middernacht staan beide wijzers over elkaar. Een kwartief later maken ze een hoek van 90° . Weer een kwartief later staan de wijzers tegengesteld gericht. Nog een kwartief later is de minutenwijzer de uurwijzer 270° voor. Nog weer een kwartief later wijst de minutenwijzer weer dezelfde kant op als de uurwijzer.

1. Op welke tijdstippen gebeurt dit alles voor het eerst?
 - 2a. Hoe laat in synodische tijd staan de wijzers voor de derde keer na middernacht tegengesteld gericht?
 - 2b. Hoe laat is het dan exact in gewone tijd?
- Oplossing: zie pagina 17.

Frank Roos



Leeftijd raden

Mevrouw, ik weet een truc om uw leeftijd te raden!
Verguld keek hij mij aan.

Schrijf uw huisnummer op.
Verdubbel dat nu. Doe er 5 bij.
Nu maal 50. Tel erbij hoe oud u bent. Tel daarbij het aantal dagen in één jaar. Hoeveel heeft u er nu uit.

Ik krijg daar 5843 uit.

Even wachten. Na enig glunderen deelt hij mij mee dat ik 28 jaar ben en op nummer 79 woon.

Die leeftijd is inderdaad juist en ik woon op Eikenlaan 79.

Truc

Je moet van die 8543 'gewoon' 615 aftrekken en dan verschijnt 79-28 en daar staan huisnummer en leeftijd voor het aflezen.

Test de methode eerst voor jezelf.

Klopt het? Maar waarom?

Bij huisnummer 79 en leeftijd 28 gaat het aldus:

$$50(2 \times 79 + 5) + 28 + 365 =$$

$$7900 + 250 + 28 + 365 =$$

$$7900 + 28 + 615.$$

Als je nu 615 aftrekt, krijg je 7928 en daarmee is de truc ontmaskerd.

Trees Lieshout

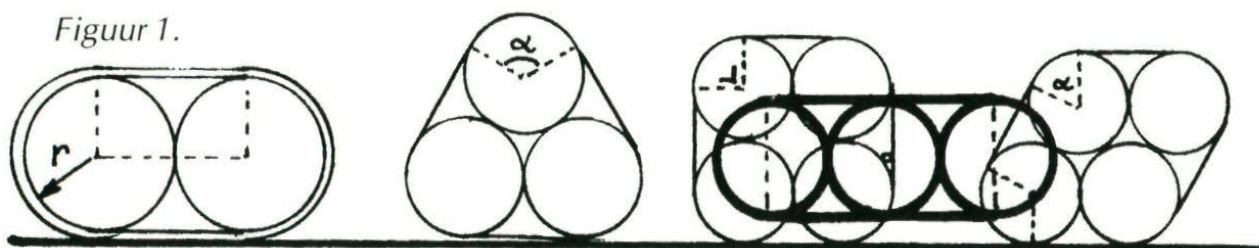


Bundels maken

Als je drie ronde buizen tot een bundel samenvoegt en er een band omheen spant, gaan de centra keurig in de vorm van een gelijkzijdige driehoek staan (fig.1)

komt er dan $r(8 + 2\pi)$ uit. Maar als we ze in driehoeksvorm zetten, wordt het $r(6 + 2\pi)$ en dat is minder dan bij recht achter elkaar! Hoe zit het bij vier cilinders?

Figuur 1.



Je verwacht niet anders. Je vraagt niet waarom. Je vindt het 'nogal wieses'.

Zouden de centra niet keurig op een recht lijntje kunnen komen zoals bij de kop te zien is??
Waarom eigenlijk niet?

Minimum

We beginnen met twee buizen. Daar is weinig keuze. Kijk in figuur 1. Hoe groot is de totale omspanning? Als de straal r is zijn de twee rechte stukken elk $2r$ en de beide halve cirkels samen $2\pi r$ dus de totale bandlengte $r(4 + 2\pi)$.
Bij drie buizen op een rechte lijn

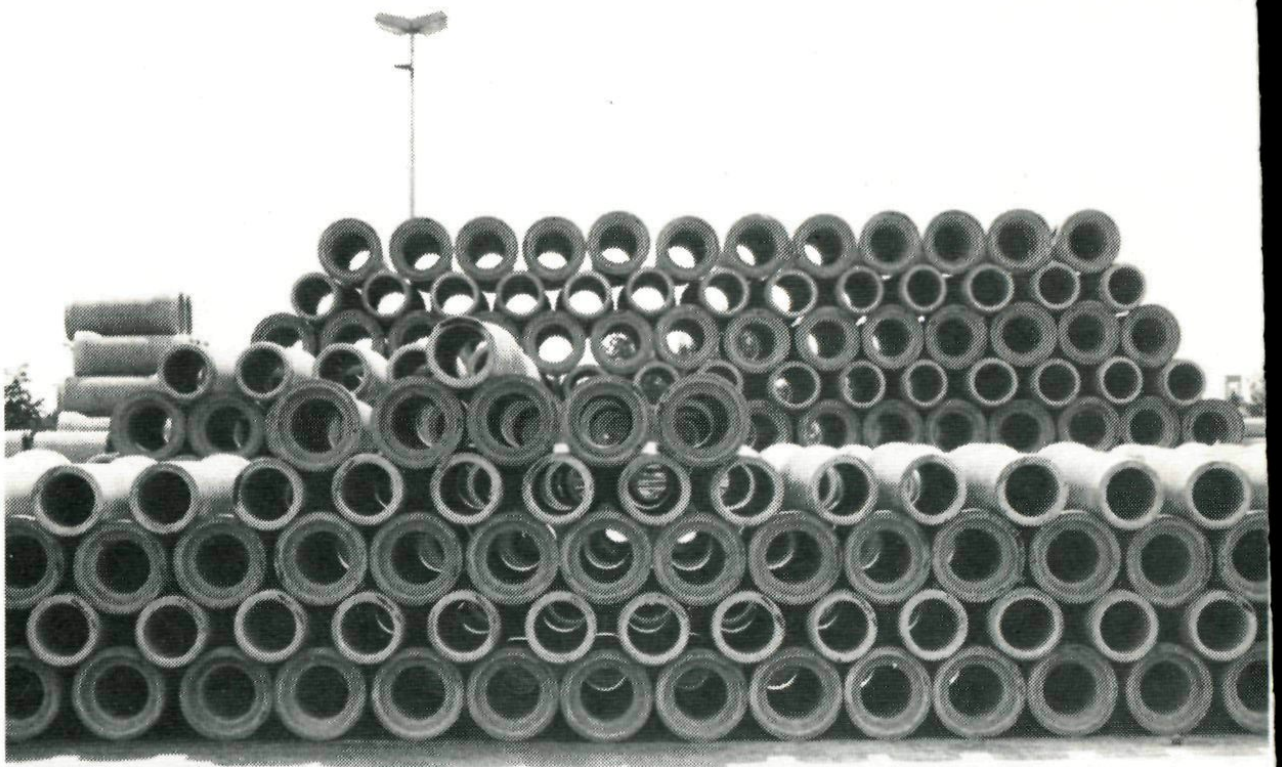
Ze zouden in de vierkantvorm te stapelen zijn, maar ook in ruitvorm. De rechte stukken samen zijn in beide gevallen precies even lang. Maar hoe zit het met de ronde stukken?
In het eerste geval hebben we $4 \cdot 90^\circ$ en in het tweedegeval $2 \cdot 60^\circ$ en $2 \cdot 120^\circ$, maar dat is ook precies één keer rond.
Het hangt dus louter van het toeval af of, bij aantrekken van de omspanning, de ene of de andere vorm zal verschijnen.

