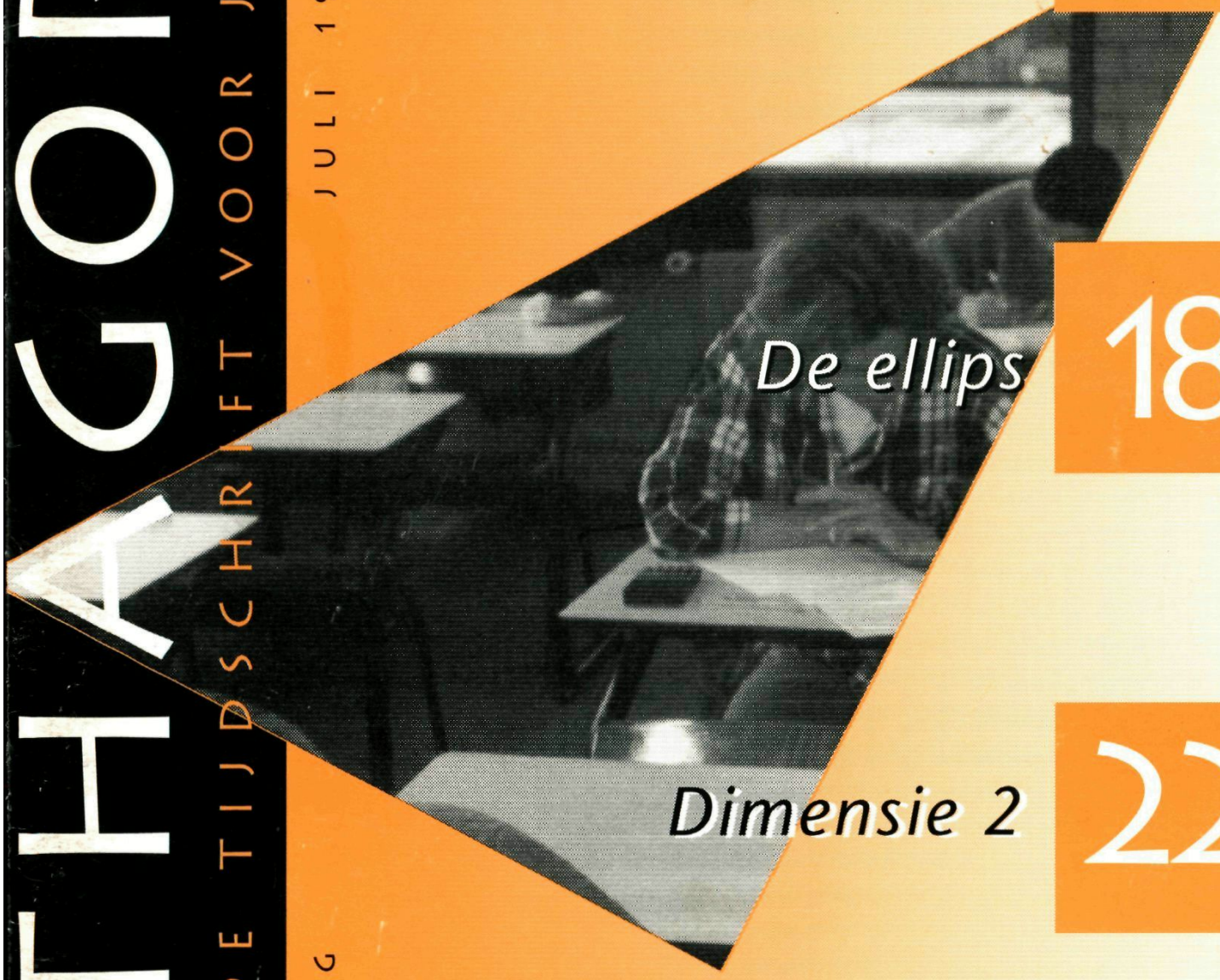
PYTHAGORAS

WISKUNDE TIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

33E JAARGANG JULI 1994 NUMMER 5



Merkwaardige machten 8

De ellips 18

Dimensie 2 22

Wiskundekamp 24

INHOUD

- VOORWOORD 3
- KWADRATEN 4
- EEN WISKUNDIG MEUBEL 4
- RARE KLOKKEN EN PLANETEN 6
- DE BOEKENWORM 7
- VELE HANDEN MAKEN LICHT WERK 8
- MERKWAARDIGE MACHTEN 8
- DE WIELERWEDSTRIJD 9
- GETALLENB(R)OUWSEL 10
- HOEVEEL IS . . . 13
- STAARTDELING-PUZZEL 14
- PROCENTEN 14
- BREIEN 15
- KUBUS-PUZZEL 15
- PRET ZONDER WET 16
- KANT EN KLARE FILOSOFIE 17
- DE ELLIPS 18
- DE PRIEMGETALLEN VAN FERMAT 21
- OPVOLGER 22
- DIMENSIE 2 22
- MACHTEN 23
- TWEE VEELHOEKEN 24
- WISKUNDE OLYMPIADE 1994 24
- WISKUNDEKAMP 24
- BANKKRAAK 25
- OPLOSSINGEN 26

UITGAVE:
Pythagoras is een uitgave van NIAM, Project-ontwikkeling b.v. en verschijnt zesmaal per jaar. Een jaargang loopt van september tot en met augustus.

REDACTIE:
Jan Mahieu
Frank Roos
Marcel Snel

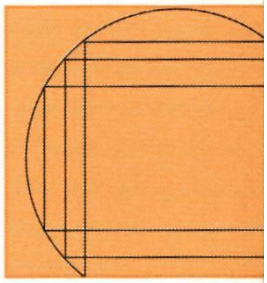
EINDREDACTIE:
Henk Huijsmans

NIEUWE ARTIKELEN:
Molenstraat 31,
4841 CA Prinsenbeek

CORRESPONDENTIE-ADRES:
Reacties,
oplossingen enz.
Frank Roos,
Klink 19
9356 DS Tolkert

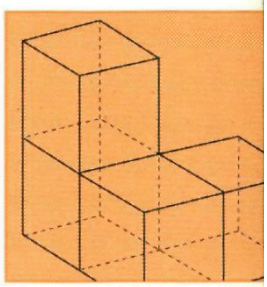
MEDEWERKERS:
Bob de Jongste,
Hans de Rijk,
Paul van de Veen,
Thijs Notenboom.

BESTE LEZERS,



Voor u ligt al weer een nieuw nummer van Pythagoras. We proberen versneld de opgelopen vertraging in te lopen. Deze uitgave staat boordevol wiskundige merkwaardigheden.

Deze keer openen we met een merkwaardig meubilair, een cilindrische ladenkast, ontworpen door de Italiaan Ceccotti. Mocht u van plan zijn tijdens de vakantie een bezoekje te brengen aan Oost Friesland, gelegen in het noordwesten van Duitsland, houdt u er dan rekening mee dat het klokkijken daar lastig kan zijn. De wijzers van alle klokken draaien tegengesteld aan de gebruikelijke draairichting, een merkwaardige zaak.



En wat te denken van merkwaardige machten? Frank Roos vertelt u er alles over.

Naast merkwaardigheden komen ook volop 'normale' wiskundige zaken aan bod, zoals de Pythagoras-boompjes, het werken met procenten, ellipsen en machten.

Mocht u uw vakantiebudget hebben overschreden, dan brengt wellicht het artikel bankkraak, over een bankrover met wiskunde in zijn pakket, u een oplossing.

Daarnaast treft u weer de nodige 'breinbrekertjes' aan. Kortom een nummer om van te genieten onder een parasol met een verfrissend drankje.

Een prettige vakantie en veel leesplezier.

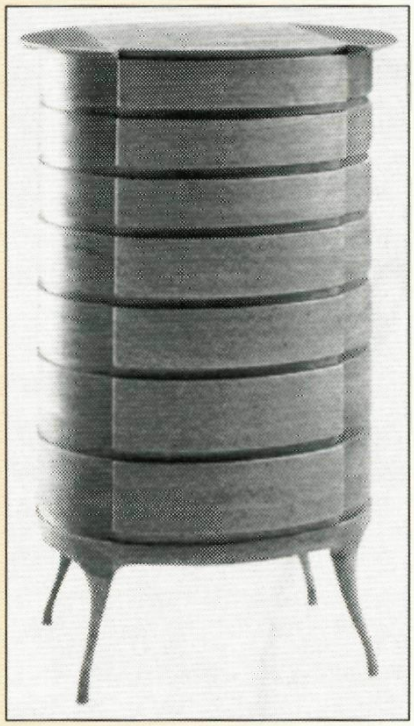
De redaktie

PYTHAGORAS

EEN WISK

De Italiaan Ceccotti is ontwerper van bijzonder meubilair. Zo ontwierp hij een cilindrische ladenkast. De laden hebben een cilindrische voorkant en een rechte achterkant. Onze vraag: hoe breed maak je zo'n lade?

Als je de lade al te smal maakt, dan kan er maar weinig in. En maak je hem erg breed, dan valt de zaak snel uit elkaar. Het is de kunst een goede voorwaarde te formuleren. Wat dacht je hier van: "kies de vorm zo, dat de oppervlakte van een lade-bodem maximaal wordt"?

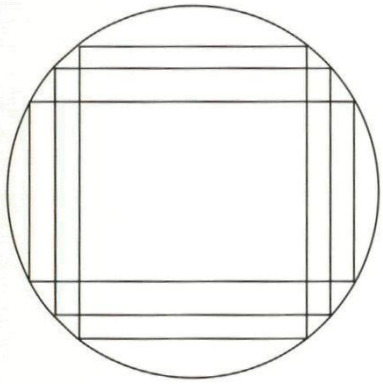


KWADRATEN

Als je een kwadraat deelt door vier, dan is de rest nooit twee of drie.
Kun je dat bewijzen?
Zie bladzijde 28.

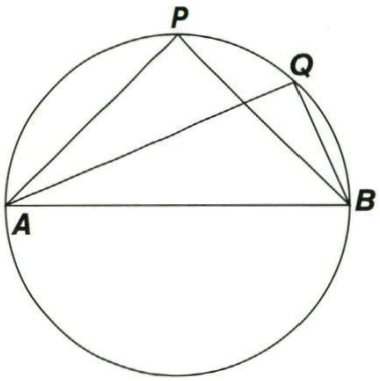
RECHTHOEK IN CIRKEL

Laten we maar gemakkelijk beginnen.. Denk de ronde voorkant maar even weg, dan houden we een rechthoek over. Een rechthoek binnen een cirkel.



