

PYTHAGORAS

WISKUNDE TIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

33 E JAARGANG

SEPTEMBER 1993 NUMMER 1

Pythagoras in
een nieuw jasje

3

Buis doorzagen

4

Schatgraven

10

Stapelen

18



UITGAVE:

Pythagoras is een uitgave van MEMO Media marketing organisatie n.v., en verschijnt zesmaal per jaar. Een jaargang loopt van september tot en met augustus.

REDACTIE:

Jan Mahieu
Frank Roos
Marcel Snel

EINDREDACTIE:

Henk Huijsmans

NIEUWE ARTIKELN:

Molenstraat 31,
4841 CA Prinsenbeek

CORRESPONDENTIE-ADRES:

Reacties,
oplossingen enz.
Frank Roos,
Klink 19
9356 DS Tolkert

MEDEWERKERS:

Bob de Jongste,
Hans de Rijk,
Paul van de Veen,
Thijs Notenboom.

• PYTHAGORAS IN EEN NIEUW JASJE	3
• BUIS DOORZAGEN	4
• MACHTSVERHEFFEN, CARDIOÏDES, PRIMITIEVE WORTELS EN PRIEMGETALLEN	6
• MODULUS	6
• KNUTSELEN	8
• SCHATGRAVEN	10
• LOGICA	11
• BAMBOESTENGEL	12
• EEN HANDJE HELPEN	13
• GOOCHELEN MET GRAFIEKEN	14
• SOM = PRODUKT	14
• OPEL WEET HET BETER	14
• WORTEL SOEP	15
• PARABOLEN	15
• REACTIE OP "1993"	16
• VOUWBLAADJE PROBLEEM	17
• STAPELEN	18
• REACTIE OP 4 MAAL 2	19
• PRIEMPUZZEL	20
• VORMVAST HALVEREN	20
• PEILSTOK	22
• IETS VOOR REKENAARS	22
• HENK MULDER 1923-1993	23
• OPLOSSINGEN	24
• VERDWENEN CHINEES/LUCIFERS	26

PYTHAGORAS IN EEN NIEUW JASJE

Voor u ligt het eerste nummer van Pythagoras in zijn drieëndertigste jaargang. Iets groter dan u de laatste jaren gewend was, en in een andere vormgeving. Tijden veranderen, en daarom heeft Pythagoras een nieuw uiterlijk gekregen, maar de traditie van intrigerende wiskundeproblemen- en puzzels blijft!

In dit eerste nummer van de nieuwe jaargang heeft de redactie er weer naar gestreefd een zo groot mogelijk scala aan wiskundige wetenswaardigheden samen te stellen. Het eerste artikel gaat over de wiskundige implicaties van het doorzagen van een buis. Waarom is het laatste stukje zo zwaar? In het artikel over machtsverheffen, cardioïdes, primitieve wortels en priemgetallen wordt wiskunde kunst met een eenvoudige rij van machten. Ook op de computer uit te proberen!

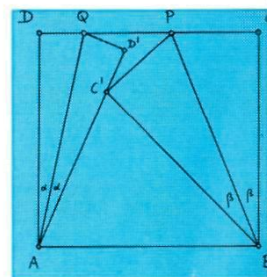
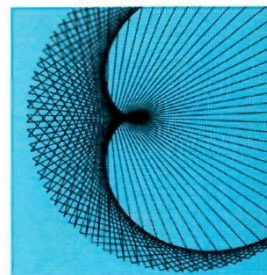
In het artikel "Schatgraven" wordt met behulp van meetkunde een schat gevonden. Als je met z'n tiene een plaat versjouw, hoeveel lichter is dat, dan wanneer je het met z'n tweeën doet? Het artikel "Een handje helpen" geeft antwoord op deze vraag.

In dit nummer zijn veel reacties van lezers op eerder verschenen artikelen opgenomen. Vooral de reacties op "1993" (Pythagoras 5, jaargang 32) waren talrijk. De redactie hoopt dat lezers zo actief zullen blijven meedenken over de inhoud van dit blad!

In juli bereikte ons het droevige bericht dat Henk Mulder, die jarenlang een drijvende kracht was achter Pythagoras en Archimedes, was overleden. Pietjan Wippoo schrijft over zijn herinneringen aan Henk Mulder als wis- en natuurkundeleraar en als redacteur van Pythagoras en Archimedes.

Behalve al deze artikelen staan er in dit nummer van Pythagoras natuurlijk weer vele puzzels en raadsels die met wiskundig vernuft op te lossen zijn. Blijf ons uw oplossingen en reacties sturen, ze zijn zeer welkom! Zie voor het correspondentie-adres pagina 2.

De redactie



BUIS DO



Als je met een ijzerzaag een massieve buis doorzaagt, wordt het gaandeweg naar het midden steeds zwaarder.

Want hoe verder je vordert, hoe dikker het ijzer is. Bij een holle buis is de zaak ingewikkelder. Het door te zagen deel wordt aanvankelijk ook steeds dikker, maar plotseling neemt de lengte van de zaagsnede af, om bij het midden van de buis in een minimum te eindigen.

ZAAGSNEDE HOLLE BUIS

In figuur 1 hebben we de doorsnede gedeeltelijk gearceerd. De binnen- en buiten diameters zijn $2r$ en $2R$. Meestal zagen we zo'n buis vrijwel in horizontale stand door, maar wij gaan hem wiskundig doorzagen vanuit een verticale stand, beginnend in A. Tijdens het zagen neemt x af, eerst van $x = R$ tot nul; daarna van 0 tot $-R$. In het begin is de lengte van de zaagsnede nul, maar de lengte loopt op via EF tot de maximale lengte RS (fig.1). Ga maar na, dat $RS = 2\sqrt{(R^2 - r^2)}$ is. Daarna valt de snede uiteen in twee gelijke delen KL. Die worden daarna weer korter, totdat we tenslotte bij het midden van de buis via TU uitkomen op de minimum zaagsnede 2WW met lengte $2(R - r)$. De rest volgt in omgekeerde volgorde.

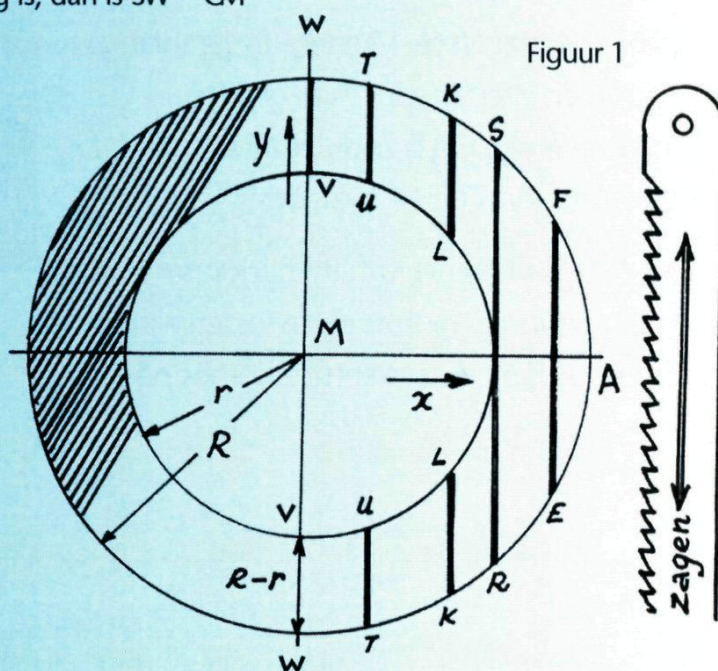
GRAFIEK

We zouden een grafiek willen maken, die het verband aangeeft tussen de lengte

OPGAVE

BIJ FIGUUR 2

- Bewijs eens, dat $SW > CM$, onafhankelijk van r en R (Tip: ga kwadrateren en toon aan dat $\sqrt{(R^2 - r^2)} > R - r$.)
- Als de pijp heel dunwandig is, dan is $SW = CM$



Figuur 1

ORZAGEN

van de zaagsnede en de afstand ervan tot het centrum M. (Zie fig. 2).

De x-as is een symmetrie-as; de y-as ook.

Daarom kijken we wiskundig slechts op het domein $0 \leq x \leq R$. De halve lengte van de zaagsnede noemen we dan y.

PUNTEN BEPALEN

Bij het begin van het zagen is $x = R$ en $y = 0$. De grafiek volgt voor $r \leq x \leq R$ de grafiek van de grote cirkel, dus daar is $y = \sqrt{(R^2 - x^2)}$.

De zaagsnede groeit nu.

Bij S wordt de langste zaagsnede bereikt:

$$x = r \text{ en } y = \sqrt{(R^2 - r^2)}.$$

Het zagen gaat daar het moeizaamst.

Hoe vinden we nu volgende punten, zoals P? Zet daartoe een verticale hulplijn en laat het stuk tussen de cirkels zakken tot op de x-as.

