

# PRYTHAGORAS

WISKUNDE TIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

33 E JAARGANG

NOVEMBER 1993 NUMMER 2

*Kapitale bedragen*

4

*Internationale  
wiskunde  
olympiade*

6

*Een paraboolgolf*

12

*Van saai tot fraai*

22

# INHOUD

## UITGAVE:

Pythagoras is een uitgave van MEMO Media marketing organisatie n.v., en verschijnt zesmaal per jaar. Een jaargang loopt van september tot en met augustus.

## REDACTIE:

Jan Mahieu  
Frank Roos  
Marcel Snel

## EINDREDACTIE:

Henk Huijsmans

## NIEUWE ARTIKELN:

Molenstraat 31,  
4841 CA Prinsenbeek

## CORRESPONDENTIE-ADRES:

Reacties,  
oplossingen enz.  
Frank Roos,  
Klink 19  
9356 DS Tolkert

## MEDEWERKERS:

Bob de Jongste,  
Hans de Rijk,  
Paul van de Veen,  
Thijs Notenboom.

|                                     |                        |    |
|-------------------------------------|------------------------|----|
| • VOORWOORD                         | REDACTIE               | 3  |
| • KAPITALE BEDRAGEN                 | BOB DE JONGSTE         | 4  |
| • PYTHAGORAS IN DE PRAKTIJK         | HENK MULDER            | 6  |
| • INTERNATIONALE WISKUNDE OLYMPIADE | THIJS NOTENBOOM        | 6  |
| • INFORMATICA OLYMPIADE             | REDACTIE               | 8  |
| • PASSERTRUC                        | JEAN DE MONTIGNY       | 9  |
| • HET TWAALF MUNTEN PROBLEEM        | NOORDELIJKE HOGESCHOOL | 10 |
| • WELTERUSTEN                       | ARNO VAN ROOSMALEN     | 11 |
| • VIER LIJNEN PUZZEL                | NOORDELIJKE HOGESCHOOL | 12 |
| • PARABOOLGOLF                      | FRANK ROOS             | 12 |
| • DENKERTJE 1                       | JAN MAHIEU             | 15 |
| • PYTHAGORASBALK                    | FRANK ROOS             | 16 |
| • VIER MAAL TWEE                    | JAN MAHIEU             | 20 |
| • VAN SAAI TOT FRAAI                | MARTIJN LEISINK        | 22 |
| • VARIATIE OP PYTHAGORAS            | HENK MULDER            | 24 |
| • DELEN DOOR NUL (1)                | FRANK ROOS             | 25 |
| • 1993                              | REDACTIE               | 25 |
| • $N^2 = M! + 1$                    | FRANK ROOS             | 25 |
| • PYTHAGORASGEBAK                   | FRANK ROOS             | 26 |
| • VOORSPOEDIG 1994                  | FRANK ROOS             | 26 |
| • OPLOSSINGEN                       |                        | 27 |
| • DENKERTJE 2                       | JAN MAHIEU             | 29 |
| • DELEN DOOR NUL (2)                | FRANK ROOS             | 30 |



# VOORWOORD PYTHAGORAS

Het einde van het jaar nadert. Tijd om stil te staan bij het afgelopen jaar, en goede voornemens te maken voor het volgende. Dit jaar bracht ons een restyling van Pythagoras, die zeer enthousiast is ontvangen. Voor het komende jaar hebben wij ons voorgenomen Pythagoras uit te bouwen tot het wiskunde-tijdschrift voor jongeren in Nederland en België, dat om de twee maanden, op tijd, zal verschijnen.

En zoals wij hopen dat onze voornemens bewaarheid worden, hopen wij ook voor onze lezers dat alle goede voornemens voor het komende jaar zullen uitkomen.

December is een dure maand. Goed om eens stil te staan bij geldzaken. In het artikel 'Kapitale Bedragen' kun je jezelf eens lekker rijk rekenen! Hoe je kunt voorkomen dat je wordt opgelicht, staat beschreven in het twaalf muntenprobleem, Doe er je voordeel mee!

Door stukjes parabool aan elkaar te plakken kunnen we een golf formeren. Bij een echte golf vloeien de 'bergen' en 'dalen' naadloos in elkaar over. Op pagina 12 wordt uitvoerig uitgelegd hoe zo'n paraboolgolf kan worden geconstrueerd.

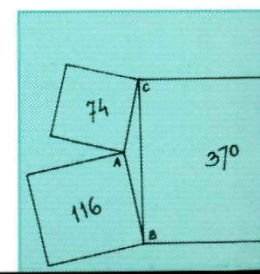
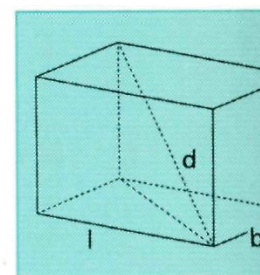
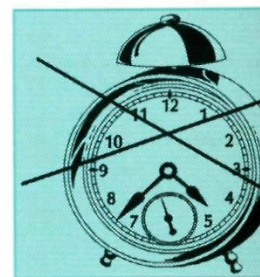
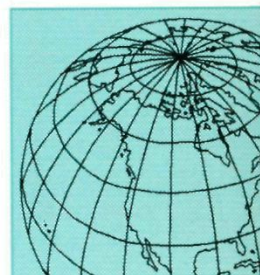
Delen door nul mag niet. Dat is iets wat je al heel vroeg leert. Waarom dat niet mag laten we zien aan de hand van een ingezonden vraagstelling.

De Pythagorasdriehoek, de Pythagorasrechthoek, de Pythagorasbalk, de Pythagoraskubus, de bijna-Pythagoraskubus, Pythagoras-gebak en een variatie op Pythagoras? Dit en nog veel meer wiskundige vraagstukken en wetenswaardigheden kun je lezen in deze nieuwe uitgave van...eh...Pythagoras.

Op pagina 26 staat 'Voorspoedig 1994'. Dat wensen wij iedereen van harte. En ook dat er weer enthousiast op de vraagstellingen gereageerd wordt. Want ook in 1994 zijn alle reacties weer van harte welkom. Stuur dus oplossingen, vragen of suggesties naar het correspondentie-adres op pag. 2.

Veel leesplezier  
Ton Fokker, Uitgever.

P Y T H A G O R A S



# KAPITAL

**Het woord "kapitaal" komt van het latijnse "capitalis". Dat is weer afgeleid van "caput", dat oorspronkelijk veebezit en later geldbezit ging betekenen.**

**Tegenwoordig betekent kapitaal de totale waarde van je bezit, uitgedrukt in geld. Bij het lezen van het volgende verhaal is het handig om je rekenmachine erbij te houden. Dan kan je mee rekenen.**

## DE CENT VAN ADAM.

Stel dat Adam in het paradijs (zie het begin van de bijbel) een cent naar "de bank" heeft kunnen brengen. Dat was eind 1993 dan 5754 jaar geleden.

(Zie bladzijde 27).

Stel, dat hij elk jaar 4% vaste rente op rente krijgt.

Wat zou het kapitaal van zijn erfgenamen dan nu zijn?

Als het beginkapitaal  $K(0)$  is,  $p$  het aantal procenten per jaar, dan is na  $j$  jaren een kapitaal aangegroeid tot  $K(j)$  volgens deze formule:

$$K(j) = K(0) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^j.$$

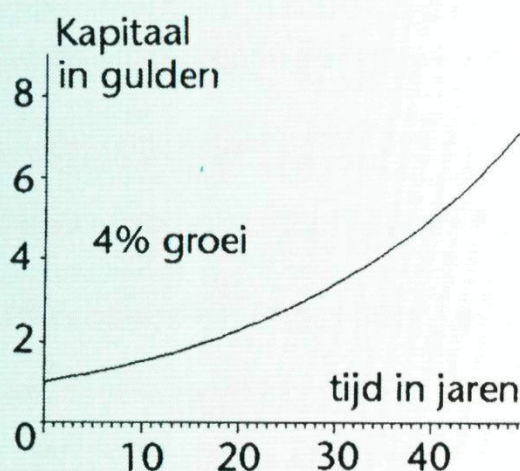
Dat is een meetkundige rij met reden  $1 + \frac{p}{100}$ .

Vullen we de gegevens in, dan vinden we

$$K(5754) = 1 \text{ cent} \times 1,04^{5754}.$$

Mijn rekenmachine vertelt me, dat hier  $1,02... \times 10^{96}$  gulden uit komt !

Dit getal van 97 (!) cijfers valt maar nauwelijks binnen het bereik van de pocketcalculator, want die gaat niet verder dan 99 cijfers.



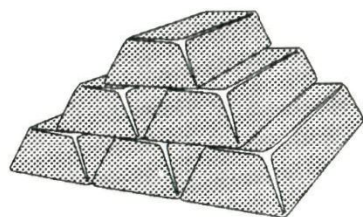
# E BEDRAGEN



## EEN GOUDEN AARDE

De omtrek van de aarde is 40 000 km. De straal van de bolvormige aarde is dan 6366 km (omtrek =  $2\pi r$ ). Hieruit bereken je, dat het volume van de aarde  $1,08... \times 10^{12} \text{ km}^3$  is of  $1,08... \times 10^{21} \text{ m}^3$ . Immers het volume van een bol is  $\frac{4}{3}\pi r^3$ .

## MASSA EN GELDWAARDE



De dichtheid van goud is  $19 \text{ ton/m}^3 = 19 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ . Massa = dichtheid x volume. De massa van de gouden aarde is dan  $2,1 \times 10^{22} \text{ ton} = 2,1 \times 10^{25} \text{ kg}$ . Stel vervolgens, dat de goudprijs al die jaren van

Adam tot nu 20 000 gulden/kg was.

Prijs = (prijs/massa) x massa.

Dan is de waarde van de gouden aarde  $4,1 \times 10^{29}$  gulden.