Van alle rechthoeken binnen een cirkel heeft het vierkant de grootste oppervlakte. Dat is vrij gemakkelijk in te zien. Kijk maar naar de volgende figuur.

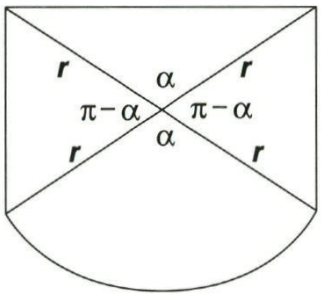
UNDIG MEUBEL



ΔABP heeft een grotere oppervlakte dan ΔABQ. De eerste heeft dezelfde basis als de tweede maar wel een grotere hoogte. En driehoek ABP is juist een half vierkant. Je kunt ook zeggen: de rechthoek, waarin de diagonalen een hoek van 90° met elkaar maken, is de grootste qua oppervlakte.

MET GEBOGEN VOORKANT

Nu gaan we verder met het eigenlijke ontwerp: gebogen voorkant, rechte achterkant. We stellen weer dezelfde vraag: welke figuur heeft de grootste oppervlakte, als we de straal van de cirkelboog een vaste waarde geven?
We kunnen de vorm opvatten als een combinatie van een cirkelsector met drie gelijkbenige driehoeken. Stel, de straal van de cilinder r en de hoek tussen de diagonalen α (α in radialen).



RADIALEN

We drukken α hier uit in radialen. Dat is nodig vanwege het vervolg waarin we gaan differentiëren. Voor wie daar niet zo mee vertrouwd is, vermelden we, dat 1 radiaal = 1 rad = $360°:(2\pi) = (180:\pi)° \approx 57°$ is.

HET SECTOR-DEEL

De oppervlakte van de sector is het deel $\alpha:2\pi$ van de gehele cirkel, die πr^2 is. De oppervlakte van de sector is dan $A = \frac{1}{2}\alpha r^2$.

HET DRIEHOEKEN-DEEL

Als de twee zijden a en b en de ingesloten hoek γ in een driehoek bekend zijn, dan kun je de oppervlakte van die driehoek berekenen met $\frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma$.
Hier levert dat een oppervlakte $\frac{1}{2}r^2 \cdot \sin\alpha$ en de twee andere driehoeken hebben een oppervlakte $\frac{1}{2}r^2 \cdot \sin(\pi-\alpha) = \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin\alpha$.

DE LADE

De totale bodem-oppervlakte van de lade wordt nu $A = \frac{1}{2}r^2\alpha + 3 \cdot \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}r^2 \cdot (\alpha + 3 \cdot \sin\alpha)$

EXTREME WAARDE

Om de extreme waarde van A te vinden, moeten we A naar α differentiëren. "Naar α" betekent, dat je α als onafhankelijke variabele moet beschouwen.
$A' = \frac{1}{2}r^2 \cdot (1 + 3 \cdot \cos\alpha)$.
Dit is nul als $\cos a = -\frac{1}{3}$.
Dat is zo als
$\alpha = 1{,}91$ rad $\approx 109°$
Met $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ kun je berekenen, dat $\sin\alpha = \sqrt{(\frac{8}{9})}$ is, terwijl $3 \cdot \sin\alpha = 2\sqrt{2}$ is.
Vullen we $\alpha = 1{,}91$ en $3 \cdot \sin\alpha = 2\sqrt{2}$ in in $A = \frac{1}{2}r^2 \cdot (\alpha + 3 \cdot \sin\alpha)$,

dan vinden we
$A = \frac{1}{2} r^2 \cdot (1{,}91 + 2\sqrt{2}) \approx r^2 \cdot 2{,}36\cdots$.

WAARDEN

Dat de berekende waarde een maximum is, laten we aan de daarop getrainde lezer over.
Bij de breedste lade is $\alpha = \pi$ rad. De oppervlakte wordt dan die van een halve cirkel $\frac{1}{2}\pi r^2 \approx 1{,}57r^2$.
Het berekende maximum $\approx 2{,}37r^2$ bij $\alpha \approx 1{,}91$ rad is beduidend meer dan bij de breedste lade.

TER VERGELIJKING

Bij het vierkante deel geldt: $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ rad en dus de totale oppervlakte is in dat geval
$\frac{1}{2} r^2 \cdot (\frac{1}{2}\pi + 3) \approx 2{,}29r^2$.

Anders

Wat gaat er aan het gehele verhaal veranderen, als de achterzijde ook rond is?
Wie weet dat?
Oplossingen voor 15 augustus sturen naar Frank Roos.

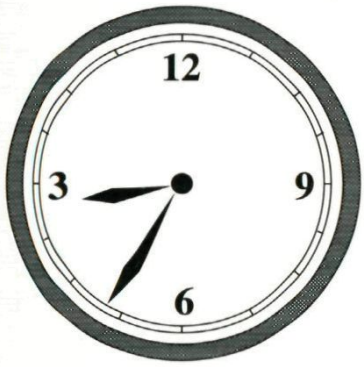
Henk Mulder

RARE KLOK

1. OOST FRIESLAND

De uiterste noordwesthoek van Duitsland, Oost Friesland, was ooit een deel van ons land. Daar hebben ze de volgende (on-)gein: de wijzers van alle klokken draaien tegen-gesteld aan de gebruikelijke draairichting.

Als gevolg daarvan zijn bij voorbeeld de negen en de drie van plaats verwisseld. Dat is vermoeiend klokkijken als je dat niet kent. Principieel is daar niets op tegen, omdat elke stand van de wijzers met een bepaalde tijd correspondeert. Maar het is wel een kwestie van wennen!



Wie spät. . .?

2. TEGENGESTELD DRAAIEN

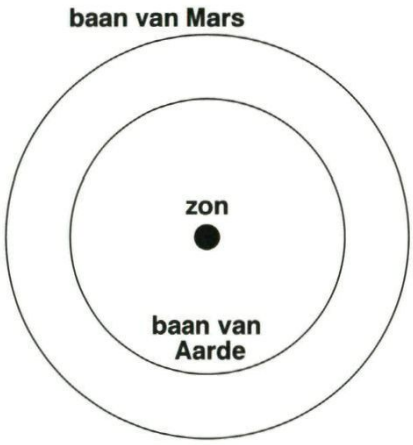
Kokkie van Koqnie heeft een klokkie. De kleine wijzer draait in de gebruikelijke richting. In 70 s is hij rond ten opzichte van de wijzerplaat. De grote wijzer draait echter in tegengestelde richting. Hij maakt één ronde in 50 s.
Over deze rare klok de volgende vragen:

KEN EN PLANETEN

1. Om de hoeveel tijd ontmoeten de wijzers elkaar?
2. Op zeker tijdstip staan beide wijzers recht omhoog. Na hoeveel tijd staan de wijzers weer recht omhoog? Zie blz. 27.

3. PLANEET MARS.

Het probleem van de klokjes en de beweging van de planeten Mars en aarde om de zon zijn wiskundig gezien gelijkwaardig.
De ene wijzer is de "voerstraal" van de zon naar de aarde. Die maakt één ronde in 365,25 dagen (= 1 jaar) t.o.v. de sterrenhemel.
De andere wijzer is de verbindingslijn van de zon naar de planeet Mars.
Die wijzer draait rond in 687 dagen (= 1,88 jaar).
Je kunt nu zelf nagaan, dat de "aardwijzer" de "marswijzer" steeds inhaalt om de 780 dagen = 2,14 jaar.
Als de afstand van de aarde tot Mars op z'n kleinst is, dan is 1,07 jaar later de afstand van deze planeten op z'n grootst.



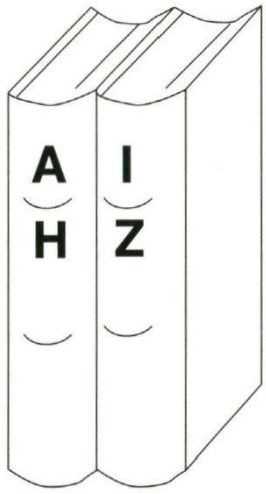
In beide gevallen staan de planeten dan op één lijn met de zon.

1 Gm = 1 gigameter = 10^9 m = 1 miljard meter.
De afstand van de aarde tot de zon is 150 gigameter.
De baan van Mars heeft een straal van 228 Gm.
Wat zijn de kleinste en grootste afstand van Mars en de aarde?
Wat voor effect heeft dat als je Mars kan zien?
Zie bladzijde 28.

Frank Roos

DE BOEKENWORM

In een boekenkast staan twee woordenboeken.
Direct rechts van het deel A t/m H staat het deel I t/m Z, op de gebruikelijke manier dus. Beide boeken zijn 60 mm dik. De harde kaft voor is 3 mm dik en de kaft achter ook. De bladzijden zijn samen dus 54 mm dik. Het andere boek vertoont dezelfde maten.
Een boekenwormpje zit op de bladzijde waar A begint en knaagt zich een weg door de boeken, loodrecht op de bladzijden.



Hoe lang is zijn tunnel geworden, als hij bij de laatste bladzijde van de letter Z is gekomen?
Zie bladzijde 28.

Bob de Jongste

MERKWAAR

Ooit kreeg ik in het begin van mijn wiskundestudie als opdracht: bewijs, dat $2^{n+1} + 5 \cdot 3^{2n}$ deelbaar is door 7 voor elk natuurlijk getal.

We zaten toen in het hoofdstuk "volledige inductie" en dus paste ik braaf de gebruikelijke algoritme toe. Dat lukte me wel. In voorgaande afleveringen is deze bewijstechniek al eens eerder besproken.
Wat me toen veel meer boeide dan de opgave zelf, was de vraag: hoe vind je ooit zo'n vorm:
$2^{n+1} + 5 \cdot 3^{2n}$ is deelbaar is door 7.
Hoe kom je op het idee?
Dat heb ik pas veel later doorgekregen.
Het gaat met merkwaardige quotiënten:
Een eerste merkwaardig quotiënt is

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \ldots a \cdot b^{n-2} + b^{n-1}$$

Dat betekent concreet, dat $a^n - b^n$ deelbaar is door $a - b$ als $n \in \mathbb{N}$ en $n>0$ en daar gaat het me nu om.
Ook dit is met volledige inductie te bewijzen.
Als ik b.v. $a = 8$ kies en $b = 1$, dan is dus $8^n - 1$ deelbaar door 7. Omdat het algemene geval al bewezen is, hoeft dit niet

VELE HANDEN MAKEN LICHT WERK

Drie arbeiders hebben als taak om zand te verplaatsen.
Arbeider *A* heeft drie uur nodig om 1 m^3 zand te verplaatsen.
Arbeider *B* heeft acht uur nodig om 3 m^3 zand te verplaatsen.
Arbeider *C* verplaatst 5 m^3 zand in twaalf uur.
Hoeveel tijd hebben ze nodig om samen 1 m^3 zand te verplaatsen?
De oplossing staat op bladzijde 28.

