

PYTHAGORAS

WISKUNDE TIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

34 E JAARGANG

OKTOBER 1994 NUMMER 1

*Wie was
Pythagoras*

4

*Roeien met
het getal twee*

8

*Driehoeks-
getallen*

16

*Torentje
verplaatsen*

20



UITGAVE:

Pythagoras is een uitgave van NIAM ProjectOntwikkeling b.v. en verschijnt zesmaal per jaar. Een jaargang loopt van september tot en met augustus.

REDACTIE:

Jan Mahieu
Frank Roos
Marcel Snel

EINDREDACTIE:

Henk Huijsmans

NIEUWE ARTIKELN:

Molenstraat 31,
4841 CA Prinsenbeek

CORRESPONDENTIE-ADRES:

Reacties,
oplossingen enz.
Frank Roos,
Klink 19
9356 DG Tolkert

MEDEWERKERS:

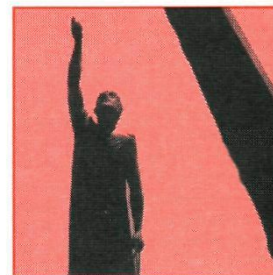
Bob de Jongste,
Hans de Rijk,
Paul van de Veen,
Thijs Notenboom.

• VOORWOORD	3
• WIE WAS PYTHAGORAS	4
• CITAAT VAN EUCLIDES	6
• ROEIEN MET HET GETAL TWEE	6
• DE TRISECTIE VAN EEN WILLEKURIGE HOEK	8
• PUZZELTJE	10
• DE LADDERS	11
• PLAATJE	12
• WISKUNDE IN HET BOS	12
• GOOCHELAAR	15
• DRIEHOEKSGETALLEN	16
• DE KWADRATUUR VAN EEN FIGUUR (2)	18
• TORENTJE VERPLAATSEN	20
• DE REGELMATIGE 17-HOEK	23
• GETALLEN B(R)OUWSEL	24
• GETALLEN, GETALLEN, GETALLEN ...	24
• EEN GETALPATROON	27
• CIRKELS IN HET VIERKANT	27
• VADER EN KIND	27
• DES LEZERS PENNEVRUCHT	28
• OPLOSSINGEN	30

VAN DE REDACTIE

Pythagoras start met de vierendertigste jaargang. Op een aantrekkelijke manier probeert de redactie allerlei wiskundi-ge problemen aan bod te laten komen.

Maar de redactie wil Pythagoras ook een blad laten zijn waar de abonnees aan mee kunnen werken. Schroom daarom niet ideeën, wensen, suggesties, artikelen, aardigheidjes enzovoort naar het redactiesecretariaat te sturen. Reacties op artikelen, oplossingen puzzels enzovoort s.v.p. sturen naar het correspondentieadres (zie colofon).



EEN GREEP UIT DE INHOUD

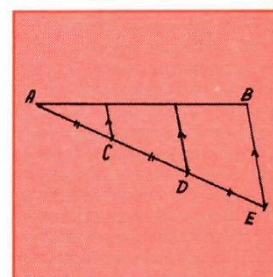
Wie kent niet De stelling van Pythagoras. Op allerlei manieren is daar in het tijdschrift al aandacht aan geschonken. Maar: Wie was Pythagoras. Wanneer en waar leefde hij. En hoe is hij gekomen tot de stelling die zijn naam draagt? Na het lezen van het artikel op pagina 4 weet je daar meer over.



Roeien is een populaire sport. Buiten op het water genieten van de natuur en tegelijk ook lichamelijk bezig zijn. Maar hoe kun je beschikbare boten zo goed mogelijk bezetten? Is daar een wiskundige formule voor? En is die voor elke soort boot toepasbaar? Daar kun je een leuke puzzel van maken. Zie verder het artikel op pagina 6.

De Atheense wiskundige Hippias, die 500 jaar voor Christus leefde contrueerde een kromme, die wij de trisectie noemen. Met behulp van deze kromme kan men een willekeurige hoek in drie gelijke delen splitsen.

Hoe je dat moet doen lees je in het artikel op pagina 8.



Op pagina 20 wordt een spelletje beschreven dat wel 'De toren van Hanoi' genoemd wordt. Het wordt gespeeld met schijven van afnemende grootte. Naargelang je het spel met een toenemend aantal schijven speelt wordt het ingewikkelder, dat is logisch. Is daar een formule voor te vinden?

Diverse andere problemen in dit nummer vragen om opgelost te worden.

De redactie wenst iedereen veel lees- en puzzelgenot
Henk Huijsmans



WIE WAS PY

Pythagoras werd ±580 voor Christus geboren op het Griekse eiland Samos vlak tegen de kust van Turkije.

Hij was de zoon van een invloedrijk burger en studeerde bij de beste leermeesters uit zijn tijd, aanvankelijk op Samos, later in Egypte en Babylonië.

Op ongeveer zestigjarige leeftijd kwam hij na vele omzwervingen, via Athene en Sparta weer terug op Samos waar hij een school oprichtte de 'Pythagorou Hemikiklio' (de halfronde bank van Pythagoras), waarvan de leerstellingen niet strookten met die van de toenmalige machthebbers van het eiland.

Hij werd daarom verbannen en richtte in Zuid-Italië een nieuwe school op: de Pythagorio Desmo. Zijn leerlingen, die aan een streng onderzoek werden onderworpen, kreeg hij hoofdzakelijk uit de aristocratische lagen van de bevolking.

De leer van Pythagoras had een mystiek karakter en had als bron het dogma van de zielsverhuizing, waarmee de bevrijding van het aardse leven werd nagestreefd en het wederverkrijgen van de verloren heilige eeuwigheid. Het menselijke lichaam werd als een organisme gezien, maar tegelijkertijd als gevangenis van de ziel.



P Y T H A G O R A S

THAGORAS?

Bij een zuivering van de mens hoort een sobere, strenge levenswijze, waarbij strikte programmering en zelfcontrole een voorname plaats innemen.

De 'Pythagorische levenskunst' is een voorloper van het kloosterleven in latere tijden.

De grondslag van zijn leer was, merkwaardig genoeg, van wiskundige aard.

Hij had het verband ontdekt tussen de lengte van een snaar en de toon die daarmee werd voortgebracht. Hij vond daarbij dat bepaalde verhoudingen van snaarlengten muzikale harmonieën opleverden en meende deze harmonieën en getalsverhoudingen ook op allerlei andere terreinen te kunnen toepassen.

Hij vatte de natuurlijke getallen op als grondslag voor alles wat van belang was voor de kennis van de natuur en van het leven.

Alle kennis moest terug te brengen zijn tot relaties tussen natuurlijke getallen.

Dit heeft geleid tot een

grote belangstelling voor en ontwikkeling van de wiskunde in die tijd. Jammer genoeg is er veel verloren gegaan, omdat de leerlingen verplicht waren tot geheimhouding.

Datgene wat wij nu kennen als de stelling van

Pythagoras is in feite een enorme tegenslag voor hem geweest, omdat hier de natuurlijke getallen niet meer toereikend waren en er voor het eerst de irrationale getallen naar voren kwamen.

Toch loste deze ontdekking een grondprobleem op voor de wiskundigen en betekende een vooruitgang voor de gehele wetenschap. Over de plaats en het tijdstip van zijn dood bestaat geen bepaalde informatie. Het is aannemelijk dat hij circa 500 voor Christus ge-

storven is, maar berichtgeving hierover is met elkaar in tegenspraak.

Omstreeks 1950 is de oude hoofdplaats van het eiland Samos naar hem vernoemd en heet sindsdien Pythagorion. In 1989 is bij de haven een standbeeld voor hem opgericht.

Pythagoras zelf vormt de opstaande zijde van de rechthoekige driehoek die wij allemaal zo goed kennen en automatisch met zijn naam verbinden.

Jan Mahieu



ROEIEN

Een Engels college heeft een club die elke dinsdagmiddag studenten de gelegenheid geeft om te roeien. De leider van het clubhuis heet Jason.

CITAAT

van Euclides.

Koning Ptolemaeus van Egypte vroeg aan Euclides, of er geen kortere manier was om de wiskunde te leren dan Euclides' boek.

De grote grondlegger van de hedendaagse wiskunde, Euclides dus, antwoordde: "Tot de wiskunde leidt geen afzonderlijke koninklijke weg!"

Soms verschijnen er drie soms veertien amateurs. Er wordt gewerkt volgens spelregels. Zo wordt een boot alleen maar uitgeleend als alle plaatsen bezet zijn. Van elk type is maar één boot beschikbaar. Er zijn geen boten met stuurman. Beschikbaar zijn vier boten: een Een (E), een Twee (T), een Vier (V) en een Acht (A). Op twee achtereenvolgende dinsdagen melden zich 12 en 3 roeiers. Welke boten worden uitgeleend? Hoe kun je vlug zien welke boten bezet zullen zijn?

MET HET



Probeer een algemene methode te ontwikkelen. Geef de verdeling bij 10, 9, 7, 11 en 15 aanmeldingen. Welk is het grootste aantal studenten dat tegelijk kan roeien? Is er voor alle kleinere aantallen steeds een oplossing? Schrijf bijvoorbeeld: $7 = V+T+E = 4+2+1$. Onderzoek eens op hoeveel manieren op zo'n dinsdagmiddag boten uitgeleend kunnen worden. Als die combinaties allemaal eens passeren, na hoeveel weken krijgen we dan een

vorige combinatie weer terug? Boot V is kapot en kan een aantal weken niet gebruikt worden. Bij welke aantallen loopt de verdeling nu vast? De heer Jason geeft op een bord met krijt elke middag aan welke boten bezet zijn. 1 betekent bezet, 0 betekent niet in gebruik. Zo noteert hij bij A en T in gebruik: 1010. Ga dat maar na. In dit geval gaat het om 10 roeiers. Hoe kun je uit zo'n geheimschrift van 1 en 0 het aantal roeiers berekenen?

ven in het 1-0 systeem? Er wordt op zekere dag een 'Veertiener' aangeschaft. Ga na wat daarvan de gevolgens zijn voor de verdeling van de roeiers over de boten. Zijn de oplossingen nu nog eenduidig?

MACHTEN VAN 2

Je hebt natuurlijk nu wel in de gaten dat we met een nieuw talstelsel aan het werk gegaan zijn. Het is het tweetallig stelsel. En daarom paste dat getal 'veertien' er ook helemaal niet in.

GETAL TWEE



Is het je inmiddels duidelijk dat als je een tweede boot van hetzelfde type zou aanschaffen, dit wiskundig systeem vastloopt? Er wordt gekozen op zekere dag om een Zestiener (Z) erbij aan te schaffen. Verdeel nu bij 21, 6, 27, 18, 29, 31 en 13 roeiers de aantallen over de boten. Kun je de uitkomsten schrij-

Wel $1=2^0$, $2=2^1$, $4=2^2$ en zo verder.