## DE RENTE VAN ADAM.

Adam's rente-tegoed is

$1,02... \times 10^{96}$  gulden.

Dat is evenveel waard als  $2,5 \times 10^{66}$  gouden aardes.

Stel, dat we ons voorstellen, dat al die "aardes" samen één grote bol vormen.

Hoe groot zou die dan zijn? Zie bladzijde 27.

We kunnen ook uitrekenen, hoe lang de totale lengte wordt, als we al die aardes op een rechte lijn leggen.

Dat is dan

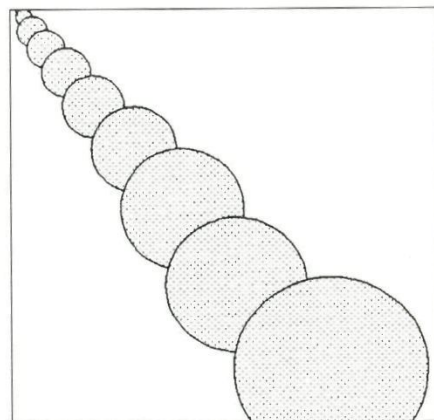
$(40\,000 \text{ km} : \pi) \times (2,5 \times 10^{66}) = 3,2 \times 10^{70} \text{ km}$ .

## EEN LICHTJAAR

Een lichtjaar is een verouderde sterrekundige eenheid van lengte. Het is de afstand, die het licht in een jaar aflegt.

Verplaatsing = snelheid x tijd =

$(3,00 \times 10^5 \text{ km/s}) \times 365,25 \text{ etmalen/jaar} \times 24 \text{ uur/etmaal} \times 3600 \text{ s/uur} = 9,5 \times 10^{12} \text{ km} = 9,5 \text{ biljoen km}$ .



De lange rij gouden aardes van Adam's rente heeft dan een lengte van  $3,3 \times 10^{57}$  lichtjaren.

Dat is ver buiten de hedendaagse grens van het waarneembare heelal, want de verst verwijderde voorwerpen, die men heeft ontdekt, hebben een afstand tot de aarde van circa  $1 \times 10^9$  lichtjaar.

## TELLEN.

Stel, dat je de mogelijkheid hebt om al die bollen te tellen met een constant tempo van één per seconde. Hoe lang zou je er dan over doen? Zie bladzijde 27.

*Bob de Jongste*

# INTERNATION WISKUN

**De 34e Internationale Wiskunde Olympiade werd dit jaar gehouden in Istanbul, Turkije.**

**Aan dit jaarlijks terugkerend evenement deden dit jaar een record aantal van 412 deelnemers uit liefst 73 landen mee.**

Alle werelddelen, met uitzondering van Afrika en Zuid-Amerika (en Antarctica) zijn goed vertegenwoordigd. De toename ten opzichte van vorig jaar is een gevolg van het uiteenvallen van de Sovjet-Unie en Joegoslavië.

Voor Nederland deed een team mee dat geselecteerd werd uit de winnaars van de tweede ronde van de Nederlandse Olympiade van vorig jaar. Als begeleiders gingen mee J.M. Notenboom (HMN, Utrecht) en J.G.M. Donkers (TU, Eindhoven), die ook de training van het team verzorgde.

Verder was prof H.J.A. Duparc (TU, Delft) als waarnemer lid van de Nederlandse delegatie.

Van het Nederlandse team won Jitse Niesen een bronzen medaille en kreeg Marcus Martina een eervolle vermelding.

In het officiële landenklassement eindigde Nederland op de 35e plaats en België op de 37e plaats.

## PYTHAGORAS IN DE PRAKTIJK

Bij de constructie van een machine, doet zich het volgende probleem voor.

Twee stalen platen zijn bij  $S$  scharnierend aan elkaar bevestigd. Op de onderste plaat zijn twee cilindrische nokken gelast. Het moet nu zo worden dat de bovenste plaat, bij open draaien, juist voorbij de nokken kan.

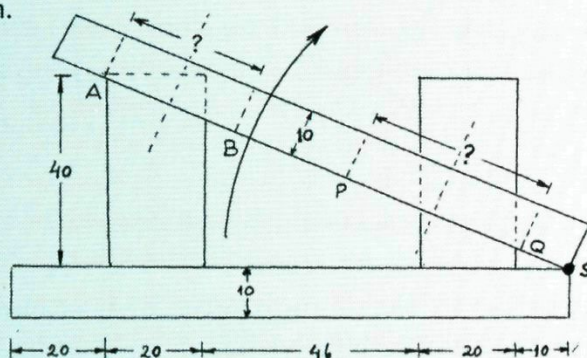
Daartoe moeten er vrij grote gaten in die plaat geboord worden. Men kiest voor cilindrische gaten. Bepaal de minimale diameter  $AB$  en  $PQ$  voor beide gaten. Hoever komen de centra ervan afgelegen van  $S$ ?

Tweemaal de stelling van Pythagoras en je weet het!

In de tekening staan de nodige maten.

Alle uitkomsten worden exakte getallen!

Henk Mulder



# ALE DE OLYMPIADE 1993



*De Nederlandse deelnemers aan de Internationale Olympiade.*

Naast het werken aan de wiskunde waren er veel excursies en festiviteiten georganiseerd. De foto werd gemaakt op een van de laatste dagen tijdens een excursie naar de beroemde Prinsen-eilanden in de zee van Marmora. Op de foto staan de zes deelnemers en de Turkse gids: v.l.n.r. Thorsten Gragert, Freek Dijkstra, Tuba Çele (de gids), Koen Claessen, Jitse Niesen, Kevin Backhouse en Marcus Martina. Van de zes vraagstukken die opgelost moesten worden is het derde vraagstuk het mooist; het is gebaseerd op het spelletje Solitaire:

3. Op een oneindig schaakbord wordt het volgende spel gespeeld.

Bij het begin staan er  $n^2$  stukken op het bord in een vierkant van  $n$  bij  $n$ , op elk veld één stuk.

Een zet van het spel bestaat uit een sprong in horizontale of verticale richting over een aangrenzend bezet veld naar een onbezet veld daar direct naast.

Het stuk waar overheen gesprongen is, wordt van het bord verwijderd.

Bepaal de waarden van  $n$  waarvoor het spel kan eindigen met slechts één stuk op het bord.

Aan de Olympiade hebben 73 landen deelgenomen. Het officiële klassement ziet er als volgt uit:

|     |                  |            |
|-----|------------------|------------|
| 1.  | <b>China</b>     | <b>215</b> |
| 2.  | <b>Duitsland</b> | <b>189</b> |
| 3.  | <b>Bulgarije</b> | <b>178</b> |
| 4.  | <b>Rusland</b>   | <b>177</b> |
| 5.  | <b>Taiwan</b>    | <b>162</b> |
| 35. | <b>Nederland</b> | <b>58</b>  |
| 37. | <b>België</b>    | <b>55</b>  |

Ook dit jaar wordt er weer een Olympiade gehouden. Nadere mededelingen volgen.

*Thijs Notenboom*

# INFORMATICA OLYMPIADE

**In 1990 startte op initiatief van de UNESCO een internationale informatica-olympiade.**

**In dit jaar is de Nederlandse Informatica Olympiade gewonnen door Arjen Vreugedenhil van de gereformeerde scholengemeenschap in Amersfoort. Arjen, proficiat !**

Eervolle vermeldingen krijgen ook Jaap Beetstra van het gymnasium in Apeldoorn, Fieke Dekkers van het Stedelijk Gym te Nijmegen, Mareille Ypma uit Breukelen en de jongste: Marcel Blokpoel uit Amersfoort.

Opgave 1 uit de tweede ronde luidde verkort: Schrijf een programma, dat de oppervlakte van een stuk land berekent. Het land is begrensd door palen, verbonden met touw. Je moet de coördinaten van de palen kunnen geven. Daaruit moet de oppervlakte berekend worden.

Opgave 2, verkort. Schrijf een programma, waarmee je een gegeven plaatje kan verkleinen.

Voor meer info:  
Drs. R. Kock.  
tel. 053-840.600  
Mevr. Drs MSF Heising,  
tel 053-840.496

Redactie

## CITAAT

**van Louis Broekmans, 1979:**

*"Zuivere wiskunde heeft genoeg aan zichzelf. Ze hoeft niet voor iets te dienen. Wiskundige stellingen mogen, maar moeten niet, een toepassing vinden in de werkelijkheid.*

*Tussen mogen en moeten ligt een wereld van verschil."*

**Lijnrecht hiertegenover staat het citaat van een anonieme wiskundige:**

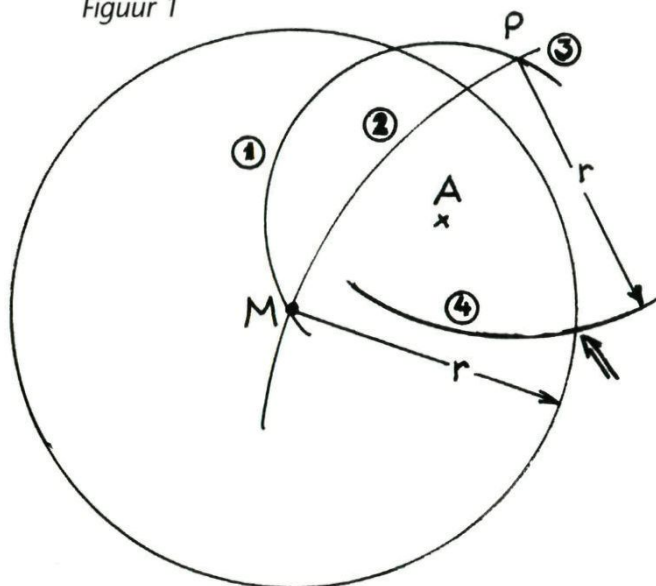
*"Wiskunde moet niet worden beschouwd als een doel, maar als een middel; niet als een overbodige luxe, maar als een noodzakelijkheid.*

*Elk vooruitzicht op verbetering van de hedendaagse wereld vereist wiskunde."*

# PASSERTRUC

**Op verzoek nog eenmaal een passertruc. Dus boogjes zetten naar hartelust, maar geen lijnen! Gegeven een cirkel met middelpunt  $M$  en straal  $r$  (fig. 1). Verder twee punten  $A$  en  $B$ , waarbij  $A$  binnen en  $B$  buiten de cirkel.**

Figuur 1



Gevraagd: bepaal het snijpunt van  $AB$  en de cirkel ... zonder de rechte  $AB$  te trekken. Jean geeft het volgende recept:

1. Trek een cirkelboog met middelpunt  $A$  en straal  $AM$ .
2. Evenzo met middelpunt  $B$  en straal  $BM$ .
3. Het snijpunt van die beide bogen

noemen we  $P$ .

