

PRYTHAGORAS

WISKUNDE TIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

33 E JAARGANG

SEPTEMBER 1994 NUMMER 6

*De maan en
een verduistering*

4

*Numeriek
integreren*

12

*Eskwa's
als grilrij*

18

*Een programmeer-
probleem*

22

DOORD IN

UITGAVE:

Pythagoras is een uitgave van NIAM ProjectOntwikkeling b.v. en verschijnt zesmaal per jaar. Een jaargang loopt van september tot en met augustus.

REDACTIE:

Jan Mahieu
Frank Roos
Marcel Snel

EINDREDACTIE:

Henk Huijsmans

NIEUWE ARTIKELEN:

Molenstraat 31,
4841 CA Prinsenbeek

CORRESPONDENTIE-ADRES:

Reacties,
oplossingen enz.
Frank Roos,
Klink 19
9356 DG Tolkert

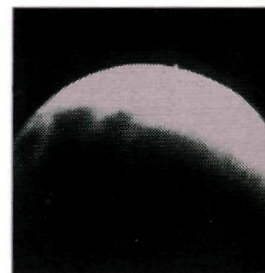
MEDEWERKERS:

Bob de Jongste,
Hans de Rijk,
Paul van de Veen,
Thijs Notenboom.

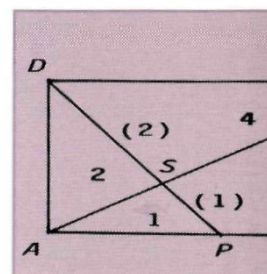
• VOORWOORD	3
• DE MAAN EN EEN VERDUISTERING	4
• CITAAT VAN JJ ROUSSEAU	4
• STAARTDELEN VAN VEELTERMEN	6
• DE BOL EN DE CILINDER	7
• EEN PLAATJE	8
• VIERENDELEN	8
• DE KWADRATUUR VAN EEN FIGUUR (1)	9
• GETALPATRONEN	10
• EEN TEMPERSTUURSGRADIËNT	10
• EVENWIJDIGE LIJNEN	11
• 555	12
• NUMERIEK INTEGREREN	12
• PARABOLEN	15
• JARIG	16
• EEN GASLEK	16
• KRUISGETALRAADSEL	17
• EEN VERNUFTIG BEWIJS VOOR DE STELLING VAN PYTHAGORAS	18
• ESKWA'S ALS GRILRIJ	18
• DE GAMMA FUNCTIE $\Gamma(x)$	21
• HOE BESTAAT HET!	22
• EEN PROGRAMMEERPROBLEEM	22
• LAATSTE STELLING VAN FERMAT	24
• ROTATIE-TRANSLATIE	25
• RIJ-RAADSEL	26
• EEN LASTIGE BREUK	26
• DES LEZERS PENNEVRUCHT	28
• OPLOSSINGEN	30

EEN GREEP UIT DE INHOUD

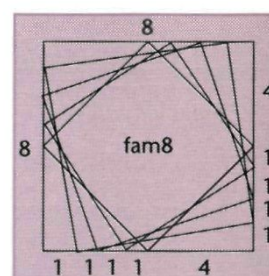
Bij een maansverduistering komt de maan in de schaduw van de aarde terecht. Dat roept een aantal vragen op. Op pagina 4 vind je er meer over.



Als je in een rechthoek $ABCD$ diagonalen tekent, dan verdeel je op die manier de rechthoek in vier stukken met gelijke oppervlakten. Maar er zijn meer mogelijkheden. Lees het artikel op pagina 8.



In een vorige jaargang zijn grilrijen geïntroduceerd. De bekendste grilrij is de rij van de priemgetallen. In het artikel op pagina 18 krijg je nu te maken met eskwa's en neskwa's.



Als in de teller van een breuk alle gehele oneven getallen staan en in de noemer alle gehele even getallen, hoe kun je dan deze breuk uitrekenen? Het artikel "Een lastige breuk" op pagina 26 vertelt er meer over.

Veel lees en puzzelplezier,
Henk Huijsmans

$$p = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots}{4(1 \times 1) \times 4(2 \times 2) \times \dots}$$

DE MAAN EN

Soms komt de maan tijdens volle maan in de schaduw van de aarde terecht. Dan krijg je een maansverduistering. Naar aanleiding hiervan borrelen de volgende vragen op.

FLETS

Waarom is de maan tijdens volle maan wel helder, maar zo flets?

Tijdens volle maan staan de zon, aarde en maan (vrijwel) op één lijn. Van de aarde uit gezien is de maan dan vol verlicht. De bergen op de maan hebben bij deze bestraling geen schaduw en dat geeft het weinig contrastrijke of fletse beeld.

CITAAT

van JJ Rousseau.

Ik heb gezegd, dat de wiskunde niet in het bereik van de kinderen lag. Maar dat komt, omdat wij te kort schieten [met goede uitleg]. Wij voelen niet goed aan, dat hun werkwijze volstrekt anders is dan de onze."



ALLEEN DAN

Waarom is er alleen maar bij volle maan een maansverduistering mogelijk?

Tijdens volle maan staan de zon aarde en maan vrijwel op één lijn. Alleen dan is de maan in de buurt van de kernschaduw van de aarde of er in.

WAAROM SOMS

Waarom is er niet bij elke volle maan een maansverduistering?

De baan van de maan maakt een hoek van $5,1^\circ$ met de baan van de aarde. Daardoor beweegt de maan soms over de schaduw van de aarde

EEN VERDUISTERING

heen en soms er onder door. De snijlijn van die twee banen draait in circa 19 jaar volledig rond. Slechts als deze lijn ongeveer op één lijn staat met de zon en de aarde, dan is een maansverduistering mogelijk. Uit het woord "ongeveer" uit de vorige zin blijkt, dat het vaker dan twee maal per 19 jaar maansverduistering kan zijn. Die herhaaltijd van 19 jaren heet de sarosperiode.

ZICHTBAAR

Waarom is de maan tijdens een totale maansverduistering soms toch nog zichtbaar? Dat is raar, want de maan straalt zelf geen licht uit en zij staat toch geheel in de kernschaduw. Voor de vage verlichting van de maan is de atmosfeer van de aarde verantwoordelijk. Deze werkt namelijk als een bolle lens. Deze bolle lens breekt wat zonlicht naar de kernschaduw.

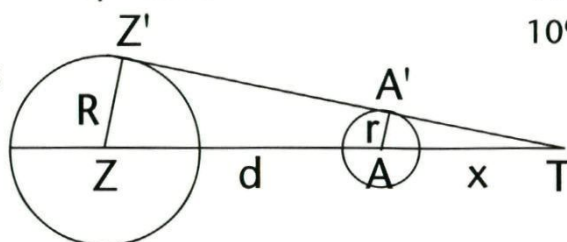
DE BAAN VAN DE AARDE

In werkelijkheid is de baan van de aarde een ellips. Hij wijkt echter weinig van een cirkel af. Daarom benaderen we de realiteit door er van uit te gaan, dat de baan van de aarde een cirkel is. De lengte van de schaduw van de aarde is dan constant. De aarde en de maan bewegen samen om de zon heen. We bekijken de situatie ten opzichte van de lijn zon-aarde.

LENGTE

VAN DE SCHADUW

We gaan uitrekenen, hoe lang de kernschaduw van de aarde is. We zullen zien, dat hij meer dan voldoende lang is om de maan te bereiken. Dat lukt goed met de figuur hierna, die de situatie goed beschrijft. De tekening is echter niet op schaal



P Y T H A G O R A S

In deze tekening is $ZZ' = R$ de straal van de zon, $AA' = r$ de straal van de aarde, $AZ = d$ de gemiddelde afstand van de aarde tot de zon en $AT = x$ de lengte van de kernschaduw. d en x zijn tot de middelpunten bedoeld.

De stralen ZZ' en AA' staan beide loodrecht op de gemeenschappelijke raaklijn $Z'A'$. De driehoeken TZZ' en TAA' zijn gelijkvormig en gelijkstandig. Daaruit volgt, dat

$$\frac{ZZ'}{ZT} = \frac{AA'}{AT} \quad \text{of} \quad \frac{R}{d+x} = \frac{r}{x}$$

Als je nu links en rechts met $x(d+x)$ vermenigvuldigt, dan krijg je $Rx = r(d+x)$ of $Rx - rx = rd$. Dan is $x = \frac{rd}{R-r}$

In de encyclopedie of BINAS zoeken we de waarden van R , r en d op.

Als we gebruiken, dat $1 \text{ Mm} = 1 \text{ megameter} = 10^6 \text{ m}$ en dat $1 \text{ Gm} =$

$1 \text{ gigameter} = 10^9 \text{ m}$,

dan vinden we:

$d = 149,6 \text{ Gm}$

$R = 696,0 \text{ Mm}$ en

$r = 6,378 \text{ Mm}$

STAARTDELEN VAN VEELTERM

Nu kunnen we x uitrekenen: $x = 1,384 \text{ Gm}$.

De straal van de baan van de maan is 384 Mm , dus de lengte van de kernschaduw van de aarde is $3,6$ maal zo lang als de straal van de maanbaan. De schaduw bereikt de maan dus gemakkelijk. Wat dit betreft is een totale maansverduistering dus mogelijk.



Hoe breed is de kernschaduw van de aarde op de plaats van de maanbaan?
Zie blz 31.

Arnold de Greef

In het probleem hieronder zie je een vierterm van de derde graad, die wordt gedeeld door een tweeterm van de eerste graad.

Bereken: $\frac{6x^3 - 2x^2 - 53x + 60}{3x - 4}$

EERSTE OPLOSSING:

Stel, dat het antwoord $ax^2 + bx + c$ is. Dan is $(ax^2 + bx + c)(3x - 4) = 6x^3 - 2x^2 - 53x + 60$

Dat produkt kunnen we het gemakkelijkst uitrekenen door de factoren onder elkaar te schrijven. Bij het vermenigvuldigen schrijf je de gelijksoortige termen recht onder elkaar:

$$\begin{array}{r} ax^2 + bx + c \\ 3x - 4 \\ \hline 3ax^3 + 3bx^2 + 3cx \\ - 4ax^2 - 4bx - 4c \\ \hline \end{array}$$

$$3ax^3 + (3b - 4a)x^2 + (3c - 4b)x - 4c$$

Dit moet gelijk zijn aan $6x^3 - 2x^2 - 53x + 60$.

Dan is $3a = 6$, $3b - 4a = -2$, $3c - 4b = -53$ en $-4c = 60$.