DIGE MACHTEN

meer apart bewezen te worden, maar het is natuurlijk wel verleidelijk om nu een paar controles uit te voeren.
Als je $n = 1$ neemt, dan krijg je iets wat triviaal is.
Als je $n = 4$ neemt, krijg je:
$\frac{4095}{7} = 585$ rest 0; klopt!

Uit de vorige formule kan je een tweede afleiden: vervang a door c^3 en b door d^3, dan krijg je

$$\frac{c^{3n} - d^{3n}}{c^3 - d^3} = c^{3n-1} + c^{3n-2} \cdot d + c^{3n-3} \cdot d^2 + \ldots + c \cdot d^{3n-2} + d^{3n-1}$$

Dus $c^{3n} - d^{3n}$ is deelbaar door $c^3 - d^3$.
$c^3 - d^3 = (c - d)(c^2 + cd + d^2)$.
Dus $c^{3n} - d^{3n}$ is deelbaar door $(c - d)$, maar ook door $(c^2 + cd + d^2)$.

Nu heb ik bij de eerste formule a en b vervangen door derde machten, maar ik had ook een kwadraat of een vierde macht kunnen kiezen. Dit biedt nog al wat mogelijkheden.
Wat gebeurt er als ik de b in de eerste formule vervang door $-e$?

Dan: $\frac{a^n - (-e)^n}{a - (-e)} = a^{n-1} + a^{n-2} \cdot (-e) + a^{n-3} \cdot (-e)^2 + \ldots a \cdot (-e)^{n-2} + (-e)$

Als we vervolgens de n vervangen door het oneven getal $2m+1$, dan krijg je:

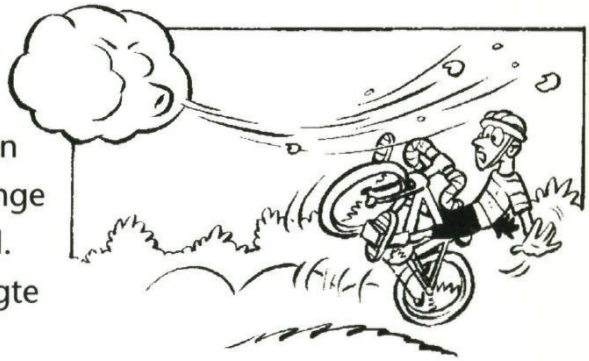
$$\frac{a^{2m+1} + e^{2m+1}}{a + e} = a^{2m} - a^{2m-1} \cdot e + a^{2m-2} \cdot e^2 + \ldots a \cdot e^{m-2} - e^{2m}$$

Dus $(a^{2m+1} + e^{2m+1})$ is deelbaar door $(a + e)$
Tenslotte, als theorie:
als p en q beide deelbaar zijn door r, dan zijn $p+q$ en $|p-q|$ ook deelbaar door r.

Nu heb je eindeloos veel mogelijkheden om vormen te vinden, die lijken op wat ik in het begin schreef.
Probeer maar eens een paar voorbeelden te bedenken.
Zie ook bladzijde 30.

Frank Roos

DE WIELERWEDSTRIJD

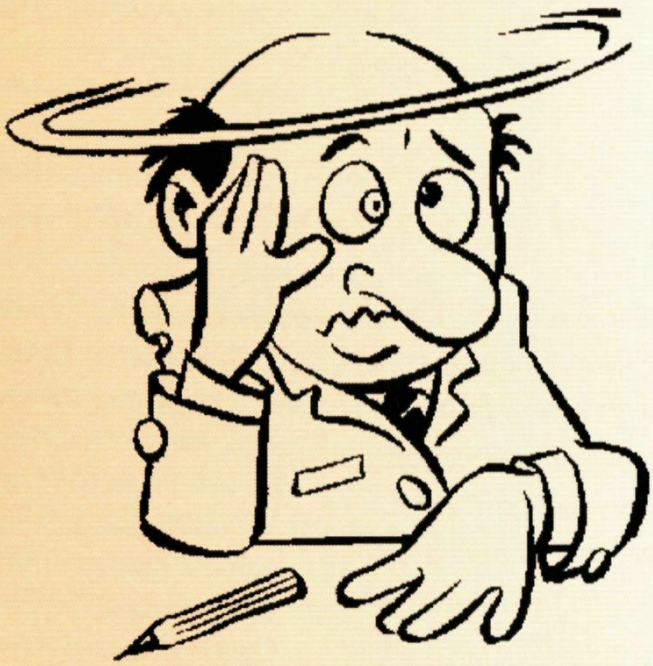


In verband met het bevrijdingsfeest had de winkeliersvereniging een wielerwedstrijd voor jonge kinderen georganiseerd.
Het traject had een lengte van 5,0 km heen en 5,0 km terug.
Op de dag van de wedstrijd waaide het en steeds met de wind in het gezicht behaalde een wielrenner slechts een snelheid van 18 km/uur.
Op de terugweg had hij steeds wind mee.
Wat was zijn snelheid op de terugweg, als zijn totaal gemiddelde 20 km/uur was? Zie bladzijde 29.

Bob de Jongste

PYTHAGORAS

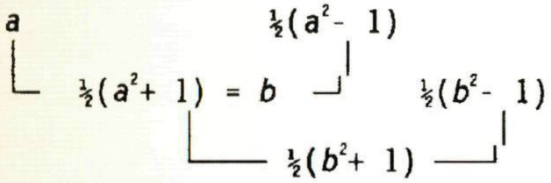
In het vorige nummer vond je een aantal reacties op het artikel over Pythagorasboompjes van Sander van Rijnswouw. Een andere reactie met een zeer theoretische opbouw komt van F. v.d. Blij. Ook hier wordt gebruik gemaakt van Pythagorische drietallen en primitieven.



Zijn betoog is opgebouwd uit een aantal eigenschappen/stellingen, die iedere keer bewezen worden.
Hij begint gewoon aan de onderkant van een boompje.
Eerst enkele gedachten over een heel lange, misschien wel wat kale boom.

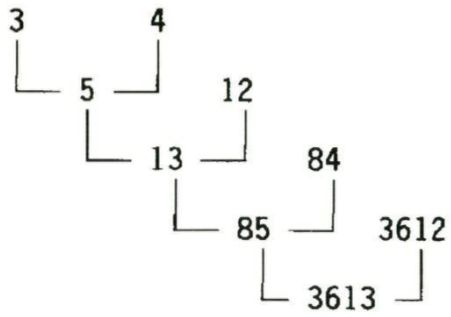
Beginnend met een willekeurig oneven getal a , groter dan 1, is a, $\frac{1}{2}(a^2-1)$, $\frac{1}{2}(a^2+1)$ een Pythagoras-drietal, dus een boompje.

Immers
$a^2+\frac{1}{4}(a^2-1)^2=\frac{1}{4}(a^2+1)^2$.
Als a oneven is, dan is a^2 een viervoud +1 , a^2+1 een viervoud +2 , en $\frac{1}{2}(a^2+1)$ een tweevoud +1, dus weer oneven.
Noemen we $\frac{1}{2}(a^2+1)=b$, dan kunnen we een hogere boom tekenen.



BOOMPJES VERVOLG

Zo kunnen we doorgaan, bijvoorbeeld:



Maar het wordt geen weelderige kruin.
Hoe vinden we die?
Eerst een opmerking.
Uit een boom zijn direct willekeurig veel andere bomen af te leiden door alle getallen van de boom met eenzelfde getal te vermenigvuldigen. De zo afgeleide bomen noemen we *niet-origineel.* Bomen die niet op deze manier verkregen worden noemen we *origineel.*
Begin je als wortelgetal van de boom met een even getal, dan wordt de boom nooit origineel.
Bekijk het boompje dat hoort bij het Pythagorasdrietal a,b,c met c even.
Omdat $c^2 = a^2 + b^2$ is $a^2 + b^2$ een viervoud.
Nu is een kwadraat óf een viervoud óf een viervoud +1.
De som van twee kwadraten kan dus alleen een viervoud zijn als beide kwadraten een viervoud zijn. Dus zijn a en b ook even en is het boompje niet-origineel.
We verdelen nu de oneven priemgetallen in twee groepen, de priemgetallen die een viervoud +1 zijn en die we *mooi* noemen, en de priemgetallen die een viervoud +3 zijn, die we *lelijk* noemen. Zo zijn
5, 13, 17, 29, 37, 41, ... mooie priemgetallen en
3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, ... lelijke priemgetallen.
Men heeft bewezen dat er zowel oneindig veel mooie als lelijke priemgetallen bestaan. Ook zijn er in zeker opzicht evenveel mooie als lelijke priemgetallen.

Een lelijk priemgetal kan nooit de som zijn van twee kwadraten van twee gehele getallen. Een mooi priemgetal is op één manier te schrijven als de som van twee kwadraten van gehele getallen.

Het is duidelijk dat de som van twee kwadraten nooit een viervoud +3 kan zijn.
De tweede uitspraak bewijzen we hier niet, we geven alleen een paar voorbeelden.
$5 = 4 + 1$, $13 = 9 + 4$, $17 = 16 + 1$, $29 = 25 + 4$, $37 = 36 + 1$, $41 = 25 + 16$, enz.

Een boom, waarvan het wortelgetal even is, of deelbaar door een lelijk priemgetal is niet-origineel.

De uitspraak over even bewezen we al, die voor de lelijke priemgetallen laten we even zitten.

Er zijn geen bomen die als wortelgetal een produkt van lelijke priemgetallen hebben.

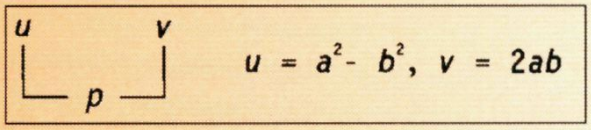
Laat q een lelijk priemgetal zijn en laat $a^2 + b^2 = q^2$.
Dan moeten op grond van de vorige eigenschap a en b door q deelbaar zijn.
Maar dan is $a^2 + b^2$ groter dan q^2, hetgeen een tegenspraak is.
Het geval van een produkt

van dezelfde of verschillende lelijke priemgetallen moet je nu zelf kunnen uitzoeken.