Zes buizen

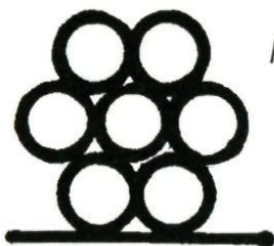
Voor een zestal doen wij in figuur 2 drie voorstellen.

Figuur 2.

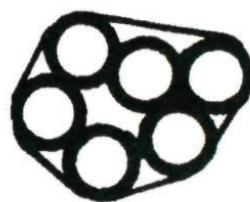




Ronde buizen. Wat gebeurt er met de centra bij samenvoegen?



Figuur 3.



Figuur 4.



Welke zou je kiezen? Kun je uitgaande van het bovenstaande beslissen welke de voorkeursvorm is?

Heb je inmiddels in de gaten dat als het touw één keer rond gaat, de ronde stukken bij elke verpakkingswijze samen een lengte van één keer de cirkelomtrek hebben?

minimale bandlengte bij n buizen. Attentie, let op figuur 3! In figuur 4 hebben we nog twee pakketten omspannen, eenmaal zes stuks en eenmaal acht stuks. Kun je de lengte van de omspanning bepalen als de straal van alle buizen r is? Oplossing op pagina 26.

Algemeen

Is het mogelijk van te voren al een uitspraak te doen over de

Henk Mulder

Reacties van lezers op 1993

Van Karin de Jongh ontvingen wij voor het getal 71 de volgende oplossingen:

$$71 = -1 + (9 + \sqrt{9})3!$$

$$71 = -1 + (\sqrt{9!} + \sqrt{9!})3!$$

We zoeken nu nog oplossingen voor 65, 67, 68 en 70. Wie kan ze vinden?

Redactie

Verkiezingen

In nummer 4 is op pagina 3 een probleempje over verkiezingen geplaatst. Helaas is in de oplossing een fout geslopen. De volgende oplossing is wel juist.

Winnaar 1: x stemmen.
Nummer 2: $x - 768$ stemmen.
Nummer 3: $x - 517$ stemmen.
Nummer 4: $x - 1379$ stemmen.

$$x + (x - 768) + (x - 517) + (x - 1379) = 5492.$$

Hier uit volgt: $x = 2039$ (= nummer 1).

Nummer 2: $2039 - 517 = 1522$.

Nummer 3: $2039 - 768 = 1271$.

Nummer 4: $2039 - 1379 = 660$.

Enkele van onze lezers maakten ons op de foute oplossing attent.

Redactie

facu!teit

mathemadic

Lijn op kubus

In de figuur staat de uitslag van een kubus.



In twee zijvlakken zijn twee lijnstukjes getekend, evenwijdig aan ribben.

De bedoeling is om in de andere vier zijvlakken iets dergelijks te doen. Maar je moet het wel zo klaar spelen dat, als de uitslag in

elkaar geplakt wordt, er één doorlopende, in zichzelf gesloten lijn ontstaat, die zichzelf nergens snijdt. Probeer het klaar te krijgen zonder een ruimtelijk model erbij te halen.

Riet Vissers

Passertruc

In Pythagoras 32/2 stond een methode om alleen door middel van cirkelbogen bepaalde punten te vinden. Er mogen dus geen lijnen getrokken worden. Het is zo iets als voetballen: geen hand aan de bal!

Jean de Montigny uit Amstelveen kon er geen genoeg van krijgen en stuurde een variant.

Wij gingen uit van twee punten A en B en vroegen een punt P te bepalen op het verlengde van AB waarbij $BP=AB$. Maar ... je mocht geen liniaal gebruiken om rechten te trekken!

Jean vond het wel een uitdaging en bedacht ook zo iets.

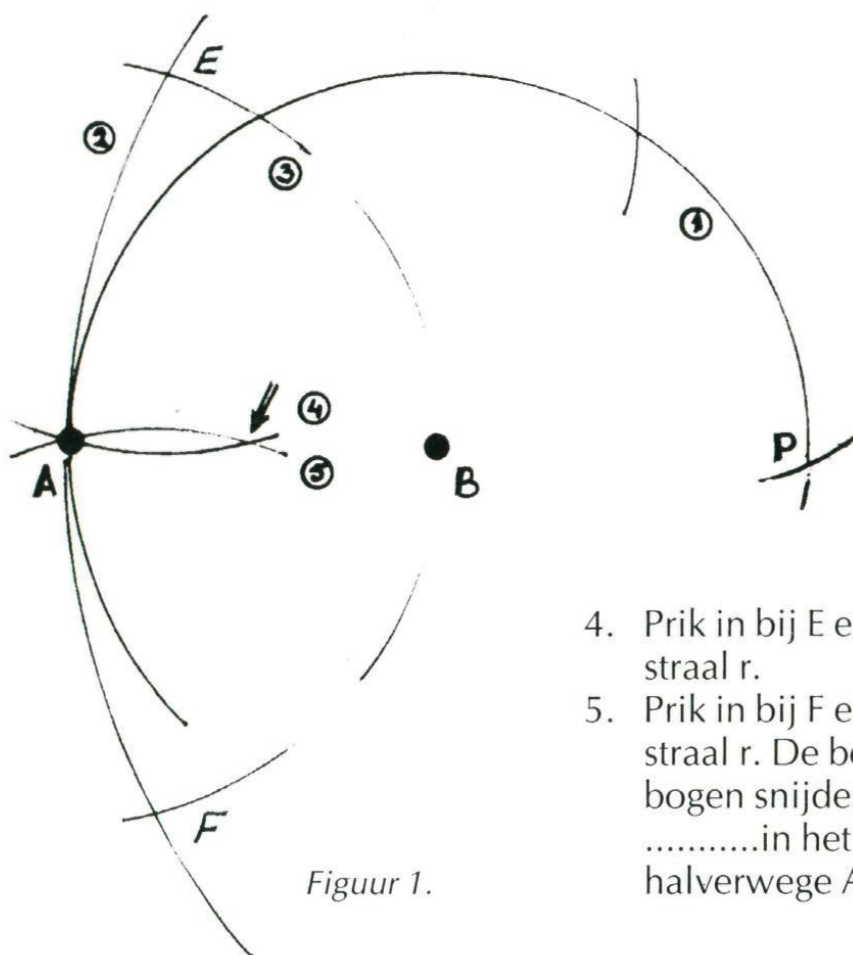
De vraag: kan ik op een soortgelijke manier het midden van AB vinden?