4. Trek tenslotte nog een boog met middelpunt  $P$  en straal  $r$ .

Waar deze laatste de oorspronkelijke cirkel snijdt ligt het gevraagde punt.

## BEWIJS

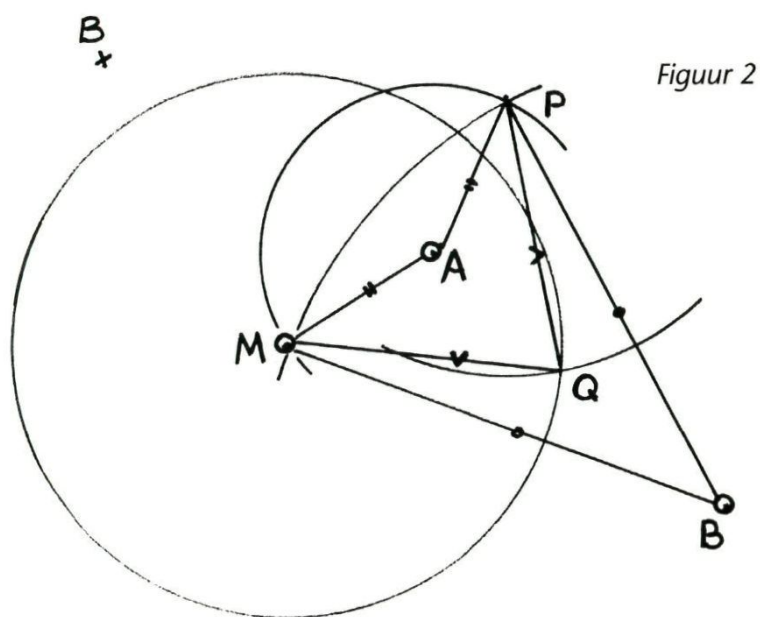
In figuur 2 is gemakkelijk te zien:  $AM = AP$ ,  $BM = BP$  en  $PQ = MQ = r$ .

Als je de lijn  $AB$  trekt, heb je daarmee de middelloodlijn van  $MP$  en daarop ligt ook  $Q$ .

## OPGAVE

Ga eens na of deze truc ook werkt als  $A$  en/of  $B$  binnen of buiten de cirkel liggen.

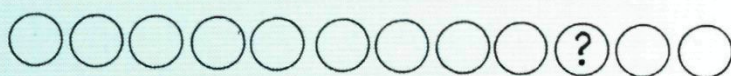
Jean de Montigny



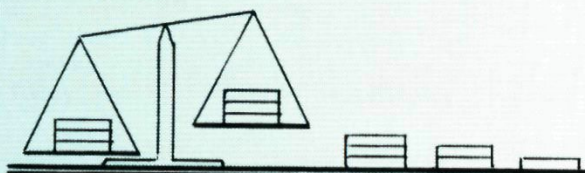
Figuur 2

# HET TWAALF MUNTEN PROBLEEM

**We hebben twaalf munten, waarvan er één vals is. Die is dan of zwaarder of lichter, maar ook dat is onbekend.**



**Op het oog zien ze er allemaal hetzelfde uit. Als enig beschikbaar meetapparaat hebben we een gelijkarmige balans, maar geen gewichten.**



**Probeer in drie wegen te beslissen welke munt vals is en of deze zwaarder of lichter is dan de echte.**

## TIP

We splitsen de partij in drie groepen munten  $P$ ,  $Q$  en  $R$ . Leg partij  $P$  links en partij  $Q$  rechts op de schalen. Stel er blijkt nu evenwicht. Dan zit de valse in partij  $R$ .

Tegelijkertijd weten we nu zeker dat alle munten in  $P$  en  $Q$  echt zijn.

Stel partij  $R$  bestaat uit de munten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en  $D$ .

Vergelijk nu  $(ABC)$  met drie echte munten  $(EEE)$ .

Als  $(ABC) = (EEE)$  dan is  $D$  de valse munt.

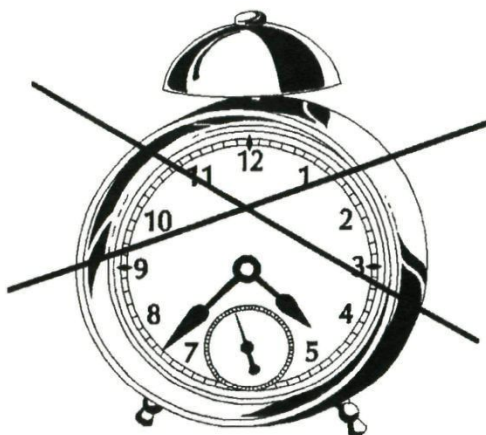
Als dan een derde weging oplevert:  $D > E$  dan is alles bekeken.

Het kan natuurlijk bij de tweede weging wel anders aflopen. Hoe dan verder? En als het bij de eerste al anders uitpakt, hoe dan? Onderzoek de diverse mogelijkheden.

Probeer ze zo schematisch mogelijk uit te schrijven.

*Noordelijke Hogeschool*

# WELTERUSTEN!



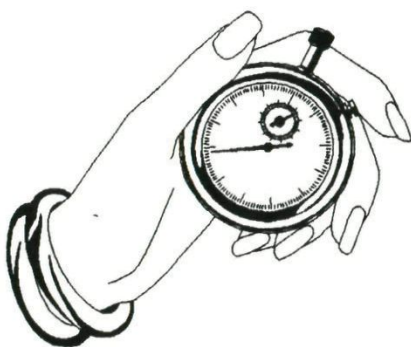
**Als je niet kunt slapen, dan kun je schaapjes gaan tellen, maar je kunt ook wat meer intellectueel in slaap proberen te komen en wel met behulp van je digitale klok.**

## EEN VOORBEELD

Stel, het is 23 uur 59. Op de klok zie je 23:59. Probeer nu de cijfers twee aan twee te combineren tot  $a$  en  $b$ . Dat combineren is een één of andere 'wiskundige handeling'. Nu is het de bedoeling, dat  $a=b$  wordt, terwijl de volgorde van de cijfers mag veranderen. Dit voorbeeld lukt met  $9:3 = 5-2$ .

## RACE TEGEN DE KLOK

Het is natuurlijk wel opschieten geblazen, want je hebt maar een minuut de tijd. Dan heb je weer een andere cijfercombinatie. Of slaap je al?

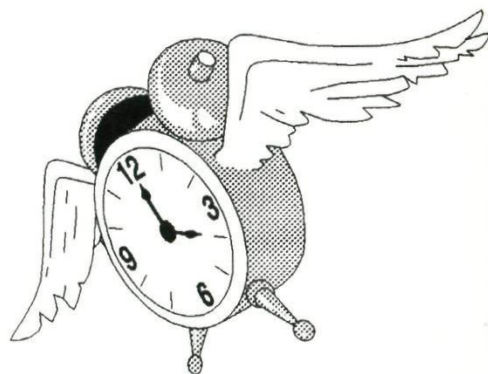


Je kunt het jezelf natuurlijk ook moeilijker maken, door aan de volgorde van de cijfers vast te houden, maar

dat garandeert zeker een slapeloze nacht!

## NULLEN EN ENEN

Het is al knap laat geworden: 01:55.  
Een oplossing is  $5^0 = 1^5$ .  
Je kunt ook dagdromen: 12:13 geeft  $1^2 = 1^3$ .



## WELTERUSTEN

Je loopt wel het risico, dat je nu helemaal niet meer in slaap komt!  
Dan kun je altijd nog overschakelen op schaapjes tellen.

*Arno van Roosmalen  
uit Vlierden.*

# EEN PAR

**Als we de grafiek van de sinus of de cosinus bekijken, dan valt de golfvorm het meest op. Het latijnse woord sinus betekent ook golf.**

**De vorm van de grafiek is de sinusoïde.**

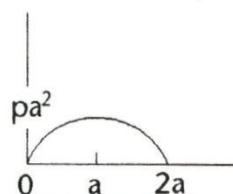
**Het tweede, dat opvalt is de periodiciteit, de herhaling. Eén periode bestaat uit een golfberg en een golfdal.**

**Zo'n berg en ook zo'n dal lijken op een stuk van een parabool.**

Zou het ook mogelijk zijn een golf te beschrijven, die echt bestaat uit aaneengeschakelde stukjes parabool? Laten we eens proberen zo'n golf op te bouwen.

## PARABOOLBERG

We beginnen met de parabool  $y = -px(x-2a)$ , waarin  $a$  en  $p$  gekozen positieve getallen voorstellen. Het is duidelijk, dat de parabool de  $x$ -as snijdt in  $(0,0)$  en  $(2a,0)$ . Tussen deze punten ligt de bergparabool boven de  $x$ -as. De stukken met  $y < 0$  tekenen we niet. De top is  $(a, pa^2)$ .