Daar geldt dan

$$y = \sqrt{(R^2 - x^2)} - \sqrt{(r^2 - x^2)}.$$

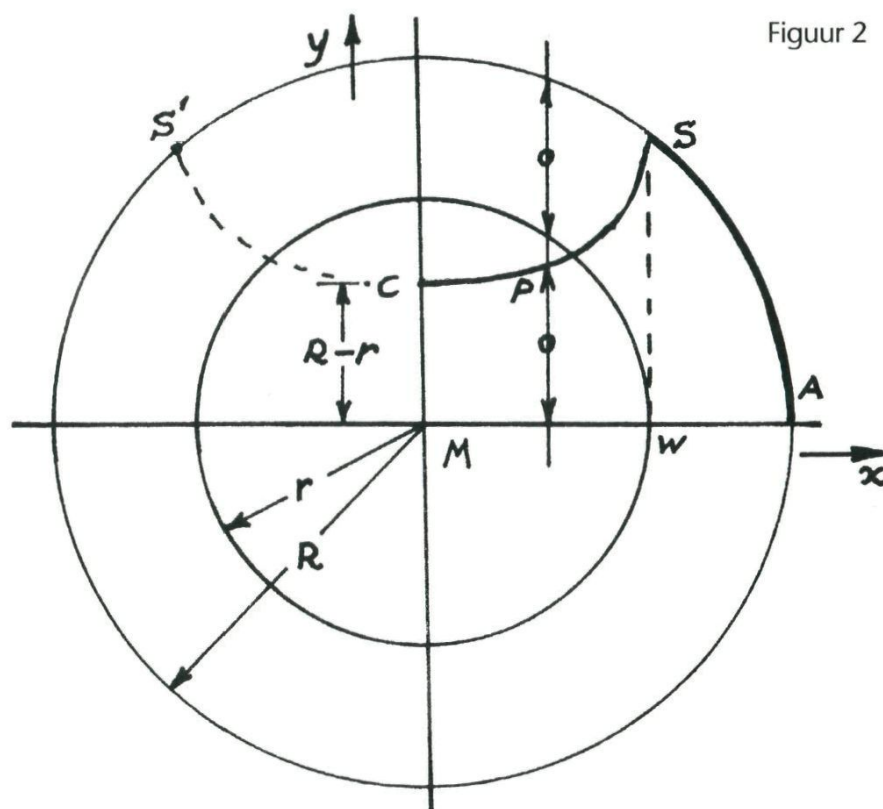
Zo doorgaande komen we bij C terecht: $x=0$ en $y=R-r$.

KNIK

Bij S heeft de grafiek een knik. Je kunt daar twee raak-

CONCLUSIE

Wie ooit een holle pijp heeft doorgezaagd, herkent dit



Figuur 2

lijnen tekenen. Bij nadere analyse kun je ontdekken, dat één van die raaklijnen verticaal loopt.

De functie is daar niet differentieerbaar. De lengte van de zaagsnede neemt aanvankelijk toe, maar valt bij S abrupt terug en blijft bij C vrijwel constant.

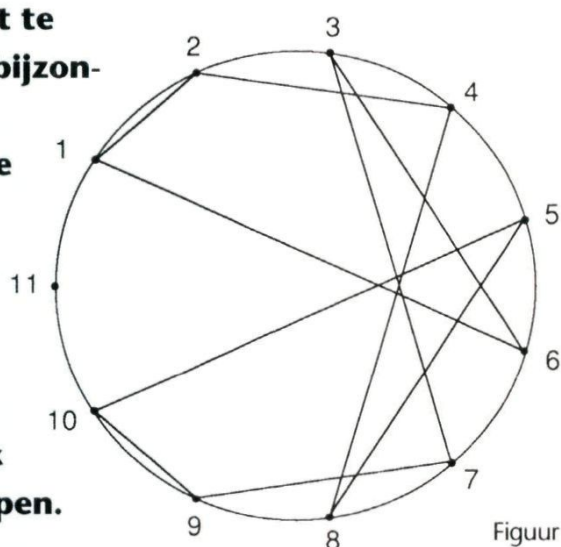
allemaal wel. Als je zorgde, niet op te geven voor positie SR, dan word je beloond met een tijdelijke verlichting van je arbeid. Als de buis bijna door is, moet je weer even flink zwoegen, terwijl je al een beetje moe bent !

Henk Mulder

MACHTSVERHEFFEN, PRIMITIEVE WORTEL

De eenvoudige rij van de machten van 2: 1, 2, 4, 8, ... geeft aanleiding tot een prachtig lijnenspel dat de cardioïde (hartlijn, of brandlijn) omhult. Dit heeft te maken met een bijzondere eigenschap van de primitieve wortels van priemgetallen die we op een grafische speurtocht aan een nader onderzoek zullen onderwerpen.

Voordat we het lijnenspel gaan tekenen moeten we eerst de rij van getallen $k_n = 2^n$ bekijken voor $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. We spreken af dat de getallen k_n niet



Figuur 1

MODULUS

Als je elk van de getallen 9, 51, 65 en 79 door 7 deelt, dan is de rest steeds 2. We zeggen: "9 is congruent 2 modulo 7".

We schrijven: $9 \equiv 2 \pmod{7}$

Ook geldt

$$9 \equiv 51 \equiv 65 \equiv 2 \pmod{7}.$$

Hier staat dus niets anders dan: als je elk van de genoemde getallen door 7 deelt, dan is de rest 2. Kun je nu inzien, dat het volgende waar is?

$$333 \equiv 36 \pmod{11}$$

$$303 \equiv 103 \pmod{100}.$$

Frank Roos

groter mogen worden dan een natuurlijk getal M door de modulus te gebruiken:

$$k_n \equiv 2^n \pmod{M}.$$

De modulus van een getal is de rest die ontstaat bij deling door M .

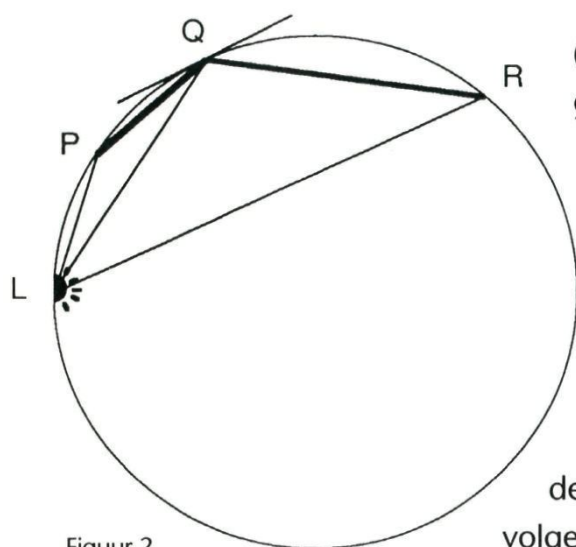
Voor $M = 11$ krijgen we:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k_n	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1

Voor de rij k_n geldt de volgende relatie:

$$k_{n+1} \equiv 2k_n \pmod{M}.$$

CARDIOÏDES, EN PRIEMGETALLEN



Figuur 2

We kunnen daarom de rij bepalen aan de hand van het volgende voorschrift (algoritme):

we starten de rij met 1 en vermenigvuldigen steeds met 2. Als het resultaat groter is dan M verminderen we dit met M.

GETALLEN OP EEN CIRKEL VERBINDEN

De rij k_n heeft een interessante eigenschap: de getallen van 1 tot en met 10 komen juist éénmaal voor als $1 \leq n \leq 10$.

Bij $n = 11$ herhaalt zich dit weer. We plaatsen nu 11 punten op een cirkel op gelijke afstand van elkaar

(gebruik hiervoor een gradenboog: tussen twee punten is de boog $360^\circ:11 = 32,7^\circ$). We nummeren de punten achtereenvolgens van 1 tot 11. Deze punten verbinden we met rechte lijnen

volgens het voorschrift van de rij k_n zoals in figuur 1 is getekend. Het resultaat is een lijnenspel dat bestaat uit raaklijnen aan een cardioïde.

DE CARDIOÏDE

De cardioïde (hartlijn) is eerder besproken in Pythagoras 32 nr. 3 (januari 1993).