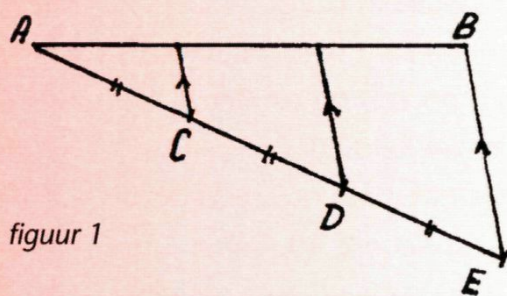
Zo is $9=1.2^3+0.2^2+0.2^1+1.2^0$. Oftewel tweetallig 1001. En hiermee zijn de geheimen van de roeivereniging er nu wel uit.

Henk Mulder

DE TRISECTIE EEN WILLEKEURIGE

Een van de eerste constructies die we in de meetkunde leren is het doormidden delen van een lijnstuk en het doormidden delen van een gegeven hoek met behulp van een passer.

Ook het verdelen van een lijnstuk in een willekeurig aantal gelijke stukken levert geen enkel probleem op. De opdracht: verdeel het lijnstuk AB in drie gelijke stukken wordt als volgt uitgevoerd. (zie figuur 1).



figuur 1

Trek een lijn door het punt A en pas hierop drie gelijke stukken af AC , CD en DE . Trek de lijn BE en trek hieraan evenwijdig lijnen door de punten C en D . Op deze manier kun je een lijnstuk verdelen in elk gewenst aantal gelijke stukken.

Deze constructie is zo eenvoudig, dat menigeen het moeilijk te accepteren vindt, dat er geen constructie is om een willekeurige hoek in drieën te delen met behulp van slechts een passer en een liniaal.

Toch laat het probleem een echte wiskundeliefhebber niet los.

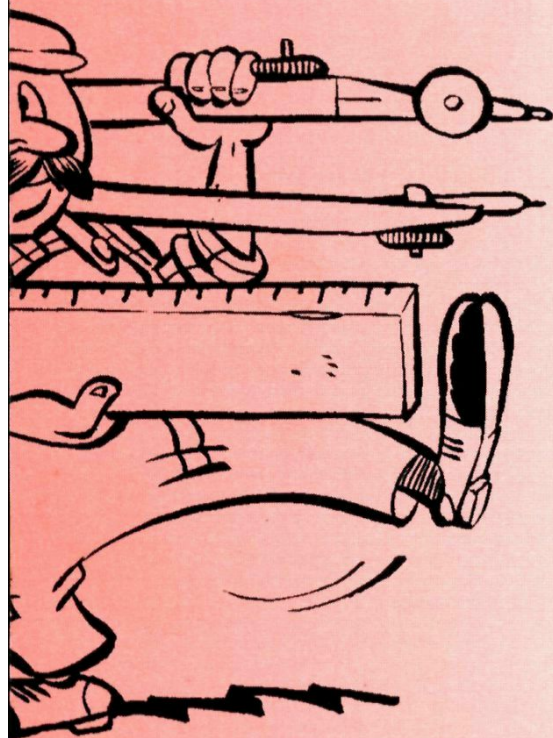
Want al weet men dat het niet kan, tóch blijft men naar een goede **benaderingsconstructie** zoeken.

Zo'n constructie is ongetwijfeld die van de Atheense wiskundige Hippias, die 500 jaar voor Christus leefde.

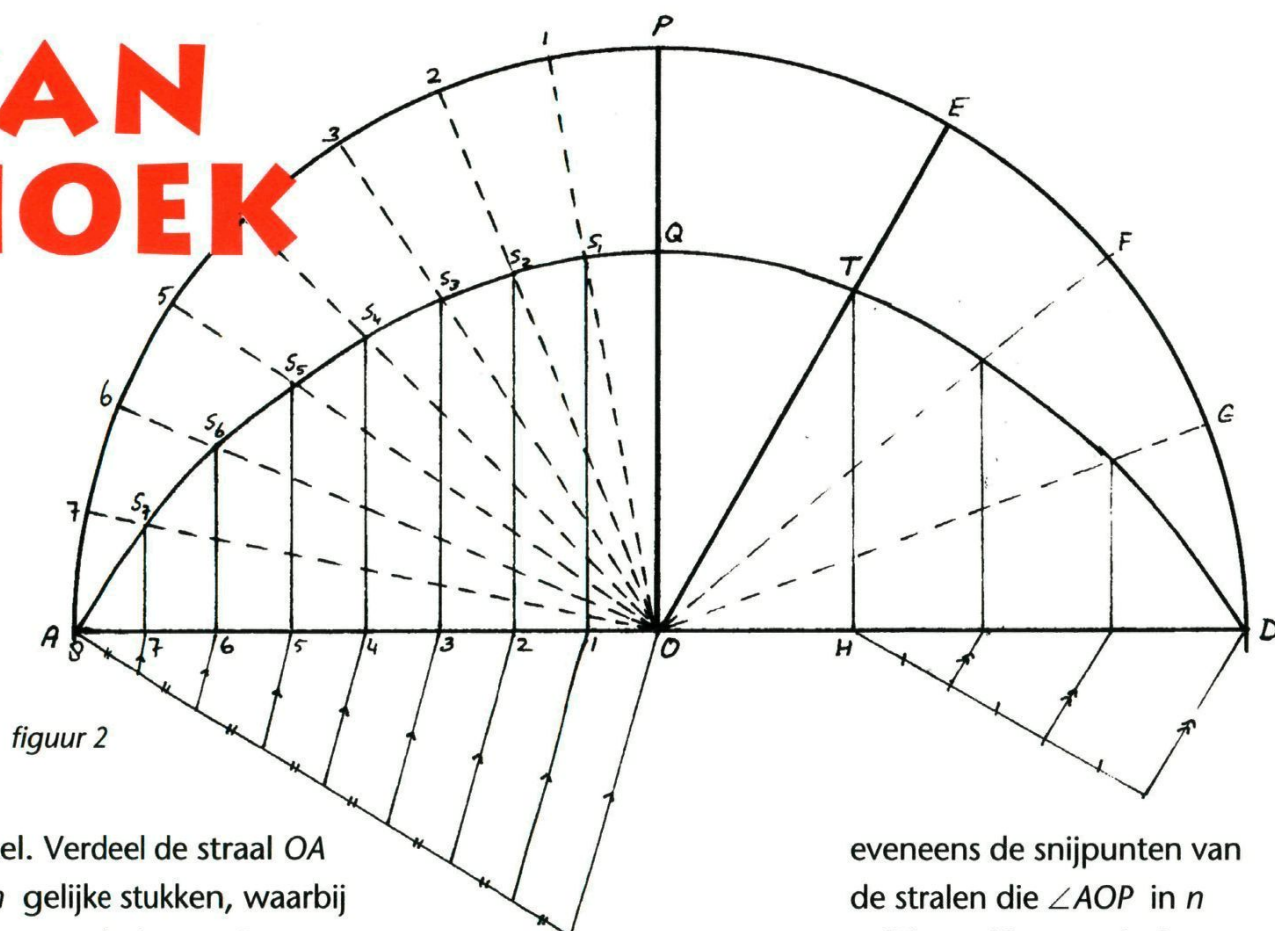
Hij construeerde een kromme, die wij de trisectie noemen, omdat men met behulp van deze kromme een willekeurige hoek in drie gelijke delen kan splitsen. Het opdelen van een hoek in vier, acht, zestien, enz. gelijke stukken vormt geen probleem, omdat je een hoek telkens weer kunt halveren door een bissectrice tekenen.

Het lijnstuk AD (zie figuur 2) is de middellijn van een cirkel met als middelpunt O . Het bovenste deel van de cirkel bevat het punt P en beslaat 180° .

OA is de straal r van de



VAN HOEK



figuur 2

cirkel. Verdeel de straal OA in n gelijke stukken, waarbij n een macht is van 2.

Wij nemen hier $n = 8$.

Verdeel ook de cirkelboog AP in 8 gelijke stukken en verbind de gevonden punten met het middelpunt O . Richt op de straal OA in de gevonden punten loodlijnen op. Punt S_1 is het snijpunt van straal 1 en loodlijn 1; S_2 dat van straal 2 en loodlijn 2, enzovoort.

Door al deze snijpunten kun je een kromme tekenen, die van A naar Q loopt.

Deze kromme kun je spiegelen in de lijn OP en gaat dan naar het punt D . Wat voor bijzonders is er nu aan de hand met deze

kromme? Door bovenstaande opbouw krijg je een verzameling van snijpunten S van loodlijnen en stralen die een lijn en een hoek in overeenkomstig grote stukken verdelen.

Je kunt deze kromme nu gebruiken om een cirkel in een willekeurig aantal gelijke stukken te verdelen.

Door namelijk de straal OA in n gelijke stukken te verdelen, daarna in de gevonden punten loodlijnen op te richten en deze loodlijnen te snijden met de kromme AQ , krijg je

eveneens de snijpunten van de stralen die $\angle AOP$ in n gelijke stukken verdeelt.

We kijken nu in de rechterkant van de figuur.

Trek een willekeurige straal OE , die de kromme AQD snijdt in het punt T .



Het verdelen van $\angle EOD$ in drie gelijke stukken verloopt nu als volgt.

- Laat uit T een loodlijn neer op de lijn OD . Noem het voetpunt van deze loodlijn H .
- Verdeel HD in drie gelijke stukken op de bekende manier.

- Richt in de gevonden punten loodlijnen op en trek door de snijpunten van deze loodlijnen met de kromme de stralen OF en OG .

Het verdelen van een willekeurige hoek in elk gewenst aantal stukken is op deze manier mogelijk.

Het zwakke punt in deze opzet is het zo goed mogelijk tekenen van de kromme AQD .

Het kan nauwkeuriger door in plaats van een verdeling in 8 stukken uit te gaan van een verdeling in 16 of 32 stukken.

Ook kun je gebruik maken van goniometrie om de plaats van de punten S te bepalen.

In de figuur bijvoorbeeld is $\angle AOP$ in acht gelijke delen verdeeld, en de straal OA eveneens in acht gelijke stukken. Als eenheid nemen we de straal van de cirkel. Om S_7 te tekenen moet je eerst $0,875$ naar links. Verder is $\angle AOS_7 = 11,25^\circ$. Het verticale stuk is dus gelijk aan $0,875 \cdot \tan 11,25^\circ \approx 0,1740$.