## PARABOOLDAL

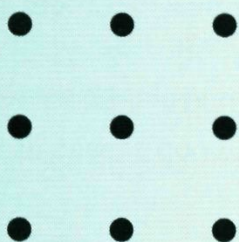
Vervolgens draaien we de 'berg' hierboven  $180^\circ$  om punt  $(2a,0)$  en dan krijgen we een stuk van een dalparabool, dat congruent is met het stuk bergparabool. De dalparabool snijdt de  $x$ -as in  $(2a,0)$  en  $(4a,0)$ . De vergelijking daarvan is  $y = p(x-2a)(x-4a)$ .

De top van die parabool ligt

## VIER LIJNEN PUZZEL

In een psychologische test stond het volgende probleem: verbind negen punten door middel van vier lijnstukken, zonder het potlood van het papier te halen.

We moeten je waarschuwen: de oplossing lijkt ons niet eenvoudig.

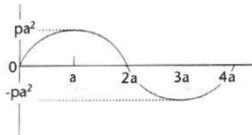


Tip: de test is bedoeld voor mensen die verder moeten kijken dan hun neus lang is. De oplossing tref je in het volgende nummer aan.

Noordelijke Hogeschool

# ABOOLGOLF

bij  $(3a, -pa^2)$ . De stukken van deze parabool boven de  $x$ -as laten we weg.

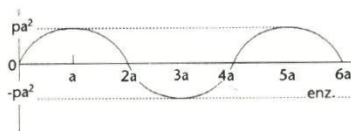


We hebben nu een hele 'golflengte' met een lengte  $4a$  gemaakt. De 'amplitude' van de golf is hier de maximum afstand tot de  $x$ -as. De waarde daarvan is  $ap^2$ .

## PERIODICITEIT

Nu moeten we gaan zorgen voor de herhaling met een periode  $4a$ .

De volgende bergparabool vind ik uit de eerste door de eerste bergparabool over een afstand  $4a$  naar rechts te verschuiven. Ook die bergparabool moeten we weer  $4a$  verder schuiven om een nieuwe golfberg te vinden, enzovoort.



Het zal de lezer duidelijk zijn, dat ook de golfdalen steeds over een afstand  $4a$  langs de  $x$ -as verschoven moeten worden.

## DE ONDERDELEN

De stukjes parabool, die we nodig hebben om de golf op te bouwen zijn dan:

| bergparabolen         | domein      | top          |
|-----------------------|-------------|--------------|
| $y = -p(x-0)(x-2a)$   | $[0, 2a]$   | $(a, pa^2)$  |
| $y = -p(x-4a)(x-6a)$  | $[4a, 6a]$  | $(5a, pa^2)$ |
| $y = -p(x-8a)(x-10a)$ | $[8a, 10a]$ | $(9a, pa^2)$ |
| ...                   |             |              |

| dalparabolen        | domein     | top           |
|---------------------|------------|---------------|
| $y = p(x-2a)(x-4a)$ | $[2a, 4a]$ | $(3a, -pa^2)$ |
| $y = p(x-6a)(x-8a)$ | $[6a, 8a]$ | $(7a, -pa^2)$ |
| ...                 |            |               |

Ook mag de golf getekend en beschreven worden voor  $x < 0$ .

## CONTINUÛTEIT

Het zal duidelijk zijn, dat de parabolen netjes op elkaar aansluiten, steeds voor  $y=0$ . Daar hebben we zelf voor gezorgd. De grafiek heeft geen onderbrekingen, sprongen of gaten. De golf is dus, wiskundig gezegd, continu.

## DIFFERENTIEERBAARHEID

We willen ook, dat de golf geen knikken mag vertonen en daarvoor moeten de aansluitende parabolen op de

plaats van de aansluiting even steil lopen.

De afgeleide van de functie  $y = -px(x-2a) = -px^2 + 2apx$ , die bij de eerste bergparabool behoort, is  $y' = -px + 2ap$ .

Bij  $x=2a$  is de waarde van de afgeleide  $-2ap$ .

De afgeleide van de functie  $y = p(x-2a)(x-4a) = px^2 - 6apx + 8pa^2$  is  $y' = 2px - 6ap$ .

Bij  $x=2a$  heeft deze afgeleide de waarde  $-2ap$ .

Omdat bij  $x=2a$  de afgeleiden links en rechts even groot zijn hebben we de garantie, dat beide grafieken bij  $x=2a$  even steil lopen en dat betekent, dat ze geen knik vertonen (ongeacht de waarden van  $a$  en  $p$ ). De parabolen gaan vloeiend in elkaar over: ze raken elkaar. De functie, die deze golf in de buurt van  $x=2a$  beschrijft, heet dan differentieerbaar.

Omdat alle stukjes parabool congruent zijn en op een zelfde manier op elkaar aansluiten, is de hele golf zonder knikken.

## DOEL BEREIKT

We zijn er inderdaad in geslaagd om een 'redelijk fatsoenlijke' paraboolgolf te construeren. Nu gaan we nog enkele eigenschappen bekijken ter vergelijking met de sinusoïde.

## AFSTEMMING MET DE SINUS

Laten we nu eens een paraboolgolf maken, die dezelfde snijpunten met de  $x$ -as heeft als de sinusoïde  $y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} x$ .

Dan is de

periode  $= 4a = \lambda$  of  $a = \frac{1}{4} \lambda$ .

Nu kunnen we op twee manieren verder:

### 1. SAMENVALLENDE TOPPEN.

We wensen ons, dat de toppen van de parabolen samen vallen met de toppen van de sinusoïde  $y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} x$ .

De eerste top van de sinusoïde is  $(\frac{1}{4} \lambda, A)$ .

We willen de top van de eerste bergparabool op de zelfde plaats. Dan moet

$pa^2 = A$  terwijl  $a = \frac{1}{4} \lambda$ .

Dus  $p = \frac{A}{a^2} = \frac{16A}{\lambda^2}$ .

De vergelijking van de eerste bergparabool is dan  $y = -\frac{16A}{\lambda^2} x (x - \frac{1}{2} \lambda)$ .

## OPPERVLAKTE

Met integraalrekening kan

je vinden, dat de oppervlakte tussen elke (berg- en dal) parabool en de  $x$ -as  $\frac{4}{3} pa^3$  is.

Bij de sinusoïde

$y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} x$  is de oppervlakte van elke golfberg en van elk golfdal  $A \cdot \frac{\lambda}{\pi}$ .

Bedenken we, dat  $a = \frac{1}{4} \lambda$  en  $p = \frac{16A}{\lambda^2}$  dan is de oppervlakte tussen de parabool en  $x$ -as nu  $A \cdot \frac{\lambda}{3}$ .

Dat is  $\frac{\pi}{3}$  maal de oppervlakte van een sinusgolfberg.

$\frac{\pi}{3} \approx 1,047$ . De afwijking in de oppervlakken is dus gering.

### 2. GELIJKE OPPERVLAKKEN.

Nu willen we niet, dat de toppen samenvallen, maar dat de oppervlakken van de golfbergen van de parabool en de sinusoïde even groot zijn, dus  $\frac{4}{3} pa^3 = A \cdot \frac{\lambda}{\pi}$ , terwijl  $a = \frac{1}{4} \lambda$ .  $p$  is dan  $A \cdot \frac{\lambda}{\pi} \cdot \frac{3}{4a^2} = \frac{48A}{\pi \lambda^2}$ .

De vergelijking van de eerste bergparabool is dan

$y = \frac{48A}{\pi \lambda^2} \cdot x (y - \frac{1}{2} \lambda)$ .

De top ligt nu bij  $x = \frac{1}{4} \lambda$  en  $y = \frac{3A}{\pi}$ . Dat is  $0,045 \cdot A$  onder de top van de sinusoïde.

We zien zowel in geval 1 als in geval 2, dat de paraboolgolf heel nauw aansluit bij de sinusoïde. In een tekening is het verschil met de sinusoïde nauwelijks te zien.

Frank Roos

## DENKERTJE 1

**Mijn oude vriend Ruud is vader van twee kinderen. Op een dag kom ik hem tegen met een jongetje.**

**Hij zegt: 'Dit is nu mijn zoontje Tom.'**

**Hoe groot is de kans dat Ruud vader is van twee zonen?**

De geschiedenis van dit vraagstuk gaat terug naar het einde van de 18<sup>e</sup> eeuw.

Toen bestond er over het antwoord een duidelijk meningsverschil.

Is het  $\frac{1}{2}$  of  $\frac{1}{3}$ ?

Voor  $\frac{1}{2}$  werd de volgende redenering gegeven.

Het geslacht van het andere kind heeft niets te maken met het geslacht van het geziene kind. Aannemend dat er net zoveel jongens als meisjes worden geboren, is de kans dat het andere kind een jongen is dus  $\frac{1}{2}$ .

De kans dat Ruud vader is van twee jongens is dus  $\frac{1}{2}$ .

De kans  $\frac{1}{3}$  werd als volgt onderbouwd. Als je een jongen aanduidt met  $J$  en een meisje met  $M$ , dan zijn er bij twee kinderen de mogelijkheden  $MM$ ,  $MJ$ ,  $JM$  en  $JJ$ .

Doordat Ruud met een jongen gezien is, valt  $MM$  af.

Er blijven dus drie mogelijkheden over, waarvan er één juist is.

De gevraagde kans is dus  $\frac{1}{3}$ . Welke van de twee redeneringen is de juiste?

Antwoord op bladzijde 27.