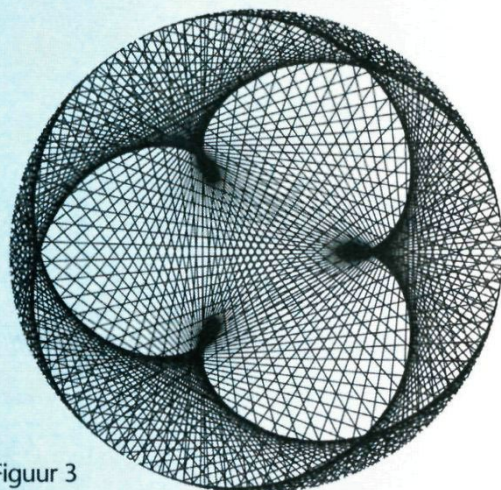
Een cardioïde treffen we aan in cilindervormige objecten, zoals een kopje of een ring, als deze van opzij worden belicht. Een scherpe cardioïde ontstaat als de lichtbron L zich op de cilinder bevindt (fig. 2). De lichtstraal die de cilinder bij P treft wordt weerkaatst, zó dat de hoek van inval en weerkaatsing ten opzichte van de raaklijn in P gelijk zijn.

De teruggekaatste straal is dan PQ. Zo vinden we dat QR de teruggekaatste straal is van Q naar R. Het is eenvoudig te zien dat voor de teruggekaatste stralen geldt dat $QR = 2 PQ$. Dit komt precies overeen met het voorschrift van de rij k_n dat we hebben gebruikt in figuur 1: het volgende punt ligt 2 maal verder weg dan het vorige. Omdat we de punten op een cirkel hebben geplaatst (wat grafisch overeenkomt met de modulus) ontstaat de omhullende van een cardioïde.

In figuur 1 wordt punt 11 niet bezocht: daar staat de denkbeeldige lichtbron L.

"CARDIOÏDE" GETALLEN

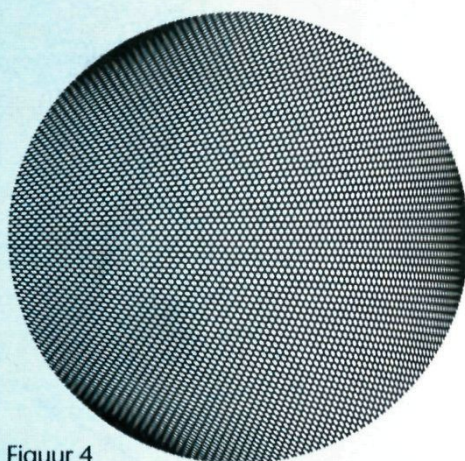
In figuur 1 is voor M een klein getal genomen en het resultaat is een ruwe omhullende van de cardioïde. Een mooier resultaat krijg je als je voor M een grotere waarde kiest. Probeer het maar eens voor $M = 29$. Voor grotere getallen M wordt het vrijwel ondoenlijk



Figuur 3

om dat met de hand te doen. We kunnen het werk dan beter automatiseren door hiervoor een computerprogramma te schrijven. We zullen dit verderop bespreken.

Het aardige van de rij k_n voor $M = 11$ en 29 is dat we alle punten één keer doorlopen, behalve punt M . We kunnen ons afvragen: geldt dit voor alle natuurlijke getallen M ? Door wat proberen zul je ontdekken dat M een priemgetal moet zijn, maar dat niet alle priemgetallen een volledige rij k_n opleveren.



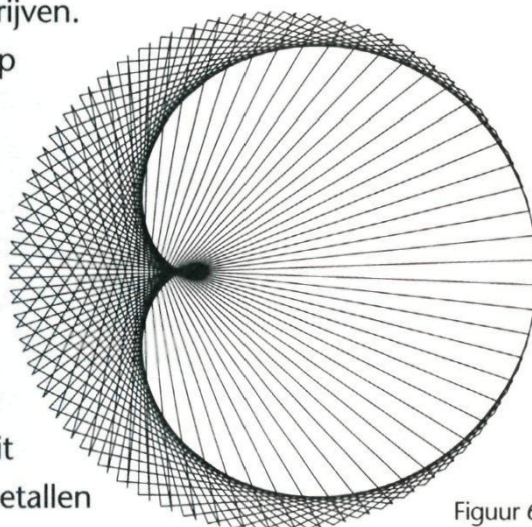
Figuur 4

De getallen M onder de 100 die een volledige omhullende van de cardioïde opleveren staan in de onderstaande tabel:

3	5	11	13	19	29	37	53	59
61	67	83						

PRIMITIEVE WORTELS VAN PRIEMGETALLEN

Tot nu toe hebben we rijen met de machten van 2



Figuur 6

onderzocht. Je kunt het onderzoek verder uitbreiden naar rijen met een algemene vorm

$$k_n \equiv p^n \pmod{M}, \text{ met } n = 0, 1, 2, \dots \text{ en } p = 2, 3, \dots$$

Je kunt dan de vraag stellen: Welke combinaties van M en p leveren een volledige omhullende op? In zo'n geval wordt p een primitieve wortel van M genoemd. Alleen als M een priemgetal

KNUTSELEN

Ben je een knutselaar? Bereken dan de rij k_n bijvoorbeeld voor $M = 131$ en $p = 2$ (fig. 6).

Verdeel een cirkel met een straal van circa 20 cm in 131 stukken. Gebruik dit als een patroon om kleine spijkertjes in een stuk spaanplaat te slaan. Schilder het geheel in een leuke kleur en verbind de spijkertjes volgens het voorschrift van de rij k_n met touw in een contrasterende kleur en ... je hebt een prachtig abstract kunstwerk voor je kamer!

is wordt aan deze eis voldaan. Voor de "cardioïde" getallen is $p = 2$: je krijgt dan een omhullende met één brandpunt.

In het algemeen zul je $p-1$ brandpunten krijgen.

Je zult bij dit onderzoek van de nog ontbrekende priemgetallen ontdekken dat 3 een primitieve wortel is van 7, 17 en 31; 5 is een primitieve wortel van 23 en 47, enzovoort. Een priemgetal kan een groot aantal primitieve wortels hebben.

De primitieve wortels van bijvoorbeeld 37 zijn:

2, 5, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 32 en 35.

Zo zijn er een groot aantal paren M en p , die volledig lijnenspel opleveren. Fraaie voorbeelden tref je aan in figuur 3 ($M = 349$, $p = 140$) en figuur 4

($M = 349$, $p = 174$).

GRAFISCH EXPERIMENTEREN

Het leukste is om de ontdekkingstocht op grafische wijze met een computer uit te voeren: je laat op het scherm van de computer eerst de te bezoeken punten tekenen en dan het lijnenspel van de getallenrij k_n .

Je ziet dan direct of de rij volledig is.

Een Quick BASIC programma is gegeven in figuur 5.

Dit programma gaat uit van de algemene vorm

$k_n \equiv p^n \pmod{M}$, maar in de

FOR-NEXT-lus wordt gebruik gemaakt van de relatie

$k_{n+1} \equiv p k_n \pmod{M}$.

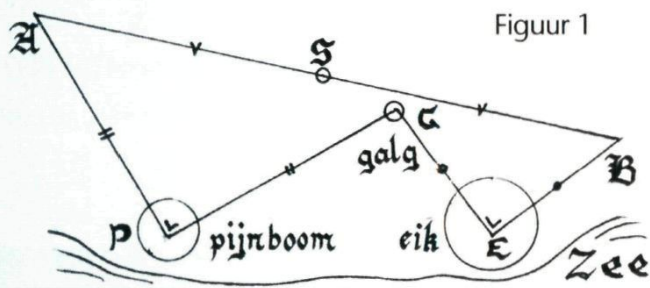
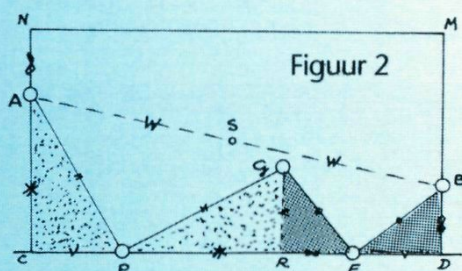
Dit voorkomt ook foutmeldingen voor overloop van de parameters (waarom?).

Marcus Hemminga

Figuur 5

CLS	' Programma CARDIO.BAS
SCREEN 12	' wis scherm
PRINT "Geef M en P";	' VGA-scherm 640 x 480 pixels
INPUT M, P	' invoer parameters M en P
	' als M een priemgetal is en P
	' een primitieve wortel ontstaat
	' een volledige figuur
PI = 3.14159	' getal n
D = 2 * PI / M	' hoek tussen twee punten
R = 200	' "straal" cardioïde
OX = 320	' x-waarde "middelpunt" cardioïde
OY = 240	' y-waarde "middelpunt" cardioïde
FOR N = 1 TO M	' teken de punten op de cirkel
A = D * N	' hoekwaarde van het punt
X = R * COS(A) + OX	' x-waarde punt
Y = R * SIN(A) + OY	' y-waarde punt
PSET (X, Y), 11	' teken het punt in de kleur
	' lichtgroen
NEXT N	' herhaal de lus
X = R * COS(D) + OX	' x-waarde startpunt cardioïde
Y = R * SIN(D) + OY	' y-waarde startpunt cardioïde
PSET (X, Y)	' startpunt van de cardioïde
K = 1	' startwaarde voor de reeks
FOR N = 1 TO M	' doorloopt de cardioïde
K = K * P	' berekent: $K_{n+1} = p \cdot K_n$
K = K MOD M	' voert de modulus-functie uit
A = D * K	' hoekwaarde van het punt
X = R * COS(A) + OX	' x-waarde punt
Y = R * SIN(A) + OY	' y-waarde punt
LINE -(X, Y)	' tekenen cardioïde
NEXT N	' herhaal de lus
END	' einde programma

SCHATGRA



Ga bij de galg staan, loop naar de pijnboom en tel daarbij het aantal stappen. Maak bij de pijnboom een haakse hoek naar rechts en loop in die richting hetzelfde aantal stappen. U hebt dan punt A bereikt: markeer dit duidelijk. Ga terug naar de galg en doe hetzelfde in de richting van de eik, maar i.p.v. rechts moet U nu bij de eik linksaf. U bereikt zo punt B. De schat ligt precies halverwege AB.