Bob de Jongste

PUZZELTJE



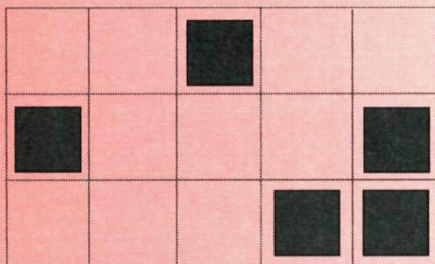
horizontaal

rijk getal = getal, dat meer delers heeft dan zijn voorgangers; een oplossing van

$$x^3 - 34x^2 = 0$$

$$3^4 \cdot 7$$

$$10 \times (80 < \text{priemgetal} < 90)$$



verticaal

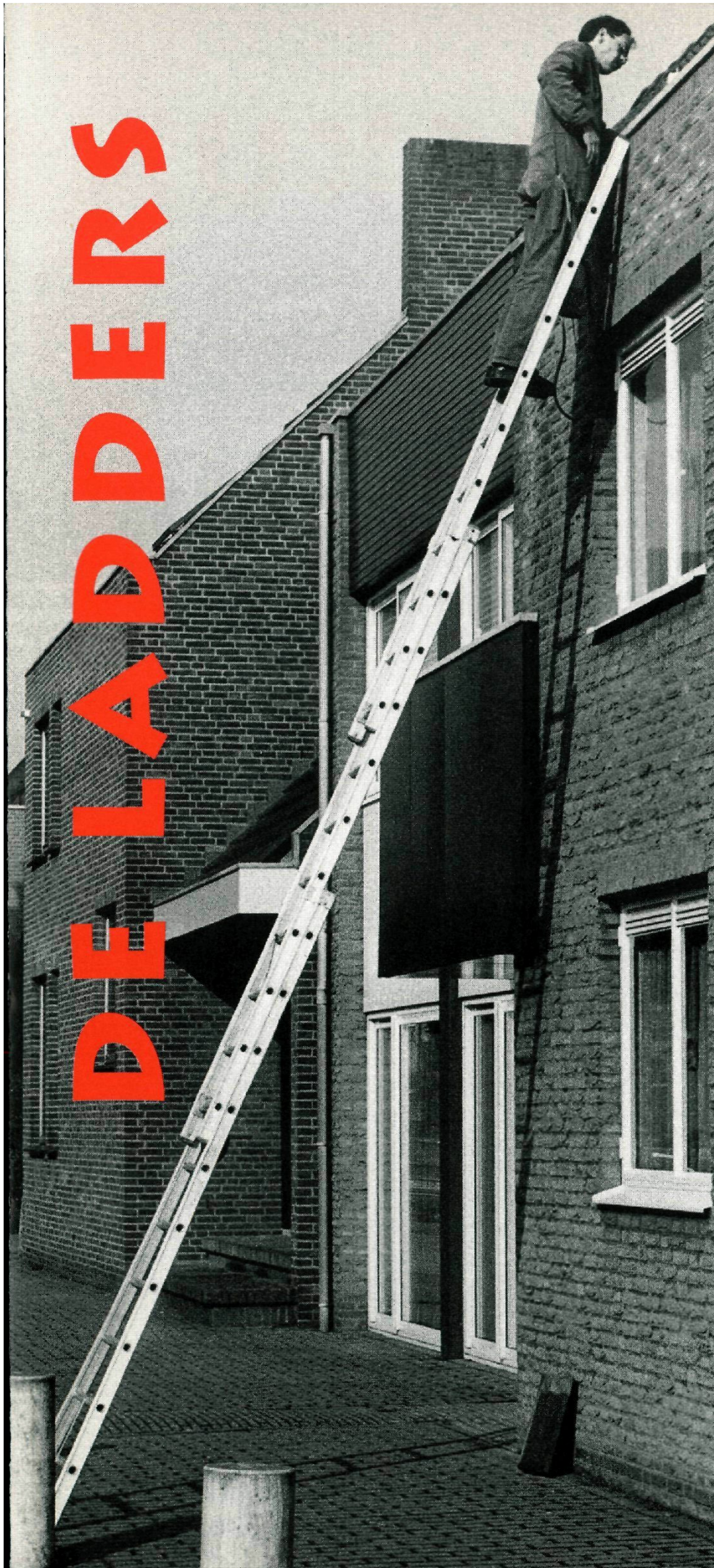
$$10 \cdot 52 + 32$$

$$111/3$$

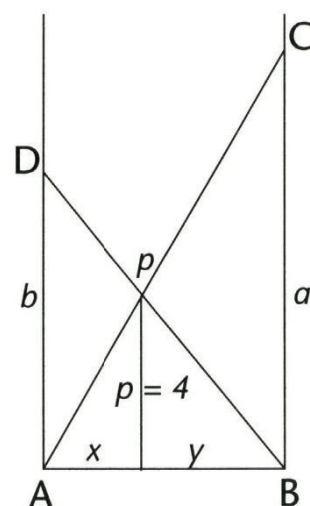
rijk getal

Oplossing, zie blz 31.

DE LADDERS



In een smalle straat zijn twee schilders bezig met het schilderen van de gevels van de tegenover elkaar staande huizen. Zie de tekening.



De ene schilder heeft een ladder AC van 11 meter. De ander ladder BD is 9 m. De ladders kruisen elkaar op 4 m hoogte.

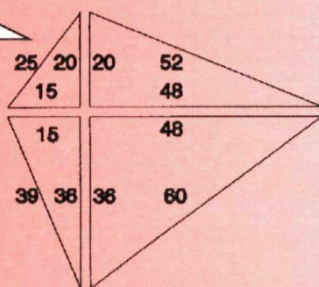


Hoe breed is de straat?
Zie bladzijde 30.

Bob de Jongste

WISKUNDE

PLAATJE



$$15^2 + 20^2 = 25^2$$

$$20^2 + 48^2 = 52^2$$

$$48^2 + 36^2 = 60^2$$

$$36^2 + 15^2 = 39^2$$

**Het VIERKANT wiskunde-
kamp van 29 augustus
tot 2 september in
Conferentieoord Draken-
burgh bij Hilversum was
het eerste wiskudekamp,
dat ooit op Nederlands
grondgebied werd
gehouden voor 'gewone'
kinderen tussen 12 en
16 jaar.**

Ondanks 'gebrek' aan
ervaring en tradities met
zoiets was het heel leuk.
Wij (de jongeren, helaas
allemaal jongens) waren
met zijn dertienen, er waren
rond de vijf studenten van
verschillende universiteiten
en een, soms twee, oudere
(maar toch wel 40-) echte
wiskundigen, die ons
hielpen met alles.
We deden er ieder dag
zo'n 5-6 uur, dus heel wat
wiskunde, maar het was,

Frank Roos



DE IN HET BOS

in tegenstelling tot de algemene, maar onjuiste opvatting, dat wiskunde enorm saai is, wel interessant. Wij kregen allerlei opgaven en onderzoekprogramma's.

De opgaven vereisten zeker geen bepaald niveau van wiskundige kennis, ze waren voor iedereen even leuk.

Onderaan het artikel kun je een voorbeeld vinden.

De onderzoekprogramma's gingen over fractals of tegelpatronen, grafen en veelvlakken. Het doel was om het een en het ander te vertellen over dat bepaald onderwerp. Bij de laatste twee bewees je de stelling van Euler en een paar andere stellingen van hem over grafen zelf. Er waren ook drie 'grote problemen', die je in je vrije tijd op kon lossen, maar gelukkig helemaal geen sommen. Wij hadden ook een wedstrijd om onze denkkracht te toetsen.

Niemand verveelde zich, want als je klaar was met de opdrachten hadden de

begeleiders, die de zaak leidden, altijd een uitdagende puzzel extra voor je die je maar niet met rust wilde laten.

Sommigen deden zelfs wiskunde met alle plezier in hun vrije tijd, en dan overal. Helaas is het niet duidelijk geworden, of ze wel of niet wiskundig gedroomd hadden! De beruchte 'schaakpuzzel' van de drie problemen (zie pagina 14) was dan ook uitdagend, dat velen er ook nog na middernacht aan werkten. De oplossing werd ook pas gevonden om ongeveer 00:30 uur.

Drie 'geleerde mannen' hielden lezingen of voorstellingen, die allemaal zeer interessant waren. Ze zouden ook interessant zijn geweest voor iemand, die op wiskundig terrein minder goed is, dan het gemiddelde.

Prof. Grootendorst vertelde ons over het 'voetbal' (de 6-6-5, of als dat jou niets vertelt, een lichaam, dat gemaakt is door de

hoekpunten van een twintighoek af te hakken, het heeft dus als zijden 12 vijfhoeken en 20 zeshoeken).

Dr. Victor Allis hield een lezing over hoe de computer denkspelletjes, zoals schaken, Stratego, dammen en bridge speelt.

Tenslotte vermaakte de bekende acteur Paul Clark ons met een voorstelling, die ook wat wiskundige tinten had gekregen, namelijk hij had het onder andere over getallen en ...ruitjespapier!

Behalve het wiskunde deden wij ook nog een heel veel andere leuke dingen, zoals verschillende strategische spelen.

Naast de intellectuele bezigheden besteedden we ook tijd aan voetballen.

Wij gingen kanoën-kayakken op een meer dichtbij Hilversum.

Iedereen vond het kamp een succes en wil volgend jaar terug.

Dani Kiss [3de klas vwo]

DE SCHAAKPUZZEL

Ieder soort schaakstuk heeft een waarde $\frac{1}{x}$ punt, als x het grootste aantal schaakstukken is, die je op een schaakbord kunt zetten zonder dat zij elkaar kunnen slaan. Het is bijvoorbeeld makkelijk om te bewijzen dat de waarde van de dame en de toren $\frac{1}{8}$ is.

De opdracht is om schaakstukken op het schaakbord te leggen met een zo groot mogelijke waarde, maar zij mogen elkaar natuurlijk niet kunnen aanvallen. Je moet dus verschillende soorten stukken gebruiken, want met n soort kun je maximaal 1 punt bereiken. Maar het is niet noodzakelijk ook echt elk van de stukken te gebruiken.

DRIE RAADSHEREN

Een van de opdrachten: Een koning stelt op een dag de hersenen van zijn drie raadgevers op de proef. Hij laat hen blinddoeken en dan krijgt ieder een muts op. De mutsen kunnen rood of zwart zijn, maar er

is zeker een zwarte muts op een van de hoofden. De drie raadsheren moeten zeggen, wat voor kleur de muts op hun hoofd heeft, want als ze juist raden, worden ze rijkelijk beloond, maar als ze onjuist raden, verliezen ze de muts en wat eronder zit. Ze mogen ook zeggen, dat ze niet weten, wat voor een kleur hun hoofddeksel heeft..