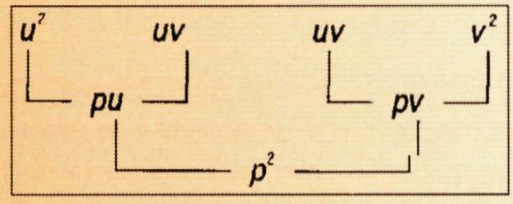
Elk mooi priemgetal is wortelgetal van een origineel boompje.

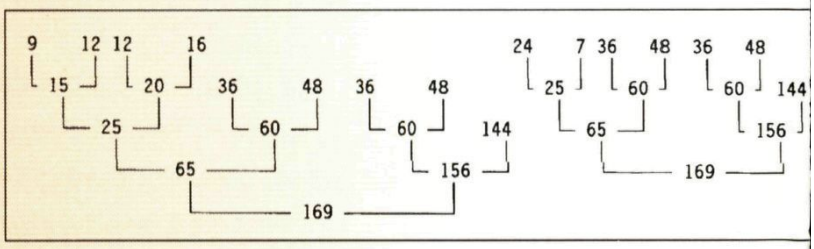
Stel $p = a^2 + b^2$, dan is $a^2 - b^2$, $2ab$, p een Pythagorisch drietal. Bovendien kunnen $a^2 - b^2$ en $2ab$ geen deler gemeen hebben want het kwadraat van die deler zou je op p^2 moeten kunnen delen.
Nu enkele voorbeelden.
Laat $p = a^2 + b^2$.

Een boompje is dus

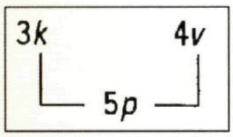


Maar nog mooier ook:





Kunnen er boven u^2, uv en v^2 nog verdere takken komen?
En boven $u^2 - v^2$ en $2uv$?
Als $a^2 + b^2 = c^2$, dan is abc een veelvoud van 5.
Een kwadraat is altijd óf een vijfvoud óf een vijfvoud +1 óf een vijfvoud +4.
Als je dit gebruikt en alle mogelijkheden nagaat, zie je dat altijd één van de getallen a, b of c een vijfvoud moet zijn.
Je kunt zelfs bewijzen, dat abc een veelvoud van 60 moet zijn.
Als p groter wordt dan 5, kunnen de bomen boven p^2 altijd nog groter worden dan boven aangegeven is.
Tenminste één van de boven gevonden toppen moet dan immers een vijfvoud zijn, en ieder veelvoud van 5 is verder te vertakken:



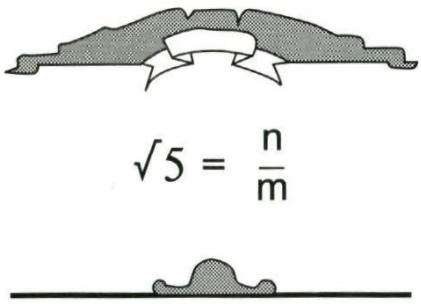
Voor de aardigheid het voorbeeld voor 13^2.

Als je zelf een mooi bos wilt ontwerpen, moet je eens met 97 beginnen.
Je vindt het drietal 65, 72, 97 en boven 65 kun je op vele manieren verdere vertakkingen vinden.

F. v.d. Blij

HOEVEEL IS . . .

Hoeveel is $\sqrt{5}$?
$2{,}2 = \frac{11}{5}$ of misschien
$2{,}236 = \frac{559}{40}$?
$2{,}236068$ of $\frac{9}{4}$?
$\frac{38}{17}$ of $\frac{161}{72}$?
$\frac{2889}{1292}$ of $\frac{12238}{5473}$?



IRRATIONAAL GETAL

We gaan bewijzen, dat $\sqrt{5}$ niet geschreven kan worden als $\frac{n}{m}$, waarbij m en n gehele getallen zijn. We gaan er van uit, dat de grootste gemeenschappelijke deler (ggd) van n en m één is, met andere woorden: de breuk $\frac{n}{m}$ is niet verder te vereenvoudigen. De breuk $\frac{n}{m}$ is dan rationaal.

DRIE MOGELIJKHEDEN

$\sqrt{5}$ bestaat niet.
$\sqrt{5}$ bestaat wel en kunnen we schrijven als $\frac{n}{m}$.
$\sqrt{5}$ bestaat wel en kan niet geschreven worden als $\frac{n}{m}$.

BESTAAN

Omdat $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$ gedefinieerd is als 5, bestaat $\sqrt{5}$ dankzij deze definitie.

INDIRECT BEWIJS

We gaan er nu van uit, dat $\sqrt{5}$ wel bestaat en dat we $\sqrt{5}$ kunnen schrijven als $\frac{n}{m}$.
Als we dan tijdens de redenering op een tegenstrijdigheid (een contradictie) stuiten, dan moeten we besluiten, dat $\sqrt{5}$ wel bestaat, maar niet te schrijven is als $\frac{n}{m}$.
Als een bewijs op zo'n manier geleverd wordt, dan is dat een indirect bewijs.

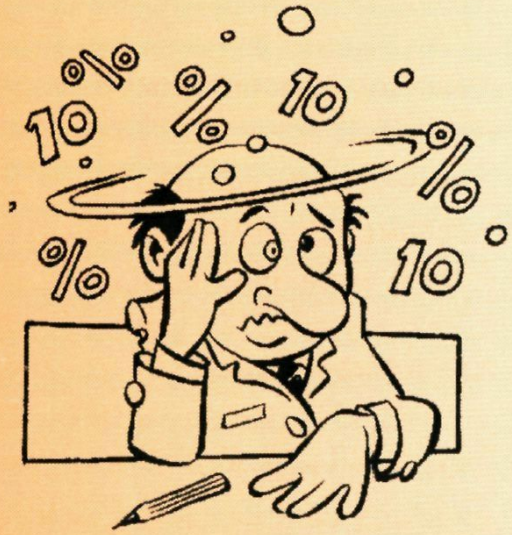
DE REDENERING

Als $\sqrt{5} = \frac{n}{m}$, dan is $n^2 = 5m^2$.
Dat kan alleen als n^2 de factor 5 bevat.
Dan moet n deelbaar zijn door 5 of $n = 5p$.
Hierin is p een heel getal groter dan nul. We hebben nu: $(5p)^2 = 5m^2$ of $5p^2 = m^2$.
Dat kan alleen als m^2 de factor 5 bevat. Dan moet m deelbaar zijn door 5.

We hebben nu gevonden, dat m deelbaar is door 5, maar n ook. We zijn er echter van uitgegaan, dat m en n geen andere gemeenschappelijke deler hadden dan één. We stuiten hier op een tegenspraak. De conclusie moet dus zijn, dat $\sqrt{5}$ niet te schrijven is als $\frac{n}{m}$.
Getallen, die niet te schrijven zijn als $\frac{n}{m}$ heten irrationaal en dus is $\sqrt{5}$ irrationaal.

Frank Roos

PROCENT



a. Neem een willekeurig getal in je gedachten.
b. Doe er 10% bij.
c. Haal er 10% vanaf.
d. Herhaal b en c eindeloos.

Op welk getal kom je "tenslotte" uit?
Krijg je een ander resultaat als je b en c verwisselt?
Wat is de invloed van het percentage?
Zie bladzijde 29.

STAARTDELING PUZZEL

Ontcijfer deze staartdeling. waar geen stippen staan, komen ook geen cijfers.

```
...|.......\..7..
   ...
   ---
     ...
   ...
   --
    ....
   ....
   ----
      0
```

Oplossing op pagina 29.

PROGRAMMEREN

Hieronder zie je het gestelde probleem opgelost met een eenvoudig basic-programma:

```
10 input"begingetal";a
20 input"aantal lussen";n
30 for k=1 to n
40 a=a*1.1:? a;
50 a=a*0.9:? a
60 next
```

Je kunt zelf wel de regels 40 en 50 verwisselen, als je zo ver bent.

SPREAD-SHEET

Wie enige ervaring heeft met een spreadsheet, kan het probleem ook daarmee bekijken.
Werkprogramma's zijn bijvoorbeeld PCcalc, Planperfect en Visicalc (de oudste in zijn soort).

	A	B	C
2			
3			123.45
4		1.1*C3	0.9*B4
5		1.1*C4	0.9*B5
6		1.1*C5	0.9*B6
7		1.1*C6	0.9*B7
8		1.1*C7	0.9*B8
		...	...

Een spread-sheet of reken-vel kun je als volgt vullen.
In cel C3 staat een willekeurig startgetal.
De reken-volgorde moet je per rij kiezen. De computer rekent dan in de leesvolgorde.
Als je rij (horizontaal) nummer 4 hebt ingetoetst, dan kun je met kopiëren net

zoveel rijen krijgen als je maar wilt. Om te proberen, kopieer je eerst b.v. vijf maal. Let wel op, dat je variabelen moet kopiëren en geen constanten.

D	E	F
	0.9*F3	1.1*E4
	0.9*F4	1.1*E5
	0.9*F5	1.1*E6
	0.9*F6	1.1*E7
	0.9*F7	1.1*E8
	...	...

Je kunt de spread-sheet verfraaien door de kolombreedte aan te passen en de getallen of links of rechts uit te lijnen.

Probeer zelf een spreadsheet te maken met een variabel percentage.

Frank Roos

EN BREIEN

Een veel gemaakte schrijffout bij het rekenen is het zogenaamde breien. Bekijk de volgende opdracht.

Bereken 3 + 1 + 5 - 7
Veel mensen schrijven dat zo: 3 + 1 = 4 + 5 = 9 - 7 = 2.
Het is duidelijk dat deze rekenaar begrijpt, wat er van hem verlangt wordt.
Niettemin is de schrijfwijze fout! Kijk maar naar het eerste deel van de bewering:
3 + 1 = 4 + 5.