OPLOSSING 5

G. den Dekker uit

Den Haag meldt ons als eerste,
dat hij een vijfde oplossing
gevonden heeft bij de puzzel
in Pythagoras 5 van mei 1993.
Zie het artikel "optellen,
moeilijker dan je denkt".
Naast $10 + 11 + \dots + 18 =$
 $15 + 16 + \dots + 21 =$
 $30 + 31 + 32 + 33 =$
 $41 + 42 + 43 = 126$
vond hij nog: $5 + 6 + \dots + 16.$

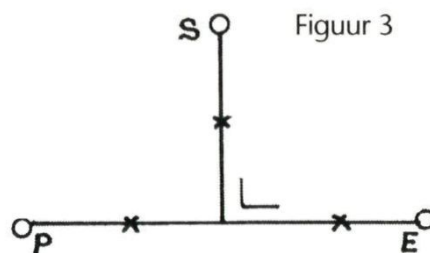
Bedankt G. den Dekker!

Frank Roos

Op een eiland staan een galg en twee bomen. In een oud document wordt beschreven hoe je uit deze herkenningspunten bij de schat S kunt komen (fig. 1). Speurders vinden dit document in een vergeeld archief en besluiten hun geluk te gaan beproeven. Daar aangekomen blijkt er geen spoor meer van de galg te vinden. Toch wist één van hen, met wat meetkundige trucjes toch de plaats van de schat terug te vinden.

SPORZOEKEN

In fig. 1 zie je hoe je te werk moet gaan om uitgaande van de punten G, P en E bij de schat S uit te komen. Maar hoe moet het nu als je punt G niet meer hebt? Verleng PE naar weerskanten en laat daarop loodlijnen neer vanuit



VEN

A, G en B. Dit zijn de lijnstukken AC, GR en BD (fig.2).

Er verschijnen links en rechts paren van congruente driehoeken. Voorzie gelijke lijnstukken van gelijke tekens. Verleng nu CA met een stuk BD en maak vervolgens de rechthoek CDMN verder af. Merk op dat S precies in het centrum van de rechthoek ligt. De projectie van S op CD komt dan midden op CD en dus ook midden op PE. De afstand van S tot CD is dan gelijk aan $\frac{1}{2}$ PE.

Conclusie: je kunt punt S nu heel gemakkelijk bereiken vanuit pijnboom en eik. Neem daartoe de middelloodlijn van PE (fig.3) en maak de afstand van S tot PE gelijk aan $\frac{1}{2}$ PE.

Zo blijkt de ligging van de schat S onafhankelijk van de positie van de galg. Als die verdwenen is, kun je de positie met figuur 3 nog gemakkelijk vinden.

Victor Dolman

LOGICA?

Hieronder wordt een "bewijs" gegeven, dat het grootste priemgetal 37 is. Omdat dit natuurlijk onzin is, moet het bewijs fout zijn. Toch lijkt de redenering volledig te kloppen.

DRIE BEWERINGEN

Er wordt een drietal beweringen gedaan, waarvan niet op voorhand duidelijk is of ze wel of niet waar zijn.

Bewering 1:
bewering 2 is waar.

Bewering 2:
bewering 1 en 3 zijn òf beide waar òf beide niet waar.

Bewering 3:
37 is het grootste priemgetal.

Beredeneer nu, wat je over deze drie beweringen kunt zeggen. Stel eerst: bewering 1 is waar. Dan is ook bewering 2 waar.

Dus zijn beweringen 1 en 3 òf beide waar òf beide niet waar. Omdat bewering 1 waar is, is ook bewering 3 waar.

Stel nu: bewering 1 is niet waar. Dan is ook bewering 2 niet waar.

Dus zijn beweringen 1 en 3 niet (òf beide waar òf beide niet waar).

Omdat bewering 1 niet waar is, is bewering 3 juist wel waar.

CONCLUSIE

Dus bewering 3 is in alle gevallen waar, dus het grootste priemgetal is 37.

De redactie is nieuwsgierig, wie de fout kan ontdekken.

Oplossingen sturen naar:
Frank Roos,
Klink 19,
9356 DG
Tolbert.

Martin Leisink



EEN HAN

Een aantal mannen moet met handkracht een zware rechthoekige ijzeren plaat versjouden. De dikke plaat buigt niet door.

Waar moeten ze zich langs de rand opstellen, als de voorwaarde is: ieder moet evenveel dragen?

Je kunt het probleem ook meer technisch stellen: waar moet je langs de rand veren onder de plaat zetten, als ze allemaal evenveel moeten worden ingedrukt?

In de figuur hebben we de oplossingen getekend voor gevallen waarbij $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ en 7.

We beginnen met $n=2$.

Dat lijkt al heel eenvoudig.

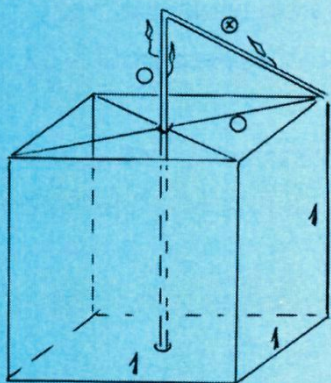
Beide mannen grijpen aan op het midden van de korte zijde. Maar, het kan theoretisch ook op het midden van de lange zijde. Het kan op elk tweetal punten, waarbij de verbindinglijn door het centrum gaat, want de plaat mag tijdens het dragen niet gaan kantelen.

Bij $n = 4$ is de zaak nog eenvoudiger: gewoon dragen bij de vier hoekpunten.



BAMBOESTENGEL

In een bak van $1 \times 1 \times 1$ m staat midden op de bodem een bamboestengel die een lengte heeft van 10 meter. De stengel breekt en de top komt precies in de hoek van de bovenrand terecht. Op welke plaats brak de stengel?



Stel het omgeknikte deel x . Vul nu de beide andere rondjes in. Pas de stelling van P toe en bepaal x .

Oplossing zie pag.25

Bob de Jongste

DJ E H E L P E N

Formuleer hoe het ook anders kan. Bekijk de toestand eens bij $n=8$.

Je ziet nu wel in dat voor n even, de oplossing weinig discussie op zal leveren.

N ONEVEN

Bij $n=3$ wordt het probleem al interessanter. We stellen voor: één man midden op een korte zijde en de twee andere symmetrisch op $\frac{1}{2}$ van de lange zijde, gerekend vanaf de andere kant.

Hoe kun je die posities berekenen?

De plaat heeft twee symmetrie-assen. We beperken ons tot as PQ. Het gaat nu om twee zaken: de plaat mag niet draaien om die as

en alle krachten hebben een gelijke grootte F . Stel de lengte van de lange zijde op 1. We bereken nu AQ.

Volgens de momentenstelling geldt dan:

$F \cdot x + F \cdot x = F \cdot \frac{1}{2}$. Hierbij valt F weg en vinden we $x = \frac{1}{4}$.

Controleer nu zelf de mogelijke oplossing bij $n=5$.

N=7

Bij $n=7$ wordt de zaak weer een stap ingewikkelder. Er blijken nu twee onbekenden x en y te verschijnen.

We beginnen met twee mannen op de voorste hoekpunten te posteren en een andere midden achter. Maar waar komen dan de overige vier?

We gaan uit van zo veel mogelijk symmetrie. Twee komen dan op een afstand

x achter het midden en twee op een afstand y vóór het midden. Van onder naar boven krijgen we dan de volgende vergelijking:

$F \cdot \frac{1}{2} + 2F \cdot x = 2F \cdot y + 2F \cdot \frac{1}{2}$ ofwel $x - y = \frac{1}{4}$.