Dat leidt tot $a = 2$, $b = 2$ en $c = -15$. Dus

$$\frac{6x^3 - 2x^2 - 53x + 60}{3x - 4} =$$

$$2x^2 + 2x - 15.$$

STAARTDELEN

Een tweede manier om de gegeven breuk te vereenvoudigen, is de staartdeling.

We beginnen zo:

$$3x - 4 / 6x^3 - 2x^2 - 53x + 60 \setminus \dots ?$$

Nu bepalen we hoe vaak $3x$ op de $6x^3$ gaat. Dat lukt $2x^2$ maal. Vervolgens vermenigvuldig je $2x^2$ met $3x - 4$ en zo begint de staartdeling:

$$\begin{array}{r} 3x - 4 / 6x^3 - 2x^2 - 53x + 60 \setminus 2x^2 \\ \underline{6x^3 - 8x^2} \\ 6x^2 \end{array}$$

"Haal nu de $-53x$ aan" en bepaal vervolgens hoe vaak $3x$ op de $6x^2$ gaat: dat is $2x$ maal.

Herhaal de procedure tot je tenslotte op nul eindigt:

$$\begin{array}{r} 3x - 4 / 6x^3 - 2x^2 - 53x + 60 \setminus 2x^2 + 2x - 15 \\ \underline{6x^3 - 8x^2} \\ 6x^2 - 53x \\ \underline{6x^2 - 8x} \\ -45x + 60 \\ \underline{-45x + 60} \\ \text{rest} = 0 \end{array}$$

EN

VOORBEELD 2

Het kan je gebeuren, dat je geen opgaande deling treft: er is dan een rest, die geen nul is. Dan werkt de eerste oplossingsmethode niet, maar de tweede wel.

Bereken je

$$(8x^2 + 3x - 7) : (2x - 3)$$

met een staart-deling, dan:

$$\begin{array}{r} 2x-3 \overline{) 8x^2+10x-7} 4x+11 \\ \underline{8x^2-12x} \\ 22x-7 \\ \underline{22x-33} \\ \text{rest} = 26 \end{array}$$

Nu is $8x^2 + 10x - 7 =$

$(8x^2 + 10x - 33) + 26$, dus

$$\frac{8x^2 + 10x - 7}{2x - 3} =$$

$$\frac{8x^2 + 10x - 33}{2x - 3} + \frac{26}{2x - 3} =$$

$$4x + 11 + \frac{26}{2x - 3}$$

Dit laatste is goed bruikbaar bij een functie-onderzoek, want de laatste breuk gaat naar nul, als x naar oneindig gaat. Je ziet dan, dat de lijn $y = 4x + 11$ een asymptoot is van

$$y = 4x + 11 + \frac{26}{2x - 3}$$

Arnold de Greef

DE BOL EN DE CILINDER



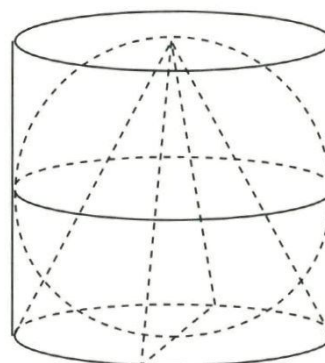
bol; de hoogte van de cilinder is de middellijn van de bol.

Neem een kegel met dezelfde straal voor het grondvlak als van de cilinder;

de hoogte van de kegel en de cilinder zijn gelijk.

Achimedes vond zo'n tweeduizend jaar geleden het volgende.

Als het volume van de kegel 1 is, dan zijn zijn de volumina van de bol en cilinder 2 en 3.



Ook wist Archimedes al, dat een bol een vier maal zo groot oppervlak heeft als een cirkel met even grote straal.

Frank Roos en Thijs Notenboom

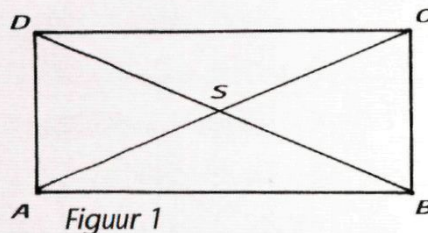
De straal van een bol is R . De straal van een cilinder is r . De hoogte van die cilinder is h . De totale oppervlakte van de cilinder is precies anderhalf maal de oppervlakte van de bol, terwijl de inhoud van de cilinder ook exact anderhalf keer de inhoud van de bol is. Bewijs, dat beide lichamen, elk apart, precies in één en dezelfde kubus passen en dat er maar één oplossing is. Zie blz 31.

BOL, CILINDER EN KEGEL

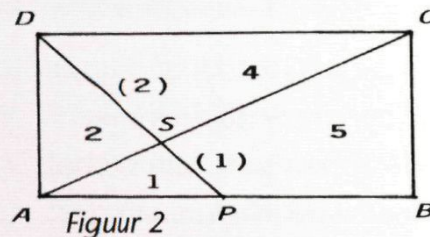
Neem een cilinder met dezelfde straal als van een

VIERENDE

In een rechthoek $ABCD$ tekenen we de diagonalen. Daardoor wordt deze rechthoek verdeeld in vier stukken met gelijke oppervlakte. Zie figuur 1.



Laat nu de diagonaal DB draaien om D tot DP zó, dat de diagonaal AC het lijnstuk DP verdeelt in stukken, die zich verhouden als $2 : 1$; zie figuur 2.



De rechthoek bestaat nu uit vier delen, waarvan de driehoek linksonder de kleinste oppervlakte heeft.

De oppervlakten van de beide driehoeken links verhouden zich als $2 : 1$.

Deze driehoeken hebben namelijk dezelfde hoogte. De driehoek APS is gelijkvormig met driehoek CDS . Daarom verhouden hun

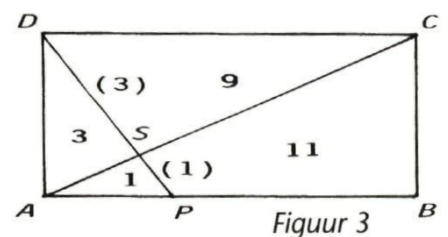
oppervlakten zich als de kwadraten van hun zijden, dus als $1 : 4$.

De resterende vierhoek $PCDS$ krijgt het verhoudingsgetal 5, want $2+4 = 1+5$.

De oppervlakten van de vier delen verhouden zich dus als $1 : 2 : 4 : 5$.

ANDERE VERHOUDINGEN

In figuur 3 is P nog verder richting A geschoven.

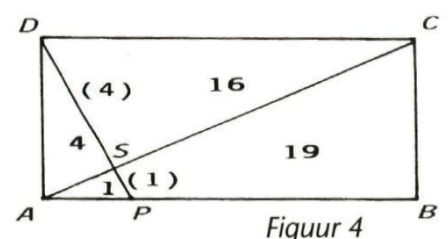


Nu is gekozen voor de verhouding $DS : SP = 3 : 1$.

De oppervlakten verhouden zich nu als $1 : 3 : 9 : 11$.

Ga dat maar na.

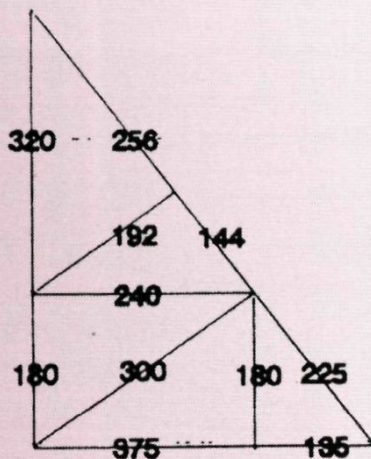
Bij de verhouding $4 : 1$ krijg je $1 : 4 : 16 : 19$ (figuur 4)



Figuur 4

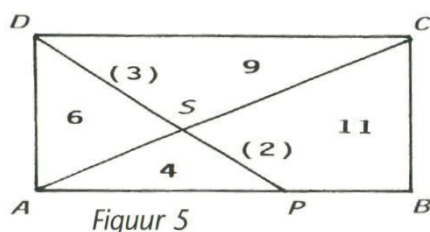
EEN PLAATJE

De onderstaande figuur bevat negen 3-4-5-driehoeken



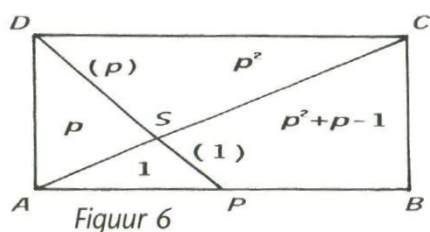
LEN

en bij 3 : 2 krijg je 4 : 6 : 9 : 11 (figuur 5).



ALGEMEEN

Ga na, dat in het algemeen bij een verhouding $p : 1$ de oppervlakten zich verhouden als $1 : p : p^2 : (p^2 + p - 1)$. Zie figuur 6.



Als bovendien $p = \frac{n}{m}$ met m en n geheel, dus als p rationaal is, dan kun je deze verhouding voorstellen met vier natuurlijke getallen.

Henk Mulder

DE KWADRATUUR VAN EEN FIGUUR(1)

Is het mogelijk om bij elk gegeven figuur een vierkant te *verzinnen*, zodat de figuur en het vierkant dezelfde oppervlakte hebben?

Het antwoord is ja. Stel, de oppervlakte van de figuur is A . Dan is de zijde van het verlangde vierkant natuurlijk $z = \sqrt{A}$.

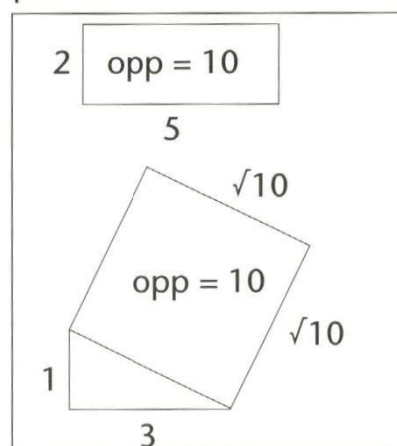
Kun jij een gelijkzijdige driehoek met zijden $2a$ met behoud van oppervlak omzetten in een vierkant? Wat is dan het verband tussen a en z ?

Is het mogelijk om bij elk gegeven figuur een vierkant te *construeren*, zodat de figuur en het vierkant dezelfde oppervlakte hebben?

Dat kan slechts bij sommige figuren. Als het wel kan, dan heet het vierkant de kwadratuur van de bedoelde figuur.

Met *construeren* wordt hierboven bedoeld, dat je tijdens het tekenen uitsluitend gebruik mag maken van potlood en

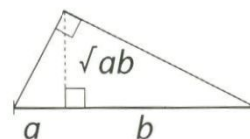
papier, een liniaal zonder schaalverdeling en een passer.



De kwadratuur van een rechthoek met zijden a en b is eenvoudig, omdat $z = \sqrt{ab}$.