Daar klopt niets van, hè!
Het is deze foute manier van doen die breien wordt genoemd.
Ben jij ook een breier?
Een correcte schrijfwijze is:

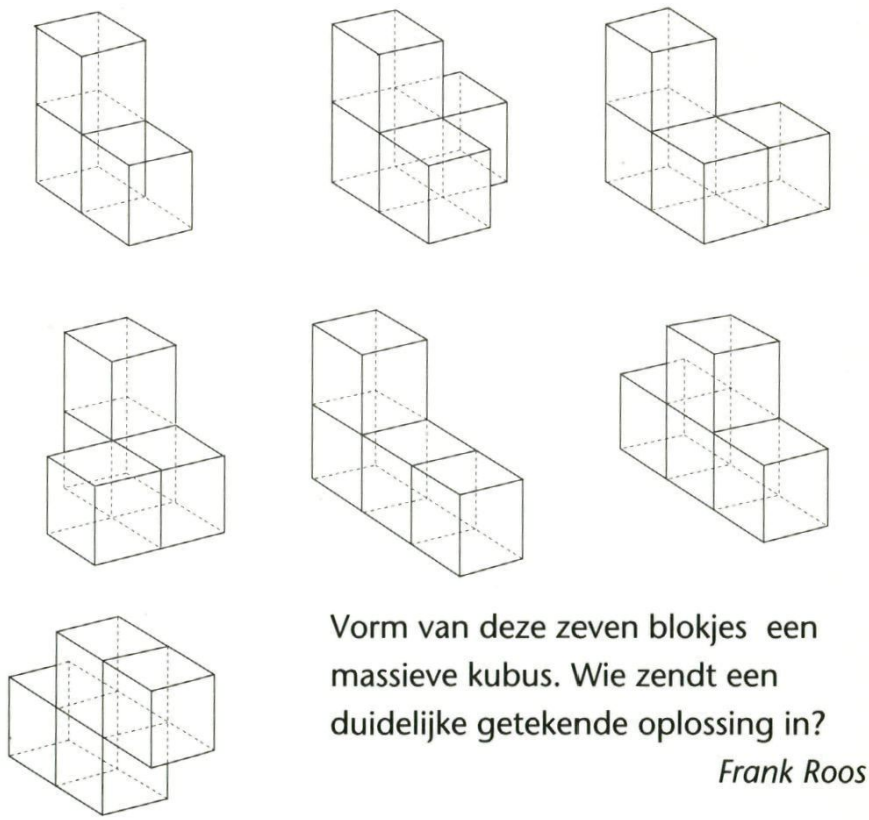
3 + 1 = 4
4 + 5 = 9
9 - 7 = 2

Misschien nog beter is:

3 + 1 + 5 - 7 =
4 + 5 - 7 =
9 - 7 =
2

Frank Roos

KUBUS-PUZZEL



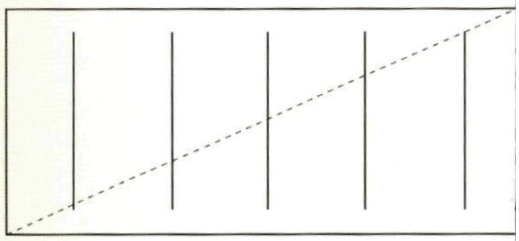
Vorm van deze zeven blokjes een massieve kubus. Wie zendt een duidelijke getekende oplossing in?

Frank Roos

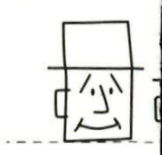
PARADO

Op bladzijde 26 van deel 1 van deze jaargang van Pythagoras hebben wij het gehad over een Chinese piraat, die van de aardbodem verdween. Dit was een constructie van Sam Loyd, de beroemde ontwerper van mathematische puzzels. Je zult intussen wel begrepen hebben, dat de totale oppervlakte van de figuren dezelfde blijft. Men verdeelt het oppervlak over twaalf of dertien figuren.
De Amerikaanse wiskundige Martin Gardner noemt dit soort paradoxen "het principe van de verborgen verdeling". Een paradox is een schijnbare tegenstrijdigheid. Para = tegen en doxe = mening.

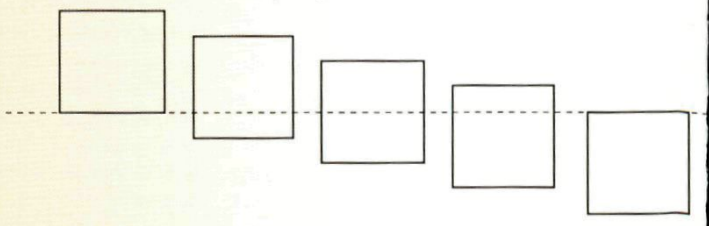
Kopieer deze figuur, waarin je vijf even lange, evenwijdige lijnen ziet. Als je de gestippelde diagonaal volgt, dan zie je, dat de lijnen boven de diagonaal gelijkmatig in lengte afnemen, terwijl eronder een toename te zien is.



Knip de figuur nu over de diagonaal door. Verschuif het onderste deel langs de diagonaal. Afhankelijk van de manier van schuiven is het aantal waarneembare lijnen variabel!
De totale lengte verandert natuurlijk niet.



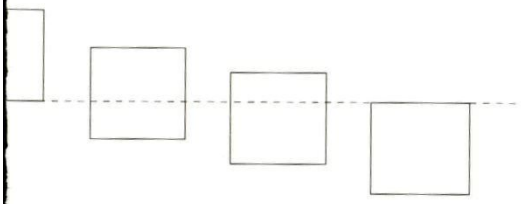
Met de volgende figuur kun je een gelijksoortig verschijnsel waarnemen:



PRET ZONDER WET

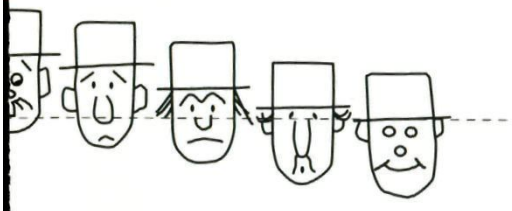
Toevallig is
$2! + 2 = 2^2$
$3! + 3 = 3^2$
Maar ook
$4! + 1 = 5^2$
$5! + 1 = 11^2$
$7! + 1 = 71^2$
zijn leuk !
Einde

Je kunt de rechthoeken vervangen door gezichten of voorwerpen, zolang je de afstanden en maten maar gelijk houdt.



Sam Loyd heeft bij zijn Chinese piraten de rechte lijn vervangen door een cirkel. Nu kun je zelf ook je fantasie gebruiken om een dergelijke schuifpuzzel te ontwerpen.

Bob de Jongste



KANT EN KLARE FILOSOFIE

Immanuel Kant (1724-1804) is bekend als een geweldig begaafde filosoof. Zijn volgende stelling is voor de wetenschap erg belangrijk. Hij legt in die stelling uit, dat redeneren aan beperkingen gebonden is. Hier komt zijn stelling.

1. Wij, mensen, nemen waar met onze zintuigen in de ons toebedeelde ruimte en tijd.
2. Onze kennis berust op de zo opgedane gewaarwordingen.
3. Het ding op zichzelf, dat we waarnemen, kennen we niet.
4. Wetenschap stelt vast, dat, wat waarneembaar bestaat, alleen maar een verschijningsvorm is.

Sterk verwant met punt 4 is het citaat van de hedendaagse Belgische filosoof Arnold Cornelis, die zegt:
"De waarheid is een rij van mogelijkheden".

Kant maakt uit deze stelling de logische gevolgtrekking, dat dingen en wezens, die niet waarneembaar zijn, niet zuiver beredeneerbaar zijn. Je kan er slechts over fantaseren.
Kant beweert niet, dat iets niet bestaat, als het niet waarneembaar is. Daarmee laat hij alle bestaansruimte voor godsdienst, maar ook bijgeloof, voortbestaan.

Zijn oorspronkelijk duitstalige werk, waarin je dat kunt terugvinden, heet "Kritik der reinen Vernunft". Hij wordt alom erkend.

EEN "KANTTEKENING"!

Toch heb ik bezwaar tegen Kant. Hij blokkeert de theorievorming in de fysica, maar ook "mijn dagelijkse leven".

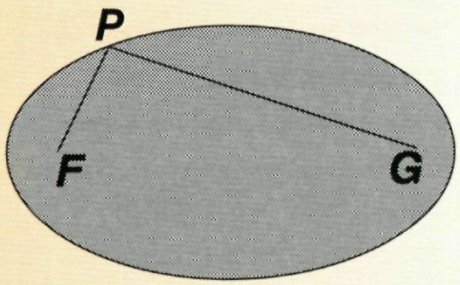
Avogadro kwam met de molecule-theorie. Moleculen waren, zeker in de tijd van Kant, op geen enkele manier waarneembaar. Ik zou dan volgens Kant niet zuiver kunnen redeneren over de moleculen, omdat ik ze immers niet zintuiglijk kan waarnemen.

Ik beschik over een aantal aanwijzingen, dat Nieuw Zeeland bestaat. Niettemin heb ik dat land nooit zintuiglijk waargenomen. Mag ik er dan niet over redeneren?

Ik kan zo met Kant geen kant op! Wie helpt me uit deze dwaling? *Frank Roos*

DE ELLIP

De ellips is een verzameling punten, waarvoor geldt, dat de som van de afstanden tot twee vaste punten steeds gelijk is.



Het Sint Pieter Plein in Rome heeft de vorm van een ellips. Vanuit de koepel van de Sint Pieter is dat goed te zien. Als je op het plein in een brandpunt van de elips gaat staan zie je slechts een rij zuilen.

Noemen we de vaste punten F en G en die vaste som van de afstanden s, dan is dus voor een willekeurig punt P op de ellips:
$PF + PG = s$

EEN ELLIPS-PASSER.

Je bent op het strand.
Duw twee stokken F en G een stuk het zand in.
Zie figuur 1.
Neem een draad, die langer is dan de afstand van de stokken en maak de draad aan F en G vast.

Beweeg nu met een derde stok *P* door het zand, terwijl je de draad strak houdt: dan teken je een ellips in het zand.

ANDERS

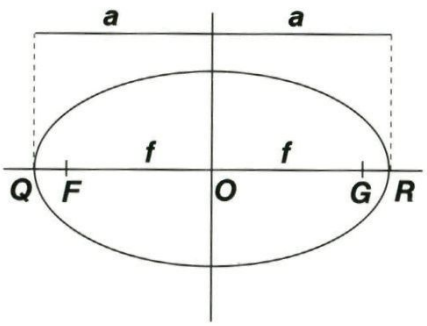
Je kunt ook een touw nemen dat minstens twee maal zo lang is als *FG*.
Het touw zit nu niet aan *F* of *G* vast, maar glijdt er wel steeds langs.
Probeer het maar eens!

Zo kun je ook een mooi grasperk in je tuin maken, een tafelblad of een schilderij- of spiegellijst.

DE BRANDPUNTS-AFSTAND EN LANGE AS.

F en *G* heten de brandpunten van de ellips. Midden tussen *F* en *G* ligt *O*, het snijpunt van de twee symmetrie-assen.
We noemen *FO* de brandpuntsafstand f van de ellips.
$FO = GO = f$.
De lijn door *F* en *G* snijdt de ellips in *Q* en *R*.
We noemen *QR* de lange as van de ellips.