Jan Mahieu



# DE PYTHA

**Een rechthoekige driehoek met hele zijden is al heel lang bekend. Met het volgende recept kan je zelf zo'n Pythagorasdriehoek maken: kies  $m$  en  $n$  als willekeurige gehele getallen.**

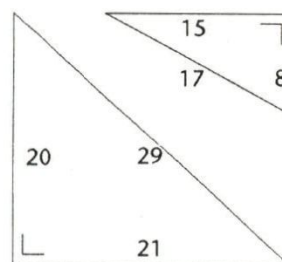
De enige voorwaarde is  $0 < n < m$ .

$$a = 2mn \quad b = m^2 - n^2$$

$$c = m^2 + n^2.$$

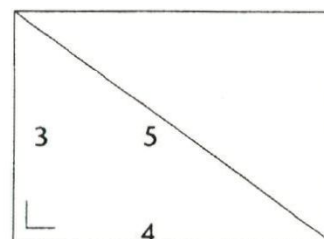
Voor  $a$ ,  $b$  en  $c$  geldt dan, zoals in elke rechthoekige driehoek, dat  $a^2 + b^2 = c^2$ . Immers  $(2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2$ .

Zo leveren  $m=5$  en  $n=2$  de driehoek  $a=20$ ,  $b=21$  en  $c=29$ . Dan is  $20^2 + 21^2 = 29^2$ .



## PYTHAGORAS-RECHTHOEK

Je hebt het over een rechthoekige driehoek, maar je kunt net zo goed spreken over een rechthoek met diagonalen. Als de lengte 3 en breedte 4, dan zijn de diagonalen 5. Dit is dan een Pythagoras-rechthoek.



## CITAAT

van A. de Morgan

*"Niet het verstand, maar de fantasie stelt iemand in staat om iets nieuws in de wiskunde te introduceren."*

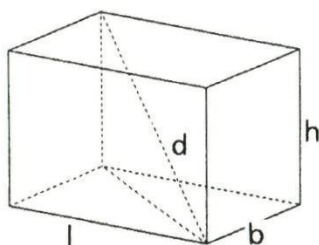
**Henry Poincaré beaamt dit:**

*"Zonder intuïtie zou de wiskundige zijn als een schrijver, die goed bedreven is in de grammatica, maar die zonder ideeën is".*

# GORAS-BALK

## UITGEBREIDE STELLING VAN PYTHAGORAS

Nu ga je de ruimte in, dat wil zeggen, je gaat de rechthoekige balk bekijken, die vier even lange lichaamsdiagonalen heeft. Als de lengte 12 is, de breedte 4 en de hoogte 3, dan is de lengte van de lichaamsdiagonaal 13. De formule, die hier bij behoort is  $d^2 = l^2 + b^2 + h^2$ . Dit staat bekend als 'de uitgebreide stelling van Pythagoras'.



## PYTHAGORAS-BALKEN

Als je  $l$ ,  $b$  en  $h$  willekeurig kiest, dan is  $d$  meestal geen geheel getal. Als ik een rechthoekige balk presenter als  $l, b, h; d$ , dan kan ik zo een aantal voorbeelden laten zien, waarbij de  $d$  = lengte van de lichaamsdiagonaal ook geheel is: 3,4,12;13 8,9,12;17 1,6,18;19.

Zulke voorbeelden noem ik voortaan Pythagorasbalken in analogie met Pythagorasdriehoeken en Pythagorasrechthoeken.

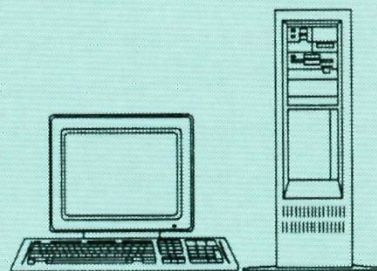
## WISKUNDE-LITERATUUR

Vreemd genoeg kwam ik nergens in de wiskundeliteratuur een beschrijving tegen om Pythagorasbalken te maken. Dat bewijst niet, dat zoiets niet bestaat: ik heb vast en zeker niet voldoende gezocht. Ik besloot

om te proberen zelf een recept te construeren. Om inspiratie te krijgen, besloot ik eerst met mijn computer een stel Pythagorasbalken te maken. Dat is niet te moeilijk, want als ik een  $d$  vind, die niet geheel is, dan laat ik hem niet op papier zetten. Met het volgende programma vond ik in principe alle Pythagorasbalken. Er zit slechts een aantallenbegrenzer op: het getal 99 in instructie 20.

### Basic-computer-programma

```
10 defint a-c,k,s-u
20 for s=3 to 99:u=int(s/3):for a=1 to u:for b=a to u:c=s-a-b
30 d=sqr(a*a+b*b+c*c):if d>int(d) then 60
40 gosub 80:if t=0 then 60
50 gosub 140:if a<=b then print a;b;c;d, else 50
60 next:next:next:end
70 '
80 t=0:for k=2 to 23
90 qa=a/k:qb=b/k:qc=c/k:qd=d/k
100 if int(qa)=a and int(qb)=b and int(qc)=c and int(qd)=d
    then 120
110 next k:t=1
120 return
130 '
140 if c<b then k=c:c=b:b=k
150 if b<a then k=b:b=a:a=k
160 return
```



## SUBROUTINES

Met de eerste subroutine (regel 80 t/m 120) controleer je, dat je slechts niet-verkleinbare balken op papier krijgt. Je krijgt dan alleen "primitieve" balken. De deelbaarheidstest gaat volgens instructie 80 niet verder dan 23.

Met de tweede subroutine (140 t/m 160) noteer je  $a$ ,  $b$  en  $c$  van klein naar groot. Dan kun je de resultaten gemakkelijker vergelijken.

## RESULTATEN

De eerste resultaten van dit programma zijn  
2,3,6;7   1,4,8;9  
4,4,7;9   3,4,12;13  
6,6,7;11   2,5,14;15

## DEELVERZAMELING 1

De eerste deelverzameling, die ik vond, was me al lang bekend.

Het eerste voorbeeld van hiervoor behoort er toe:

3,4,12;13.

Het is een combinatie van twee pythagorasdriehoeken:

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \text{ en}$$

$$5^2 + 12^2 = 13^2.$$

Ook het tweede voorbeeld van de inleiding 8,9,12;17 bevat zo'n dubbele combinatie:  $9^2 + 12^2 = 15^2$  en

$8^2 + 15^2 = 17^2$ . Bij het derde voorbeeld 1,6,18;19 lukt dit niet tussendoor zonder wortels.

## DEELVERZAMELING 2

De tweede deelverzameling, kon ik zo vinden:

kies de lengte willekeurig, maar wel met natuurlijke getallen. Kies de breedte = lengte + 1. Kies de hoogte als lengte x breedte, dan is de lichaamsdiagonaal = hoogte + 1

Voorbeelden, die hier bij behoren zijn 1,2,2;3 en 2,3,6;7.

De controle is eenvoudig:  $2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$ .

Ook het algemene recept, zo geschreven:

$a, a+1, a(a+1); a^2 + a + 1$ , is redelijk gemakkelijk te controleren:

$$a^2 + (a+1)^2 + \{a(a+1)\}^2 = (a^2 + a + 1)^2 \text{ is waar.}$$

Kun je dat aan?

## DEELVERZAMELING 3

Een derde deelverzameling is  $a, a, 2a-1; 2a+1$ , die nog gemakkelijker is te toetsen op juistheid.

## DEELVERZAMELING 4

Kies  $a$  als een willekeurig positief geheel getal.

Kies het gehele getal  $b$  minstens zo groot als  $a$ .

$$c = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 1).$$

$$\text{Dan is } d = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + 1).$$

Dat geeft de pythagoras-balken

$$a, b, \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 1);$$

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + 1).$$

$a$  en  $b$  mogen niet tegelijk even zijn noch tegelijk oneven, anders krijg je  $c = \text{geheel} + \frac{1}{2}$ .

Kenmerkend is, dat steeds  $d - c = 1$  is.

Deze verzameling omvat de tweede verzameling geheel.

Immers dan is

$$b = a + 1$$

Nieuwe voorbeelden, die niet tot de tweede deelverzameling behoren, zijn 1,4,8;9 en 2,3,6;7

### DEELVERZAMELING 5

Een vijfde deelverzameling is deze:

$$2mp, 2np, m^2 + n^2 - p^2; m^2 + n^2 + p^2.$$

Deze constructie werd me geïnspireerd door het bekende recept van de Pythagorasdriehoeken. Alleen als de kleinste zijde = 1 is, heb je voorbeelden, die ook in de vorige verzameling voorkomen.

### DEELVERZAMELING

#### 6 T/M 8

De volgende drie deelverzamelingen zijn prachtige varianten op de vorige.

Nr 5 zet ik er nog even bij, ter vergelijking:

$$2mp, 2np, m^2 + n^2 - p^2; m^2 + n^2 + p^2$$

$$2mn, 2mp, m^2 - n^2 - p^2; m^2 + n^2 + p^2$$

$$2mn, 2np, p^2 - n^2 + m^2; m^2 + n^2 + p^2$$

$$2mp, 2np, p^2 - n^2 - m^2; m^2 + n^2 + p^2$$

Ze leveren elk hun eigen voorbeelden; ze zijn dus niet gelijkwaardig.

### DEELVERZAMELING 9

Een negende deelverzameling ontstaat door schaalvergroting. Uit bijvoorbeeld 2,3,6;7 vind je, na vergroting met een factor 10: 20,30,60;70

Ik weet, dat ik nog niet het meest algemene recept heb gevonden.

Ik weet ook niet, of dat wel bestaat. Wellicht, dat één der lezers zich geïnspireerd voelt om op zoek te gaan naar een meer algemeen recept.

De redactie van "Pythagoras" wacht met spanning vernuftige resultaten af.

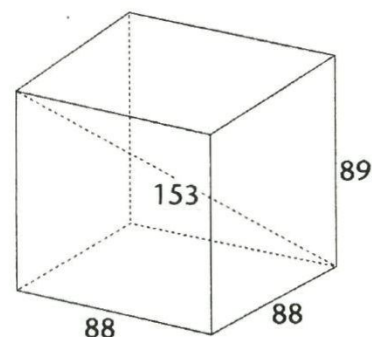
Ook andere deelverzamelingen zijn welkom.