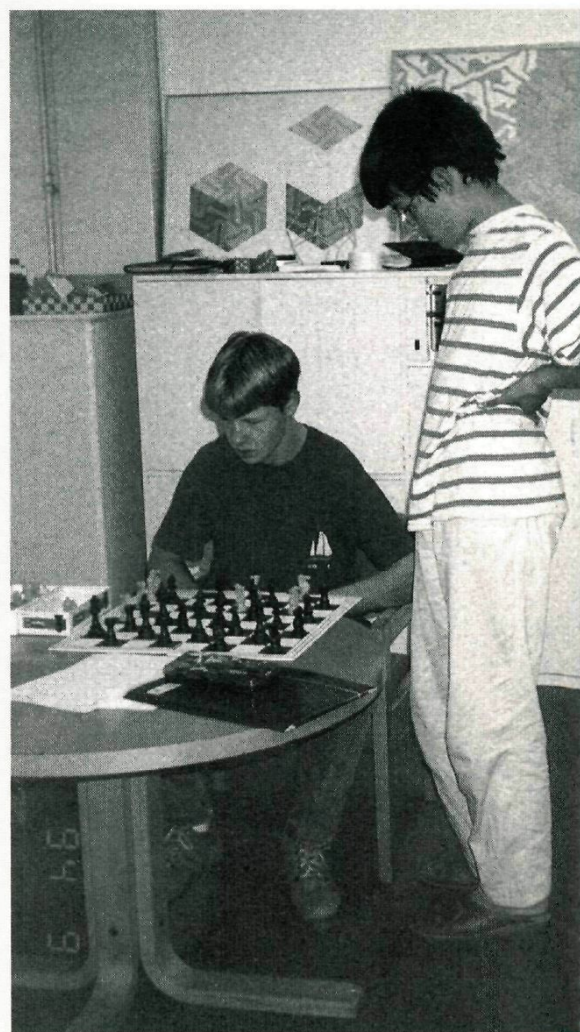
De eerste wordt van de blinddoek bevrijd, hij kijkt rond (hij kan niet naar zijn muts spieken) - maar na een minuut zegt hij, dat hij de kleur van zijn muts niet weet. Dat gebeurt ook met de tweede. De derde weet de kleur van zijn muts al voordat hij die van de andere twee heeft bekeken. Ik moet er wel bijvertellen, dat hij diens kleur ook goed weet. Hoe kan dat?

OPLOSSINGEN

Wie oplossingen weet voor de gestelde pro-

blemen kan deze sturen naar Frank Roos, Klink 19, 9356 DS Tolbert.

Er komt ook volgend jaar een VIERKANT kamp. Voor informatie kun je de organisator van het kamp, Zsafia Ruttkay, bellen: 020-4447776, of 035-561192.



GOOCHELAAR

Ik zag ooit een korte man een lange reeks getallen opschrijven en hij kon ze zo weer geblinddoekt in de goede volgorde opnoemen.

DE GOOCHELTRUC

De truc was deze: begin met twee willekeurige cijfers. Tel ze op.

Als je boven de 9 komt, trek er dan 10 van af.

Je hebt nu cijfer nummer drie. Tel nu cijfers nummer twee en nummer drie op.

Als je weer boven de 9 komt, trek er dan 10 van af.

Enz. In het schema hier-naast zie je dat uitgewerkt.

Begin met twee willekeurige cijfers, die aan elkaar grenzen en draai met de wijzers van de klok mee.

0	1	1	2	3	5	8	3	1	4	5
1										9
9										4
2			3	9	2	1	3			3
7			6				4			7
5			7	9	8	1	7			0
2										7
3			2	8	0	8	8			7
9			6				6			4
4			6				4			1
5			0				0			5
9			6				4			6
6			4				4			1
3			2	2	0	2	8			7
3										8
0										5
3			5	5		6	8			3
7			0			2	4			8
6										1
1										9
5	6	9	7	2	5	7	8	9	9	0

VERMENIGVULDIGEN

Probeer je zoiets met vermenigvuldigen te doen, dan ziet het schema er totaal anders en minder mooi uit.

Probeer het schema maar eens zelf te maken.

Wie er de mooiste lay-out aan kan geven, krijgt zijn presentatie in "Pythagoras" te zien. Je moet je werk dan natuurlijk wel opsturen naar het redactie-adres.

H. Hogenboom

**Drie, zes of tien knikkers
kan je zo plaatsen, dat
er een driehoek ontstaat.**

o 3
o o

o 6
o o
o o o

o 10
o o
o o o
o o o o

**Daarom heten drie, zes
en tien 'driehoeksgetal-
len'.**

Het eerste driehoeksgetal is
een beetje flauw: de één.

$$d_1 = 1 \quad d_2 = 3$$

$$d_3 = 6 \quad d_4 = 10.$$

Als ik aan de driehoek met
10 knikkers vijf toevoeg,
dan krijg ik nummer vijf.

$$10 + 5 = 15 \text{ of } d_4 + 5 = d_5$$

o 15
o o
o o o
o o o o
o o o o o

In het algemeen is

$$d_k + k + 1 = d_{k+1}.$$

Je kunt het k -de driehoeks-
getal ook regelrecht uit-
rekenen met $d_k = \frac{1}{2} k \cdot (k+1)$

KWADRATEN

Sommige driehoeksgetallen
zijn tevens vierhoeksgetallen
oftewel kwadraten. Met het
volgende basic-computer-
programma kun je voor-
beelden vinden.

```
10 defint n,s,q:
   for n=1 to 1000
20 s=s+n:q=int(sqr(s))
30 if q*q<>s then 50
40 print "Driehoeksgetal
   nummer";n;"is";s;"=";
   q;"kwadraat"
50 next
```

MET WISKUNDE

kan je ook zonder program-
meren driehoeksgetallen

vinden, die tevens vier-
hoeksgetallen of kwadraten
zijn? De vraag is dus: kan
 $\frac{1}{2} n(n+1) = m^2$ zijn, waarbij
 m en n heel zijn?

$$n^2 + n - 2m^2 = 0.$$

Lossen we deze kwadratische
vergelijking in n op, dan
vinden we:

$$n = \{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2m^2)}\} : 2.$$

**DRIE
GETA**

Omdat het rechterlid net
als het linkerlid positief moet
zijn, is het minteken
onbruikbaar.

$$2n = \sqrt{(8m^2 + 1)} - 1$$

De vraag is nu gereduceerd
tot: voor welke gehele m is
 $\sqrt{(8m^2 + 1)}$ geheel?

Welk geheel getal het ook
wordt, het zal steeds on-
even zijn. Zie hiervoor een
volgende aflevering.

OPLOSSINGEN

Als $m=1$, dan is $n=1$ en dat is een triviale (zeg maar flauwe) oplossing:

$$\frac{1}{2}1 \cdot (1 + 1) = 1^2 = 1.$$

Als $m = 6$, dan is $n = 8$, dus $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (8 + 1) = 6^2 = 36$. 36 is niet alleen een kwadraat, maar ook een driehoeksgetal.

hoeksgetallen een kwadraat opleveren. Lukt dat jou ook? Zie blz 31.

DERDE MACHT

Als je aan het zesvoud van het n -de driehoeksgetal de derde macht van n toevoegt en ook nog het getal 1, dan vind je de derde macht van $n+1$. Snap je dat? Zie blz 31.

VRAAG 1

Welke waarden kan het oppervlak van de grote gelijkzijdige driehoek krijgen?

VRAAG 2

Wat is dan het totaal aantal hoekpunten, dat mee doet? Let op: niet dubbel of drievoudig tellen! Zie blz 31.

TWEE VRAGEN

We leggen we een aantal even grote gelijkzijdige driehoekjes tegen elkaar tot één grotere gelijkzijdige driehoek. We noemen het oppervlak van één zo'n driehoekje de eenheid van oppervlak; zijn oppervlak is dan 1.

Bob de Jongste,
Martin Leisink en Frank Roos

Als $m = 35$, dan is $n = 49$, dus $\frac{1}{2} \cdot 49 \cdot (49 + 1) = 35^2$.
Als $m = 204$, dan is $n = 577$, dus ...

OPVOLGER

Wat is het eerstvolgende driehoeksgetal na $\frac{1}{2}n(n+1)$? Zie blz 31.

BIJZONDERE SOM

Je kunt bewijzen, dat twee opeenvolgende drie-



DE KWADRATUUR

In het vorige nummer is Tol Franken begonnen met de kwadratuur van een figuur.

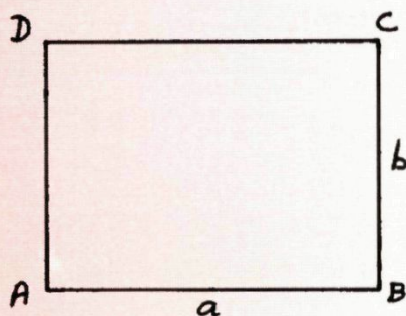
Dat is het construeren van een vierkant dat dezelfde oppervlakte heeft als een gegeven figuur.

Hier een vervolg.

Zo'n kwadratuur is op een vrij eenvoudige wijze mogelijk bij elke willekeurige veelhoek. We zullen dit in stappen gaan opbouwen in omgekeerde volgorde.

1. Bij elke rechthoek is een vierkant te construeren met dezelfde oppervlakte.

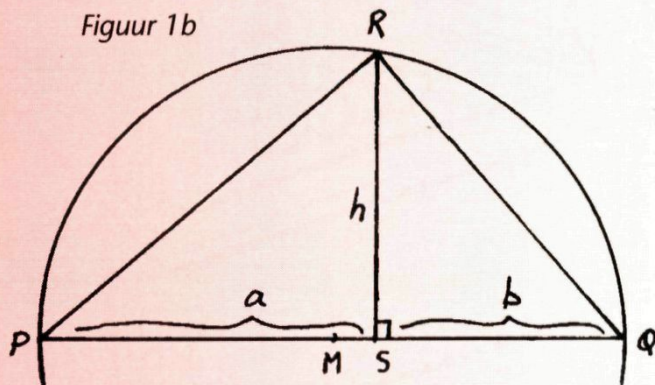
Figuur 1a



Zie de figuren 1a en 1b.

In figuur 1a staat een

Figuur 1b



rechthoek $ABCD$, waarvan de rechthoekszijden de lengte a en de lengte b hebben.

In figuur 1b zie je het bovenste deel van de cirkel met middellijn PQ , zó dat $PS=a$ en $SQ=b$.