Cirkelen

We beginnen weer P te bepalen op het verlengde van AB, waarbij $BP=AB$ (fig.1).

In figuur 1 zie je nog eens de werkwijze.

1. Prik in bij B en zet een cirkelboog met straal $AB=r$. Verder nog drie kleine cirkelbogen eveneens met straal r .



4. Prik in bij E en cirkel om met straal r .
5. Prik in bij F en cirkel om met straal r . De beide laatste bogen snijden elkaar in A enin het gezochte punt halverwege AB.

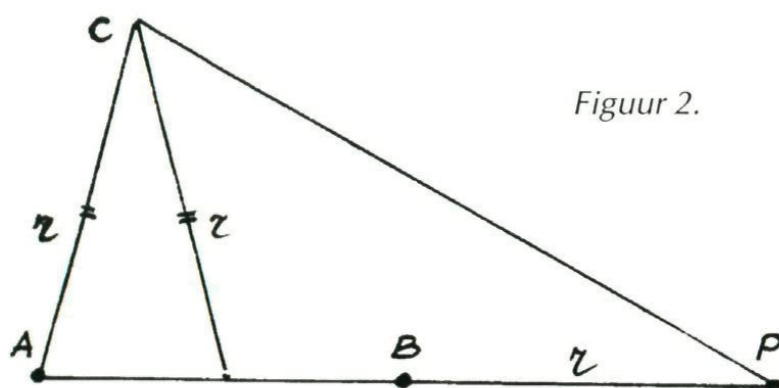
Wat je hierbij feitelijk doet is: drie gelijkzijdige driehoeken tegen elkaar zetten en $3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$!

2. Prik in bij P en zet een boog met straal $2r$.
3. Prik in bij A en cirkel om met straal r . De laatste twee bogen snijden elkaar in E en F.

Clou

In figuur 2 herkennen we twee gelijkvormige gelijkbenige driehoeken met verhouding 1:2. Ga zelf maar verder na dat de passertruc klopt.

Jean de Montigny



Oplossing: Silhouetten

Door snijding van lijnen zijn in een nette tekening de posities van S, W en K, vanuit het westen gezien, vast te leggen.

Om de coördinaten te bepalen is verder speurwerk nodig.

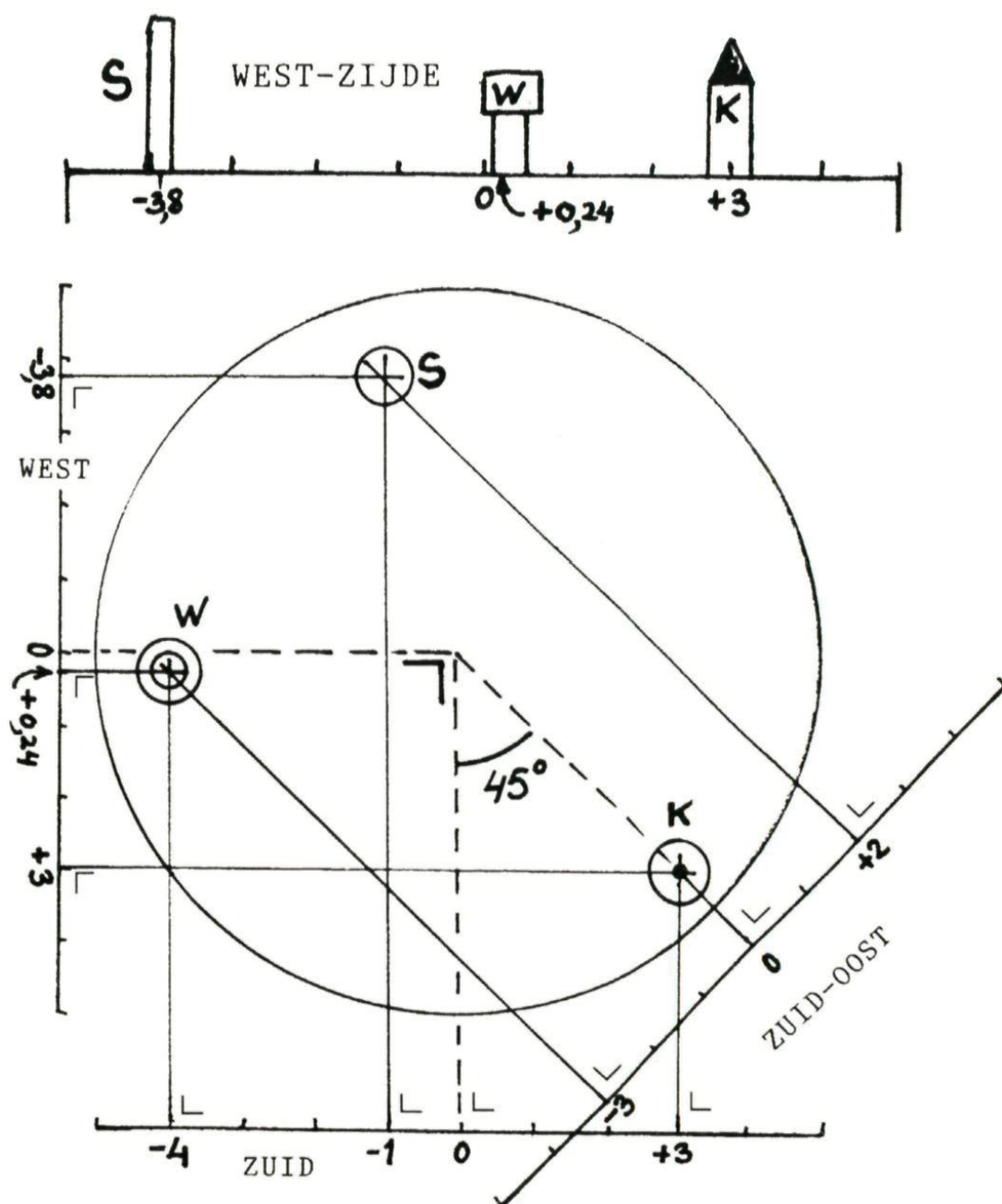
Je zou dan vinden: K op precies (+3), W op (+0,24) en S op (-3,8).