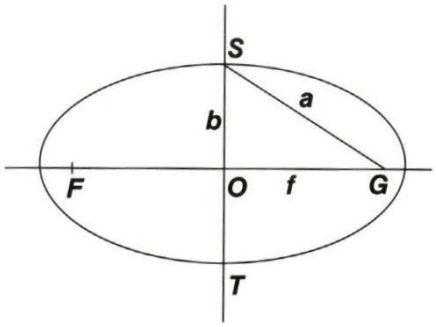
Zijn lengte noemen we $2a$.
Dan is $QO = OR =$ de halve lange as $= a$.



R ligt op de ellips.
Dus voor punt R geldt:
$FR + GR = s$. Dan:
$(FO + OR) + (OR - OG) = s$
of $(f + a) + (a - f) = s$ of
$s = 2a$.
De vaste-som-afstand blijkt dus de lengte van de lange as te zijn !

DE KORTE AS.

De middelloodlijn van *FG* of *QR* snijdt de ellips in *S* en *T*. *ST* heet de korte as van de ellips en voor de lengte van *TS* nemen we $2b$.



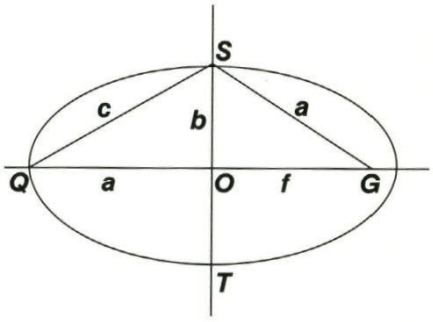
Omdat *S* op de ellips ligt is
$FS + GS = s = 2a$.
Dan geldt: $FS = GS =$
a en $b^2 + f^2 = a^2$.

DE EXCENTRICITEIT.

De excentriciteit *e* vertelt iets over vorm van de ellips.
$e = f:a$.
Omdat $f < a$ is, is $e < 1$.
Hoe groter *e*, hoe langgerekter de ellips.
Als *e* zeer klein is, dan lijkt de ellips op een cirkel.
De eccentriciteit van de cirkel is nul.

SAMENVATTING.

Drukken we alle maten uit in de lengtes van de halve grote en kleine as, dan vinden we:



$f = \sqrt{(a^2 - b^2)}$,
$c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$,
$e = \sqrt{(1 - (b/a)^2)}$ en
$s = 2a$.

DE OPPERVLAKTE

van de ellips is exact πab. Dat is duidelijk verwant aan de oppervlakte van een cirkel, die πr^2 is. Overigens, als je bij de elllips $a=b$ kiest, dan heb je een cirkel.

DE OMTREK.

Voor de omtrek p van een ellips bestaat een formule, die zeer moeilijk af te leiden is en die bovendien zeer lastig hanteerbaar is. Het begin van de formule is:

$$p = 2\pi a[1 - (\tfrac{1}{2})^2 \cdot e^2 - (\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4})^2 \cdot \tfrac{e^4}{3} - \cdots]$$

De volgende termen bevatten e^6, e^8, $\cdots$. Deze rij "convergeert". Dat wil zeggen, dat deze som met oneindig veel termen toch een eindig antwoord oplevert. Dat kan alleen als elke volgende term "voldoende snel naar nul nadert".

DE OMTREK BENADEREN.

Als we alleen de afgedrukte termen optellen, dan wordt de benadering

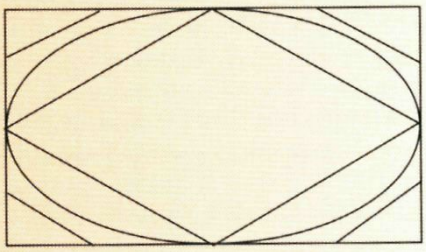
$$p = \frac{\pi \cdot (3a^2 + b^2)}{2a}$$

$$= 4{,}7a + \frac{1{,}6b^2}{a}$$

en dus hebben we de termen, die de vierde of hogere macht van e bevatten, verwaarloosd.

ZELF PROBEREN.

Laten we eens proberen om zelf een benadering te vinden voor de omtrek. De c is de lengte van de zijden van de getekende ruit. Uit de figuur blijkt, dat p iets groter moet zijn dan $4c$, de omtrek van de ruit binnen de ellips.



Omtrek p moet kleiner zijn dan de omtrek van de rechthoek, die je om de ellips kan tekenen, dus $p < 4a + 4b$.
De zijden van de omgeschreven rechthoek delen we in vieren. We kunnen nu binnen de rechthoek, maar buiten de ellips een achthoek tekenen. Zie de figuur. Ga zelf na, dat de omtrek van die achthoek $2 \cdot (a + b + c)$ is.

We hebben p nu ingesloten tussen de waarden $4c$ en $2(a + b + c)$.
Het gemiddelde hiervan zal een aardige benadering zijn van p, dus
$p \approx a + b + 3c$ of
$p \approx a + b + 3 \cdot \sqrt{(a^2 + b^2)}$.

VRAAG:

Kun je aantonen, dat de omtrek van de ellips circa 1,05 maal de omtrek van de ruit is met een onbetrouwbaarheid van hoogstens 5 % ?
Zie bladzijde 27.

Een nauwere bovenbegrenzing geeft een achthoek, die met de schuine zijde aan de ellips raakt. Het middelen geeft dan wel een slechtere benadering !
Is er een lezer(es), die kan bewijzen, dat hij/zij een betere benadering voor de omtrek kan vinden ?
De beste inzending zal worden gepubliceerd.
Je uitleg moet wel voor de gemiddelde Pythagoras-abonnee lees- en verteerbaar blijven!

Frank Roos

DE PRIEMGETALLEN VAN FERMAT

Pierre Fermat, een Franse wiskundige, die leefde van 1601 tot 1665, is een van de grondleggers van de moderne getallenleer. Hij beweerde, dat getallen van de vorm $2^{2^{2n}}+1$ priemgetallen zijn, dus alleen maar deelbaar door 1 en zichzelf.

Als n de waarden 0, 1, 2, 3 en 4 heeft, klopt dit.
Je krijgt dan de getallen 3, 5, 17, 257 en 65537 en deze getallen zijn inderdaad priem.
Maar voor $n = 5$ krijg je 4 294 967 297 en dit getal is geen priem.
We kunnen aantonen dat 641 een factor is van $2^{32}+1$.

Dit gaat als volgt.
$641 = 625 + 16 = 5^4 + 2^4$.
Dus 641 is een factor van $2^{28}(5^4 + 2^4) = 5^4 \cdot 2^{28} + 2^{32}$.

Verder is $641 = 5 \cdot 128 + 1 = 5 \cdot 2^7 + 1$.
Dus is 641 een factor van $(5 \cdot 2^7 + 1)(5 \cdot 2^7 - 1)$.
Dit getal is gelijk aan $5^2 \cdot 2^{14} - 1$.
Dus 641 is ook een factor van $(5^2 \cdot 2^{14} - 1)(5^2 \cdot 2^{14} + 1)$.
Dit laatste getal kun je schrijven als $5^4 \cdot 2^{28} - 1$.

641 is dus ook een factor van het verschil van
$5^4 \cdot 2^{28} + 2^{32}$ en $5^4 \cdot 2^{28} - 1$,
dus van $(5^4 \cdot 2^{28} + 2^{32}) - (5^4 \cdot 2^{28} - 1) = 2^{32} + 1$.

Voor $n = 5$ krijg je dus als deler 641.
Men neemt aan dat er geen andere *Fermat-priemgetallen* zijn dan de eerstgenoemde vijf stuks.

Bob de Jongste

DIMENSI

Bekijk de formule $x(t) = v(0)t + \frac{1}{2}at^2$. Zoals je weet, beschrijft hij de versnelde be-weging met beginsnelheid. Links staat een aantal meter; rechts moet dus ook een aantal meter staan.
Elk van de drie termen is van de dimensie lengte.
Dat klopt ook wel, want de ene term is een snelheid maal tijd en de tweede is een versnelling maal tijd maal tijd.

DIMENSIES IN DE WISKUNDE.

Bekijken we nu $y = ax^2 + bx + c$ uit de wiskunde. We zijn gewend om alle letters als reële getallen te bezien. Niettemin is het echt niet gek om x en y als lengtes te beschouwen. In dat geval moeten ax^2, bx en c ook lengtes zijn.

- Als zowel bx als x lengtes zijn, dan moet b wel een reëel getal voorstellen.
- Als ax^2 en x beide een lengte voorstellen, dan moet a een "omgekeerde lengte" zijn of $1:a$ is een lengte. Omgekeerde lengtes lijken vreemd, maar zij komen o.a. voor in de lenzenformule: $\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$

DE OPLOSSING

Laten we nu eens een dimensie beschouwing houden op de oplossing van de kwadratische vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$.
Die is, zoals we weten:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

OPVOLGER

Zie de rij der gehele getallen: ••• -3 -2 -1 0 1 2 •••.
De opvolger van 100 is 101.
De opvolger van 0 is 1.
De opvolger van -6 is -5.
Als z een geheel getal is, dan is zijn opvolger z + 1.
Dus elk geheel getal heeft een opvolger.
Waarom heeft een reëel getal, dat niet geheel is, geen opvolger?
Zie bladzijde 30.

Frank Roos

E 2

met $D = \sqrt{(b^2 - 4ac)}$.
b en b^2 zijn reële getallen, dan moet $4ac$ ook een reëel getal zijn. Dat is zo, want een lengte maal een omgekeerde lengte is een reëel getal. Dan is $\sqrt{D}$ ook een reëel getal, net als b.
Het klopt, dat zowel x als $\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ een lengte voorstellen.

EEN ALTERNATIEF.

Op grond van deze dimensiebeschouwing kunnen we de parabool ook voorstellen als $y = \frac{x^2}{4f} + bx + c$.
Nu zijn x, y en c lengtes; alleen b is een reëel getal.
De f is de brandpuntsafstand van de parabool.
Het waarom vereist een apart artikel. In ieder geval is f een lengte en daar gaat het om! De discriminant is
$D = b^2 - \frac{c}{f}$
en de oplossing van
$\frac{x^2}{4f} + bx + c = 0$ is
$x = 2f(-b \pm \sqrt{D}) =$
$= -2bf \pm \sqrt{(b^2f^2 - cf)}$.
De top van de parabool ligt bij $(x,y) = (-2bf\,,\, c - b^2f)$.