Dit is het meetkundige gemiddelde van a en b . Met behulp van een rechthoekige driehoek lukt het soms om een wortelgetal te construeren, mits a en b geheel zijn. (Zie ook het artikel "eskwa's").

De volgende figuur kan je helpen bij de constructie van dat meetkundig gemiddelde van a en b .



Wordt vervolgd.

Tol Franken

EEN TEMPERA

Ik heb in een kamer op verschillende hoogtes een heleboel thermometers opgehangen. Ik lees ze alle snel af. Ik constateer, dat de temperatuur van beneden naar boven toeneemt.

Op de grond is het 15°C en bij het plafond, op 2,0 m hoogte, is het 21°C.

We zeggen nu, dat er in verticale richting een temperatuurgradiënt bestaat.

De afkorting daarvoor is ∇T .

De definitie van

$$\nabla T \text{ is: } \nabla T = \frac{\Delta T}{\Delta x}.$$

De temperatuur-gradiënt is dus een temperatuursverschil gedeeld door de bijbehorende afstand.

In het gegeven voorbeeld is $\nabla T = 6^\circ\text{C}/2\text{m} = 3^\circ\text{C}/\text{m}$.

Als ik Δx buitengewoon klein kies, dan krijg ik de temperatuurgradiënt in een bepaald punt.

In plaats van ∇T zie je ook wel het symbool $\frac{\partial T}{\partial x}$

VERANDERING IN DE TIJD

In het onderstaande is t de tijd en T de temperatuur. Stel, dat je de temperatuur in één bepaald punt op de wand volgt.

Dan verandert de temperatuur alleen in de tijd.

Die verandering geven we

GETALPATRONEN

Hier zie je een aardig getalpatroon:

$$\sqrt{44} = 6,63324\dots$$

$$\sqrt{4444} = 66,663333\dots$$

$$\sqrt{444444} = 666,6663\dots$$

$$\sqrt{44444444} = 6666,66663\dots$$

$$\sqrt{99} = 9,949\dots$$

$$\sqrt{9999} = 99,9949\dots$$

$$\sqrt{999999} = 999,99949\dots$$

$$\sqrt{99999999} = 9999,999949\dots$$

Probeer het ook eens met de andere cijfers. Dat lukt niet!

Arnold de Greef

TUURSGRADIËNT

aan met $\frac{\partial T}{\partial t}$

De temperatuur kan dus in principe zowel met de tijd als met de plaats veranderen.

Dat doet zich voor als ik me langzaam verplaatst met snelheid v , terwijl in alle punten de temperatuur stijgt. Die totale verande-

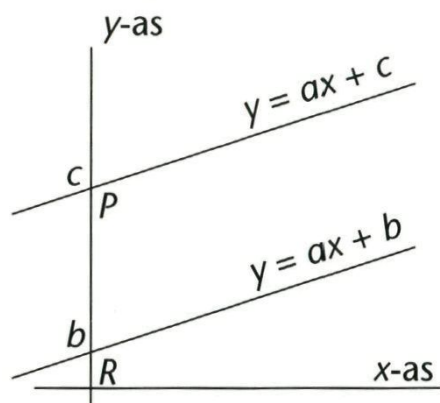
ring van de temperatuur kan ik dan zo beschrijven:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla T \cdot v$$

Frank Roos

EVENWIJDIGE LIJNEN

De twee lijnen $y = ax + b$ en $y = ax + c$ hebben dezelfde richtingscoëfficiënt a . Ze snijden de y -as bij $R = (0, b)$ en $P = (0, c)$. Wat is de afstand d van deze lijnen?



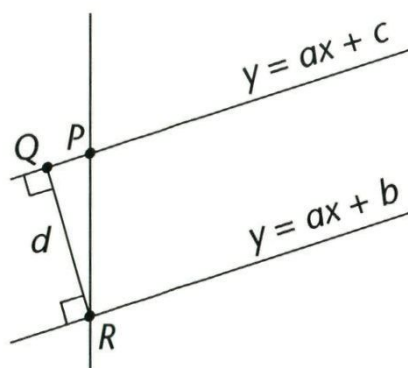
In een eerste opwelling zeg je wellicht $c-b$, maar ...!

EEN LOODLIJN

Trek eerst door R de lijn l , loodrecht op de gegeven lijnen. Die snijdt de lijn $y = ax + c$ bij Q .

De gezochte afstand is nu tenminste zichtbaar: QR .

Als twee lijnen loodrecht op elkaar staan, dan is het product van hun richtingscoëfficiënten $= -1$. De richtingscoëfficiënt van l is dan $-\frac{1}{a}$. De vergelijking van l is nu $y = -(1/a) \cdot x + b$



PUNT Q

De coördinaten van Q kunnen we vinden, door het stelsel

$$\begin{cases} y = a \cdot x + c \\ y = -\frac{1}{a} \cdot x + b \end{cases}$$

op te lossen. Als je a en b als bekenden beschouwd, dan vinden we:

$$Q = (x, y) =$$

$$\left(\frac{a \cdot (b - c)}{a^2 + 1}, \frac{a^2 b + c}{a^2 + 1} \right)$$

AFSTAND QR

De gezochte afstand QR kunnen we nu vinden met

$$d = \sqrt{(x_Q - x_R)^2 + (y_Q - y_R)^2}$$

Vullen we coördinaten van Q en R in, dan:

$$d = \sqrt{\left(\frac{a(b-c)}{a^2+1} - 0 \right)^2 + \left(\frac{a^2 b + c}{a^2+1} - b \right)^2}$$

Dat kan je vereenvoudigen tot de eenvoudigste vorm

$$d = \frac{|b - c|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

Alleen als $a = 0$, dan is $d = |b - c|$. De lijnen lopen dan horizontaal.

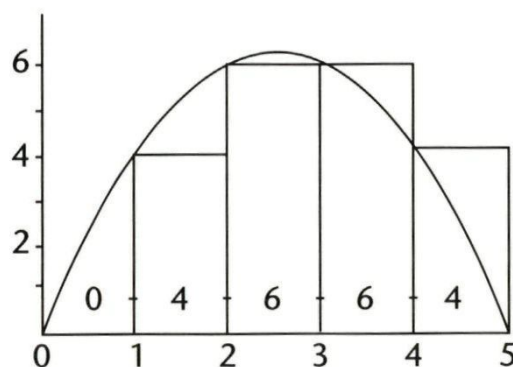
Tol Franken

NUMERIEK

Dit artikel is bedoeld voor diegenen, die de integraalrekening niet beheersen.

OPPERVLAKTE

Hoe kunnen we de oppervlakte berekenen van een kromlijnige figuur? Kiezen we b.v. het gebied tussen de parabool $y = x(5-x)$ en de x-as. Als we de grafiek



tekenen, dan zouden we op ruitjespapier de hokjes kunnen tellen. Tekenen we de grafiek op mm-papier, dan lukt de oppervlaktebepaling aanzienlijk nauwkeuriger. Dat mm-papier heeft alleen zin als we veel punten van de grafiek plotten. Niettemin blijft het een benadering.

STROKEN

Nu gaan we het gebied verdelen in 5 verticale stroken. Elk strookje is een rechthoek en de oppervlakte daarvan is lengte

555

Het is duidelijk, dat $5+5+5=550$ fout is.

Er zijn zeker drie manieren om die fout met slechts één streepje te herstellen.

Kun je ze vinden? Zie bladzijde 30.

Frank Roos



INTEGREREN

maal breedte. De breedte van zo'n strook is $(5-0):5 = 1$. De lengte is de functiewaarde bij de x , waar de strook begint.

Tellen we de oppervlakte van de vijf stroken bij elkaar op, dan hebben we een ruwe benadering van de oppervlakte. Het resultaat is $0 + 4 + 6 + 6 + 4 = 20$. Zie de figuur. Deze manier om een oppervlakte te benaderen heet **numeriek integreren**.

SMALLERE STROKEN

Nu kiezen we de breedte van de stroken 0,1. Het is nu 10 x zoveel werk om de som te vinden. Die is nu 20,825. Probeer dat eens zelf na te gaan.

EEN SPREAD-SHEET

Een spread-sheet of rekenblad is een handig computerprogramma om mee te rekenen. Het beeldscherm toont een aantal rijen (= regels) en kolommen. De regels zijn aangegeven met 1, 2, 3, ... ; de kolommen met A, B, C,

Op de kruising van kolom C en rij 4 bevindt zich cel C4. Nu gaan we de cellen vullen. Vul eerst de cellen B2, B3 en B4 volgens onderstaand schema.

Kopieer cel B4 nu 49 maal naar beneden. Controleer, dat de cellen B5 tot en met B53 nu de juiste inhoud hebben gekregen.

Vul nu cellen C2 en C3.

Kopieer cel C3 50 maal.

Vul nu kolom D op een gelijksoortige manier. Vul tenslotte F2 tot en met F6. Je spread-sheet is nu klaar. Als het goed is, zie je al in F6 het bedoelde resultaat.

	A	B	C	D	E	F
1						
2		x	$x(5-x)$	oppervlak		totale
3		0	$b3*(5-B3)$	strookje		oppervak
4		$B3+0,1$	$B4*(5-B4)$	$C3*0,1$		van de
5		$B4+0,1$	$B5*(5-B5)$	$C4*0,1$		strookjes
6		$B5+0,1$	$B6*(5-B6)$	$C5*0,1$		som (D4:D53)
..	..				..	
53		$B52+0,1$	$B53*(5-B53)$	$C52*0,1$		

NOG SMALLERE STROKEN

Als we deze berekeningen met een spread-sheet her-

halen, maar nu met strookjes, die een breedte hebben van 0,01, dan vinden we, dat de totale oppervlakte van de strookjes nu 20,8333 is. Deze oppervlakte moet nu zeer dicht bij de gewenste oppervlakte liggen. Je kunt dat nu zelf proberen, mits je beschikking over een spread-sheet hebt.

INTEGREREN

In de vijfde en zesde klas van het VWO raak je vertrouwd met een techniek, die integreren heet.