De precieze aanblik van de stad vanuit het westen staat erboven getekend.

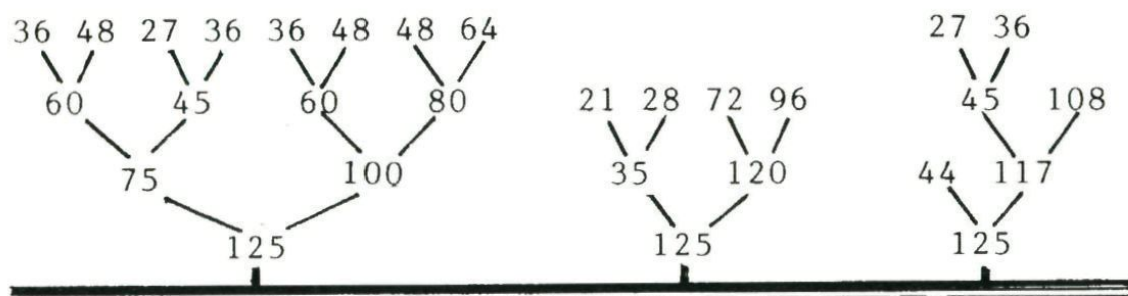
De juiste coördinaat van W is

$(-4, 3\sqrt{2})$ en $(-1, -2\sqrt{2})$ die van S.

Jan Westenhove



Pythagoras-boompjes



Sander van Rijnwou uit Delft zocht telkens drie gehele getallen die de Pythagoras-relatie hebben.

Zoiets als 3-4-5 of 5-12-13.

Hij kwam zo tot verrassende boompjes, waarbij hij het snuffelwerk aan zijn computer overliet.

Voor het getal 125 wist hij zo drie van zulke boompjes op te sporen.

Voor wie het nog wat raadselachtig vindt: je kunt bijvoorbeeld aflezen dat

$$117^2 = 45^2 + 108^2.$$

Wie kan een nog weelderiger kruin leveren voor een ander basisgetal?

De kampioen komt in PYTHAGORAS!

Sander van Rijnwou

Oplossing: Klok

1. Een kwartief = $\frac{12}{11}$ uur : 4 = $\frac{3}{11}$ uur = 16 min + $(21 + \frac{9}{11})$ s. Wijzers dezelfde kant op om 00:00:00. Minutenwijzer 90° voor op uurwijzer: om 00 uur 16 min en $(21 + \frac{9}{11})$ s. 180° -stand om 00 uur 32 min $(43 + \frac{7}{11})$ s.

Minutenwijzer 90° achter op uurwijzer: om 00 uur 49 min en $(5 + \frac{5}{11})$ s

2. 2,5 synodisch uur na 00:00:00, dus om $2,5 \times \frac{12}{11}$ uur = 2 uur 43 min en $(38 + \frac{7}{11})$ s.

Poolcoördinaten en vectoren

Een punt $A=(3,4)$ wordt door de x- en y-coördinaten volledig bepaald.

Dit zijn de cartesische coördinaten, genoemd naar de Fransman Descartes alias Cartesius.

Je kan A ook in het platte vlak vastleggen met poolcoördinaten.

De ene is de lengte van $OA = 5$; de andere poolcoördinaat is de hoek tussen OA en de positieve x-as.

Die hoek is in dit voorbeeld $53^\circ, 130102$.

Vectoren

Wie even nadenkt, ziet een zeer verrassende overeenkomst tussen poolcoördinaten en de weergave van de grootte en de richting van (tweedimensionale) vectoren.

Het aardige is nu, om vast te stellen, dat veel zakrekenmachines de mogelijkheid hebben om x-y-coördinaten om te zetten in poolcoördinaten en andersom. Waarschijnlijk moet je de handleiding van je rekenmachine raadplegen om te weten hoe het werkt.

Hier onder zie je een voorbeeld, uitgewerkt op een Casio.

Het zal je helpen om de werking op jouw machine te ontdekken.

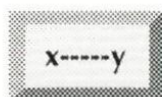
Stel $x=3$ en $y=4$

Frank Roos



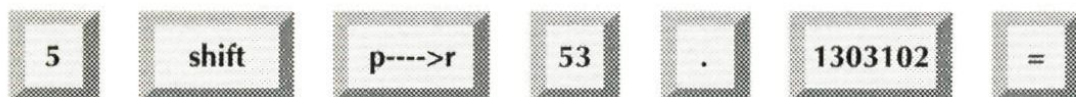
geeft 5.

vervolgens:



levert $53^\circ, 130102$

Omgekeerd:

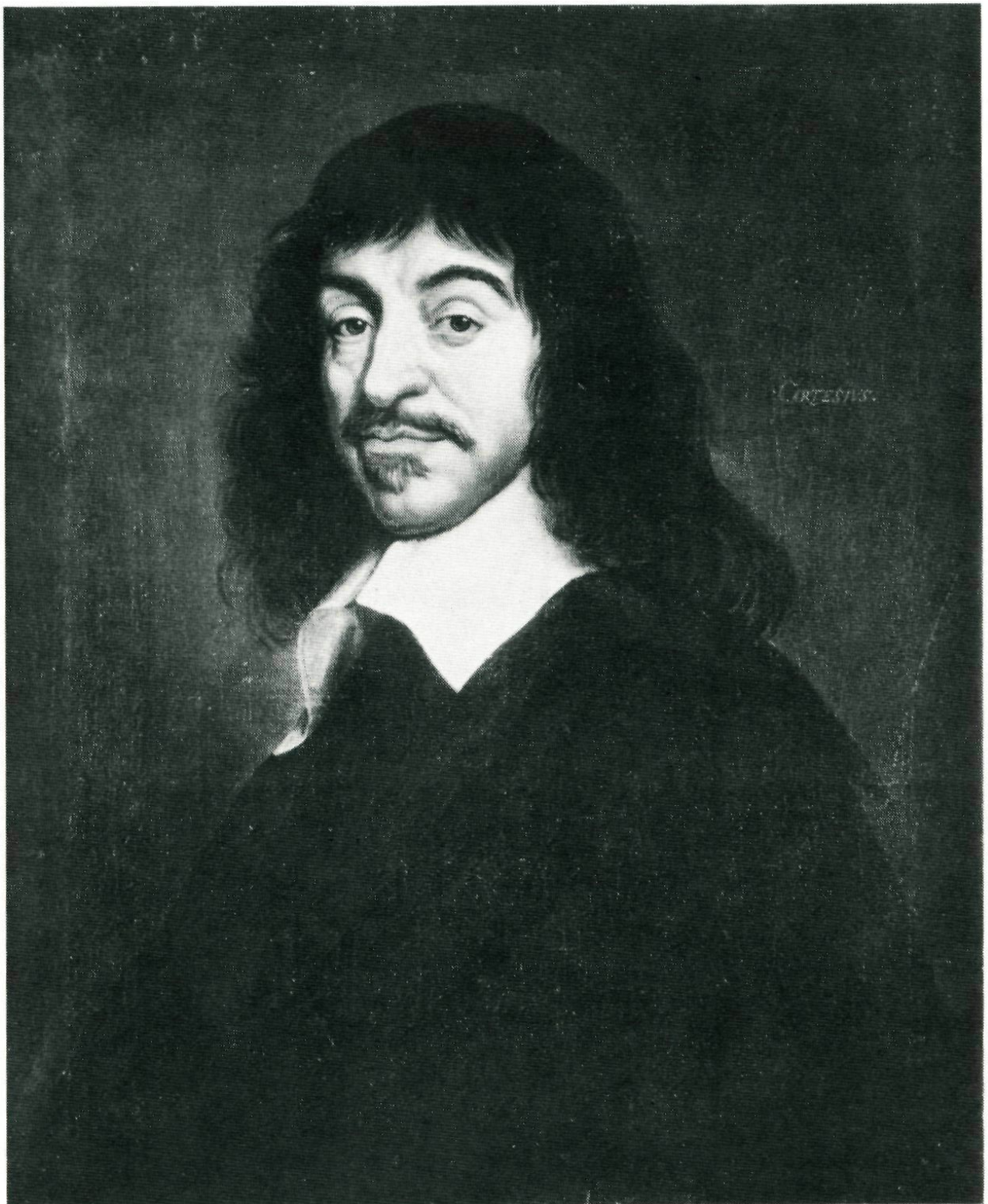


geeft 3

vervolgens:



levert 4.

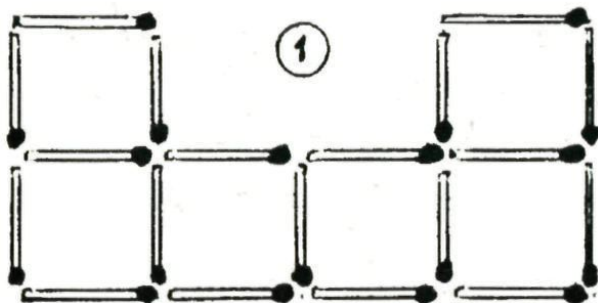


René Descartes alias Cartesius (1596 - 1650)

Schuiven met vierkanten

Spelletjes met lucifers zijn een goede manier om je voorstellingsvermogen te testen.

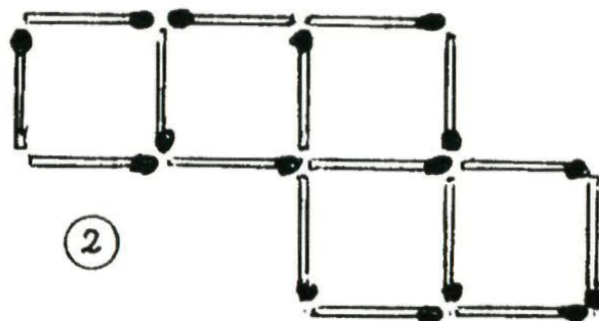
Opgave 1:
verplaats vier lucifers in figuur 1 en maak een figuur met vijf vierkanten.



Opgave 2:
verplaats in figuur 2, bestaande uit vijf gelijke vierkanten, twee lucifers en je hebt nog maar vier gelijke vierkanten.

Zie voor de oplossing pagina 26.

Noordelijke Hogeschool



Oplossing: Twee kaarsen-puzzel

Stel de witte brandt in één uur a cm en de rode in één uur b cm.
Dan is de witte $6a$ en de rode $4b$ lang.
We krijgen dan twee vergelijkingen:

$$6a - 4b = 4 \text{ en } 2a = 1 \frac{1}{2} b.$$

Dit geeft: $a = 6$ en $b = 8$.

Dus de witte is lang $6a$ of 36 cm en de rode $4b$ of 32 cm.



De boog en de kettinglijn

Als je een ketting vrij aan zijn einden ophangt, verschijnt een fraaie kromme, die in de wiskunde de kettinglijn heet. Omgekeerd opgesteld, is de kromme de werktekening voor een zichzelf dragende boog.

Opstelling

Een kettinglijn wordt geprojecteerd op een bord en dient dan in omgedraaide stand als basis voor een zichzelf dragende boog.

Daartoe verdelen we de kromme in twee symmetrische helften en die weer elk in een tiental delen. Nummer 11 is de sluitsteen of hoeksteen.