Frank Roos

MACHTEN

Met $a\sim b$ bedoel ik het laatste cijfer van a^b.
Zo is b.v. $3^6 = 729$; het laatste cijfer is een 9, dus $3\sim 6=9$. Het is toeval, dat $3 + 6$ ook 9 is.
Dat kun je zelf nagaan door andere voorbeelden te bekijken.

Met m en n bedoel ik een geheel positief getal.
Let nu eens op de volgende fraaie eigenschappen over machten.

Ga uit van een bepaalde macht. Vier machten hoger geeft altijd hetzelfde eindcijfer.
$m\sim(4n-3) = m\sim(4n+1)$
$m\sim(4n-1) = m\sim(4n+3)$

$m\sim(2n-1)$ kan elk cijfer zijn.
In woorden: het laatste cijfer van een willekeurige macht kan elk cijfer zijn.

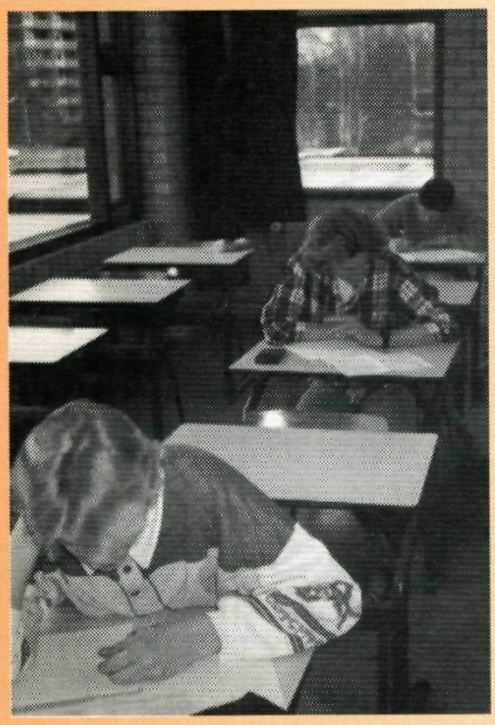
$m\sim(4n-2)$ kan 1 of 9 zijn, 4 of 6 dan wel 5.
$m\sim(4n)$ kan 1, 5 of 6 zijn.

$0\sim n=0$	$1\sim n=1$	$5\sim n=5$	$6\sim n=6$
$4\sim(2n)=6$		$4\sim(2n-1)=4$	
$9\sim(2n)=1$		$9\sim(2n-1)=9$	
$2\sim(4n-3)=2$	$2\sim(4n-2)=4$	$2\sim(4n-1)=8$	$2\sim(4n)=6$
$3\sim(4n-3)=3$	$3\sim(4n-2)=9$	$3\sim(4n-1)=7$	$3\sim(4n)=1$
$7\sim(4n-3)=7$	$7\sim(4n-2)=9$	$7\sim(4n-1)=3$	$3\sim(4n)=1$
$8\sim(4n-3)=8$	$8\sim(4n-2)=4$	$8\sim(4n-1)=2$	$8\sim(4n)=6$

Merk op, dat dit een gesloten theorie is.
Dat wil zeggen: er is niets meer aan toe te voegen!

Frank Roos

WISKUNDE OLYMPIAD



Op vrijdag 25 maart j.l. heeft de enkele malen uitgestelde voorronde van de wiskunde olympiade plaats gevonden. Meestal komen alleen de bollebozen aan het woord. Hier volgt het verslag van een leerling van het Newmancollege in Breda die duidelijk maakt dat deelnemen belangrijker is dan winnen.

DE VOORRONDE

Eindelijk was het dan zover, de 'langverwachte' eerste ronde van de wiskunde olympiade. Iedereen ging,ondanks weinig/geen voorbereiding in verband met de proefwerkweek, met goede moed aan het werk in de hoop voldoende punten te scoren om de tweede ronde in Eindhoven te halen.
Toen de opgaven waren uitgedeeld werd het stil en naarmate de tijd vorderde werd de gedachte aan de tweede ronde uit de meeste hoofden gezet.

De moeilijke vragen varieerden van minder moeilijk (2 punten) naar zeer moeilijk (4 punten).
Van de zeven deelnemende leerlingen was de hoogste score 21 punten en de laagste score 9 punten.
Het maximaal te halen punten was 36.
Waarschijnlijk heeft geen van de deelnemers de tweede ronde gehaald.
Maar iedereen heeft een nuttige (vrije) vrijdagmiddag gehad en iedereenheeft met plezier aan de

WISKUNDEKAMP

Komende zomer organiseert VIERKANT een 5-daags wiskundekamp voor jongeren. De aanvangsdatum is 29 augustus.
VIERKANT is een organisatie die voor jongeren tussen 12 en 16 jaar mogelijkheden wil creëren om met echte wiskunde kennis te maken.
In het kamp zullen diverse wiskundige programma's aangeboden worden: natuurlijk het oplossen van spannende vraagstukken; eigen onderzoek over thema's zoals de gulden snede of oneindigheid. Er zal een 'computer lab' beschikbaar zijn

2 VEELHOEKEN

Twee veelhoeken hebben samen 110 diagonalen. Welke zijn dit?
Oplossing op bladzijde 26.

E 1994

opgaven van de voorronde gewerkt.'s Avonds zullen vast enkele ouders zich afgevraagd hebben waarom hun kind vrijdagavond op haar/zijn kamer was ... Juist, om alle vragen nog eens te bekijken en na te rekenen.

Michiel Jasperse

Hier volgt een opgave uit de voorronde van de wiskunde olympiade:

Bepaal alle oplossingen van $(x^2 - 17x + 71)^{19x^2+94} = 1$.

Oplossing op pagina 30.

waarin de deelnemers zelf kunstwerken kunnen ontwerpen. De onderzoeks-activiteiten (circa 5 uur per dag) zullen worden aangevuld met lezingen, spelletjes en sportactiviteiten. Verdere informatie en aanmeldingsformulieren zijn te verkrijgen bij: dr. Zsofia Ruttkay, vice-voorzitter VIERKANT, Faculteit Wiskunde en Informatica, Vrije Universiteit Amsterdam, De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam. Tel: 020-5485782 / 035-561192.

Redactie

BANKKRAAK

Een bankrover met wiskunde in zijn pakket besluit op zekere nacht een inbraak te plegen in 'Le Banc de Paris'.

In het gebouw zijn drie vertrekken; in elk ervan staan twee kluizen. Momenteel wordt eraan gewerkt de kluizen van alarminrichtingen te voorzien, zonder dat dit uitwendig te zien is. De rover had er lucht van gekregen dat inmiddels in één vertrek de beide kluizen beveiligd zijn, in een ander nog slechts één en in het derde nog geen. Overigens is hij er nog niet achter waar de zaak veilig of onveilig is. Hij besluit op goed geluk zijn slag te slaan. Hij breekt een willekeurige kluis open en blijkt daarbij geluk te hebben; er gaat geen alarm af. Overmoedig door dit succes besluit hij ergens nog een tweede kluis te kraken. Wat geeft de inbreker minder risico: in dezelfde kamer de tweede kluis open te breken, of in één van beide andere vertrekken er een onder handen te nemen?

Zie voor de oplossing pagina 26.

Joost van der Sande

OPLOSSINGEN

TWEE VEELHOEKEN

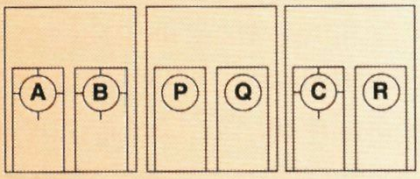
In een n-hoek kun je vanuit ieder hoekpunt $n - 3$ diagonalen trekken.
Immers naar elk hoekpunt, behalve naar zichzelf en naar beide buren.
Dat kun je vanuit elk hoekpunt herhalen, maar dan heb je wel elke diagonaal precies twee keer gerekend.
Daarom heeft elke n-hoek $\frac{1}{2}n(n - 3)$ diagonalen.
Het beste is nu om een tabel te maken.
Je ziet dan vlug:
$110 = 20 + 90$.
Het gaat dus om een achthoek en een vijftienhoek.

n-hoek	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
di agonalen	0	2	5	9	14	(20)	27	35	44	54	65	77	(90)

Henk Mulder

BANKKRAAK

1. We bepalen eerst de kans dat hij weer succes heeft als hij besluit zijn geluk in een van de andere vertrekken te beproeven.
De eerste mogelijkheid is dat hij in het geheel onbeveiligde vertrek zijn eerste slag geslagen heeft. Er bevindt zich in beide andere vertrekken samen nog maar één onbeveiligde kluis, dus één op de drie. Kans op succes dus $\frac{1}{3}$.



Stel vervolgens dat hij het eerst in het half beveiligde vertrek gewerkt heeft, dan zijn er in de overige twee ruimten nog twee favoriete exemplaren; kans dus $\frac{1}{2}$.
A, B en C zijn beveiligd.
P, Q en R niet.
2. Hoe groot is vervolgens dus de kans op succes bij het kraken van de andere kluis in hetzelfde vertrek?
Een soortgelijke redenering als hierboven doet je uitkomen op een kans $\frac{2}{3}$.
In dit laatste geval is de uitkomst hoger dan in het voorgaande. De rover met wiskunde in zijn pakket, besluit dus in dezelfde ruimte zijn tweede slag te slaan.

Commentaar op deze oplossing kun je sturen naar:
Marcel Snel
Prinses Christinalaan 44
6301 VZ Valkenburg
fax#: 04406-10570

DE ELLIPS OMTREK

De omtrek van de achthoek gedeeld door de omtrek van de ruit

$$x = \frac{2(a+b+c)}{4c} =$$

$$= \frac{a+b}{2c} + \frac{1}{2} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{a+b}{2\cdot\sqrt{(a^2+b^2)}} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1+\frac{b}{a}}{2\cdot\sqrt{(1+(\frac{b}{a})^2)}} =$$

Als $a = b$, dan is $k \approx 1{,}2$.
Als b veel kleiner dan a is, dan is $k \approx 1{,}0$.
Dus de omtrek van de achthoek is 1,0 à 1,2 maal de omtrek van de ruit.
Dus p, de omtrek van de ellips, het gemiddelde van die twee, is dan 1,0 à 1,1 maal de omtrek van de ruit.
Dus p is $(1{,}05 \pm 0{,}05)$ maal de omtrek van de ruit.
Dat is een speling of onbetrouwbaarheid van 5% ; geen mathematische exactheid ! *Frank Roos*

KLOKKIE VAN KOKKIE 1

1. De ene wijzer beweegt met $\frac{360^\circ}{50s}$; de andere met $\frac{360^\circ}{70s}$.

De ene wijzer beweegt dus met $\frac{360^\circ}{50s} + \frac{360^\circ}{70s}$ ten opzichte van de andere. Dat is de relatieve hoeksnelheid. Op zeker tijdstip hebben de wijzers dezelfde stand. Na p seconden vallen de wijzers weer over elkaar. Dan is de één ten opzichte van de ander 360° gedraaid. De snelheid is dan $\frac{360^\circ}{ps}$, maar ook

$$\frac{360^\circ}{50s} + \frac{360^\circ}{70s}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{50} + \frac{1}{70} \text{ of } p = 29\tfrac{1}{6}$$

Dus elke $29\frac{1}{6}$s lijken de wijzers te botsen.