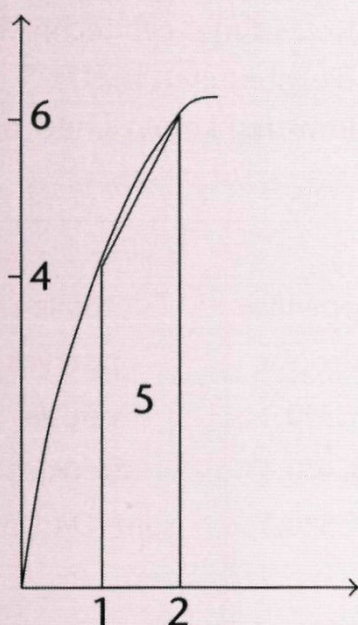
In wezen komt zij neer op

het voorgaande. Elke keer als je de strookjes 10 x zo smal kiest, wordt het aantal strookjes steeds 10 x zo

groot. Maar de benadering wordt dan ook 10 x zo nauwkeurig. Tenslotte laat men het aantal stukjes onbegrensd toenemen. Hoe je met dat oneindig grote aantal strookjes omgaat, leer je nu juist in de integraalrekening. Als je wel kunt integreren, dan is het niet moeilijk om in te zien, dat de gezochte oppervlakte exact $20 \frac{5}{6}$ is.

EEN VERBETERING

Het numeriek integreren gaat veel nauwkeuriger, als je de vorm van het strookje niet als een rechthoek kiest, maar als een trapezium.



Het trapezium raakt links en rechts aan de kromme. We kiezen als voorbeeld weer het gebied tussen de

parabool $f(x) = x(5-x)$ en de x -as. We nemen weer 5 stroken, zodat de breedte van elk strook weer 1 is. De tweede trapeziumstrook ligt tussen $x=1$ en $x=2$. $f(1) = 4$ en $f(2) = 6$. De oppervlakte van dit trapezium is $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (4+6) = 5$. In plaats van het trapezium tussen $x=1$ en $x=2$ zou je evengoed een rechthoek kunnen nemen waarvan de hoogte het gemiddelde is van $f(1)$ en $f(2)$.

Ga maar na, dat de benaderde oppervlakte tussen de parabool en de x -as $2+5+3+5+2 = 17$ is. Meer stroken geeft weer meer nauwkeurigheid, maar evengoed aanzienlijk meer rekenwerk.

SIMPSON

De Brit Thomas Simpson koos op het interval van $x=p$ tot $x=r$ een rechthoekig strookje, waarvan de hoogte $= \frac{1}{6} \{f(p) + 4 \cdot f(q) + f(r)\}$ is.

Hierin is q het gemiddelde van p en r .

Deze hoogte is dus het gewogen gemiddelde van $f(p)$, $f(q)$ en $f(r)$.

De gewichten zijn resp. 1, 4 en 1.

Passen we dit toe op hetzelfde voorbeeld als hiervoor, dan krijgen we:

p	r	q	f(p)	f(r)	f(q)	4.f(q)
0	1	0,5	0	4	2,25	9
1	2	1,5	4	6	5,25	21
2	3	3,5	6	6	6,25	25
3	4	3,5	6	4	5,25	21
4	5	4,5	4	0	2,25	9

De oppervlakte is nu $\frac{1}{6} \cdot \{(0+9+4) + (4+21+6) + (6+25+6) + (6+21+4) + (4+9+0)\} = 20 \frac{5}{6}$

De methode van Simpson levert steeds de beste resultaten en geeft in dit voorbeeld zelfs het exacte antwoord.

BASIC

Met het volgende Basic-programma kun je naar hartelust experimenteren.

```

10 'Numeriek integreren
20 cls:key off
30 def fnf(X)=X(5-X)
40 input"Linkergrens van
   het gekozen interval";A
50 input"rechtergrens van
   het gekozen interval";B
60 input"aantal stroken";S
70 DX = (B-A)/S
100 for N=0 to S-1
110 Y=FNf(A+N*DX)

```


120 Q1=Q1+Y*DX:'Q1 =
aangroeiende opper-
vlakke

130 next:?"oppervlakke,
berekend met recht-
hoekjes, is";Q1

140 for N=0 to S-1

150 Y=(FNF(A+N*DX) +
FNF(A+(N+1)*DX))/2

160 Q2=Q2+Y* DX:'Q2 =
aangroeiende opper-
vlakke

170 next:?"oppervlakke,
berekend met trape-
zia, is";Q2

180 for N=0 to S-1

190 Y=(FNF(A+N*DX) +
4*FNF(A+(N+.5)*DX)+
FNF(A+(N+1)*DX))/6

200 Q3=Q3+Y*DX:'Q3 =
aangroeiende opper-
vlakke

210 next:?"oppervlakke,
berekend met
Simpson, is";Q3

SINUS

De oppervlakte tussen de
sinusgrafiek en de x-as, van
0 tot π kun je nu als volgt
vinden.

regel 30 wordt:

def fnf(X)=sin(X).

Voor de linker grens kies je
tijdens "run" 0; voor de
rechter 3.14159.

Bij INPUT enzovoort kun je
 π alleen als benadering
invoeren, evenals bijvoor-
beeld $\sqrt{2}$. Bij 'ingebouwde',
grenzen kun je een zo
nauwkeurig mogelijke
benadering van π geven
door van te voren in te

voeren $\pi = 4 * \text{ATN}(1)$
De oppervlakte is exact 2.
Je vindt hoe dan ook een
benadering, alleen al,
omdat je π niet exact kunt
meegeven.

Frank Roos & Jan Mahieu

EEN VERNUFTIG BEWIJS VOOR DE STELLING VAN PYTHAGORAS

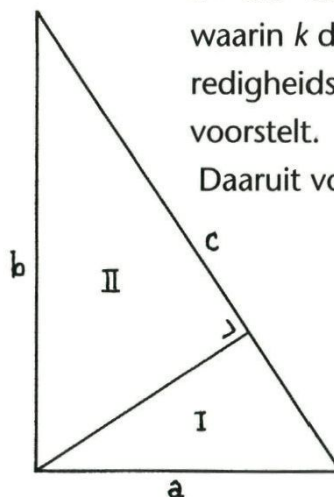
In een rechthoekige drie-
hoek hebben we een
hoogtelijn getrokken.

De driehoek is daarmee
verdeeld in twee

driehoeken die
gelijkvormig zijn
met elkaar en
met de grote.

Immers ze
hebben alle
drie hoeken met
dezelfde grootte.

Nu verhouden
zich oppervlakten
van gelijkvormige
figuren als kwadraten van
twee gelijkstandige zijden.



In dit geval geldt dan:

$$I : II : (I+II) = a^2 : b^2 : c^2$$

ofwel

$$I = k \cdot a^2,$$

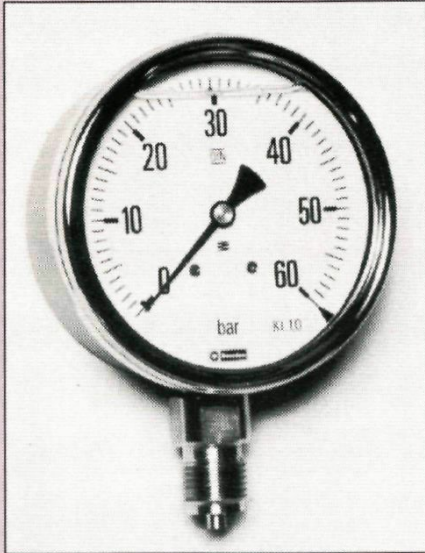
$$II = k \cdot b^2 \text{ en } I + II = k \cdot c^2$$

waarin k dezelfde even-
redigheidsconstante
voorstelt.

$$\text{Daaruit volgt: } a^2 + b^2 = c^2.$$

Hans de Rijk

EEN GAS



De overdruk in een cilinder met perslucht is 64 bar. We zetten het ventiel op een heel klein kiertje, zodat we een kunstmatig lek hebben. We volgen de druk in de tijd met de metaalmanometer. Hoe verwacht je, dat de overdruk zal afnemen?



Het is te verwachten, dat de afname van de overdruk evenredig is met de overdruk, dus, als we de overdruk p noemen, dan is $\dot{p} = -c \cdot p$. Hierin is $p = p(t)$, dus p verandert in de tijd.

J A R I G

Noteer de maand, wanneer je geboren bent als een getal.

januari = 1, februari = 2, ...

december = 12.

Vermenigvuldig met 2. Doe er

5 bij. Vermenigvuldig met 50.

Tel er je leeftijd bij op.

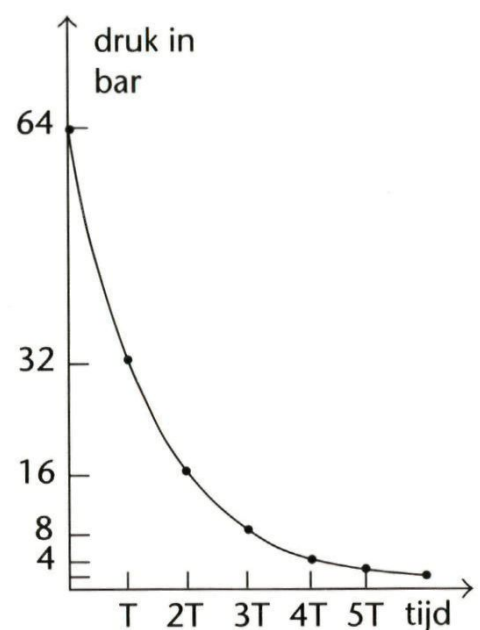
Verminder het resultaat met 250.

Nu bevat het linkerdeel van het antwoord de maand en het tweede je leeftijd.

Kun je uitleggen, hoe dat kan?

Zie bladzijde 30.

Tol Franken



LEK



In feite neemt de druk in de tijd af. De $\bullet$ boven de p is een opdracht: bepaal de afgeleide van de functie $p(t)$, waarbij nu niet x , maar t de onafhankelijk veranderlijke is.

c is een nader te bepalen constante. Omdat $\dot{p}$ druk per tijd is, moet c van de dimensie tijd^{-1} zijn.

Welke vorm heeft deze functie $p(t)$? Merk op, dat de onbekende nu niet zomaar een variabele is, maar een complete functie. Zo'n type vergelijking heet een differentiaalvergelijking. Het oplossen hiervan is een techniek op zich. Wij volstaan slechts met het

geven van de oplossing, die $p(t) = p(0) \cdot 2^{-t/T}$ is.

Als je voor $t = 0$ invult, dan vind je voor $p(0) = 64$ bar, de begindruk dus.

T is "de halveringstijd".

Steeds een tijd T later is de overdruk weer gehalveerd.

Hoe groter het gaslek, hoe kleiner de halveringstijd.

De hypothese was: de afname van de overdruk is evenredig met de overdruk, dus $\dot{p} = -c \cdot p$.

Alleen met een experiment krijg je zekerheid, of de hypothese juist is.

Frank Roos

KRUISGETALRAADSEL

HORIZONTAAL

- A. megawortel
- D. priemgetal
- E. $\text{int}(705 : 6)$
- G. $(2\sqrt{5})^2$
- H. product van twee priem getallen
- J. deler van 11.111
- K. cijfers optellen modulo 10
- M. rekenkundige rij met verschil -1.