### DE PYTHAGORAS-

#### KUBUS

met ribben  $a$  bestaat niet, omdat  $3a^2 = d^2$  geen oplossing heeft voor natuurlijke getallen groter dan nul.

Maar we kunnen wel kijken naar een bijna-Pythagoras-kubus.



### DEELVERZAMELING 11

#### BIJNA-PYTHAGORAS-KUBUS

De balken 2,2,1;3 6,6,7;11 24,24,23;41 88,88,89;153 en 330,330,229;571 verdienen de naam, die je hierboven ziet.

Nu is de lezer aan zet.

Hij/zij mag proberen een algemeen recept te vinden voor een bijna-Pythagoras-kubus.

Oplossingen kun je naar de schrijver en redacteur sturen. Goede oplossingen worden gepubliceerd.

Frank Roos

# HET GROOTSTE GETAL MET

**Zonder gebruik te maken van faculteiten, zul je met machten of machten van machten moeten gaan werken.**

**Bijvoorbeeld:**

$$x = 222^2, x = 22^{22}, x = 2^{222}, x = 2^{(2^{22})}.$$

**Gebruik makend van een gewone zakrekenmachine vind je bij  $x = 2^{(2^{22})}$  een foutmelding.**

**Dit betekent dat het een getal is van meer dan 100 cijfers.**

## CITAAT

van O. Terquem:

*"Een strenge logica, het zoeken naar en de liefde tot de waarheid om haar-zelve maken de morele waarden der wiskunde uit."*

Van alle andere getallen uit deze serie kan met de rekenmachine een (ruwe) benadering gegeven worden.

Toch kunnen we ook nog meer te weten komen over  $x = 2^{(2^{22})}$ . We zullen dan gebruik moeten maken van logaritmen.

$$\text{Stel: } x = 2^{(2^{22})} = 2^{4194304}.$$

$$\log x = \log 2^{4194304} =$$

$$4194304 \log 2 = 1262611,3$$

Op je rekenmachine kun je meer decimalen krijgen van  $\log x$  door van dit getal 1262611 af te trekken.

Je krijgt

$$\log x - 1262611 = 0,3149.$$

Omdat

$$10^{0,3149} = 2,065.....$$

$$\text{is } x = 2,065... \cdot 10^{1262611}.$$

Dit is een getal

van 1262612 cijfers.

De eerste cijfers zijn bekend.

Ook het laatste cijfer weet je: omdat  $2^{22}$  een viervoud is, moet het een 6 zijn (ga maar na!).

Om een indruk te krijgen van de ruimte die je nodig hebt om het gehele getal af te drukken, als je het exact zou berekenen het volgen-

# DAT TE MAKEN IS IERMAAL HET CIJFER 2

de: op een bladzijde van een krant kunnen  
8 kolommen met 160 regels van 30 tekens.  
Je komt dan op bijna 33 pagina's.

## Met gebruik van faculteiten kun je hoger komen.

Bijvoorbeeld:

$$x = 2222! , x = 222!^2 , x = 22!^{22!} , x = 2^{222!} , x = 2^{(2^{22!})} .$$

Ook hier laat de rekenmachine ons in de  
steek, want boven  $69!$  loop je vast.

Met behulp van logaritmen komen we weer  
een stuk verder.

$$x = 2222!$$

$$\log x = \log 2222! = \log 1 + \log 2 + \log 3 + \dots + \log 2222 \text{ (2222 termen).}$$

Omdat

$$\log 2222 = 3,346744.. \text{ en dus } \log 2222 < 3,5 \text{ is } \log x < 2222 \cdot 3,5 = 7777.$$

Dit is veel kleiner dan de logaritme van het  
hierboven gevonden getal.

$$x = 222!^2$$

Dit is op te vatten als een  
produkt van 444 factoren, die kleiner of gelijk  
zijn aan de factoren van  $x = 2222!$ .

De uitkomst is dus ook  
kleiner.

$$x = 22!^{22!}$$

$$\log x = \log 22!^{22!} = 22! \cdot \log 22! = 2,3661077 \cdot 10^{22}.$$

De logaritme is al een getal met 23 cijfers  
vóór de komma, dus dit getal is tot nu toe  
het grootste.

$$x = 2^{222!} \text{ en } x = 2^{(2^{22!})}.$$

Beide zijn machten van 2. De exponent  $2^{22!}$   
is echter veel groter dan de exponent  $222!$ .

Dit kun je weer met behulp van logaritmen  
nagaan.

We onderzoeken alleen het laatste getal.

$$x = 2^{(2^{22!})}$$

$$\log x = 2^{22!} \cdot \log 2$$

$$\log (\log x) = 22! \cdot \log 2 + \log 2 \approx 3,3836 \cdot 10^{20}.$$

$\log (\log x)$  is al een getal van 21 cijfers.

We zijn hier dus bij het grootste getal.

*Jan Mahieu*

# VAN SAAI

**In Pythagoras nr. 2 van 1992 stond op pagina 2 een figuur, waarvan afbeelding 1 een onderdeel is. Punt  $(a,0)$  wordt met een recht lijnstuk verbonden met  $(0,1-a)$ . Behalve, dat hier sprake is van een zeer fraaie figuur, zijn er ook nog hele mooie wiskundige aspecten.**

**Zo zie je onmiddellijk, dat de scheiding van het witte met het gearceerde gebied een curve oplevert.**

**De vraag is nu natuurlijk, welke formule bij deze curve behoort.**

Uit afbeelding 2 valt op te maken, dat elke lijn alle andere lijnen snijdt, maar bovendien, dat het snijpunt tussen twee lijnen, die na elkaar vertrekken vanaf de x-as altijd het dichtst bij de te vinden curve liggen.

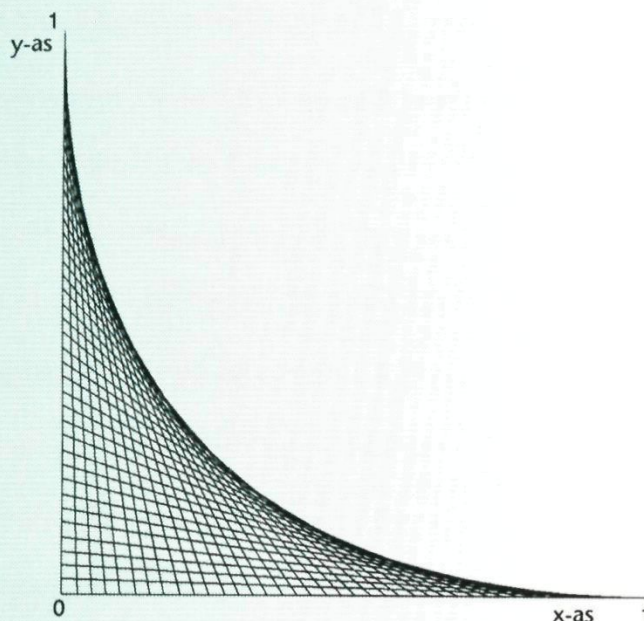
De lijn, bijvoorbeeld lijn  $p$ , die de x-as snijdt in het punt  $(a,0)$ , snijdt de y-as in het punt  $(0,1-a)$  en heeft een richtingscoëfficiënt  $-\frac{1-a}{a} = 1 - \frac{1}{a}$ .

Dus de formule bij deze lijn is  $y = 1 - a + (1 - \frac{1}{a})x$ . Een andere lijn, bijvoorbeeld lijn  $q$ , die de x-as snijdt in het punt  $(a+\Delta a,0)$  en die de

## LEESVOER

In 1972 is een aardigst boekje uitgegeven bij WN. Het heet "Webben weven" en is geschreven door A.J. Elsenaar.

Red.



Afbeelding 1

# TOT FRAAI

$y$ -as snijdt in  $(0, 1-a-\Delta a)$   
heeft als formule  
 $y = 1-a-\Delta a + (1-\frac{1}{1-a-\Delta a})x$ .

## SNIJPUNT

Het snijpunt van de lijnen  $p$  en  $q$  noemen we  $S$ .

De vergelijkingen van  $p$  en  $q$  geven twee vergelijkingen met de twee onbekenden  $x$  en  $y$ , die  $S$  bepalen.

De oplossing daarvan is

$$S = (a(a+\Delta a), (1-a)(1-a-\Delta a)).$$

Kun je dat zelf aantonen?

Zie bladzijde 29.

Bij zeer kleine  $\Delta a$  wordt  $S$  bij benadering  $(a^2, (1-a)^2)$ .

## DE CURVE.

Wanneer we nu heel veel lijnen tekenen, wordt de gezochte curve steeds beter benaderd en wordt  $\Delta a$  steeds kleiner.

De  $x$  en  $y$  van het snijpunt worden:

$$y = (1-a)^2$$

$x$  en  $y$  zijn beide positief.

Wegwerken of elimineren van  $a$  geeft de formule

van de curve:  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$   
of  $f(x) = y = (1-\sqrt{x})^2$ .

Het snijpunt van deze kromme  $f$  met de lijn  $p$  is natuurlijk  $(a^2, (1-a)^2)$ .