Lijnstuk RS staat loodrecht op PQ . RS verdeelt de rechthoekige driehoek PQR in twee gelijkvormige rechthoekige driehoeken zodat geldt

$PS:RS=RS:SQ$ ofwel $a:h=h:b$.

Dus $h^2 = a \cdot b$.

Een vierkant met als zijde RS heeft dus dezelfde oppervlakte als de oorspronkelijke rechthoek.

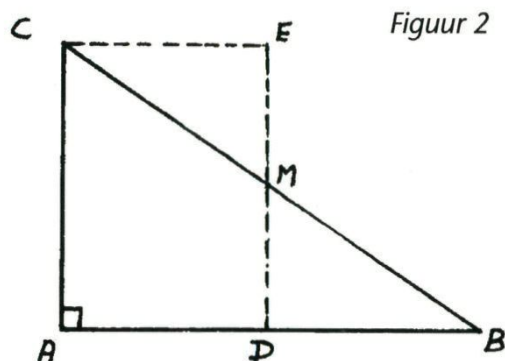
2. Bij elke rechthoekige driehoek is een rechthoek te construeren met dezelfde oppervlakte.

Zie figuur 2.

Van de rechthoekige driehoek ABC zijn de punten D en M middens van de rechthoekszijde AB en de hypotenusa BC .

Puntspiegelen in M voert driehoek BDM over in driehoek CEM .

VAN EEN FIGUUR (2)



Figuur 2

De oppervlakte van rechthoek $ADEC$ is dezelfde als die van de oorspronkelijke rechthoekige driehoek.

3. Bij elke driehoek is een rechthoekige driehoek te construeren met dezelfde oppervlakte.

De driehoeken hebben namelijk dezelfde basis en gelijke hoogte.
Kies C' zo dat je bij A een rechte hoek krijgt.

4. Bij elke veelhoek is een driehoek te construeren met dezelfde oppervlakte.

We zullen dit laten zien voor een vierhoek.

De opzet komt overeen met die bij punt 3.

Zie figuur 4.

Ga uit van vierhoek $ABCD$. Trek door punt D een lijn evenwijdig aan de diagonaal AC .

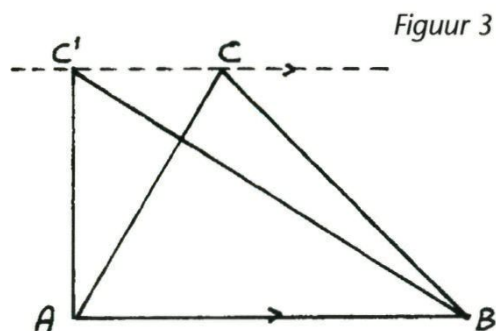
Het punt E is het snijpunt van de lijn met het verlengde van AB .

De driehoeken ACD en ACE hebben dezelfde oppervlakte.

Dus de oppervlakte van vierhoek $ABCD$ is even groot als die van driehoek EBC .

Op een zelfde manier kun je bij een gegeven vijfhoek een vierhoek vinden met dezelfde oppervlakte, enzovoort.

Daarna kun je met achtereenvolgens de stappen 3, 2 en 1 tot een vierkant komen.



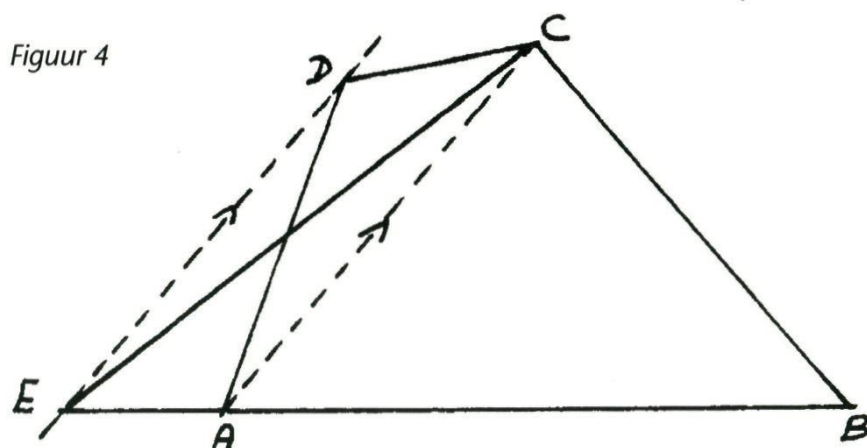
Figuur 3

Zie figuur 3.

Dit is een eenvoudige constructie.

Trek een lijn door het punt C evenwijdig aan AB .

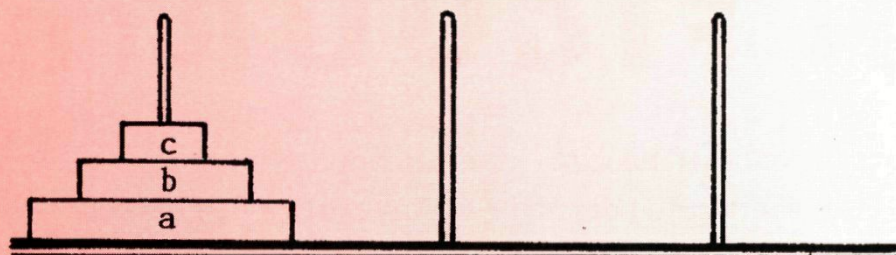
Voor elk punt C' op deze lijn geldt dat de oppervlakte van de driehoeken ABC en ABC' gelijk zijn.



Figuur 4

Jan Mahieu

TORE VERP



Figuur 1

We hebben een plankje met drie staafjes. Over het eerste staafje zijn drie schijven geplaatst met afnemende grootte (fig.1).

De opgave luidt: *breng de drie schijven over naar het rechter staafje, maar je mag maar één schijf tegelijk verplaatsen en er mag geen grote schijf op een kleinere geplaatst worden.* Je kunt het spelletje zelf oefenen met drie munten, bijvoorbeeld een gulden, een kwartje en een dubbeltje.

Ga nu maar na dat je minimaal 7 omzettingen nodig hebt om het karwei te klaren.

In figuur 2 hebben we de tussenstanden aangegeven

Figuur 2

LINKS	MIDDEN	RECHTS
a b c		
a b		c
a b	c	
ab c		
	b c	a
c	b	a
c		a b
		a b c

MET VIER

We gaan het nu proberen met vier schijven *a, b, c* en *d*.

Je kunt dit zelf weer met muntstukken doen.

Het blijkt dat we nu minimaal 15 omzettingen nodig hebben.

Kunnen we beredeneren hoe je aan die 15 komt? Stel je het zo voor.

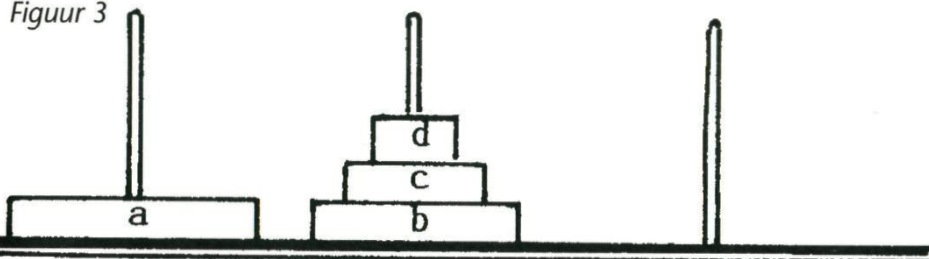
Breng eerst *b, c* en *d*

NTJES LAATSEN

over op de middelste pin.
Het resultaat staat in figuur 3.
Daar heb je volgens de
vorige uitkomst al 7 ver-
plaatsingen voor nodig.
Breng dan *a* over op de
rechter staaf. Dat is één zet.

We beginnen enig overzicht
in het proces te krijgen,
maar het is nog niet door-
zichtig.
Als je bijvoorbeeld de uit-
komst bij 20 schijven wilt
weten, moet je de hele serie

Figuur 3



Vervolgens moet de
middelste toren nog naar
de rechter staaf.
Dat kost opnieuw 7 zetten.
Totaal dus
 $7+1+7=15$ zetten.
We kunnen nu wel uit-
rekenen hoe het bij vijf
schijven zal aflopen.
Dat worden dan
 $15+1+15=31$ zetten.

ALGEMEEN

Stel het aantal schijven is n .
Het aantal omzettingen is
dan een functie van n .
Schrijf $f(n)$. In figuur 4
staat een overzicht.

Figuur 4

n	aantal	$f(n)$
1	1	1
2	$1 + 1 + 1$	3
3	$3 + 1 + 3$	7
4	$7 + 1 + 7$	15
5	$15 + 1 + 15$	31

vanaf het begin door-
rekenen.
Aardiger zou het zijn als
we een algemene formule
zouden hebben. Anders
gezegd: hoe ziet $f(n)$ er
uit? We weten inmiddels:
 $f(n+1) = f(n) + 1 + f(n) =$
 $2 \cdot f(n) + 1$.

Dat betekent, dat we
bijvoorbeeld de uitkomst
voor $n=100$ kunnen
bepalen, als we die voor
 $n=99$ hebben.

ZOEKEN NAAR $f(n)$

Al zoekend en proberend
kom je er op een
gegeven moment achter,
dat alle uitkomsten
precies 1 minder zijn dan
een macht van 2.
Je kunt schrijven $15 = 2^4 - 1$.
Ga dat zelf maar na.
Als dat altijd zou kloppen,
zouden we de formule voor
 $f(n)$ hebben.
Namelijk $f(n) = 2^n - 1$.
Hierboven hebben we al
met zekerheid gevonden:

$$f(n+1) = f(n) + 1 + f(n) = 2 \cdot f(n) + 1.$$

Laten we maar eens
invullen.
 $f(n+1) = 2(2^n - 1) + 1 =$
 $2^{n+1} - 1$ en dat zou
overeenstemmen met de
mogelijk algemene
formule.

Maar verder dan een vermoeden zijn we nog steeds niet. We moeten nog steeds bewijzen dat $f(n) = 2^n - 1$ voor elk natuurlijk getal n juist is.

BEWIJZEN MET VOLLEDIGE INDUCTIE

Er is in de wiskunde een methode om formules te bewijzen die bekend staat als de *methode van de volledige inductie*.

Zo'n bewijsvoering gaat als volgt:

1. Bewijs dat de formule juist is voor $n = 1$.

2. Neem aan dat de formule geldig is voor een bepaalde waarde k en bewijs nu, dat de formule ook geldig is voor de volgende waarde, dus voor $k + 1$.

Het principe hierbij is: in stap 2 laat je zien

dat een aangenomen formule zich verder zal voortzetten en in stap 1 zorg je voor een begin van deze reeks.

We zullen dit proces toepassen op $f(n)$.