VERTICAAL

- A. 44 binair
 - B. James Bond
 - C. $19\text{EXP}4 + C + 3!$
 - D. palindroom
 - F. dozijn dozijnen
 - J. grospaar
 - L. kwadraat.
- Voor de oplossing, zie bladzijde 31.

Tol Franken

A		B		XXXXX	C
	XXXXX		XXXXX	D	
E	F		XXXXX	G	
H		XXXXX	J		
K		L			
	XXXXX	M			

ESKWA'S

In Pythagoras nummer 6 van juli 1993 werden voor het eerst twee soorten grilrijen geïntroduceerd. Een grilrij van de eerste soort is een rij getallen met een gemeenschappelijke eigenschap, waarvan elke volgende term niet onmiddellijk uit de vorige termen is te berekenen. De bekendste grilrij is de rij van de priemgetallen.

MOEILIJK

Dat het een lastig onderwerp is, blijkt uit het minimale aantal reacties, die bij de redactie binnen kwam: nul! Wellicht geniet het onderwerp geen belangstelling.

Om een bepaald soort getallen nader te kunnen onderzoeken, is het verdraaid handig om eerst een aantal definities in te voeren. Dat scheelt eindeloze omschrijvingen.

DEFINITIES

Met a en b bedoelen we in het komende verhaal steeds positieve gehele getallen. Een positief geheel getal, dat we kunnen schrijven als $e = a^2 + b^2$ noemen een eskwa = e . (e-s-kwa = een som (van twee) kwadraten). Een natuurlijk getal, dat je niet kunt schrijven als de som van twee kwadraten, noemen we een neskwa = n .

(neskwa = niet-eskwa).

De rij neskwa's begint zo: 0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 14, ...

De rij eskwa's begint zo:

$2=1^2+1^2$, $5=1^2+2^2$,
 $8=2^2+2^2$, $10=1^2+3^2$,
13, 17, 18, 20, 25, ...

DE ESKWA'S

$20=2^2+4^2$ of
 $4 \times 5 = 4 \times 1^2 + 4 \times 2^2$
 $45=3^2+6^2$ of
 $9 \times 5 = 9 \times 1^2 + 9 \times 2^2$
 $80=4^2+8^2$ of ...

We zien, dat 20, 45 en 80 alle terug te voeren zijn tot $5=1^2+2^2$ door te delen door een kwadraat.

Daarom noemen we $5=1^2+2^2$ een primitieve eskwa of peskwa = p .

Eskwa's, die geen peskwa's zijn, noemen we veelvoud van peskwa of veskwa = v .

VERZAMELINGEN.

De verzameling eskwa's noemen we E en de verzameling neskwa's N . De verzameling natuurlijke getallen is $\mathbb{N}$. P is de verzameling peskwa's en V de verzameling veskwa's.

FAMILIES.

Stel a en b zijn samen steeds 8.

ALS GRILRIJ

$a=1$ en $b=7$ geven

$$e=1^2+7^2=50$$

$a=2$ en $b=6$ geven

$$e=2^2+6^2=40$$

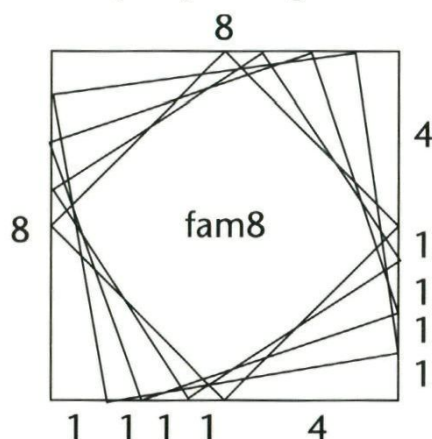
$a=3$ en $b=5$ geven

$$e=3^2+5^2=34$$

$a=4$ en $b=4$ geven

$$e=4^2+4^2=32$$

De verzameling {32, 34, 40, 50} noemen we familie nummer 8, kortweg fam8. Die familie kan je ook in een plaatje weergeven:



NIET EENDUIDIG

Sommige eskwa's kunnen we op meerdere manieren schrijven als een som van twee kwadraten. Bij een 2-eskwa kan dat op twee manieren; bij een 3-eskwa kan dat op 3 manieren; ... 2-eskwa's zijn b.v. $50=1^2+7^2=5^2+5^2$ en $130=3^2+11^2=7^2+9^2$.

3-eskwa's zijn b.v.

$$650=5^2+25^2=11^2+23^2=17^2+19^2 \text{ en } 725. \text{ Schrijf die laatste eens zelf op drie manieren als de som van twee kwadraten.}$$

EERSTE SIMPELE EIGENSCHAPPEN.

De vereniging van N en E is N . De doorsnede van N en E is leeg.

P is een deelverzameling van V .

De vereniging van N , P en V is N .

Omdat ik oneindig veel veelvouden van een peskwa kan bedenken, is de verzameling V (veskwa's) oneindig groot. Dan bevat ook de verzameling E oneindig veel elementen.



Is hieruit af te leiden, of het aantal neskwa's wel of niet oneindig groot is? Zie verderop in dit artikel.

OPTELLINGEN

Is de som van twee neskwa's weer een neskwa?

Soms wel: $3+4=7$ en soms niet: $6+7=13=2^2+3^2$.

Is de som van twee peskwa's weer een peskwa? Soms wel:

$$5+29=34=\text{peskwa}$$

en soms niet:

$$2+5=7=\text{neskwa.}$$

Daarmee is ook de som van twee eskwa's soms een eskwa en soms een neskwa.

WETENSCHAPPELIJK ONDERZOEK

Bij het wetenschappelijk onderzoek is men vaak met nog niet bekende verschijnselen bezig. Daarom is het volstrekt normaal, dat er in 95 % van de tijd niets interessants wordt ontdekt. In de vorige paragraaf was dat ook het geval. In wetenschappelijke publicaties wordt echter altijd alleen iets bijzonders vermeld. Natuurlijk is dat ook het leukste en misschien ook het meest waardevolle aspect van het onderzoek, maar het weergeven van

mislukkingen is minstens zo vermeldenswaardig.

Je kunt er immers vele herhalingen door anderen mee voorkomen! En als je bedenkt, dat "time is money" is, dan is het bekend maken van dwaal-sporen en mislukkingen zeker de moeite waard!

AANTALLEN

Onder de 10.000 zijn er slechts 2691 eskwa's tegenover 7308 neskwa's.

LAATSTE CIJFER

Een kwadraat eindigt altijd op een 0, 1, 4, 5, 6 of 9.

Een eskwa kan dan op elk cijfer eindigen.

Ga dat zelf na.

Dit leidt dus ook tot niets.

VIER KOLOMMEN

Schrijf je de natuurlijke getallen in vier kolommen en je noteert de neskwa's niet als een getal, maar als ##, dan valt het op, dat de derde kolom uitsluitend ## bevat.

Het begin ziet er zo uit:

##	2	##	##
5	##	##	8
##	10	##	##
13	##	##	##
17	18	##	20
##	##	##	##

25 26 ## ##
29 ## ## 32
enz.

Blijkbaar zijn alle natuurlijke getallen, die je door 4 deelt en die als rest 3 geven neskwa's. Je kunt dan ook zeggen: alle oplossingen van $n = 3 \bmod 4$ zijn neskwa's. Je kunt het eveneens zo formuleren: alle getallen $3 + 4k$ zijn neskwa, waarbij k een natuurlijk getal is.

Het is niet zo moeilijk om dat te bewijzen.

Zie bladzijde 30. Er zijn oneindig veel neskwa's

ANDERE AANTALLEN KOLOMMEN

Orden je de getallen in m kolommen, dan ontdek je meestal niets, maar bij $m = 8$ en 9, 16, 18 en 20 krijg je de volgende vondsten. Neskwa's < 1000 zijn de volgende getallen:

$3 + 4k$	$3 + 8k$	$6 + 8k$
$7 + 8k$	$3 + 9k$	$6 + 9k$
$7 + 16k$	$11 + 16k$	$12 + 16k$
$14 + 16k$	$15 + 16k$	$3 + 18k$
$6 + 18k$	$12 + 18k$	$15 + 18k$
$7 + 20k$	$11 + 20k$	$15 + 20k$
$19 + 20k$		

DEELVERZAMELINGEN

Sommige van de gevonden oplossingen vormen een deelverzameling van eerder genoemde oplossingen.

Zo is $7 + 8k$ een deelverzameling van $3 + 4k$.

Door zo te reduceren, houd je slechts de volgende oplossingen over: neskwa's zijn $3 + 4k$ $6 + 8k$ $7 + 8k$ $3 + 9k$ $6 + 9k$ $12 + 16k$.

NOG BREDERE KOLOMMEN

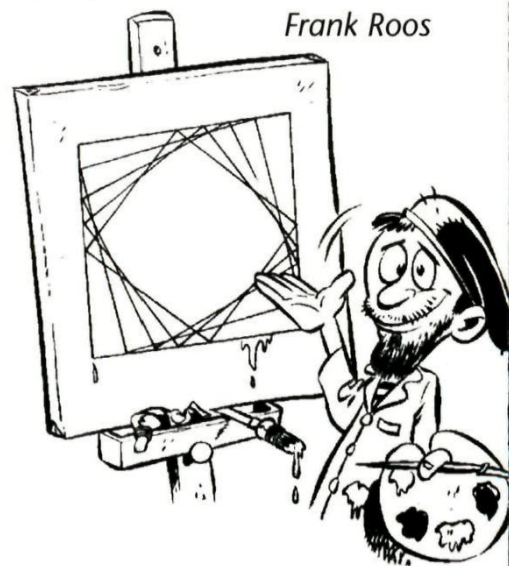
kun je zelf onderzoeken.

OP ZOEK NAAR ESKWA'S

Tijdens het zoeken in de kolommen vond ik geen enkele kolom, die uit puur eskwa's bestond.

VERDER ONDERZOEK

Wie gaat er verder op zoek naar eigenschappen van eskwa's en neskwa's, die een voorbeeld zijn van grilrijen?



Frank Roos

DE GAMMA FUNCTIE $\Gamma(x)$

Er bestaat een functie, waarvoor geldt, dat $f(x+1) = (x+1) \cdot f(x)$. Een oplossing van deze "vergelijking" is een functie, die je ook op vele rekenmachines terugvindt, namelijk de faculteitsfunctie. $3!$

betekent $1 \times 2 \times 3 = 6$. Kun je dat ook op jouw rekenmachine vinden en kun je er mee vinden, dat $3! = 6$?