## DE AFGELEIDE.

De afgeleide functie is

$$y' = f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Invullen van  $x = a^2$  geeft

$$y' = f'(a^2) = 1 - \frac{1}{a} = r.c. \text{ van } p.$$

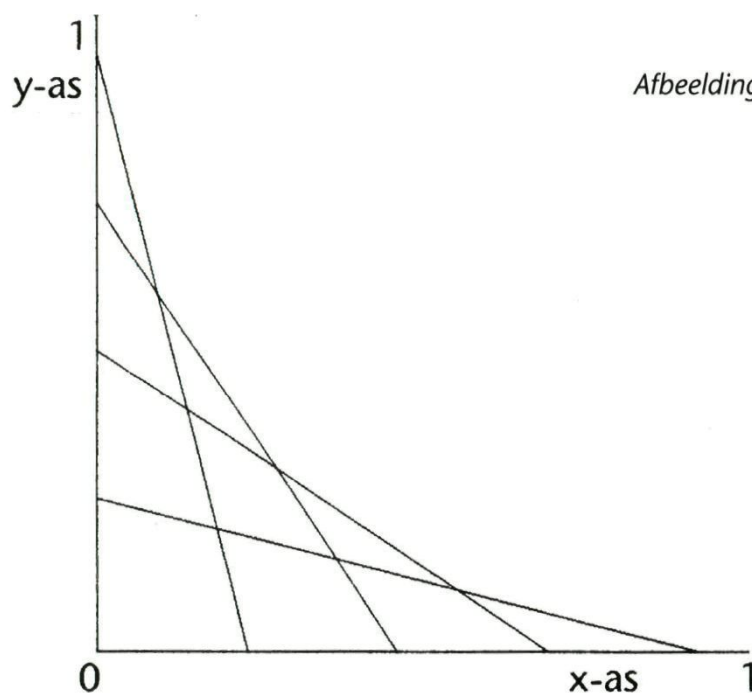
Dus  $p$  is werkelijk een raaklijn.

## $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

De vergelijking  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$  doet denken aan die van de cirkel:  $x^2 + y^2 = 1$ , maar ook aan de vergelijking van een rechte lijn:  $x^1 + y^1 = 1$ .

Toch blijkt het hier om een formule van een heel ander kaliber te gaan.

Zo is bijvoorbeeld de oppervlakte onder de curve gelijk aan één zesde, dus gewoon een element uit  $\mathbb{Q}$ , terwijl de oppervlakte van een cirkel altijd uitgedrukt wordt in  $\pi$  en dus een element is van  $\mathbb{R}$ .



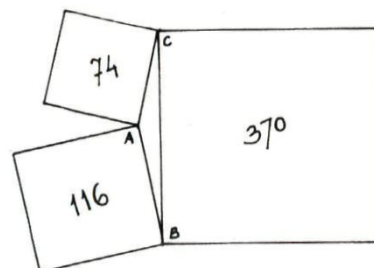
Afbeelding 2

Martijn Leisink

## VARIATIE OP PYTHAGORAS

**Op de omslag zie je het vignet van ons tijdschrift: een rechthoekige driehoek. We gaan die grap eens uithalen bij een ander soort driehoek.**

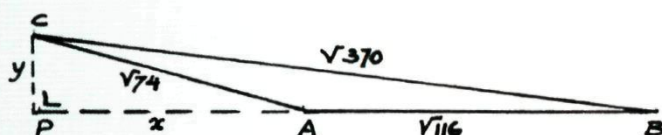
Op de zijden van de stomphoekige driehoek  $ABC$  hebben we vierkanten gezet met oppervlakten: 116, 370 en 74 (fig.1).



De opgave luidt: bepaal de oppervlakte van  $ABC$  zelf.

### TIP

Je kent nu de lengten van de drie zijden, al zijn dit wel vervelende wortelvormen (fig.2).



Laat nu vanuit  $C$  een loodlijn  $CP$  neer op het verlengde van  $BA$ .

Stel  $AP = x$  en  $CP = y$ .

Bereken  $x$  en  $y$  en tenslotte ook de oppervlakte van  $ABC$ .

Het lijkt nogal ingewikkeld met al die wortelvormen, maar de uitkomst wordt gewoon een geheel getal. Kun jij dat ook vinden?

De oplossing staat op pagina 29.

*Henk Mulder*

## DELEN DOOR NUL (1)

**Rik de Bo vraagt zich af, waarom hij niet mag delen door nul.**

**Hij meent om de volgende reden.**

Enerzijds is  $a^2 - a^2 = a(a - a)$ .  
Anderzijds is  $a^2 - a^2 = (a + a)(a - a)$ .

Dus is  $a(a - a) = (a + a)(a - a)$ .  
Deel je nu links en rechts door  $(a - a)$ , dan krijg je  $a = a + a$  of  $1 = 2$ .

Rik zegt nu, dat hij niet door nul mag delen, omdat dat tot nonsens leidt.

Welke denkfout maakt Rik?  
De oplossing staat op pagina 27.

Frank Roos

## 1993

L. Hennen uit Hoofddorp stuurde de redactie (n.a.v. "1993")

$$65 = -19 + \binom{9}{3} \text{ en}$$

$$68 = -1 + \sqrt{9} + \Sigma 9 + \Sigma \Sigma 3$$

Jelner Vierstra uit Woerden vond de volgende oplossing  
 $68 = -1 + \Sigma 9 + \sqrt{9} + \Sigma (3!)$ .

## $N^2 = M! + 1$

**Naar een idee van E.C. Buissant des Amorie uit Amstelveen.**  
**Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking  $n^2 = m! + 1$ ?**

De letters  $m$  en  $n$  stellen natuurlijke getallen voor.  
De enige oplossingen, die wij kennen zijn:

$$4! + 1 = 5^2$$

$$5! + 1 = 11^2$$

$$7! + 1 = 71^2$$

en een nader onderzoek in te stellen naar een gerichte oplossingsmethode.  
Zijn er andere gelijksoortige probleempjes?  
Graag reacties naar het correspondentie adres.

Wij dagen lezers uit om meer oplossingen te zoeken

Frank Roos

# VOORSPOEDIG 1994

Ieder jaar hoopt Wilfried Maertens uit Izegem (B), dat de lezers van Pythagoras het volgende proberen: zou het mogelijk zijn om de natuurlijke getallen van 0 t/m 200 uit te drukken in de cijfers van het nieuwe jaar, dus in 1, 9, 9 en 4, waarbij de volgorde bewaard moet blijven ?

## ENIGE VOORBEELDEN:

$$0 = 1 \times (9 - 9) \times 4$$

$$1 = 1 + (9 - 9) \times 4 = 1^{994}$$

$$2 = 1 + (9 : 9)^4$$

$$3 = 1 + 9 - 9 + \sqrt{4}$$

$$4 = ??$$

$$5 = 1 + 9 - 9 + 4$$

$$6 = 19 - 9 - 4$$

$$7 = 1 - (\sqrt{9})! + \sqrt{9} \times 4$$

$$8 = 1 - (\sqrt{9})! + 9 + 4$$

$$9 = 1 + \sqrt{9} + 9 - 4$$

$$10 = -1 \times \sqrt{9} + 9 + 4$$

$$11 = 1 - \sqrt{9} + 9 + 4$$

Hij is er in geslaagd om alle getallen tot 200 op een dergelijke manier te schrijven.

Alleen met de getallen 4, 155, 157, 158, 159, 166, 191, 193 en 194 lukte het hem niet.

Wie kan hem helpen ?

Gebruik zo eenvoudig mogelijke tekens zoals +, -, x, :, ! enzovoort.

Stuur je oplossing naar het correspondentie adres.

De mooiste oplossingen worden geplaatst.

Succes.

Frank Roos

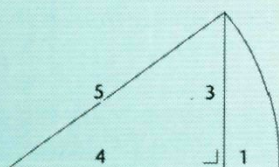
## PYTHAGORAS

### GEBAK



Wiskundeleraar Piet

Agoras is jarig en wil zijn collega's trakteren op een pythagoras-gebakje. Dat ziet er zo uit:



Hij wil, dat iedereen evenveel van zijn ronde taart krijgt. Welk deel van de taart blijft over, als alle gebakjes op gaan?

### Gelijke oppervlakken

Is het mogelijk een pythagoras-gebakje te bedenken, waarin de oppervlakken links en rechts van de 'hoogtelijn' gelijk zijn?

Zie bladzijde 28. Frank Roos

## K A P I T A A L

### 5754 JAAR.

Een terechte vraag van de lezer kan zijn: hoe kan het aantal van 5754 zo precies genoemd worden? De Joodse traditie heeft haar eigen kalender. De gemiddelde jaarlengte is gelijk aan het jaar van de 'gewone' jaartelling. Op 16 september 1993 begint het Joodse Nieuwjaar van het jaartal 5754. Het nulpunt van de Joodse jaar-telling ligt bij de schepping. Vandaar!

### GROTE GOUDEN BOL.

Er is sprake van  $2,5 \times 10^{66}$  gouden aardes. Als we daar één bol van maken, dan is zijn volume dus  $2,5 \times 10^{66} \times$  het volume van de aarde. Het volume van een bol is evenredig met de derde macht van de straal, middel-

lijn of omtrek van de bol.

Dan is de straal evenredig met de derdemachtswortel van het volume. De straal van die bol is dan  $1,4 \times 10^{22} \times$  de straal van de aarde. Dat is  $1,4 \times 10^{22} \times (40.000 \text{ km} : 2\pi) = 8,9 \times 10^{25} \text{ km} = (8,9 \times 10^{25} \text{ km}) : (9,5 \times 10^{12} \text{ km/lichtjaar}) = 9,3 \times 10^{12}$  lichtjaar. Dat betekent, dat die ene gouden bol bijna het geheel waarneembare heelal zou opvullen!

### TELLEN.

Om alle  $2,5 \times 10^{66}$  gouden aardes te tellen heb je dan  $2,5 \times 10^{66}$  secondes nodig of  $7,9 \times 10^{58}$  jaren.

Dat is zeer vele malen de geschatte leeftijd van het heelal. De cent van Adam zou wel ontstellend veel rente hebben opgebracht!

## D E N K E R T J E 1

De tweede redenering is de kloppende. Het gaat hier om zogenaamde *voorwaardelijke kansen*.

Gevraagd wordt hier de kans op twee jongens onder voorwaarde: minstens één jongen.

## D E L E N D O O R N U L ( 1 )

Rik heeft niet beredeneerd wat de oorzaak is, waarom je niet door nul mag delen, maar hij laat wel zien wat de

'dramatische' gevolgen ervan zijn ( $1=2$ ).