1. We hebben al gezien dat $f(1) = 1$ en dit is gelijk aan $2^1 - 1$.

2. Stel $f(k) = 2^k - 1$.

We weten inmiddels dat het aantal zetten voor $k+1$ schrijven gelijk is aan

$$f(k+1) = 2 \cdot f(k) + 1 = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1.$$

En hiermee is aangetoond dat de formule ook klopt voor $k+1$. Je kunt het nu zo zeggen: de formule klopt voor $n = 1$ (stap 1) en daarna ook (stap 2) voor $n = 2$, $n = 3$, enzovoort.

Kortom: het aantal zetten dat nodig is om n schijven van de linkerstaaf naar de rechter te verplaatsen is $2^n - 1$.



MEER MET VOLLEDIGE INDUCTIE

Het bewijzen met volledige inductie zoals hiernaast kun je zelf nog eens oefenen met de volgende twee opgaven.

Laat zien met volledige inductie:

a. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

b. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

Oplossingen op bladzijde 31.

Henk Mulder/Jan Mahieu

DE REGELMATIGE 17-HOEK

In 1796 gelukte het de toen 19-jarige Carl Friedrich Gauss een methode te beschrijven, waarmee de regelmatige 17-hoek geconstrueerd kan worden. Het is een saai en ingewikkeld verhaal, dat alleen specialisten zal boeien.

Op zijn grafsteen staat een regelmatige 17-hoek gebeiteld.

De 17 middelpuntshoeken van deze figuur zijn natuurlijk elk $360^\circ/17 = (21,176471)^\circ = 21^\circ 10'(35+5/17)''$ (zie aan het eind).

Uit zijn theorie volgt, en beschouw dat maar als een curieusiteit, dat de cosinus van deze hoek $(1/16) \cdot [-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2 \cdot \sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}]$ is. Je kunt zelf nagaan, of dat getal overeenkomt met de waarde, die je rekenmachine geeft, namelijk 0,9324722

Vroeger verdeelde men een graad in zestig minuten en een minuut in zestig seconden, terwijl een seconde werd verdeeld in zestig tertiën. De laatste is zo klein, dat die in de praktijk vrijwel nooit voorkwam.

Op mijn rekenmachine zit een toets, waarmee ik een decimale hoek kan omzetten in een hoek, uitgedrukt

in minuten en seconden.

Met de inverse-toets lukt het omgekeerde. Ook voor berekeningen van de tijd is dat gemakkelijk.

Heb jij ook zo'n toets?

Zo ja, ga dan na, dat 24 uur gedeeld door zeven

3 uren + 25 minuten + 42,8 seconden oplevert.

Frank Roos

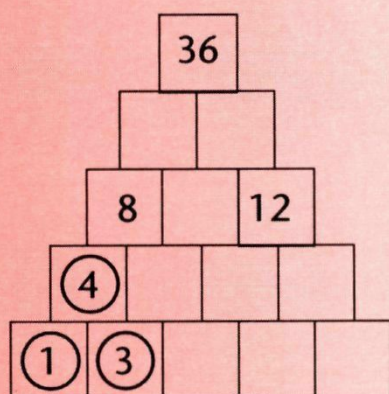


GETALLEN

GETALLEN

B(R)OUWSEL

De getallen in dit bouw-
werk voldoen aan de volgende
eigenschap: Twee naast elkaar
staande getallen hebben als
som het erboven staande getal.
Bijvoorbeeld: $① + ③ = ④$.



Welke getallen moeten er in de
lege hokjes geplaatst worden?
Eerst zelf proberen en dan pas
naar de oplossing op
pagina 31 kijken.

Marcel Snel

NEGATIEVE GETALLEN

Heel lang geleden, toen je
nog op de lagere school of de
basisschool zat, leerde je, dat
je 3-5 niet kon uitrekenen.
Wellicht was het een open-
baring voor je, toen je in de
brugklas leerde, dat 3-5 toch
een oplossing had. Je maakte
kennis met de negatieve
getallen.

Het was niet voor iedereen
gemakkelijk om je er iets bij
voor te stellen, maar woorden
als 'temperatuur onder nul'
en 'schulden' hielpen wel je
begrip te vergroten.

RATIONALE GETALLEN

Minstens zo ingrijpend moet
het op de basisschool voor je
zijn geweest, toen je voor het
eerst leerde omgaan met
3:7 of 25:6. In de brugklas
hebben de negatieve breuken
je waarschijnlijk weinig extra
moeilijkheden veroorzaakt en
zo kende je langzamerhand
alle rationale getallen.

IRRATIONALE GETALLEN

Toen kwamen de wortels.
 $\sqrt{49}$ en $\sqrt{\frac{1}{4}}$ gaven geen
problemen, maar dat
 $\sqrt{5} + \sqrt{20} = \sqrt{45}$ is, verliep
wel wat stroever!
Nu dacht je waarschijnlijk,

dat je alle getallen toch wel
kende, maar toen kwamen de
'onmeetbare getallen' op de
proppen, zoals π bij de cirkels
en e als grondtal van de
natuurlijke logaritme.

REELE GETALLEN

Alle getallen, die je onder-
tussen hebt leren kennen,
behoren tot de meest
uitgebreide verzameling,
die je nu tot je beschikking
hebt: de verzameling van
de reële getallen.

IMAGINAIRE GETALLEN

Het enige sombere wolkje
aan je wiskunde-hemel is de
wortel en de logaritme uit
een negatief getal, want die
bestaan niet.

Je bent, wat het dat betreft,
in dezelfde fase als toen je
leerde, dat 3-5 niet kon.
Ook voor het worteltrekken
uit een negatief getal werd
een zinvolle oplossing
bedacht en $\sqrt{-1}$ werd i
genoemd, zodat dus $i^2 = -1$.
Probeer je er voorlopig maar
niets bij voor te stellen.
Je kunt er wel mee werken.

ENIGE VOORBEELDEN

De vergelijking
 $x^2 + 1 = 0$ los je zo op:

,GETALLEN,GETA

$$(x + i)(x - i) = 0$$

Dan is $x = -i$ of $x = +i$.

$$(-i)^2 = i^2 = -1$$

$$\sqrt{(-9)} = \sqrt{9} \times \sqrt{(-1)} = 3i$$

$$\sqrt{(-16)} + \sqrt{(-9)} = 7i$$

IMAGINAIR

Als a een reëel getal is, dan heet $a \cdot i$ een (zuiver) imaginair getal.

COMPLEXE GETALLEN

De som van een reëel getal en een imaginair getal noem je een complex getal en je kan er op de gebruikelijke manier mee rekenen.

Het enige nieuwtje blijft $i^2 = -1$.

$$(3 + 4i)(2 - 5i) =$$

$$6 - 15i + 8i - 20i^2 =$$

$$6 - 7i + 20 = 26 - 7i.$$

Elk complex getal kun je schrijven als $a + bi$, waarin a en b reële getallen voorstellen.

MEER SOORTEN

GETALLEN ZIJN ER NIET

Met de complexe getallen, kun je nu naar hartelust optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen en worteltrekken. Nu stuit je niet meer op de

behoefte aan nieuwe getallen.

Een uitzondering blijft delen door nul, wat nog steeds niet kan.

GECONJUGEERD COMPLEX

Wel zijn er nog wat bijzondere complexe getallen:

paren, die samen reëel zijn.

De som van $a + bi$ en $a - bi$ is $2a$ en dus reëel.

$a + bi$ en $a - bi$ heten elkaars complex geconjugeerde.

Dit soort getallen kom je onder andere tegen bij de complexe oplossingen van kwadratische vergelijkingen.

EEN NEGATIEVE DISCRIMINANT

Stel je wilt de oplossing

hebben van $x^2 + 2x + 4 = 0$

De discriminant is -12 , zodat

$$x = \frac{-2 - \sqrt{(-12)}}{2} \quad \text{of}$$

$$x = \frac{-2 + \sqrt{(-12)}}{2}$$

Omdat $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ is, krijg

je dan $x = -1 - i\sqrt{3}$ of

$x = -1 + i\sqrt{3}$. De som van deze twee oplossingen is inderdaad reëel, namelijk -2 .

De helft hiervan is de x -coördinaat van de top.

DELEN

$$\text{Bereken } \frac{29 + 22i}{3 + 4i}$$

Stel, dat deze breuk gelijk is aan $a + bi$. Dan moet

$$29 + 22i = (a + bi)(3 + 4i) \text{ of}$$

$$29 + 22i = 3a - 4b + (4a + 3b)i.$$

Dat lukt alleen als

$$\begin{cases} 3a - 4b = 29 \text{ en als} \\ 4a + 3b = 22. \end{cases}$$

Dit is een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden a en b .

De oplossing hiervan is $a = 7$ en $b = -2$, zodat

$$\frac{29 + 22i}{3 + 4i} = 7 - 2i \text{ is.}$$

Een veel efficiëntere manier om deze complexe breuk te vereenvoudigen is door hem met 1 te vermenigvuldigen en 1 te schrijven als

$$\frac{3 - 4i}{3 - 4i}$$

Je krijgt dan:

$$\frac{29 + 22i}{3 + 4i} \times \frac{3 - 4i}{3 - 4i} =$$

$$= \frac{87 - 116i + 66i - 88i^2}{9 - 16i^2}$$

$$= \frac{175 - 50i}{25} = 7 - 2i.$$

LEN, GETALLEN

WORTELTREKKEN

Bereken nu zelf $\sqrt{-5 + 12i}$.

Aanwijzing: neem aan, dat de oplossing $a + bi$ is.

De oplossing staat op blz 000

GETALLENVLAK

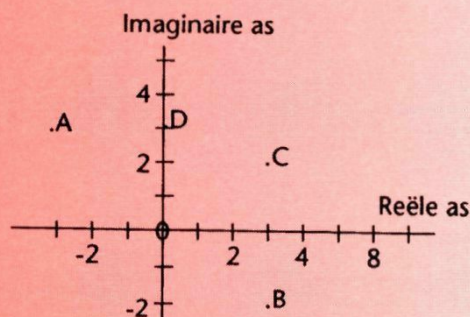
Het is mogelijk om alle complexe getallen, alle nu bekende getallen dus, in een plat vlak af te beelden:

het complexe getallenvlak.

Je tekent een x - y -assenstelsel met loodrecht op elkaar staande assen.

De x -as noemen we de reële getallen-as; de y -as de imaginaire getallen-as.