We kunnen dit resultaat ook in een functienotatie schrijven: $f(3) = 6$.

Evenzo is $4! =$

$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.

Merk nu op, dat $4! = 4 \times 3!$

of $f(4) = 4 \times f(3)$ precies de gewenste vorm

$f(x+1) = (x+1) \cdot f(x)$ heeft.

$f(x) = x! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (x-1) \cdot x$.

Verkort kun je dat schrijven als $\prod_{k=1}^n k$ voor $k=1$ t/m x .

$f(3) = 3 \cdot f(2)$ en $f(3) = 1 \cdot 2 \cdot 3$ dus $f(2) = 2$

$f(2) = 2 \cdot f(1)$ en $f(2) = 1 \cdot 2 = 2$ dus $f(1) = 1$

$f(1) = 1 \cdot f(0)$ en $f(1) = 1$

dus $f(0) = 1$

$f(0) = 0 \cdot f(-1)$ en $f(0) = 1$

dus $f(-1)$ bestaat niet.

Je kan ook zeggen, dat $f(-1)$ positief oneindig groot is of $f(-1) = +\infty$ $f(-1) = (-1) \cdot f(-2)$ en $f(-1) = +\infty$ dus $f(-2) = -\infty$.

Kun je deze functie ook toepassen op b.v.

$x = 2\frac{1}{2}$ of $x = -4,7$?

Stel $f(3\frac{1}{2}) = p$, waarbij

$f(3) < p < f(4)$ of $6 < p < 24$.

Dan is $f(4\frac{1}{2}) = 4\frac{1}{2} \cdot f(3\frac{1}{2}) = 4\frac{1}{2} p$.

Zo is $f(5\frac{1}{2}) = 5\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{2} p$ enz.

$f(3\frac{1}{2}) = 3\frac{1}{2} f(2\frac{1}{2})$ dus

$f(2\frac{1}{2}) = p / 2\frac{1}{2} \cdot f(2\frac{1}{2}) = 2\frac{1}{2} f(1\frac{1}{2})$

$f(2\frac{1}{2}) = \frac{p}{3\frac{1}{2}}$

$f(2\frac{1}{2}) = 2\frac{1}{2} f(1\frac{1}{2})$

dus $f(1\frac{1}{2}) = \frac{p}{3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2}}$

Blijkbaar kan je elke waarde van $f(n+\frac{1}{2})$ uitrekenen als

je er één van kent. Als ik kans zou zien om alle $f(x)$

te berekenen voor $1 \leq x < 2$ dan is de volledige functie

bekend. Het wiskundige

Zwitserse genie Euler heeft

het volgende functie-

voorschrift bedacht:

$$f(x) = \frac{n! \cdot n^{x-1}}{x(x+1)(x+2) \cdots (x+n)}$$

Hierin moet n naderen tot oneindig. Dat is een on-

eindig voortlopend product, maar naarmate dit steeds verder gaat, komen de breuken steeds dichterbij 1 te liggen.

Daardoor krijg je na een eindig aantal stappen een prima benadering.

De Franse mathemaat Adrien-Marie Legendre heeft deze functie de gammafunctie genoemd, dus $\Gamma(x+1) = (x+1) \cdot \Gamma(x)$ waarbij Γ de hoofdletter gamma is.

Resultaten met de computer leveren:

$0,1 \rightarrow 0,95135$

$0,2 \rightarrow 0,91817$

$0,3 \rightarrow 0,89747$

$0,4 \rightarrow 0,88726$

$0,5 \rightarrow 0,88623$

$0,6 \rightarrow 0,89352$

$0,7 \rightarrow 0,90864$

$0,8 \rightarrow 0,93138$

$0,9 \rightarrow 0,96177$

Je kan nu zelf na enig rekenwerk de grafiek tekenen voor $-1 < x \leq 3$.

Tol Franken

EEN PROGRA

Het is de schrijver en de lezer bekend, dat er een snelle algoritme bestaat voor het vinden van Pythagorasdriehoeken:

$$a = 2mn$$

$$b = m^2 - n^2$$

$$c = m^2 + n^2$$

Hierin zijn alle variabelen gehele getallen.

Maar daar gaat het nu niet om.

DE OPDRACHT

Ontwerp een computer-programma, dat in staat is pythagorasdriehoeken "op te hoesten".

EISEN

Als in de rechthoekige driehoek a en b de rechthoekszijden zijn en c de schuine zijde, dan moet ten eerste gelden, dat $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ en ten tweede, dat a, b en c positieve, gehele getallen zijn.

GLOBALE WERKWIJZE

We kiezen voor a en b steeds andere natuurlijke getallen en controleren, of c ook geheel is. Als c geheel is, dan laten we het resultaat afdrukken, of op het beeldscherm, of op papier, of beide. De keus van a en b doen we systematisch om herhaling van een zelfde berekening te voorkomen.

TWEE HERHAALLUSSEN

Eerst houden we de variabele a vast op de waarde 1, dus $a=1$. Dan laten we de veranderlijke b alle waarden

HOE BESTAAT HET!



Geronimo Cardano, een Italiaans arts, filosoof en wiskundige leefde van 1501 tot 1576. Zijn naam is verbonden aan de oplossing van de derde-graadsvergelijking in de zogenaamde formule van Cardano. Ook is hij bekend geworden door zijn "Cardanus-ring", waarin een kompas altijd horizontaal blijft hangen.

Cardano had het volgende probleem: splits 10 in twee termen, waarvan het product 34 is. Eerst beweerde hij, dat het onmogelijk was, maar later vond hij de termen $5 + 3i$ en $5 - 3i$.

Bob de Jongste

MMEERPROBLEEM

aannemen van 1 t/m een zeker maximum, b.v. 32767. Vervolgens kiezen we $a=2$ en laten b weer alle waarden doorlopen van 1 t/m 32767. We gaan zo door, totdat a ook de waarde 32767 heeft bereikt.

Bij het laatste probeersel is dan $a = b = 32767$.

Dan heeft de computer 32767×32767 pogingen ondernomen.

Dat ziet er schematisch zo uit:

dat we kunnen volstaan met het zoeken naar die gevallen, dat b kleiner blijft dan a . We bedenken ook, dat $a = b$ niet kan, want dan is $c = a\sqrt{2}$ en dat kan c geen geheel getal zijn.

Dit programma kan daardoor ruim twee maal zo snel werken. Wanneer de zoektijd uren is, is dat een belangrijke verbetering.

Deze twee verbeteringen brengen we zo aan:

gebruikt men heel vaak voor "een klein positief getal" de griekse letter ϵ , epsilon. Dat is b.v. een miljoenste. In het programma noem ik deze nieuwe variabele "eps".

We willen, dat het verschil tussen c en de gehele waarde van c heel erg klein is, want dan hebben we misschien een goede kandidaat te pakken.

Dus $c - \text{int}(c) < \text{eps}$. Nu kan het nog het volgende

definieer

a , b en m als gehele getallen.

kies je maximum, b.v. 32767. Noem het "max".

herhaallus 1: laat a toenemen van 1 tot max.

herhaallus 2: laat b toenemen van 1 tot max.

bereken c .

als c geheel is, druk dan a , b en c af.

einde herhaallus 2.

einde herhaallus 1.

definieer

a , b en max als gehele getallen.

kies je maximum, b.v. 32767. Ik noem het "max".

herhaallus 1: laat a lopen van 2 tot max.

herhaallus 2: laat b lopen van 1 tot $a-1$.

bereken c .

als c geheel is, druk dan a , b en c af.

einde herhaallus 2.

einde herhaallus 1.

EEN DUBBELE VERBETERING

Sommige mensen vinden het heel vervelend als a in het begin zo klein blijft, terwijl b al zo groot kan worden. Het liefst houden ze a en b "in elkaars buurt".

Als we beseffen, dat $a^2 + b^2 = b^2 + a^2$, dan zien we in,

AFRONDEN

Als de computer $\sqrt{a^2 + b^2}$ uitrekent, dan moet je beseffen, dat het apparaat hoe dan ook na het worteltrekken gaat afronden. Daarom is de vraag: "is c geheel?" niet zo zinvol.

EPSILON

In de hogere wiskunde

gebeuren: stel $c = 5,99999$. Dan is $\text{int}(c) = 5$ en niet 6. Dat probleem kunnen we oplossen met $\text{int}(c+0,5)$. Dan gaat het steeds goed. Probeer maar zelf een paar af te ronden voorbeeldgetallen. Soms kun je het probleem ook de baas met de afrond-functie.

LAATSTE STEL

Tot zover het beste programma is dan:

definieer

*a, b en som als gehele getallen.
kies 't maximum, b.v. 32767.*

Dat is "max".

herhaallus 1:

laat a lopen van 2 tot max.

herhaallus 2:

laat b lopen van 2 tot a-1.

als $|c - \text{int}(c+0,5)| < \text{eps}$,

druk dan het resultaat af.

einde herhaallus 2.

einde herhaallus 1.

BASIC

Een basic-programma zou er dan zo uit kunnen zien:

```
10 defint a,b,m
20 eps = 0.000001
30 max = 32767
40 for a = 2 to max
50   for b = 1 to a-1
60     c = sqr(a^2+b^2)
70     if abs(c-int(c+.5))
       >eps then 90
80     print using"#####";
       a;b;c;:print,
90   next b
100 next a
```

Tol Franken

en de 'vierkante cirkels'
In 1993 is het bewijs
geleverd van de zogeheten laatste stelling
van Fermat.

Die stelling luidt als volgt:
Voor $n > 2$ heeft de vergelijking $x^n + y^n = z^n$ geen oplossingen die geheel en positief zijn. Een bijzondere vergelijking ontstaat er als voor z de waarde 1 genomen wordt: $x^n + y^n = 1$.
Voor $n = 2$ levert deze formule de vergelijking van een cirkel met straal 1 en middelpunt (0,0).
Om de grafieken te tekenen van de formules die bij andere waarden van n horen, is gebruik gemaakt van een programma dat eenvoudig aan andere waarden van n aan te passen is.