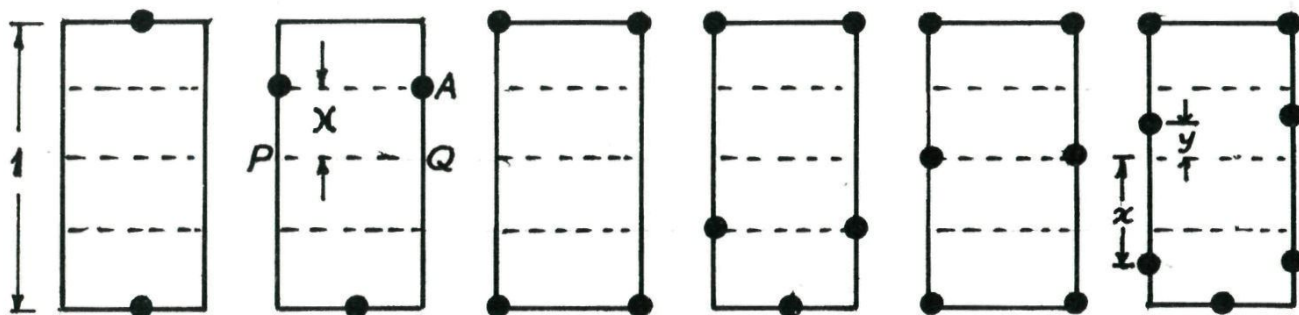
Daar zijn verschillende oplossingsparen te bedenken, bijvoorbeeld $x = \frac{3}{8}$ en $y = \frac{1}{2}$. Deze hebben we in de figuur aangegeven.

Verzin nog maar eens twee andere oplossingen en teken die ook uit.

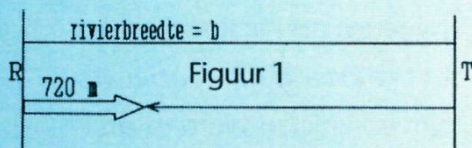
VERDER

Probeer nu zelf eens een mogelijke oplossing voor $n=9$ te tekenen. Zie je kans om nog meer in het algemeen aan te geven, hoe er posities te vinden zijn?

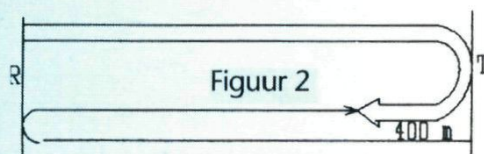
Henk Mulder



N . A . V G O O C H E L E N M E T G R A F I E K E N



De heren Mourik uit De Meern en Henk Lichtenberg uit Veenendaal vonden, onafhankelijk van elkaar, een aanzienlijk eenvoudiger oplossing voor het probleem met de veerboten.



Bij de eerste ontmoeting hebben de boten samen de breedte b van de rivier afgelegd. Bij de tweede ontmoeting hebben ze, opgeteld, afstand $3b$ afgelegd. Boot R heeft dan $3 \times 720 \text{ m} = 2160 \text{ m}$ afgelegd. Dit is 400 m méér dan b . Dus $b = (2160 - 400) \text{ m} = 1760 \text{ m}$. Als de twee ontmoetingstijdstippen t_1 en t_2 zijn, dan is, gerekend vanaf starttijd $t = 0$: $t_2 = 3 \times t_1$.

SOM = PRODUKT

2×2 en $2 + 2$ zijn beide 4.
Ook geldt $5 + 1,25 = 5 \times 1,25$.
Bestaan er nog meer getallen x en y , waarvoor geldt:
 $xy = x + y$?
Oplossing zie blz 24.

O P E L W E E T ' T B E T E R

Het binnenvolume van een kubus is even groot als het buitenvolume. Tenminste, alleen voor wiskundigen die de dikte van de kubuswanden op nul stellen.

Nieuwe Opel Gooit hoge ogen

heel belangrijk voor onze markt: de nieuwe Opel Corsa. Een snoepje van een auto om te zien. Klein van buiten en ruim van binnen. Serieuze kandidaat voor de titel Auto van het Jaar. AUTOBLAD maakte een proefrit.

Daar hebben we eigenlijk wel wat moeite mee, want een kubus met oneindig dunne wanden bestaat gewoon helemaal niet. Maar het kan nog gekker. De firma Opel maakt het helemaal bont: die forceert een doorbraak in het ruimtelijk denken door een auto te gaan verkopen met een binnenvolume dat nog groter is dan het buitenvolume! Natuurlijk een fantastisch idee: gemakkelijk voor het parkeren en veel mensen erin. We houden ons aanbevolen voor de betreffende formules. Henk Mulder

W O R T E L S O E P

Bereken de volgende som:

$$\sum_{k=0}^{99} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$$

De Σ is de griekse hoofdletter S, die je als afkorting moet zien van "som". De k is een variabele, die alle gehele waarden van 0 t/m 99 moet doorlopen. Als je $k=8$ kiest, dan geeft dat tot de som een bijdrage.

$$\frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{(8+1)}}$$

De som bestaat zo uit honderd termen.

Uitgeschreven krijg je:

$$\frac{1}{\sqrt{0} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{98} + \sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$$

Het lijkt geen eenvoudig karwei om deze honderd breuken bij elkaar op te tellen. Speciaal al die wortels zijn het struikelblok. Des te verrassender wordt het, als we je verklappen, dat de uitkomst tien wordt, ja tien, je leest het goed! Kun je dat zelf berekenen? Het vervolg vind je op blz. 25.

Peter Wielmann

P A R A B O L E N

Als b een willekeurig getal is, dan vormen de toppen van $y = x^2 + bx + 4$ een bepaalde parabool.

Met kwadraatplitsen vinden we:

$$y = (x + \frac{1}{2}b)^2 + 4 - \frac{b^2}{4} \dots (1)$$

Dan kun je nu goed zien, dat de top ligt bij

$$x = -\frac{b}{2} \dots (2) \text{ en}$$

$$y = 4 - \frac{b^2}{4} \dots (3).$$

Als we b nu variabel maken, dan stelt vergelijking (1) een verzameling 'even wijde' parabolen voor. Door b enige waarden te geven, kun je enige parabolen uit die verzameling vinden.

vind je de ligging van alle toppen van al die parabolen. Uit (2) volgt, dat $b = -2x$. Vul je dat in in (3), dan krijg je $y = 4 - x^2$

Samenvatting:

$y = x^2 + bx + 4$ is een verzameling parabolen, waarvan de toppen liggen op de parabool $y = 4 - x^2$.

Frank Roos



REACTIE OP "1993"

Alleen de getallen 65, 67, 68, 70 en 71 konden nog niet met de cijfers van 1993 gemaakt worden. Meneer Maertens uit Izegem (B), uw puzzel heeft heel wat reacties losgemaakt !

INZENDERS MET GOEDE OPLOSSINGEN WAREN:

1a = leerlingen van klas 1a van leraar Boon te Den Haag.

BA = E. Buissant des Amorie uit Amstelveen.

CH = een niet nader genoemde collega van Henk Huysmans.

DB = Ir. Beekman uit Dinteloord

GJ = G. Jeurnink.

KJ = Karin de Jongh.

MH = Marius Hol te Lienden.

ML = M. Leisink uit Nijmegen

WM = Hr. Maertens zelf

Zw = M. Zwiers uit Den Haag.

Later zijn nog oplossingen binnengekomen van Jaco de Groot, Th. van Herwijnen, H. de Jager, A. Schenk en Leonard Mennen.

DE OPLOSSINGEN:

$$65 = 1 + \{(\sqrt{9})! : \sqrt{9}\}^{3!}$$

(MH; GJ; BA; CH)

$$67 = (1 + \sqrt{9})^{\sqrt{9}} + 3$$

(MH; 1a; GJ; DB; ML; BA)

$$67 = (-1 + \sqrt{9})^{(\sqrt{9})!} + 3$$

(MH)

68 is door niemand opgelost

$$70 = (1 + \sqrt{9})^{\sqrt{9}} + 3!$$

(MH; 1a; DB; ML; BA)

$$71 = -1 + (9 + \sqrt{9}) * 3!$$

(WM; KJ; 1a; Zw; GJ; DB)

$$71 = -1 + (\sqrt{9})! * (9 + 3)$$

(MH)

$$71 = -1 + (\sqrt{9})! * \{(\sqrt{9})! + 3!\}$$

(MH)

$$71 = -1 + \{(\sqrt{9})! + (\sqrt{9})!\} * 3!$$

(MH)

$$71 = -1 + \{(\sqrt{9})!\}^{\sqrt{9}} : 3$$

(GJ; BA)

$$71 = \sqrt{[1 + \{9/9 + 3!\}!]}$$

(ML)

$$71 = \sqrt{[1 + (\sqrt{9})! + \sqrt{\frac{9}{3}}]}$$

(BA; CH)

De redactie dankt ieder voor zijn of haar al dan niet geslaagde pogingen om tot een goede oplossing te komen.