Als je nu $z = x + yi$ wilt tekenen, dan teken je, op de gebruikelijke manier, het punt (x, y) . In de oorsprong $(0, 0)$ ligt het getal nul. In de figuur zie je enige voorbeelden:



getal $A = -3 + 3i$

getal $B = 3 - 2i$

getal $C = 3 + 2i$

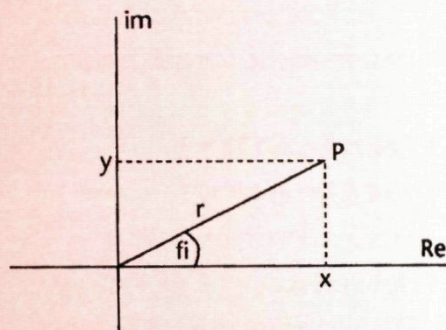
getal $D = 3i$

B en C zijn elkaars complex geconjugeerden. B en C liggen spiegelsymmetrisch ten opzichte van de reële as.

Het optellen van complexe getallen gaat op precies dezelfde manier als het optellen van vectoren.

DE MODULUS EN HET ARGUMENT

Als $z = x + yi$, dan is $|z| =$ grootte of lengte van $z =$ de modulus van $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Zie de tekening hieronder.



De aangegeven hoek heet het argument van $z = \arg(z)$. $\arg(z)$ en r zijn in feite ook poolcoördinaten!

VERBAND MET VECTOREN

Alle problemen, die je met tweedimensionale vectoren op kunt lossen, zijn ook te verwerken met complexe getallen.

Over de complexe getallen is nog zeer veel te vertellen; een studie op zich. Het wordt pas echt interessant als je complexe functies met complexe variabelen gaat bekijken.

Een geschikt boekje voor niveau 6 VWO is "Complexe getallen" van Prof. Freudenthal.

Frank Roos

EEN GETALPATROON

Bekijk eens de volgende
regelmaat:

$$999 \times 111 = 110889$$

$$999 \times 222 = 221778$$

$$999 \times 333 = 332667$$

$$999 \times 444 = 443556$$

$$999 \times 555 = 554445$$

$$999 \times 666 = 665334$$

$$999 \times 777 = 776223$$

$$999 \times 888 = 887112$$

$$999 \times 999 = 998001$$

Hoe zou die regelmaat
ontstaan? Zie blz 30.

Ook vermeldenswaardig is:

$$110 + 889 = 999$$

$$221 + 778 = 999$$

$$332 + 667 = 999$$

...

Probeer beide ook eens met
de serie, die begint met
 9999×1111 , daarna met
 99×11 en met ...

Tol Franken

CIRKELS IN HET VIERKANT

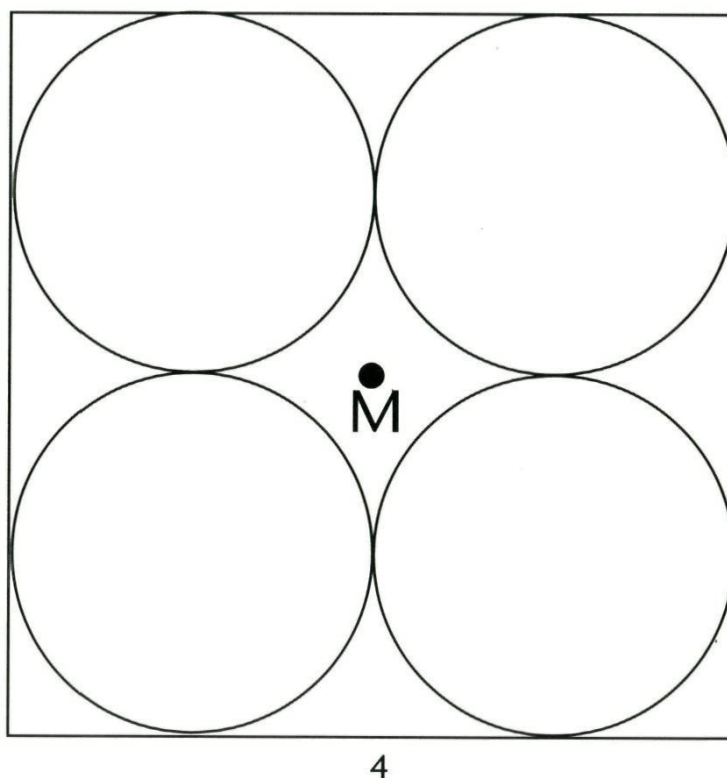
In de volgende figuur zijn,
rakend aan een vierkant met
zijde 4, vier cirkels met straal
1 getekend.

De vier cirkels raken uitwen-
dig aan een kleine cirkel met
middelpunt M.

Bereken de straal van die
kleine cirkel.

De oplossing kun je vinden
op pagina 31.

Marcel Snel



VADER EN KIND

Een vader is nu 25 jaar
ouder dan zijn kind.

Over 7 jaren is deze vader
5 x zo oud als zijn kind.
Wat doet vader nu ?

Zie bladzijde 31.

Tol Franken

DES LEZERS PEN

1. DE OMTREK

VAN EEN ELLIPS.

De heer J. Groenewoud uit Uden vond in een boek, dat de omtrek van een ellips ingesloten zit tussen

$$\frac{\pi}{8b}(a+3b)^2$$

en

$$\frac{\pi}{8a}(3a+b)^2$$

Waarom dit zo is, staat helaas niet in zijn boek vermeld.

Wellicht kan een lezer hierop zijn licht laten schijnen.

Door het rekenkundige gemiddelde te nemen van beide uitdrukkingen, krijg je een benadering van de omtrek.

Die is:

$$p \approx \pi(a+b) \left(1 + \frac{(a-b)^2}{16ab}\right)$$

Na enig herschrijven, krijg je:

$$p \approx \frac{\pi a}{16} \left(15 + 15 \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b^2}{a^2}\right)$$

Om te beoordelen, hoe goed deze benadering is ten opzichte van de gegeven formule voor p in het oorspronkelijke artikel, gaan we over op de eccentriciteit e . In genoemd artikel kun je terugvinden, dat

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

Hieruit volgt dan, dat

$$\frac{b}{a} = (1 - e^2)$$

en

$$\frac{a}{b} = (1 - e^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Vervolgens hebben we de volgende twee zogenaamde Tailer-reeksen nodig:

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5e^4}{128} \dots$$

en

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \frac{5x^3}{16} + \frac{35e^4}{128} + \dots$$

Vervangen we x nu door $a:b$ en gebruiken we verder e , dan krijgen we voor p tenslotte:

$$p \approx \pi \frac{a}{16} \left(15 + 15 \left(1 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{8} - \frac{e^6}{16}\right) + \left(1 + \frac{e^2}{2} + \frac{3e^4}{8} + \frac{5e^6}{16}\right) + (1 - e^2)\right)$$

of, vereenvoudigd,

$$p \approx \pi a \left(2 - \frac{e^2}{2} - \frac{3e^4}{32} - \frac{5e^6}{128} - \dots\right)$$

Deze benadering van p is dus goed tot en met de zesde macht van e .

DE GEGEVEN BENADERING WAS

$$p = a + b + 3\sqrt{a^2 + b^2}$$

Die kunnen we als volgt herschrijven:

$$p \approx a \left(1 + \frac{b}{a} + 3\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}\right)$$

$$p \approx a \left(1 + \sqrt{1 - e^2} + 3\sqrt{2 - e^2}\right)$$

$$p \approx a \left(1 + \sqrt{1 - e^2} + 3\sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{e^2}{2}}\right)$$

Nu is de vorm geschikt voor Tailerreeksontwikkeling:

$$\frac{p}{a} \approx 1 + \left(1 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{8} - \dots\right) + 3\sqrt{2} \left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{e^4}{32} - \dots\right)$$

of

$$p \approx (2 + 3\sqrt{2}) a \left(1 - \frac{e^2}{4} - \dots\right)$$

De factor $2 + 3\sqrt{2}$ is slechts een matige benadering van 2π , dus er is al een afwijking bij de eerste term.

De benadering van de heer Groenewoud is dus werkelijk veel beter dan deze.

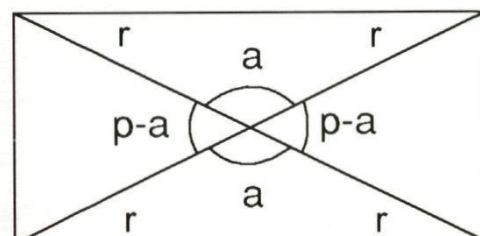
Hij is de enige, die tot nu toe gereageerd heeft.

2. EEN WISKUNDIG MEUBEL

Van Jan de Bo uit Maarkedal (België) en Whee Ky Ma uit Groningen ontvingen we een reactie op het artikel dat stond in nummer 5 van juli 1994.

Hieronder volgen, in bewerkte vorm, hun berekeningen.

Stel $\alpha = t$ rad.



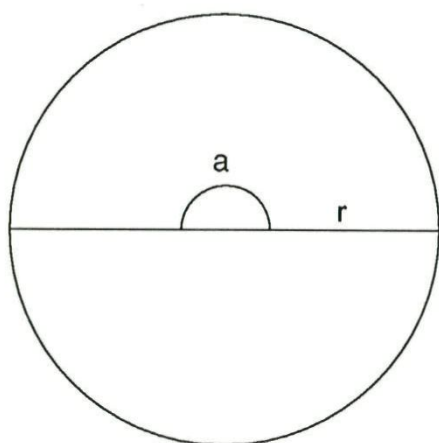
$S(t)$ = oppervlak ladenbodem
 = 2 x opp. cirkelsector +
 2 x opp. driehoek =
 $2 \times \frac{1}{2} r^2 t + 2 \times \frac{1}{2} r^2 \sin(\pi - t) =$
 $r^2 t + r^2 \sin t.$

NEVVRUCHT

t	0										p
r^2	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$1+\cos t$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
$S'(t)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
$S(t)$	0										pr^2

$$S'(t) = r^2(1 + \cos t).$$

Het interval waarop we het teken van de afgeleide onderzoeken kunnen we gerust beperken tot het interval $[0, \pi]$, omdat de hoek α nooit groter dan 180° kan zijn. We zien dat de oppervlakte van de ladenbodem haar maximum bereikt als de hoek α gelijk is aan 180° .



De maximale oppervlakte van de ladenbodem is dan ook logischerwijs πr^2 , want dat is de oppervlakte van een cirkel.

3. PYTHAGORASBALK

In een vorig nummer werd gevraagd viertallen a, b, c, d te bepalen zodat $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.

B. Roovers uit Nuenen leverde een reactie en een overzicht van viertallen met $d < 50$. Een extraatje vormt in zijn betoog de volgende stelling: "Een getal is te schrijven als het verschil van twee kwadraten als dat getal niet van de vorm $4k + 2$ is".