PROGRAMMA

boun -1, 1 -1, 1

ax 2, 0.5, 0.5

n:= 4

a:= 1/n

drap x, -1, 1,{1-x^n}^a

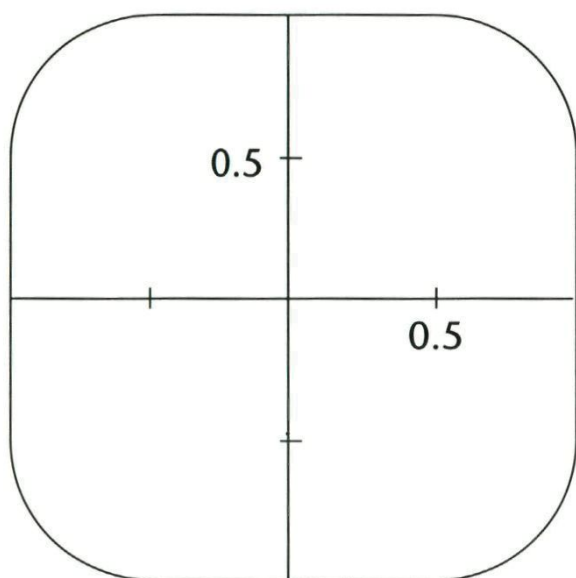
drap x, -1, 1,-{1-x^n}^a

TOELICHTING:

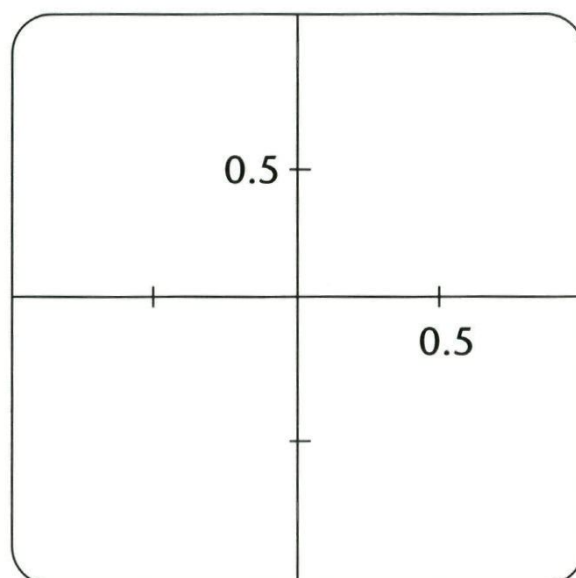
- (1) (1) deze regel legt de grenzen van de tekening vast
- (2) (2) schaalstrepen op de assen worden getekend
- (3) (3) het gaat om $x^4 + y^4 = 1$
- (4) (4) herleiding tot $y = (1-x^4)^{\frac{1}{4}}$
- (5) (5) x loopt van -1 tot 1; (x,y) wordt getekend
- (6) (6) de punten onder de x -as worden getekend

LING VAN FERMAT

De grafiek van $x^4 + y^4 = 1$



De grafiek van $x^{14} + y^{14} = 1$



Vraag: hoe zien de grafieken van $x^n + y^n = 1$ er uit voor oneven waarden van n ?

Marcel Snel

ROTATIE-TRANSLATIE

Een bureaulamp heeft drie draaipunten A , S en B . Daardoor kan het bureaublad via een groot aantal standen verlicht worden. Er zitten een aantal parallelogrammen in de constructie. De opzet is zo dat de boverarm BC voortdurend horizontaal wordt gehouden. Dat hele mechaniek is al een wiskundig hoogstandje.



Onderaan draaien nog twee contragewichten mee. Wat ons opvalt: welke baan beschrijft bij al dat gedraai de lamp?

En de contragewichten?
Oplossing: zie pagina 30.

Henk Mulder

EEN LAST

$$p = \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \dots}$$

De teller van p bevat alle oneven getallen; de noemer alle even getallen. Weet je een aanpak om deze breuk te berekenen? Het is duidelijk, dat je niet eerst de teller kunt bepalen, dan de noemer en tenslotte het quotiënt, want teller en noemer bevatten oneindig veel getallen.

digd met een getal, dat kleiner is dan één, krijg je een antwoord, dat kleiner wordt dan 0,5. Dit herhaalt zich steeds, waardoor het volgende tussen-antwoord steeds kleiner wordt. Het "eindresultaat" moet dan liggen tussen nul en één.

Omdat elk volgende breukje, waarmee je gaat vermenigvuldigen steeds dichterbij één komt te liggen, gaat het dalen van de rij van tussen-antwoorden steeds langzamer. Je kunt je daarom afvragen, hoeveel het "eindantwoord" van nul blijft verschillen.

RIJ-RAADSEL

Vul in de onderstaande rij de twee ontbrekende getallen in:

100 121 144 171 232 321
? ? 11111 1111001.

De oplossing moet je zoeken in de richting van andere talstelsels.

Zie bladzijde 30.

Bob de Jongste

POGING ÉÉN

Teller en noemer lijken vrijwel even groot. Daarom zou je kunnen denken, dat de waarde van de breuk één is of anders in de buurt van één.

POGING TWEE

$$\frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \dots} =$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} \times \frac{9}{10} \times \dots$$

Eerst hebben we $\frac{1}{2}$
Die vermenigvuldigen we met $\frac{3}{4}$.
Omdat je $\frac{1}{2}$ vermenigvul-

EEN BASIC-PROGRAMMA

```
10 p=1: t=1: n=2
20 p = p*t/n
30 print t;p
40 t=t+2: n=n+2
50 goto 20
```

Dit is nu typisch een voorbeeld van een programma, dat wel doet, wat je ervan verlangt, namelijk staps-

IGE BREUK

gewijs het antwoord benaderen, maar dat programmeer-technisch gezien slecht is, omdat het een eeuwige lus bevat.

AFRONDINGEN

De computer kan behoorlijk nauwkeurig werken, maar hij moet hoe dan ook tussen-antwoorden afronden. Dat maakt het "eindresultaat" onbetrouwbaar, omdat de afwijkingen sterk kunnen doorwerken. De afwijkingen worden bij elkaar opgeteld. Toch valt de schade nog een beetje mee, want statistisch gezien rondt de computer even vaak naar boven als naar beneden af.

POGING DRIE

$$\frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \dots} =$$

$$\frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \times \dots} =$$

$$\frac{1 \times 1 \times 1 \times \dots}{2 \times 4 \times 2 \times 8 \times 2 \times \dots} =$$

De teller van deze breuk is

één. De noemer van deze breuk wordt gigantisch groot. De breuk zelf zal daardoor de nul onbegrensd dicht naderen. Dus $p = 0$.

POGING VIER

$$\frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \dots} =$$

$$\frac{1 \times 1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times \dots}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \dots} =$$

Deel 3×3 van de teller weg tegen de 9 in de noemer.

Deel 5×5 weg tegen de 25.

En zo voorts. Dan is $p =$

$$\frac{1 \times 1 \times 1 \times 1 \times \dots}{2 \times 3 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 10 \times \dots} =$$

Ook deze breuk "gaat naar" nul. Dus $p = 0$

POGING VIJF

$$\frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \dots} = p =$$

$$\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \dots}{2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times \dots}$$

Als je bij elke factor in de noemer een 2 buiten

haakjes haalt, krijg je

$$p = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \dots}{4(1 \times 1) \times 4(2 \times 2) \times 4(3 \times 3) \times \dots}$$

$$\text{dus } p = \frac{(2n)!}{4^n \cdot (n!)^2}$$

waarbij n nadert tot oneindig. We nemen links en rechts de natuurlijke logaritme:

$$\ln(p) = \ln\{(2n)!\} - \ln(4^n) - \ln\{(n!)^2\}$$

Dit is nog iets te vereenvoudigen tot

$$\ln(p) = \ln\{(2n)!\} - n \cdot \ln(4) - 2 \cdot \ln(n!)$$

STIRLING

Nu gaan we de benaderingsformule van Stirling gebruiken.

Die ziet er zo uit:

$$\ln(m!) \approx \frac{1}{2} \cdot \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \cdot \ln(m) + m \cdot \ln(m) - m.$$

Hoe groter m , hoe beter de benadering.

Toepassen

Dit gaan we toepassen op

$$\ln(p) = \ln\{(2n)!\} - n \cdot \ln(4) - 2 \cdot \ln\{(n!)\}.$$

Dat geeft:

$$\ln(p) \approx$$

$$\approx \left[\frac{1}{2} \cdot \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \cdot \ln(2n) + 2n \cdot \ln(2n) - 2n \right] - n \cdot \ln(4) - 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln(n) + n \cdot \ln(n) - n \right].$$

Dat is te vereenvoudigen tot

$$\ln(p) \approx$$

$$\approx \frac{1}{2} \cdot \ln(n:\pi) \text{ of } p \approx \sqrt{(n:\pi)}.$$

Uit deze berekening zou dan volgen, dat p met n onbegrensd toeneemt.

Na pogingen drie en vier dacht ik: goed, er komt nul uit. Maar dan staan we nu ineens voor een verrassing.

POGING ZES

In de wiskunde-literatuur is het "Wallis-produkt"

bekend. Dat is de breuk

$$\frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot \dots \cdot (2n)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \dots \cdot (2n+1)^2}$$

Als n naar oneindig gaat, dan gaat deze breuk naar $\frac{1}{2} \pi$.

Door de teller en noemer te verwisselen en door wortel te trekken, vinden we, dat onze breuk

$$p = \sqrt{(2:\pi)} \approx 0,797 \dots \text{ is.}$$

Alweer een ander antwoord. Daar word je toch niet goed van!

SAMENVATTING

Poging één leidt tot niets.

De nummers twee, drie en vier wijzen op $p = 0$.

Poging vijf laat p naar oneindig gaan en poging zes leidt tot $\sqrt{(2:\pi)}$.

Wanhoop!

CONCLUSIES

Er zijn nog al wat antwoorden, die strijdig met elkaar zijn. We weten absoluut nog niet wat het goede antwoord is.

"Rekenen met oneindig" was, is en zal altijd een hachelijke onderneming zijn. Wie weet het enige echte goede antwoord?

DES LEZ

NAAR AANLEIDING VAN PYTHAGORAS-BALKEN

Lang geleden heeft de heer F.J.M. Barning uit Amstelveen de definitie gezien van een Pythagoreïsch blok.

Dat is een rechthoekig blok met gehele ribben en gehele zijvlaksdagonalen. Euler vond een oplossing met ribben 44, 117 en 240. De zijvlaksdagonalen zijn dan 267, 125 en 244.

Het probleem, dat èn de ribben èn de zijvlaksdagonalen èn de lichaamsdiagonalen gehele getallen zijn, is volgens de heer Barning nog steeds niet opgelost.

HET BOUWSEL VAN BARNING

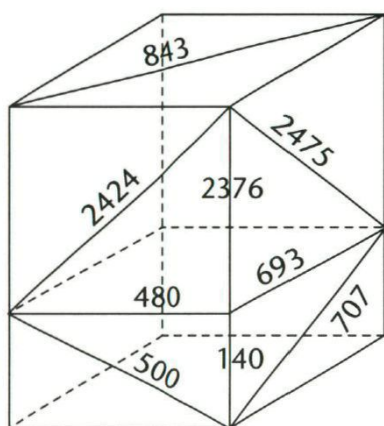
Naast Euler's oplossing vond de heer Barning nog twee blokken:

Het ene blok met ribben 160, 231 en 792 en het andere blok met ribben 140, 480 en 693.