VOUWBLADJES PROBLEEM

Een treinreizende wiskundeleraar bestudeerde de vierkanten die door elkaar geschoven naast de schuifdeur op de wand stonden en kwam tot de volgende vraag:

Vierkant ABCD, met ribbelengte=1. AD wordt gevouwen om AQ (Q op CD) tot AD'. BC wordt gevouwen om BP (P op CD) tot BC' met C' op AD'.

Hoe moet je P en Q op CD kiezen zodat de "pijlpunt" PQD'C' symmetrisch is (dus een vlieger!)?

OPLOSSING

Noem $\angle DAQ = \alpha$, dan

$\angle D'AQ = \alpha$, dus

$\angle DQA = \angle D'QA = 90^\circ - \alpha$ en

$\angle PQD' = 2\alpha$.

Verder geldt dat

$\angle C'AB = 90^\circ - 2\alpha$ en omdat

$AB = BC = BC'$ dus ook

$\angle AC'B = 90^\circ - 2\alpha$.

Dus $\angle D'C'P = 2\alpha$ omdat

$\angle PC'B = 90^\circ$.

In elk geval geldt dus altijd

dat in vierhoek PQC'D' de hoeken bij Q en C' gelijk zijn. Als nu ook nog geldt $PQ = PC'$ dan is de vierhoek een vlieger. Noem $DQ = x$ en $CP = y$, dan geldt $PC' = y$.

PQD'C' is dus een vlieger als

geldt $PC' = PQ = y$ ofwel

$x + 2y = 1$. Noem $\angle CBP = \beta$.

In de gelijkbenige driehoek

ABC' zijn twee hoeken

$90^\circ - 2\alpha$, dus $\angle ABC' = 4\alpha$ en

dus geldt $4\alpha + 2\beta = 90^\circ$, en

$\beta = 45^\circ - 2\alpha$. $\tan(\alpha) = x$,

$\tan(\beta) = y$.

$y = \tan(\beta) = \tan(45^\circ - 2\alpha) =$

$$\frac{1 - \tan(2\alpha)}{1 + \tan(2\alpha)} = \frac{1 - \frac{2x}{1-x^2}}{1 + \frac{2x}{1-x^2}} = \frac{1 - 2x - x^2}{1 + 2x - x^2}$$

$x + 2y = 1$ levert

(na wat rekenwerk):

$$x^3 - x^2 + 5x - 1 = 0$$

Deze vergelijking moet een oplossing hebben van ongeveer $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{5}$ en omdat voor

die waarden van x de waarden van x^2 en x^3 relatief klein zijn, is $x = 0,20$

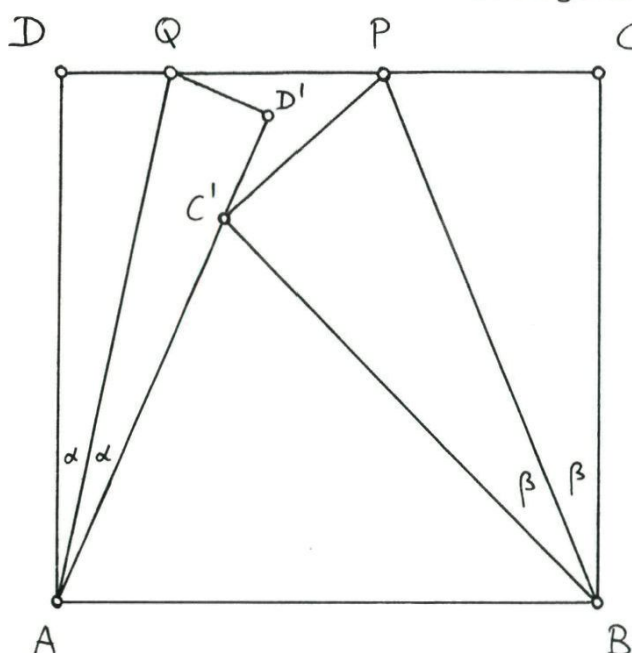
($5x - 1 = 0$) een goede eerste benadering van het nulpunt.

Overigens kun je met computerprogramma's als Derive en VU-grafiek snel een benadering vinden:

$x = 0,207$ (Ook met veel zakrekenmachines is zo'n benadering snel gevonden!).

Dus vouwen op een vijfde en de pijlpunt is symmetrisch!

Thijs Notenboom



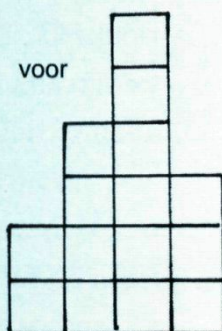
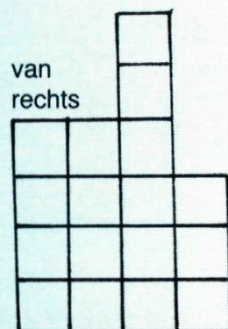
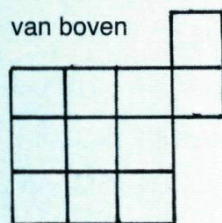
STAPELEN



OPLOSSINGEN

Oplossingen van de diverse opdrachten verdeeld in dit magazine zijn te vinden op pagina 24 en 25!!

Een gebouw bestaat uit een stapeling van kubussen. In de tekening staan het vooraanzicht en het aanzicht van boven en van rechts.



De bedoeling is om te bepalen hoeveel kubussen er minimaal nodig zijn om aan de aanzichten te voldoen. Je kunt natuurlijk een dertigtal kubussen opzoeken en aan het bouwen gaan.

Dan kom je er zeker uit. Probeer het alleen met de tekeningen klaar te krijgen. We geven een tip.

Zet in elk hokje van de middelste tekening een getal dat aangeeft hoeveel blokjes daar maximaal mogen staan. Dat lijkt niet zo moeilijk. Dan ga je verzinnen hoe elke stapel korter gemaakt zou kunnen worden om blokken te besparen. En zo kom je aan een minimum.

Bram Lagerwerf

OPMERKING:

de vorm van het gebouw is door de verstrekte gegevens nog niet bepaald. In het volgende nummer komt de oplossing te staan.

VORMVAST

In figuur 1 staat rechthoek A, waarbij lengte en breedte zich verhouden als 4:3. We knippen door-midden via de middel-loodlijn van de langste zijde. Zo ontstaat rechthoek B.

De verhouding van lengte en breedte in rechthoek B is 3:2. We halveren B weer op dezelfde manier en krijgen zo C met weer de 4:3 verhouding.

Zo vervolgens D weer met 3:2 en zo verder.

De beide verhoudingsgetallen wisselen elkaar voortdurend af, steeds 4:3 en 3:2.

Rechthoeken met zo'n zelfde verhouding hebben ook dezelfde vorm.

Zo zijn A en C gelijkvormig en B en D ook.

PRIEMPUZZEL

Hieronder zie je een aantal priemgetallen op een puzzelachtige manier bij elkaar.

4 2 3 1	1 2 7 9
2 6 7 1	2 5 0 3
3 7 6 7	7 7 1 7
1 1 7 1	
4 6 1	1 7
3 1 3	3 1

Bij de volgende zie je horizontaal en verticaal hetzelfde:

1 3		
3 1		
5 9 3	1 2 7	1 2 7
9 3 7	2 3 9	2 5 1
3 7 9	7 9 7	7 1 9

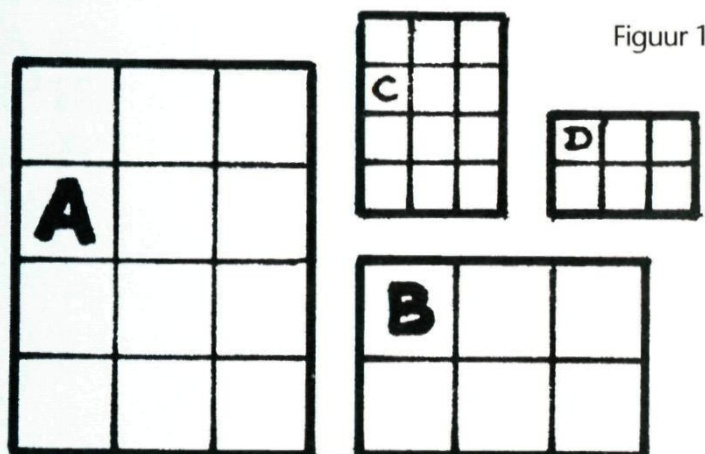
Kun jij er net zo één vinden op een drie bij drie veld, waarbij je slechts twee verschillende cijfers mag gebruiken?

Oplossing, zie pagina 24.