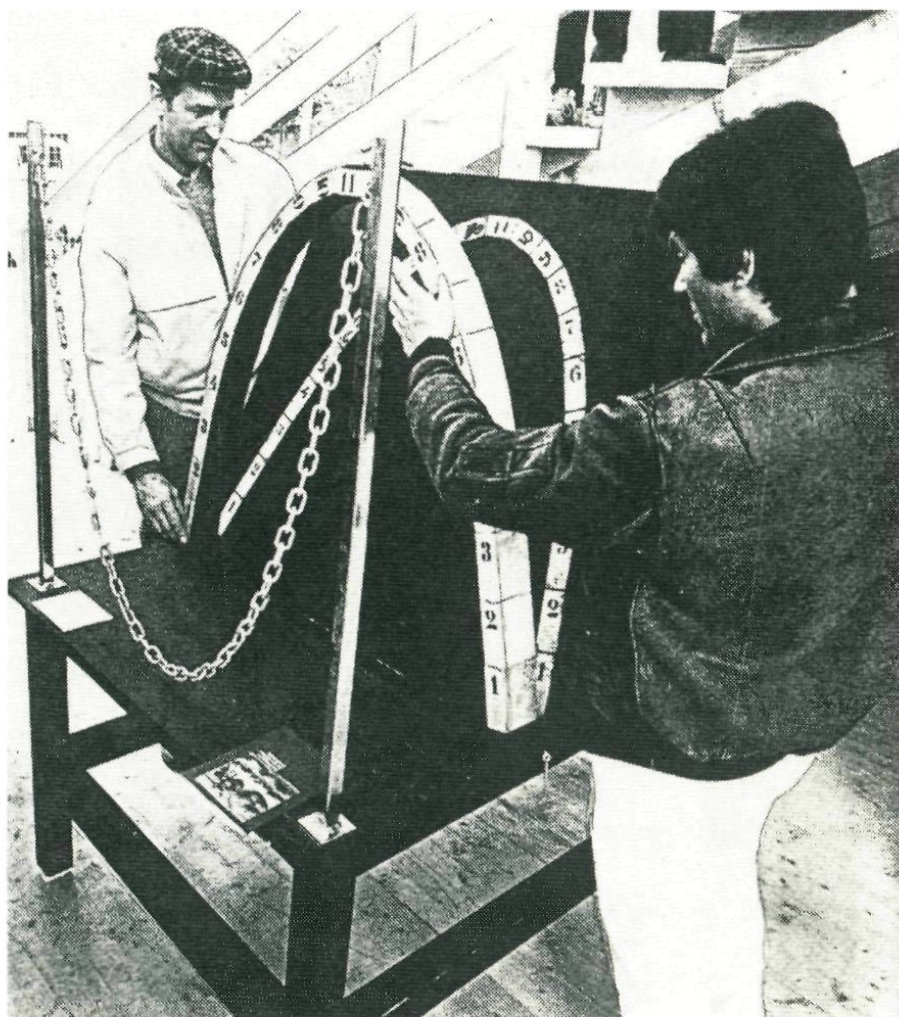
Realisatie

De elementaire blokken worden in de juiste volgorde op een plank gelegd, die om een horizon-

talescharnier draaibaar is. Draai dan de plank naar de verticale positie en als alles dan keurig op schema gemaakt is, blijft de boog nog keurig staan ook.

Je kunt er zelfs een klein zetje tegen geven; dan gaat hij een beetje heen en weer bewegen, zoals de ketting dat ook kan doen.

Auteur: Henk Mulder



De boog en de kettinglijn

Eindig of oneindig

Als je bijvoorbeeld de rij van de natuurlijke getallen vervolgt en let op de som van zo'n aantal termen, dan is het duidelijk dat de som nooit een limiet bereikt, maar onbeperkt elke grens kan overschrijden.

Voor sommige rijen is de situatie onoverzichtelijker.

We bestuderen twee gevallen die sterk op elkaar lijken.

$$S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \dots$$

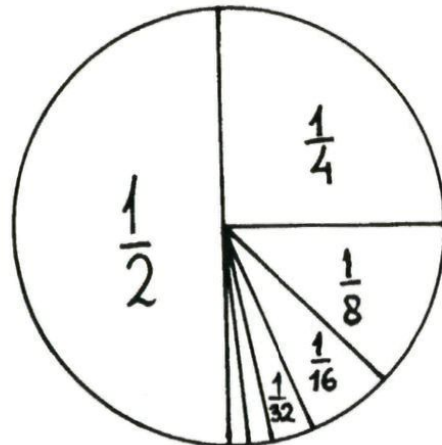
$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

De eerste heeft een somlimiet 1 en de tweede kent geen grenswaarde; naarmate het aantal termen stijgt overschrijdt deze elke denkbare grens.

Bewijs

We hebben beide rijen in een figuur uitgebeeld. We beelden $\frac{1}{2}$ af als een halve cirkel, $\frac{1}{4}$ als een kwart en zo verder.

Voor S_1 kun je aflezen: een uitkomst groter dan 1 is niet mogelijk. Elke volgende term is de helft van het nog resterende gat.



Het tweede geval lijkt weinig van het eerste te verschillen.

Als we noteren $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ zijn we al boven 1 uit.

Bij $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ al boven $1\frac{1}{2}$. Bij elf termen al boven 2 en zo verder. Schrijf:

$$S_2 = (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3}) + (\frac{1}{4}) + (\frac{1}{5}) + (\frac{1}{6}) + (\frac{1}{7}) + \dots$$

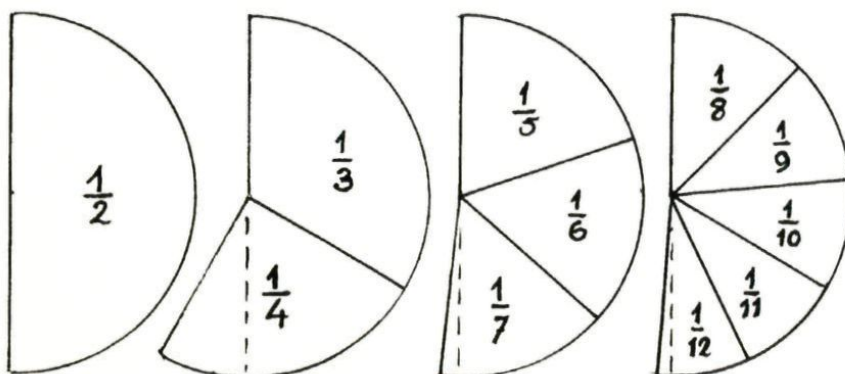
Kies het aantal termen tussen haakjes steeds zo groot dat er telkens een som groter dan $\frac{1}{2}$ uitkomt.

Het aantal termen per groep stijgt daarbij voortdurend.

Hieruit volgt: S_2 kan elke grens overschrijden: er is geen somlimiet.

Maar om een som boven 10 te krijgen, moet je wel een aantal

termen nemen, bestaande uit een getal met ... 9 cijfers! De groei wordt steeds trager.



Henk Mulder

Grilrijen

2, 5, 8, 10, 13, 17, 20, 25, 26, 29, 32,Kun jij ontdekken, hoe deze rij in elkaar zit ? Zo ja, wat is dan de volgende term ? Verderop staat de oplossing.

Een grilrij is een deelverzameling van de rij natuurlijke getallen met een grillig verloop. De opeenvolging van de getallen verloopt zo onvoorspelbaar, dat het onmogelijk is om met een één of ander voorschrift de volgende term te berekenen uit de voorgaande termen. Dat betekent niet, dat je de er op volgende termen niet zou kunnen vinden. Ik leg dat bij het eerste voorbeeld uit.

Het woord grilrij staat niet in het woordenboek, want ik heb het net verzonnen.

Priemgetallen

De bekendste grilrij is de rij van de priemgetallen. Priemgetal p heeft precies twee verschillende delers: 1 en p . Het getal 1 is, bij afspraak, geen priemgetal. Als ik de eerste tien priemgetallen ken, dan kan ik daaruit niet nummer elf berekenen. Toch kan ik nummer elf en de volgende priemgetallen wel te weten komen.