4. PYTHAGORAS-KUBUS

Sjoerd Visscher uit Heeten gaf een reactie op een reactie op de "Bijna-Pythagoras-kubus". Ook leverde hij een suggestie om rijen van de vorm $x_n = a \cdot x_{n-1} + b \cdot x_{n-2}$ te onderzoeken.

Dat is zeker de moeite waard.

5. BANKKRAAK

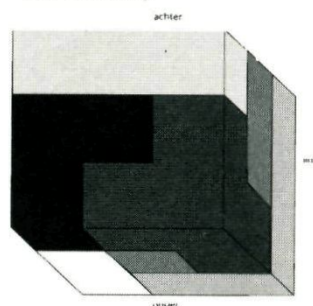
Tot nu toe reageerde alleen Bram Kole uit Hoensbroek op

de oplossing van "Bankkraak" in Pythagoras nummer 5 van juli 1994.

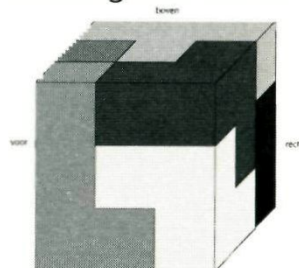
Voordat we zijn (en onze) oplossing prijsgeven wachten we nog even af of er nog meer reacties binnenkomen. Reacties kunnen tot uiterlijk 1 december a.s. gestuurd worden naar Marcel Snel, Prinses Christinalaan 44, 6301 VZ Valkenburg.

6. KUBUSPUZZEL

Lisanne van den Hombergh uit Vierlingsbeek was de enige die een correcte oplossing van de kubuspuzzel uit nummer 5 instuurde. Een kleurrijke oplossing! En overzichtelijk doordat zij twee tekeningen maakte: een, met zicht op achterkant, onderkant en linkerkant van de kubus;



een tweede, met zicht op de andere grensvlakken.



Prima gedaan, Lisanne.

Redactie

DE LADDERS

De driehoeken *APS* en *ACB* zijn gelijkvormig, evenals de driehoeken *BPS* en *BDA*.

Hieruit volgt: $\frac{x}{x+y} = \frac{4}{a}$ en

$$\frac{y}{x+y} = \frac{4}{b} \text{ en}$$

Tellen we dit bij elkaar op, dan krijgen we $\frac{4}{a} + \frac{4}{b} = 1$

Lossen we hieruit *a* op, dan:

$$a = \frac{4b}{b-4} \dots \dots (1)$$

Met behulp van de stelling van Pythagoras in de driehoeken *ABC* en *ABD* vinden we

$$(x+y)^2 + a^2 = 11^2 \text{ en}$$

$$(x+y)^2 + b^2 = 9^2$$

$a^2 - b^2 = 40$. Vul hierin (1) in:

$$\left(\frac{4b}{b-4}\right)^2 - b^2 = 0$$

Ga links en rechts met $(b-4)^2$ vermenigvuldigen.

$$b^4 - 8b^3 - 40b^2 + 320b - 640 = 0.$$

In principe zou deze vierdegraads vergelijking vier verschillende oplossingen kunnen hebben. Gezien de lengte van de ladders is slechts een

oplossing tussen nul en negen acceptabel. Helaas is er hier niet zo iets simpels als de abc-formule. We hebben geen recept voor een oplossing. We laten de computer er naar zoeken met behulp van een basic-programma:

```
10 B1=0
20 B2=9
30 B=B1+(B2-B1)/2
40 P=-B^4+8*B^3-40*B^2+320*B-640
50 IF P>0 OR P=0 THEN B1=B
60 IF P<0 THEN B2=B
70 IF B2-B1<0.00001 THEN 90
80 GOTO 30
90 PRINT "B =";B
100 S = SQR(81-B^2)
110 PRINT "De breedte is"; S
```

Elke keer dat de lus van regel 30 t/m regel 90 wordt doorlopen, is het interval, waarin je de oplossing zoekt, half zo lang geworden. De halvering gebeurt bij 30. Bij 50 en 60 kies je uit het 'linker of rechter helft' van het interval.

De breedte van de straat is ongeveer 5,71 m.

WORTELTREKKEN

$$\sqrt{-5+12i} = a + bi$$

kwadrateer:

$$-5 + 12i = a^2 - b^2 + 2abi$$

$$\begin{cases} -5 = a^2 - b^2 \\ 12 = 2ab \end{cases}$$

De oplossing van dit stelsel is

$a = 2$ en $b = 3$, dus

$$\sqrt{-5+12i} = 2 + 3i \text{ of}$$

$a = -2$ en $b = -3$ dus,

$$\sqrt{-5+12i} = -2 - 3i.$$

GETALPATROON

$$999 \times 111 =$$

$$1000 \times 111 - 1 \times 111 =$$

$$111.000 - 111 =$$

$$110.000 + 1000 - 111 =$$

$$110.000 + 899$$

$$999 \times 222 =$$

$$1000 \times 222 - 1 \times 222 =$$

$$222.000 - 222 =$$

$$221.000 - 222 =$$

$$221.000 + 1000 - 222 =$$

$$221.000 + 778 \text{ enzovoort.}$$

DRIEHOEKSGETALLEN

Oplossing van opvolger

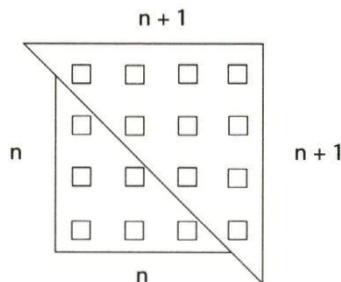
Een driehoeksgetal is $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Zijn opvolger vind je door n te vervangen door $n+1$.

De opvolger is $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

Oplossing bijzondere som

Elk kwadraat is te schrijven is als de som van twee opeenvolgende driehoeksgetallen. Zie de figuur, die voor zich spreekt:



Als je haakjes wegwerkt en de twee getallen optelt, dan vind je n^2+2n+1 en dat is het kwadraat van $n+1$.

Oplossing derde macht

$$6d_n + n^3 + 1 = 6 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n^3 + 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3.$$

Oplossing driehoekjes:

vraag 1:

$$\text{oppervlak} = 1 + 3 + 5 + \dots = n^2$$

vraag 2:

$$\text{aantal punten} = 1 + 2 + 3 + \dots = \frac{1}{2}n(n+1). \text{ Dat zijn juist de driehoeksgetallen.}$$

VOLLEDIGE INDUCTIE

a. Het gaat hier om een som van n termen, waarbij $t_n = 2n-1$.

We moeten laten zien dat

$$S(n) = n^2.$$

1. $S(1) = 1$. Dit klopt.

2. Stel $S(k) = k^2$.

Dan is $S(k+1)$

$$= 1 + 3 + 5 + \dots + 2k-1 + 2(k+1)-1 =$$

$$= k^2 + 2(k+1) - 1 =$$

$$= k^2 + 2k + 2 - 1 =$$

$$= (k+1)^2$$

Hiermee is de juistheid bewezen.

b. Het gaat opnieuw om een som van n termen, waarbij

$$t_n = n^3.$$

Te bewijzen is

$$S(n) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

1. $S(1) = 1$. Dit klopt.

2. Stel $S(n) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

Te bewijzen is nu nog:

$$S(n+1) = \frac{1}{4}(n+1)^2[(n+1)+1]^2.$$

$$S(n+1) = S(n) + (n+1)^3$$

$$= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)^3.$$

Probeer nu zelf te laten zien

dat dit gelijk is aan

$$\frac{1}{4}(n+1)^2[(n+1)+1]^2.$$

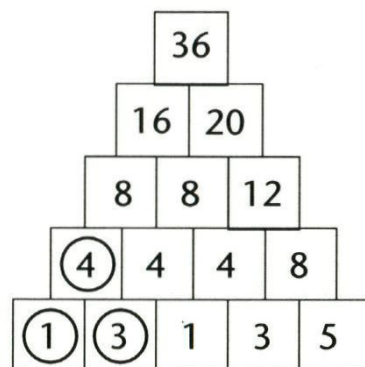
(Gewoon uitschrijven!)

PUZZELTJE

1 2 3 4
5 6 7
8 9 0

GETALLEN

B(R)OUWSEL



VADER

EN KIND

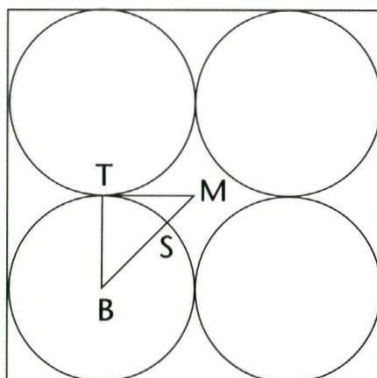
in jaren	kind	vader
Nu	p	$p+25$
Later	$p+7$	$p+32$

$$\text{Vergelijking: } 5 \cdot (p+7) = p + 32.$$

$$\text{Dan } p = -\frac{3}{4}$$

Vader zorgt voor zijn nageslacht.

CIRKELS IN VIERKANT



4

$$MB = \sqrt{2}$$

(Stelling van Pythagoras in driehoek $\triangle BMT$).

$$BS = 1$$

$$MS = MB - SB = \sqrt{2} - 1.$$

VERANTWOORDING ILLUSTRATIES:

Cartoons: Pieter Hoogenbirk

Foto omslag: Jan Mahieu

Foto's: Pagina 4/5: Jan Mahieu

Pagina 6: Johan van Gurp

Pagina 11: Johan van Gurp

Pagina 12 en 14: Zsafia Rutthay

ABONNEMENTEN:

Nederlandse en Belgische

abonnees: aanmelden telefonisch

070 - 314 35 94, of schriftelijk, NIAM

ProjectOntwikkeling b.v.

Antwoordnummer 97007,

2509 VH Den Haag.

TARIEVEN:

Jaarabonnement Pythagoras f 35,-

Jaarabonnement inclusief Archimedes f 65,-

Jaarabonnement België f 45,-/of BF 800,-

Jaarabonnement België

inclusief Archimedes f 75,-/of BF 1450,-

Jaarabonnement Buitenland f 50,-

Losse nummers f 7,50/of BF 140,-

BETALING:

Wacht met betalen tot u de acceptgiro-
kaart krijgt toe-gestuurd.

Bij tussentijdse abonnering ontvangt u
alle nummers van de lopende jaargang.
Abonnementen zijn doorlopend, tenzij
voor 1 juli schriftelijk bij de uitgever is
opgezegd.

UITGEVER:

NIAM ProjectOntwikkeling b.v.

Postbus 97734

2509 GC Den Haag.

Tel.: 070 - 314 35 94

Fax: 070 - 314 35 88

Giro 33.84.52.