Frank Roos

DEZELFDE UITKOMST

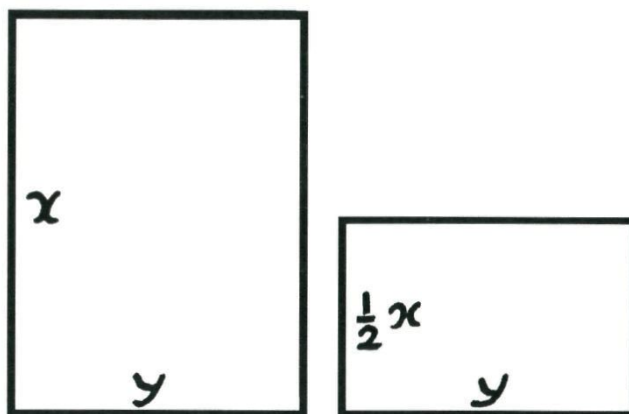
Zou het ook mogelijk zijn om bij deze halveringsmethode dezelfde vorm te blijven houden of anders gezegd, steeds weer dezelfde



Figuur 1

HALVEREN

Figuur 2



de verhouding te krijgen en niet om beurten de ene en dan weer de andere?

In figuur 2 hebben we een rechthoek getekend met zijden x en y . Daarnaast staat de gehalveerde rechthoek. In figuur 3 hebben we ze in elkaar gezet met een gemeenschappelijke hoek. In het geval van gelijkvormigheid, zal een diagonaal (gestippeld), moeten samenvallen met de andere.

BEREKENING

Met de gelijkvormigheid is de verhouding van x en y te bepalen. Lees in figuur 3 af:

$$\begin{aligned} x : y &= y : \frac{1}{2}x \\ \text{of } \frac{1}{2}x^2 &= y^2 \\ \text{of } x^2 &= 2y^2 \\ \text{of } x &= y\sqrt{2} \\ \text{of } \frac{x}{y} &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Als dus de langste zijde $\sqrt{2}$ keer de kortste is, zal bij halvering de vorm gelijk blijven. Merk op: $\frac{3}{2} = 1,5$ en $\sqrt{2} = 1,4$ en $\frac{4}{3} = 1,3$. Je ziet dus dat de ideale uitkomst tussen die toestanden van figuur 1 in zit.

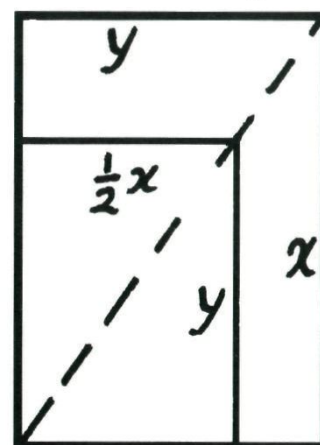
A-4

Bij papierformaten wordt van deze uitkomst gebruik gemaakt. Een A-4 velletje heeft maten 30 bij 21 cm. Het meeste papier heeft dit formaat. Meet maar eens na. Neem zo'n velletje en vouw het op de aangegeven manier door midden. Leg het gevouwen stuk op een ander A-4 tje, zoals in figuur 3 aangegeven. Klopt de gelijkvormigheid? Het gehalveerde formaat

heet A-5. Als je weer halveert krijg je A-6. De start wordt gemaakt bij A-0. Dat is een groot vel met een oppervlakte 1 m^2 en afmetingen: $119 \times 84 \text{ cm}$. Ga maar na dat je na vier keer halveren bij A-4 uitkomt. Daarom heet het ook A-4.

Henk Mulder

Figuur 3



PEILSTOK

Meten met een peilstok
Een cilindrisch vat is
rechtstandig ingegraven
en bevat gedeeltelijk
olie.

Midden boven het bovenvlak is een spongat waardoor een peilstok gestoken kan worden. Als we recht omlaag steken meten we voor de hoogte 180 cm en een oliepeil 36 cm. Zetten we de peilstok schuin in de hoek, waar bodem en wand samenkomen, dan meten we voor het peil 39 cm. Hoeveel liter olie zit er nog in het vat?

De oplossing kun je vinden op pagina 24.

Henk Mulder



IETS VOOR REKENAARS

We zetten in een halve cirkel een daarin passend vierkant.
De straal van de cirkel is 5. Bewijs dat de zijden van het vierkant $2\sqrt{5}$ zijn.

Tip: met één hulplijn en de stelling van P kom je een eind!

REDENERING?

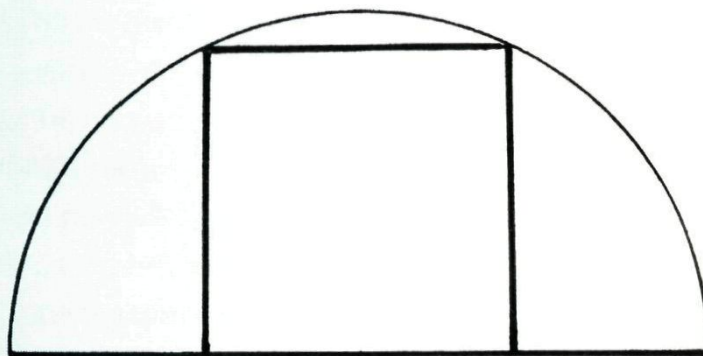
Wat denk je van deze redenering? Als de straal 5 is, vinden we voor de zijde

$2\sqrt{5}$. Dus als de straal 10 zou zijn, komt er voor de zijde $2\sqrt{10}$ uit!

Waar of niet waar?

De oplossing staat op pagina 25.

Henk Mulder



HENK MULDER 1923-1993

Op maandagavond 26 juli is Henk Mulder overleden. Hij is 70 jaar geworden, dus in feite al jaren 'met pensioen'.

Zo hebben we het echter nooit ervaren: nog tijdens zijn slopende ziekte, die zich anderhalf jaar geleden openbaarde, heeft hij stukjes geschreven voor leerling en leraar.

Tegelijk met de rouwkaart deed de postbode het laatste nummer van Pythagoras in de bus, met daarin drie stukjes van Henk. Daar blijf je dan heel lang naar kijken...

Begonnen als 'gewoon' redacteur was Henk Mulder de laatste jaren de spil van Pythagoras en Archimedes. Hij zag, bedacht en schreef. Hij had een scherp oog voor inventieve constructies en een ontembare lust om alles begrijpelijk te maken. Hij kreeg landelijke bekendheid als medewerker van het KRO-televisieprogramma 'Daar vraag je me wat' in de jaren '70. Voor al zijn activiteiten kreeg hij in 1987 als eerste de Minnaertprijs voor Natuurkunde Didaktiek. Na een studie in Delft kwam ir.H.M.Mulder e.i. (zijn auteursnaam op boekjes uit de periode 1955-65) 'bij toeval' in het

onderwijs terecht. De werkloze ingenieur kon invallen als leraar op een school in Den Haag. De rector wilde het wel met hem proberen, al was het met enige reserve: 'een jonge leraar is een bron van onrust in de school'. Henk heeft dat gezien als een aansporing om jong te blijven. Na een korte tijd in Den Haag volgde een lange tijd in Breda, waar hij aan meer scholen tegelijk wiskunde en natuurkunde gaf. Voor de meisjes schreef hij eigen lesmateriaal, dat vol zat met bekende en onbekende didactische hulpmiddelen. Henk was vooral de verspreider van goede ideeën. Bij elke nieuw ontdekte toepassing schreef hij een stukje, soms in meerdere versies voor verschillende doelgroepen. Voor hem waren wiskunde en natuurkunde elkaar aanvullende vakken, dus verschenen natuurkundige voorbeelden ook in Pythagoras en Euclides. Eind jaren '60 heeft hij Breda een paar jaar verlaten, om les te geven op Aruba en te genieten van alle inspiratiebronnen in de tropen. Wij hebben er van mee kunnen genieten via zijn publicaties. Hij had een hart voor het buitenleven en hield van verre



reizen met een eenvoudige uitrusting. Hij zag het ingenieuze van allerlei constructies en vond het het leukst om zijn publiek eerst een opgave te geven, voor hij de oplossing gaf. Pas dit voorjaar trad hij terug als redacteur. De ziekte sloopte zijn lichaam steeds duidelijker, maar zijn geest bleef tot de laatste weken actief. Hij heeft zelfs de laatste drukproeven van Pythagoras nog verzorgd.

Voor ons zal Henk doorleven. Bij verschillende redacties liggen nog stukjes. Oude stukjes inspireren anderen tot reacties. Zijn persoonlijkheid zal tot de verbeelding blijven spreken. Zo kort na zijn dood hebben we het nog druk met alles wat hij voor ons geregeld heeft. Daarna zal de leegte voelbaar worden. Onze waardering gaat uit naar zijn vrouw Willy en de kinderen, die Henk in alles hebben gesteund en meegemaakt.