Een bekende methode is de zeef van Eratostenes. Schrijf alle oneven getallen op; de tweevouden zijn dan geschrapt.

Verander de 1 in een 2 en

bewaar hem. Schrap alle drie-vouden, behalve de 3; schrap van alle overige getallen de vijf-vouden, behalve de 5; enz. Zo vind je 2, 3, 5, ... Deze vind je onmiddellijk op volgorde. Ook kan je elk getal onderzoeken op deelbaarheid om te beoordelen, of het getal wel of niet priem is.

Voor de meeste mensen is dit de enige grilrij die ze kennen. Niettemin bestaan er heel wat meer grilrijen, zoals we zullen zien.

Elke grilrij heeft familie: 'broertje' bevat termen met een bedoelde eigenschap; 'zusje' bevat termen, die de bedoelde eigenschap niet hebben. Zo is het zusje van de priemgetallen de verzameling getallen, die niet precies twee delers hebben. Vanzelfsprekend is deze verzameling even grillig als de verzameling priemgetallen: 0, 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22,

De anti-rij

We spreken af, dat de anti-rij, behorende bij een grilrij, termen bevat, die de gekozen eigenschap niet hebben.

De som van twee kwadraten.

De volgende rij bevat de getallen, die geschreven kunnen worden als de som van de kwadraten van twee natuurlijke getallen: 2, 5, 8, 10, 13, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, Hierbij wordt het kwadraat van nul niet gebruikt.

De bijbehorende anti-rij is 0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 19, 21 t/m 24, ...

Andere voorbeelden van grilrijen zijn:

- getallen 'n over k', die voorkomen in de driehoek van Pascal, voor zover $2 < k \leq \frac{1}{2}n$ is.
- getallen, waarvan de som der cijfers deelbaar is door 7.
- de getallen die acht verschillende delers hebben.
- de som van drie kwadraten.
- het verschil van twee derde machten.
- het produkt van precies vijf priemgetallen.
- Veelvouden van 7, waarvan het tweede cijfer een 3 is.

Het is uitdagend om wezenlijk andere grilrijen te bedenken en nadere eigenschappen over elk van die grilrijen te verzinnen.

Nieuw

Het is merkwaardig, dat vooral de grilrij der priemgetallen zo uitvoerig is onderzocht. De grilrijen vormen een betrekkelijk onbekend gebied in de wiskunde. Eerste ideeën tot onderzoek kan je opdoen bij het onderzoek van de priemgetallen.

Voor de hand liggende onderzoeksvragen zijn:

- Kan 'grilligheid' beter gedefinieerd worden?
- Is de grilligheid van de rij slechts schijn en is er toch een regelmaat te ontdekken?
- Zijn er oneindig veel termen, of betreft het een eindige verzameling. Wat is eventueel het aantal termen en wat is dan de grootste term?
- Wordt de verzameling steeds ijler, d.w.z. wordt het verschil tussen de opeenvolgende termen steeds groter of blijft dat wat om een gemiddelde waarde schommelen?
- Is er ook een regelmaat in eventuele schommelingen?
- Heeft elke grilrij een anti-rij?
- Is elke anti-rij ook een grilrij?
- Heeft de grilrij een praktische betekenis?

Grilrijen van de tweede soort.

De termen zijn nu wel uit de vorige term of termen te bepalen, maar de rij vertoont ook nu een zeer grillig verloop.

Een voorbeeld: som van de delers.

Kies een begingetal, b.v. 12.

Bepaal de delers van 12. Dat zijn 1, 2, 3, 4, 6 en 12.

Laat de deler 12 buiten beschouwing. Tel de andere delers op. Je krijgt 16.

Bepaal de delers van 16. Dat zijn 1, 2, 4 en 8. Vergeet deler 16. De som van de delers is 15.

Bepaal de delers van 15. Dat zijn 1, 3 en 5.

Vergeet de deler 15. De som van de delers van 15 is 9. $SD(15) = 8$. $SD(8) = 7$ $SD(7) = 1$ einde.

Deze rij is eindig: hij eindigt bij een priemgetal en dan 1.

Samenvatting:

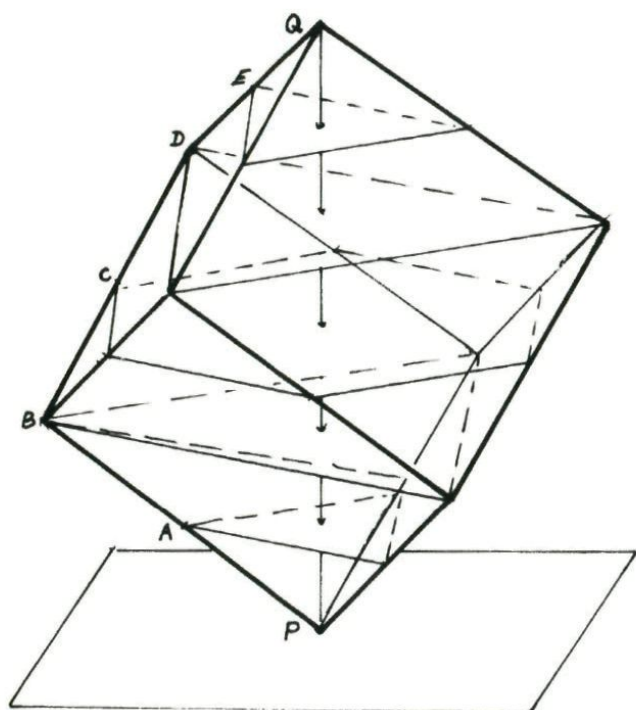
12 $\rightarrow$ 16 $\rightarrow$ 15 $\rightarrow$ 8 $\rightarrow$ 7 $\rightarrow$ 1

Frank Roos

Kleiner dan

mathemadic

Oplossing: kubus met water



Het volume bij A wordt $\frac{1}{48}$, bij B $\frac{1}{6}$, bij C $\frac{1}{2}$, bij D $\frac{5}{6}$ en bij E $\frac{47}{48}$.

In stand C snijdt het watervlak zes maal een ribbe middendoor. PQ passert de vlakken in hun zwaartepunten en wordt erdoor in zes gelijke delen verdeeld. Bovendien staat PQ loodrecht op elk van de vlakken. De doorsnijdingen zijn viermaal een gelijkzijdige driehoek en eenmaal een regelmatige zeshoek.