2 We moeten nu het kleinste gemeenschappelijke veelvoud bepalen van 50s, 70s en $(29\frac{1}{6})$s.
Dat is 350 s. In die tijd heeft de ene wijzer 7 rondjes ten opzichte van de wijzerplaat gemaakt, de andere 5 en ze zijn 12 x "gebotst", de eerste of laatste keer niet meegerekend.

Hoe worden de antwoorden van 1 en 2 als de wijzers dezelfde kant op draaien? Zie hieronder.

KLOKKIE VAN KOKKIE 2

1. Nu is de snelheid van de één ten opzichte van de ander

$$\frac{360^\circ}{50s} + \frac{360^\circ}{70s}, \text{ maar ook } \frac{360^\circ}{p\,s}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{50} - \frac{1}{70}. \text{ Dus } p = 175.$$

Om de 175 s haalt de snelste wijzer de langzaamste in.

2 Het kleinste gemeenschappelijk veelvoud van 50s, 70s en 175s is 350s.

Na 350 s staan beide wijzers weer recht omhoog. De ene heeft dan 7, de andere 5 rondjes t.o.v. de wijzerplaat gemaakt. Intussen heeft de snelste wijzer de andere éénmaal ingehaald.

OPLOSSINGEN

MARS

De kleinste afstand van Mars tot de aarde is 78 Gm; de grootste 378 Gm, respectievelijk het verschil en de som van de baanstralen. De grootste afstand is 4,8 x zo groot als de kleinste. Daardoor zie je Mars onder een 4,8 x zo grote hoek tijdens de meest nabije stand t.o.v. de meest verre stand. Het oppervlak lijkt dan $4{,}8^2 = 23$ x zo groot. Deze benadering is alleen acceptabel, als de hoek, die hier een rol speelt, zeer klein is. Daaraan is zeker voldaan. Op de andere planeten kun je gelijksoortige beschouwingen houden

LICHTWERK

In 1 uur verplaatst
A $\frac{1}{3}$ m^3;
B $\frac{3}{8}$ m^3 en
C $\frac{5}{12}$ m^3.
In 1 uur verplaatsen ze dus samen
$\frac{1}{3} + \frac{3}{8} + \frac{5}{12} = \frac{9}{8}$ m^3 zand.
Voor het verplaatsen van 1 m^3 is dus $\frac{8}{9}$ uur nodig.

Marcel Snel

KWADRATEN

Het kwadraat van het even getal $2n$ is $4n^2$. Als je dit kwadraat deelt door vier, dan is de rest nul.
Het kwadraat van het oneven getal $2n+1$ is $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$
Als je dit deelt door vier, dan is de rest één.
Andere gehele getallen bestaan er niet, dus de rest kan slechts nul of één zijn en niet twee of drie.

Frank Roos

BOEKENWORM

Als de woordenboeken op de normale manier in de kast staan, dan zijn de A en de Z vlak bij elkaar.
De gevraagde tunnel is dan twee kaftdiktes lang: 6 mm.

PROCENTEN

Neem het begingetal a en doe er 10% bij.
$a + 0{,}1 \cdot a = 1{,}1 \cdot a$ .Dan vermenigvuldig je dus eigenlijk met 1,1.
Vervolgens haal je daar 10% van af.
Dus $1{,}1 \cdot a - 0{,}11 \cdot a = 0{,}99 \cdot a$.
Dan vermenigvuldig je eigenlijk met 0,9, want
$1{,}1 \cdot a \cdot 0{,}9 = 0{,}99 \cdot a$.
Na twee stappen heb je a dus vermenigvuldigd met
$(1 - 0{,}1)(1 + 0{,}1) =$
$(12 - 0{,}12) = 0{,}99$.
Dus, als je begint met a, dan heb je na twee stappen $0{,}99 \cdot a$.

ANDERSOM

Had je er eerst 10% vanaf gehaald en dan 10% erbij gedaan, dan had je ook $0{,}99a$ gevonden.
Na vier stappen heb je $0{,}99^2 \cdot a$.
Na zes stappen heb je $0{,}99^3 \cdot a$.
Na $2n$ stappen heb je $0{,}99^n \cdot a$.
Als n steeds maar groter wordt, dan komt $(0{,}99)^n \cdot a$ steeds dichter bij nul.

ANDER PERCENTAGE.

Elk ander percentage gaat ook onherroepelijk naar nul. Hoe groter het percentage, hoe sneller naar nul.

STAARTDELING

deler/deeltal\quotiënt
Omdat 7 x de deler minder is dan 1000, is die deler maximaal 142.
Het getal van drie cijfers, dat de eerste maal wordt afgetrokken, moet 99· zijn, want er blijft minder dan 10 over. Wat er werd afgetrokken kan zijn geweest:
$994 = 7 \cdot 142$ of
$992 = 8 \cdot 124$. Echter, de deler kan niet 142 zijn, want dan moet de tweede keer ook 994 afgetrokken worden en als we 994 aftrekken van een getal van drie cijfers, dan kan er niet meer dan 9 overblijven.
De deler is dus 124.
Het laatste cjfer van het quotiënt is dan noodgedwongen 9, want 9 x 124 moet meer dan 1000 zijn.

```
124/10007916\80709
   992
  ----
   879
   868
  ----
    1116
    1116
  ------
       0
```

H. Ligtenberg

WIELERWEDSTRIJD

Op de heenweg is de snelheid 18 km/uur.
18 km/uur = 5,0 km : tijd
De tijd van de heenweg was $\frac{5}{18}$ uur.
De gemiddelde snelheid is 20 km/uur =
10 km : (totale tijd)
De totale tijd is 0,5 uur.
De tijd voor terug is dan $(\frac{1}{2} - \frac{5}{18})$ uur = $\frac{2}{9}$ uur.

De snelheid op de terugweg = 5 km : $((\frac{2}{9})$ uur) = $22\frac{1}{2}$ km/uur.

OPLOSSINGEN

MACHTEN

$3^{4n} - 1$
is deelbaar door 80
$13^{4n} - 18^{2n}$ en $11^{3n} - 1$
zijn deelbaar door 17
$6^{2n} - 2^{3n}$ en $2^{n} + 2 \cdot 25^{n-1}$
zijn steeds deelbaar door 7
$5^{5n} - 1$
is deelbaar door 71
$11^{4n} - 1$
is deelbaar door het
priemgetal 183
$19^{3n} - 1$
is deelbaar door het
priemgetal 381
$11^{3n} - 7^{3n}$
is deelbaar door 19
$3^{3n+2} + 5 \cdot 9^{3n+1} - 2$
is deelbaar door 26

GELIJKZIJDIGE DRIEHOEK

$c = \frac{(a \pm b\sqrt{3})}{2}$ $\qquad$ $d = \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)}$

$c^2 = \frac{(a^2 \pm 2ab\sqrt{3} + 3b^2)}{4}$ $\qquad$ $d = \frac{1}{2}\sqrt{(3a^2 \pm 2ab\sqrt{3} + 3b^2)}$

De vraag stond in het vorige nummer.

OPVOLGER

Stel, dat de opvolger van p bestaat en q is. Dan krijg je een probleem, want het gemiddelde van p en q komt dan nog voor q.
Dus p heeft geen opvolger.

Een bewijs, waarbij aangetoond wordt, dat het tegendeel van de te bewijzen stelling door redenering tot iets leidt, dat onjuist is, heet 'een bewijs uit het ongerijmde'.

OLYMPIADE 1994

Algemeen: a^b is gelijk aan 1 wanneer (1) $a=1$;
(2) $a=-1$ en b is even;
(3) $b=0$ en $a>0$.
(1) $x^2-17x+71 = 1$
geeft $x=7$ of $x=10$;
(2) $x^2 - 17x + 71 = -1$ geeft $x=8$ of $x=9$, maar alleen bij $x=8$ is de exponent even; (3) $19x^2 + 94 = 0$ voor geen enkele x.
Conclusie $x=7$, $x=8$, $x=10$.

AFGELOPEN JAREN EEN NUMMER GEMIST?

DAN HEEFT U NU DE KANS
UW COLLECTIE
COMPLEET TE KRIJGEN.

OUDE NUMMERS
VANAF JAARGANG
27 (1988) ZIJN
VERKRIJGBAAR
VOOR

FL. 2,50 PER EX.

EXCLUSIEF VERZENDKOSTEN.

WEES ER SNEL BIJ!
DE OPLAGE IS BEPERKT.

VOOR INFORMATIE EN BESTELLEN:
BEL SONJA STEILBERG 070 - 31 43 512.

Verantwoording illustraties
Cartoons: Pieter Hoogenbirk
Foto omslag/p.24: Bob van Alphen
Tekeningen: o.a. Frank Roos
Foto Sint Pieter Plein:
Henk Huijsmans

Abonnementen
Nederlandse en Belgische abonnees: aanmelden telefonisch 070 - 314 35 94, of schriftelijk, NIAM ProjectOntwikkeling b.v. Antwoordnummer 97007, 2509 VH Den Haag.

Tarieven:
Abonnement Pythagoras
f 35,- of BF 650,-
Luchtpost toeslag binnen Europa f 10,-
Luchtposttoeslag buiten Europa f 15,-
Abonnement inclusief Archimedes f 65,- of BF 1200,-
Luchtpost toeslag binnen Europa f 20,-
Luchtpost toeslag buiten Europa f 20,-

Betaling
Wacht met betalen tot u de acceptgirokaart krijgt toegestuurd. Bij tussentijdse abonnering ontvangt u alle nummers van de lopende jaargang. Abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk bij de uitgever is opgezegd.

Uitgever:
NIAM, ProjectOntwikkeling b.v.
Postbus 97734
2509 GC Den Haag.
Tel.: 070 - 314 35 94
Fax: 070 - 314 35 88
Giro 33.84.52.