Tol Franken

ERS PENNEVRUCHT

De lezer kan zelf controleren, dat de zijvlaksdagonalen geheel zijn. Door de ribben van het eerste blok elk 3 x zo groot te kiezen, krijg je een blok, dat op het andere blok te zetten is. Het resultaat is toch vermeldenswaardig!



REACTIE OP PYTHAGORAS-BALKEN

Hendrikjan van Eijsden uit Rotterdam bood de redactie een uitvoerig en knap stuk werk aan. We geven slechts de essentie weer. Voor het begrip: zie Pyth. 2 van nov.1993.

GEHEEL?

Deelverzameling 5 van (a, b, c, d) was:
 $(2mp, 2np, m^2+n^2-p^2; m^2+n^2+p^2).$

Het is slechts de bedoeling, dat a, b, c en d positieve gehele getallen zijn. m, n en p mogen dus gerust anders zijn dan geheel.

Uit het voorgaande volgt:

$$m = \frac{a}{\sqrt{2(d-c)}}$$

$$n = \frac{b}{\sqrt{2(d-c)}}$$

$$p = \frac{\sqrt{2(d-c)}}{2}$$

Natuurlijk mag c niet gelijk aan d zijn.

Dat blijkt uit de oplossing, maar ook moet d groter dan elke ribbe zijn.

DEELVERZAMELINGEN

Alle andere genoemde deelverzamelingen, behalve de foute nr. 3, zijn volgens Hendrikjan deelverzamelingen van nummer 5. Bijvoorbeeld: substitutie van $m=a:\sqrt{2}$, $n=(a+1):\sqrt{2}$ en $p=1:\sqrt{2}$ levert deelverzameling 2.

NIEUWE VONDST

Hij leidt ook een nieuwe deelverzameling af:
 $(p, 2n, 2n^2+(p^2-1):2 ; 2n^2+(p^2+1):2)$, waarin p een priemgetal groter dan twee is.

VRAAG

Tenslotte vroeg Hendrikjan zich af, of iemand hem met het volgende kan helpen: bestaat er een pythagoras-balk, waarvan bovendien de zijvlaksdagonalen alle geheel zijn? De vraag is voor de hand liggend, het antwoord niet (zie het begin van dit artikel).

REACTIE OP DE BIJNA-PYTHAGORAS-BALK

Ook hier kwam Hendrikjan van Eijsden goed uit de verf. Het is interessant te noemen, dat hij tot dezelfde conclusies kwam als de heer Buissant des Amorie uit Amstelveen. Beide maken gebruik van de stelling van Pell. Die is niet en passant even te noemen. Hierop komen we hopelijk te zijner tijd uitvoerig terug.

J A R I G

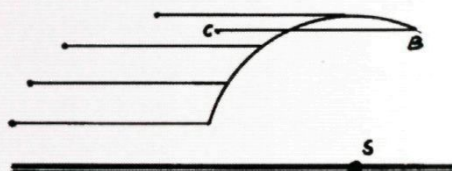
Leeftijd is meestal tweecijferig.

$$(m \times 2 + 5) \times 50 + \text{leeftijd} - 250 = 100m + \text{leeftijd}.$$

Zo eenvoudig is dat!

ROTATIE-TRANSLATIE

Punt B beschrijft een cirkel met S als middelpunt en BS als straal. Deze cirkel wordt over een lengte BC naar links verschoven (translatie-vector).



De lampbeweging is dus een combinatie van een rotatie en een translatie.

De baan van de eigenlijke lamp is dus weer een cirkel met evenzo BS als straal en een middelpunt evenzo over een vector BC naar links verschoven.

5 5 5

$$1. 5+545 = 550 \quad 2. 545+5 = 550 \quad 3. 5+5+5 \neq 550$$

RIJ - R A A D S E L

Ieder getal is 121- (decimaal).

De rij begint in het elftallige talstelsel, dan het tientallige, het negentallige, ...

Voor het vijftallige talstelsel

ontbreekt 441 en voor het viertallige talstelsel ontbreekt 1321.

Decimaal:

$$4 \times 5^2 + 4 \times 5 + 1 = 121$$

$$1 \times 4^3 + 3 \times 4^2 + 2 \times 4 + 1 = 121$$

W O R T E L T R E K K E N

$$\sqrt{-5 + 12i} = a + bi$$

kwadrateer:

$$-5 + 12i = a^2 - b^2 + 2abi$$

$$\begin{cases} -5 = a^2 - b^2 \\ 12 = 2ab \end{cases}$$

De oplossing van dit stelsel is

$a = 2$ en $b = 3$, dus

$$\sqrt{-5 + 12i} = 2 + 3i \text{ of}$$

$a = -2$ en $b = -3$ dus,

$$\sqrt{-5 + 12i} = -2 - 3i.$$

E S K W A ' S

Een som van twee kwadraten is

$$\text{of } (2k)^2 + (2m)^2$$

$$\text{of } (2k)^2 + (2m+1)^2$$

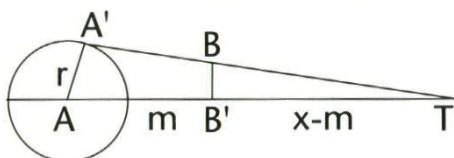
$$\text{of } (2k+1)^2 + (2m+1)^2$$

Als je de haakjes wegwerkt en als je deelt door 4, dan is de rest nooit 3.

MAANSVERDUISTERING

Hoe breed is de kernschaduw van de aarde op de plaats van de maan?

Om die vraag te beantwoorden is deze figuur handig:



We nemen aan, dat de baan van de maan een cirkel is met straal $m = 384$ Mm.

In driehoek $AA'T$ is volgens Pythagoras $AA'T = \sqrt{(x^2 + r^2)}$.

De driehoeken $AA'T$ en $BB'T$ zijn gelijkvormig, maar niet gelijkstandig.

Dan is $AA' : A'T = BB' : B'T$ of

$$\frac{r}{\sqrt{(x^2 + r^2)}} = \frac{BB'}{x-m} \text{ of } BB' = \frac{r(x-m)}{\sqrt{(x^2 + r^2)}}$$

Vullen we de gegevens in, dan vinden we $BB' = 4,608$ Mm.

De straal van de maan is 1,738 Mm. De middellijn van de schaduw van de aarde bij de maan is 2,65 maal de middellijn van de maan.

De maan kan dus ruimschoots in de schaduw verblijven.

IDEËN

Kun je nu ook uitrekenen, hoe lang de verduistering kan duren? Met de voorgaande technieken kun je nu ook onderzoeken, of een planeet een andere, verder van de zon staande planeet volledig kan verduisteren. Kan Jupiter bijvoorbeeld Saturnus verduisteren?

BOL EN CILINDER

Het oppervlak van de cilinder = het oppervlak van de bodem + het oppervlak van het deksel + het oppervlak van de mantel = $\pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi rh$.

Het oppervlak van de bol is $4\pi R^2$. Nu is volgens één van de gegevens:

$$2\pi(r^2 + rh) = 1,5 \times 4\pi R^2 \text{ of } r^2 + rh = 3R^2 \dots\dots\dots(*)$$

Het volume van de bol is $(\frac{4}{3})\pi R^3$ en van de cilinder $\pi r^2 h$.

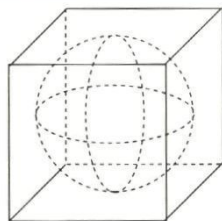
Volgens het andere gegeven geldt: $\pi r^2 h = 1,5 \times (\frac{4}{3})\pi R^3$ of $h = 2R^3 : r^2 \dots\dots\dots(\#)$.

Vullen we dit in in (*), dan:

$$r^2 + 2R^3 : r = 3R^2 \text{ of } r^3 - 3R^2 r + 2R^3 = 0.$$

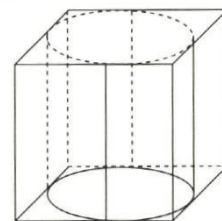
Een opvallende oplossing van deze derdegraads vergelijking is $r = R$.

$$\text{Dus } (r - R)(r^2 - Rr - 2R^2) = 0 \\ (r - R)(r - R)(r + 2R) = 0$$



De oplossing $r = -2R$ voldoet niet, omdat r en R beide positief moeten zijn.

De enige oplossing blijkt $r = R$ te zijn. Volgens (#) is h dan $2R$.



We hebben nu een bol met straal R en een cilinder met straal R en hoogte $2R$.

Om beide lichamen past precies een kubus met ribbe $2R$.

KRUISGETALRAADSEL

Bij A (hor): mega = M = 10^6

Bij K (hor): tel twee opeenvolgende cijfers op. Het volgende cijfer is dan het laatste cijfer van de som.

Bij M (hor): is een rij met vast verschil -1.

A 1	0	B 0	0	XXXXX	C 1
0	XXXXX	0	XXXXX	D 7	9
E 1	F 1	7	XXXXX	G 2	0
H 1	4	XXXXX	J 2	7	1
K 0	4	L 4	8	2	0
0	XXXXX	M 9	8	7	6

VERANTWOORDING ILLUSTRATIES:

Cartoons: Pieter Hoogenbirk
Foto omslag: ANP Foto
Foto's: Legris b.v., Weesp
AGA Gas b.v., Amsterdam

ABONNEMENTEN:

Nederlandse en Belgische
abonnees: aanmelden telefonisch
070 - 314 35 94, of schriftelijk,
NIAM ProjectOntwikkeling b.v.
Antwoordnummer 97007,
2509 VH Den Haag.

TARIEVEN:

Abonnement Pythagoras
f. 35,- of BF 650,-
Luchtpost toeslag binnen
Europa f 10,-
Luchtposttoeslag buiten
Europa f 15,-
Abonnement inclusief
Archimedes f 65,- of BF 1200,-
Luchtpost toeslag binnen
Europa f 20,-
Luchtpost toeslag buiten
Europa f 20,-

BETALING:

Wacht met betalen tot u de
acceptgirokaart krijgt toe-
gestuurd. Bij tussentijdse
abonnering ontvangt u alle
nummers van de lopende
jaargang. Abonnementen zijn
doorlopend, tenzij voor 1 juli
schriftelijk bij de uitgever is
opgezegd.

UITGEVER:

NIAM ProjectOntwikkeling b.v.
Postbus 97734
2509 GC Den Haag.
Tel.: 070 - 314 35 94
Fax: 070 - 314 35 88
Giro 33.84.52.