Pietjan Wippoo
eindredacteur natuurkunde
NVON-maandblad

PRIEMPUZZELS

1 1 3
1 3 1
3 1 1

SOM IS PRODUCT

$xy = x + y$ kunnen we herschrijven als $y = \frac{x}{x-1}$

De bijbehorende grafiek is een orthogonale hyperbool met asymptoten bij $x = 1$ en bij $y = 1$

De relatie is symmetrisch t.o.v. de lijn $y = x$. Dat betekent, dat je dezelfde relatie behoudt, als je x en y verwisselt. Enige voorbeelden:

$(0,0)$, $(2,2)$, $(3, 1\frac{1}{2})$ en $(4, \frac{4}{3})$.

Merk op, dat $x = 1$ in de beginvergelijking $y = 1 + y$ geeft en dat $x = 1$ in de tweede vergelijking delen door nul gaat geven.

Beide hebben geen oplossing.

Henk Mulder/Frank Roos

PEILSTOK

Uit evenredigheid volgt dat de stok als schuine "lengte" aan zal geven: 195 cm.

Daaruit volgt met de stelling van P dat de binnenstraal

75 cm is. Het olievolume is dan:

$$V = \pi r^2 h \\ = \pi \cdot 7,5^2 \cdot 3,6 = 636 \text{ liter.}$$

BAMBOESTENGEL

De stengel steekt 9 meter boven de rand uit.

De afstand tussen de stengel en de hoek van de bak is $50\sqrt{2}$ cm. We hebben nu een rechthoekige driehoek met een basis a , die $50\sqrt{2}$ cm lang is.

De schuine zijde x plus de andere rechthoekszijde b zijn 9m lang.

Toepassen van de stelling van P levert een afgeronde uitkomst van $x = 4,5$ m op.

IETS VOOR REKENAARS

Er deugt van de redenering helemaal niets. De zijde van het vierkant en de straal van de cirkel zijn met elkaar evenredig. Dus als we de

straal dubbel zo groot maken, wordt ook de zijde dubbel. Bij straal 10 hoort dus een zijde $4\sqrt{5}$!

WORTELSOEP

We zouden af moeten komen van al die wortels in de noemer. Daar is een bepaalde methode voor. Neem als voorbeeld de achtste breuk.

Vermenigvuldig teller en noemer met $\sqrt{7} - \sqrt{8}$.

Dat geeft:

$$\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{8}} \times \frac{\sqrt{7} - \sqrt{8}}{\sqrt{7} - \sqrt{8}} =$$

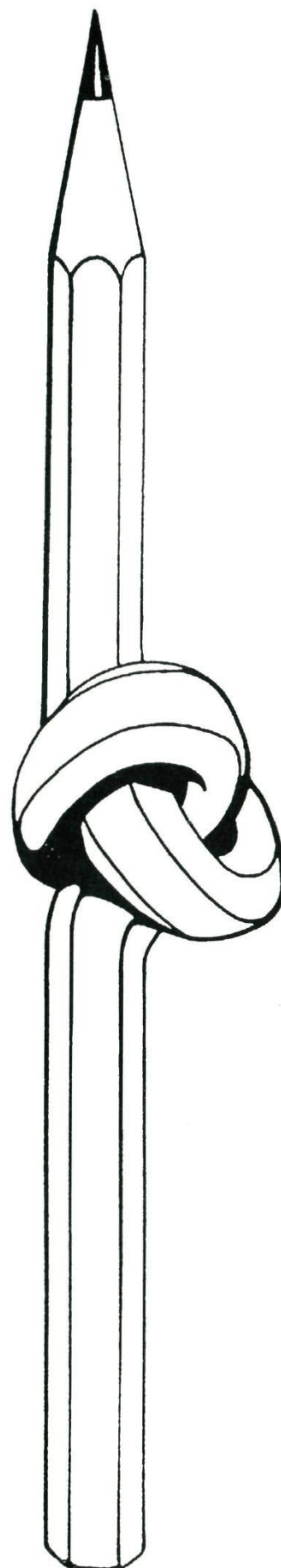
Dat vereenvoudigt tot

$$\frac{\sqrt{7} - \sqrt{8}}{7 - 8} = \sqrt{8} - \sqrt{7}$$

Als je alle breuken op die manier aanpakt, dan gaat de optelling van honderd breuken over in:

$$(\sqrt{1} - \sqrt{0}) + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + \dots + (\sqrt{99} - \sqrt{98}) + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) = 10$$

Peter Wielmann



DE VERDWENEN CHINEES

Kopieer de onderstaande tekening en vergroot haar eventueel.

Snijd daarna voorzichtig de cirkel, die de aarde voorstelt, uit. Let nu op!

Staat de pijl op NE, dan tel je 13 Chinese piraten.

Staat de pijl op NW dan tel je er maar 12.



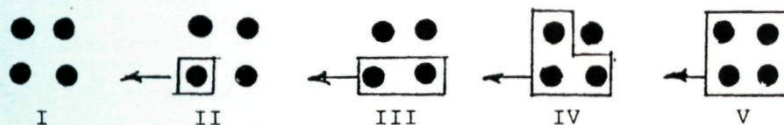
Eén piraat is dus van de aardbodem verdwenen. Hoe kan dat? Denk erover na. In een volgende Pythagoras komen we hier op terug.

EEN KLEINE AANWIJZING

Je neemt 5 stapeltjes van 4 knikkers. Dus 20 knikkers in totaal (fig.2). Neem 1 knikker van stapel II en doe die bij stapel I.

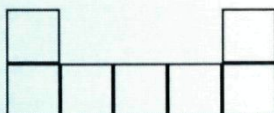
Neem 2 knikkers van stapel III en voeg die bij stapel II. Vervolgens 3 knikkers van stapel IV naar stapel III en tenslotte 4 knikkers van stapel V naar stapel IV. Stapel V is nu verdwenen. Snap je nu het principe van de Chinese piraten?

Figuur 2

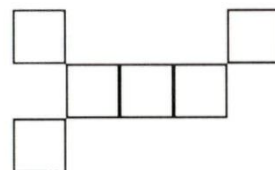


LUCIFERS

Zie Pythagoras 6 van juli 1993. Rob van de Berg uit Enschede zag, dat je deze luciferfiguur



kon veranderen in



door slechts drie lucifers te verplaatsen in plaats van vier! Gaaf Rob!

Een produkt van New in Chess

ELEKTRONISCHE SCHAAKBOEKEN

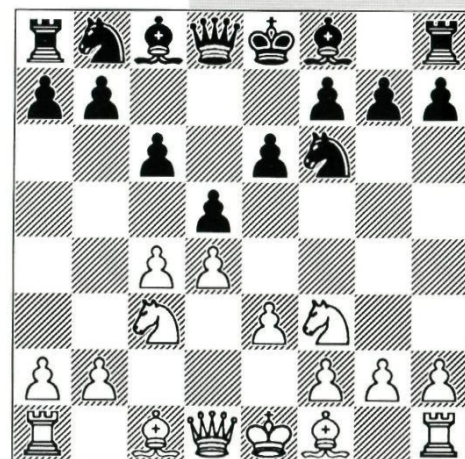
NIC
CONSULT

Postbus 3053
1801 GB Alkmaar
Telefoon 072-127137
Fax 072-158234

De Schaakuitgave van de jaren 90

De Elektronische Schaakboeken bestaan uit een boek met een theoretische inleiding (in het Duits, Engels en Nederlands) en 70-90 becommentarieerde partijen, plus

een diskette met ongeveer 500 partijen, waarvan vele eveneens met analyses, en het programma NICCONSULT. Alle partijen en analyses kunnen met dit programma op de computer nagespeeld worden.



SLAVISCH VERDEDIGING

Meraner Variant Bewerkt door Rini Kuijf

BUDAPESTER GAMBIET

Bewerkt door A.C. van der Tak

KONINGSINDISCH *Klassiek Systeem*

Bewerkt door Genna Sosonko

Vraag Uw boekhandel
of INTERCHESS BV
Alkmaar



ABONNEMENTEN

Nederlandse en Belgische abonnees: aanmelden telefonisch 030 - 736400, of schriftelijk, MEMO n.v., Antwoordnummer 6236, 3500VC Utrecht.

TARIEVEN:

Abonnement Pythagoras
f 35,- of BF 650,-

Luchtpost toeslag binnen
Europa f 10,-

Luchtposttoeslag buiten
Europa f 15,-

Abonnement inclusief
Archimedes f 65,- of BF 1200,-

Luchtpost toeslag binnen
Europa f 20,-

Luchtpost toeslag buiten
Europa f 20,-

BETALING

Wacht met betalen tot u de acceptgirokaart krijgt toegestuurd. Bij tussentijdse abonnement ontvangt u alle nummers van de lopende jaargang. Abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk bij de uitgever is opgezegd.

UITGEVER:

MEMO n.v.,
Hengeveldstraat 29,
Postbus 9822,
3506 GV Utrecht.
Tel. 030-736400,
Fax: 030-734774
Bank: 69.93.65.937,
Giro 51.39.755

VERANTWOORDELIJKE UITGEVER:

Ton Fokker