Jan van Breda

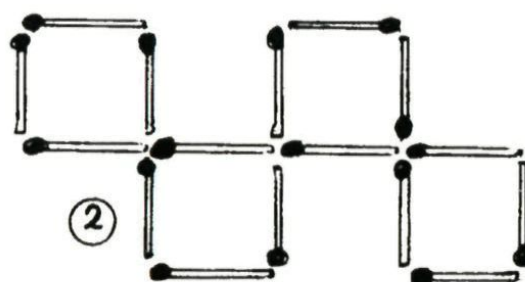
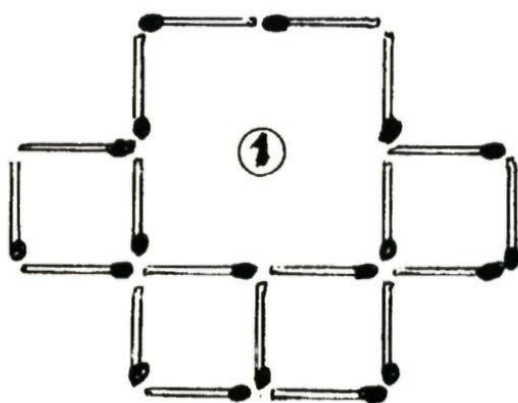
Oplossing: bundels maken

Rechts: $r(14 + 2\pi)$

Links: iets minder dan
 $r(12 + 2\pi)$.



Oplossing: schuiven met vierkanten



Lezersonderzoek

Het lezersonderzoek dat MEMO onder de lezers van Pythagoras instelde heeft een groot aantal reacties opgeleverd. Ongeveer 600 lezers lieten ons weten hoe ze over Pythagoras denken en welke wensen ze voor het blad hebben. Op het ogenblik zijn wij druk bezig alle ingestuurde enquêteformulieren te verwerken, maar één conclusie staat al vast: Pythagoras heeft een enthousiast en betrokken lezerspubliek. De volgende abonnees wonnen met hun inzending een gratis jaarabonnement op Pythagoras:

F.J.M. Barning, Amstelveen

G.C. Bolderman, De Klomp
W.M. van Donk, Deventer

Maurice Gysemans, Mechelen
(België)

Robby Goovaerts, Putte (België)

Marcus Henselmans,
Amsterdam

R. Muurling, Balkbrug

R. Oosterveen, Brummen

A.J. Pool, Ede

Annick de Proost, Retie (België)

J.M.W. Schuurman, Kerkrade

Esther Vos, Tilburg

Twee keer omkeren

Een man metselt een muur in 6 uur. Een andere doet 2 uur over dezelfde klus. Hoe lang doen ze er over als ze het samen doen?

Als je vlot maar wat zegt, komt er 4 uur uit, het gemiddelde. Maar dat zou betekenen dat het karwei nu langer duurt dan wanneer de laatste het alleen deed. Dat kan dus niet. Dat wordt dus nadenken.

Redenering

Een man kan per uur $\frac{1}{6}$ deel van de muur metselen. De ander levert in dezelfde tijd $\frac{1}{2}$ deel af. Samen in één uur dus $\frac{2}{3}$ deel. Om de hele muur te metselen hebben ze samen dus $1\frac{1}{2}$ uur nodig.

Vijver

Dit soort problemen kom je vaker tegen.

Wat denk je hiervan? Met een tuinslang kun je een vijver in 1 uur vol laten lopen; met een andere slang in $2\frac{1}{2}$ uur en met een derde slang in 4 uur.

In hoeveel tijd is de vijver vol als we de drie slangen tegelijk aanleggen?

Reken dat eens uit. Wij krijgen er $37\frac{1}{2}$ minuut uit.

Algemeen

Waarschijnlijk heb je al ontdekt dat al deze problemen op hetzelfde neerkomen. Er is een algemene rekentechniek voor aan te geven.

Keer alle getallen om, tel die omgekeerden op en neem het omgekeerde van die som. Klopt het zo?

Henk Mulder

Bronvermelding

Foto voorpagina: *Prof. De Ranter.*

Tekeningen: *Hans de Rijk.*

Cartoon 'Sterren, vliegers en pijlen': *Pieter Hogenbirk.*

Foto 'Hoeveel dagen telt een jaar?': *Foto ANP.*

Cartoon 'Leeftijd raden': *Pieter Hogenbirk.*

Foto 'Bundels maken': *Johan van Gurp.*

Foto 'Poolcoördinaten en vectoren': *Maison Descartes.*

Foto 'De boog en de kettinglijn': *onbekend.*

PYTHAGORAS wiskunde tijdschrift voor jongeren

Pythagoras is een uitgave van MEMO Media marketing organisatie n.v., en verschijnt zes maal per jaar. Een jaargang loopt van september tot en met augustus.

Redactie: Henk Huijsmans, Frank Roos

Eindredactie: Henk Huijsmans

Redactiesecretariaat: Henk Huijsmans, Molenstraat 31, 4841 CA Prinsenbeek

Medewerkers: Bob de Jongste, Thijs Notenboom, Hans Oomis, Hans de Rijk, Paul van de Veen, Henk Mulder

Uitgever: MEMO n.v., Hengeveldstraat 29, Postbus 9822, 3506 GV Utrecht

Telefoon: 030-736400, Fax: 030-734774

Bank: 69.93.65.937, Giro: 51.39.755

Verantwoordelijk uitgever: Ton Fokker

Inhoud

Sterren, vliegers en pijlen	1
Twee kaarsen-puzzel	3
Onmogelijke driebalk	4
Kubus met water	5
Hoeveel dagen telt een jaar?	6
Silhouetten	8
De Klok nader bekeken	9
Leeftijd raden	10
Bundels maken	11
Reacties van lezers op 1993	13
Verkiezingen	13
Lijn op kubus	14
Passertruc	14
Pythagoras-boompjes	17
Poolcoördinaten en vectoren	18
Schuiven met vierkanten	20
De boog en de kettinglijn	21
Eindig of oneindig	22
Grilrijen	23
Lezersonderzoek	27
Twee keer omkeren	28
Bronvermelding	28

Nederlandse en Belgische abonnees:

Aanmelden telefonisch, 030-736400

of schriftelijk, MEMO n.v.,

Antwoordnummer 6236, 3500 VC

Utrecht.

Een jaarabonnement is f25,- of

BF450,-

Wacht met betalen op de factuur.

Bij tussentijdse abonnering ontvang je ook de reeds verschenen nummers van het lopende jaar.

Abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk bij de uitgever is opgezegd.

Tarieven:

Abonnement Pythagoras f 25,- of

BF450,-

Luchtpost toeslag f 10,-

Inclusief Archimedes f 45,- of

BF 800,-

Luchtpost toeslag f 20,-

Losse nummers f 5,- of BF 90,-