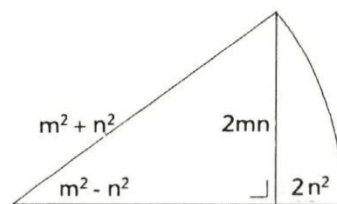
**In delen door nul (2)** op blz 30 staat de nog niet vermelde oorzaak.

## P Y T H A G O R A S G E B A K

'De' hoek van het gebakje heeft  $\frac{3}{4}$  als tangens.

De hoek is dan ruim  $36,8^\circ$ .

Dat gaat ruim 9 maal op de  $360^\circ$ . Piet kan dus 9 Pythagorasgebakjes snijden en houdt dan  $28,17^\circ$  over. Kun je een andere



'pythagoras-gebakjes-verdeling' vinden, die minder taart over laat?

## G E L I J K E O P P E R V L A K K E N

Het oppervlak links is een driehoek met gehele zijden. Die oppervlakte is een geheel getal.

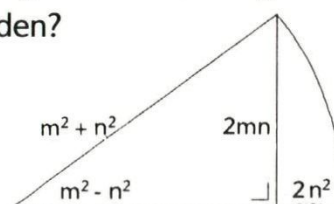
De oppervlakte van de sector, de gehele taartpunt, bevat  $\pi$ .

Het rechter-oppervlak dus ook. De oppervlakte rechts is dus niet een geheel getal.

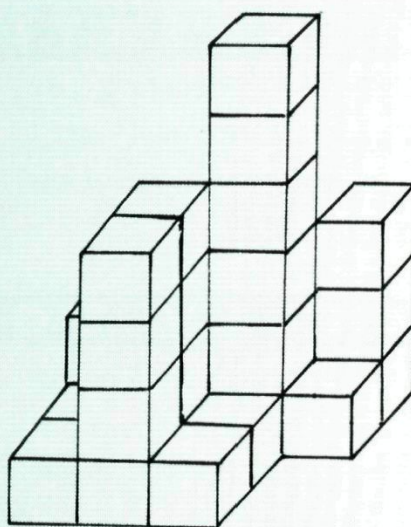
Het probleem heeft dan geen oplossing.

Elk taartje is een ruwe benadering van het probleem.

Wie probeert een echt zeer goede benadering te vinden?



## S T A P E L E N



In het vorige nummer gaven we drie aanzichten van een gebouw, bestaande uit kubussen.

Er zijn minimaal 25 blokjes nodig.

We geven hierbij een ruimtelijke voorstelling van een mogelijke constructie.

*Bram Lagerwerf*

## VAN SAAI TOT FRAAI

$$1-a + (1-\frac{1}{a})x = 1-a-\Delta a + (1-\frac{1}{a+\Delta a})x$$

$$(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+\Delta a})x = \Delta a$$

$$x = a(a+\Delta a)$$

$$y = 1-a + (1-\frac{1}{a})a(a+\Delta a) = (1-a)(1-a+\Delta a)$$

## VARIATIE OP PYTHAGORAS

De uitkomst is 11.

## DENKERTJE 2

**In een stad rijden twee taxibedrijven. Eén met groene en één met gele wagens.**

**15% van de taxi's is groen en 85% van de taxi's is geel.**

**Op een avond bij matig licht veroorzaakt een taxi een aanrijding en rijdt door.**

**Een getuige van deze aanrijding beweert dat het een groene taxi was.**



Er wordt een rechtszaak aangespannen tegen de groene taximaatschappij. De rechter onderwerpt de getuige aan een experiment, waarbij wordt nagegaan hoe goed hij bij matig licht een

groene van een gele taxi kan onderscheiden.

In aselecte volgorde wordt

aan de getuige een groot aantal taxi's getoond.

De helft van deze taxi's is groen de andere helft is geel. In 50% van de gevallen noemt de getuige de

juiste kleur.

Hoe groot is de kans dat een groene taxi inderdaad de aanrijding heeft veroorzaakt? Antwoord hiernaast.

De waarneming van de getuige levert niets op. Zelfs bij elke keer hetzelfde antwoord zou hij een score hebben van 50%. Het enige waar we ons op kunnen baseren is de verhouding van de groene en de gele taxi's. De kans op een groene taxi is dan 15%.

**DENKERTJE 2**

Jan Mahieu

## DELEN DOOR NUL (2)

Iedereen weet dat  $4+4+4$  verkort wordt geschreven als  $3 \times 4$ . Vermenigvuldigen is een herhaalde optelling. Aftrekken is de tegengestelde bewerking van optellen. Delen is de tegengestelde bewerking van vermenigvuldigen. Dus is delen een herhaalde aftrekking.

### VOORBEELD

$$\begin{array}{r} 12 \\ 4 \phantom{00} - \\ \hline 8 \\ 4 \phantom{00} - \\ \hline 4 \\ 4 \phantom{00} - \\ \hline 0 \end{array}$$

Hoe vaak kun je 4 aftrekken van 12? Als je in het reken-schema links kijkt en telt, dan zie je dat het antwoord op de vraag 3 is.

$$12 - 4 - 4 - 4 = 0.$$

Verkort heb je natuurlijk

$$12 : 4 = 3.$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 0 \phantom{00} - \\ \hline 12 \\ 0 \phantom{00} - \\ \hline 12 \\ 0 \phantom{00} - \\ \hline 12 \\ 0 \phantom{00} - \\ \hline 12 \\ 0 \phantom{00} - \\ \hline 12 \\ \text{enz.} \end{array}$$

### 12 : 0

Gaan we nu op dezelfde manier proberen om  $12 : 0$  uit te rekenen, dan vraag je je dus af, hoe vaak je nul van de twaalf kunt aftrekken. Zie het reken-schema links.

Omdat je nooit bij nul komt, kun je twee antwoorden geven.

Het ene antwoord is oneindig vaak.

Het andere is, dat delen door nul niet mogelijk is, omdat het proces nooit afbreekt.

Dat laatste is ook meer praktisch, want je komt nooit een keer van twaalf vandaan en, tegelijk, je komt nooit dichterbij nul.

### TRADITIE

De traditionele uitleg is als volgt.

$$12 : 4 = 3, \text{ omdat } 3 \times 4 = 12.$$

Op dezelfde manier benader je het probleem  $12 : 0$ .

Stel dat  $12 : 0 = p$ , dan is  $p \times 0 = 12$ .

Maar  $p \times 0 = 0$  en niet 12, dus heeft  $p \times 0 = 12$  geen oplossing.

Dan heeft  $12 : 0 = p$  evenmin een oplossing.

Dus delen door nul is onmogelijk.

Je **mag** niet delen door nul, omdat je niet door nul **kunt** delen.

Frank Roos

Een produkt van New in Chess

# ELEKTRONISCHE SCHAAKBOEKEN

**NIC**  
CONSULT

Postbus 3053  
1801 GB Alkmaar  
Telefoon 072-127137  
Fax 072-158234

## **SCHOTS ALLE VARIANTEN**

*Bewerkt door Jan Timman f 38,-*

## **SICILIAANS MET 2.f4**

*Bewerkt door Kick Langeweg f 38,-*

## **FRANS DOORSCHUIFVARIANT**

*Bewerkt door Predrag Nikolic f 38,-*

## **SLAVISCH MERANER VARIANT**

*Bewerkt door Rini Kuijf f 38,-*

## **BUDAPESTER GAMBIET**

*Bewerkt door A.C. van der Tak f 38,-*

## **SPAANS ARKHANGELSKE VARIANT**

*Bewerkt door A.C. van der Tak f 38,-*

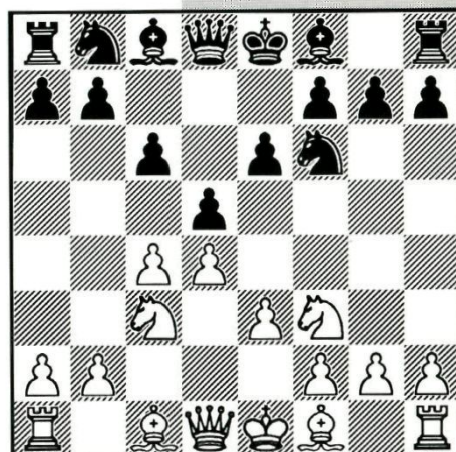
## **KONINGSINDISCH KLASSIEK SYSTEEM**

*Bewerkt door Genna Sosonko f 38,-*

## **1. PC3 DIE VAN GEET ERÖFFNUNG**

*Bewerkt door D.D. van Geet f 42,-*  
2e druk

Vraag Uw boekhandel  
of INTERCHESS BV  
Alkmaar



**ABONNEMENTEN**

Nederlandse en Belgische abonnees: aanmelden telefonisch 030 - 736400, of schriftelijk, MEMO n.v., Antwoordnummer 6236, 3500VC Utrecht.

**TARIEVEN:**

Abonnement Pythagoras  
f 35,- of BF 650,-  
Luchtpost toeslag binnen  
Europa f 10,-  
Luchtposttoeslag buiten  
Europa f 15,-  
Abonnement inclusief  
Archimedes f 65,- of BF 1200,-  
Luchtpost toeslag binnen  
Europa f 20,-  
Luchtpost toeslag buiten  
Europa f 20,-

**BETALING**

Wacht met betalen tot u de acceptgirokaart krijgt toegestuurd. Bij tussentijdse abonnering ontvangt u alle nummers van de lopende jaargang. Abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk bij de uitgever is opgezegd.

**UITGEVER:**

MEMO n.v.,  
Hengeveldstraat 29,  
Postbus 9822,  
3506 GV Utrecht.  
Tel. 030-736400,  
Fax: 030-734774  
Bank: 69.93.65.937,  
Giro 51.39.755

**VERANTWOORDELIJKE UITGEVER:**

Ton Fokker