

PYTHAGORAS

WISKUNDE TIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

34 E JAARGANG

MAART 1995 NUMMER 3

*Nieuwe rubriek:
Pythagoras Olympiade*

4

*Wiskunde en
natuurwetenschappen*

12

Roosterpunten

24

Partities

27

UITGAVE:

Pythagoras is een uitgave van NIAM b.v. en verschijnt zesmaal per jaar. Een jaargang loopt van september tot en met augustus.

REDACTIE:

Jan Mahieu
Frank Roos
Marcel Snel

EINDREDACTIE:

Henk Huijsmans

NIEUWE ARTIKELN:

Molenstraat 31,
4841 CA Prinsenbeek

CORRESPONDENTIE-ADRES:

Reacties,
oplossingen enz.
Frank Roos,
Klink 19
9356 DG Tolkert

MEDEWERKERS:

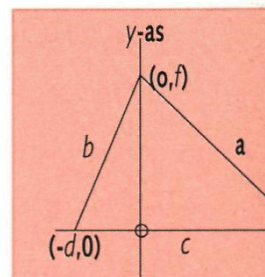
Bob de Jongste,
Hans de Rijk,
Paul van de Veen,
Thijs Notenboom.

• VOORWOORD	3
• PYTHAGORAS OLYMPIADE	4
• DE VERGELIJKING VAN PELL	5
• EEN BEETJE ALGEBRA (1)	6
• RECHTE VAN EULER	6
• VIERKANT IN DRIEHOEK	9
• REKENPUZZEL	9
• SPELLETJES MET DE REKENMACHINE	10
• EEN RIJ MANNEN	10
• DE CIRKELSPIRAAL	11
• DE UITGEKPLAPTE KUBUS	11
• WISKUNDE EN NATUURWETENSCHAPPEN	12
• ILLUSIE ALS WERKELIJKHEID	12
• LINEARISEREN	15
• CURVE-FITTING	17
• DE REGRESSIE-LIJN	18
• DE PUT	20
• ZELF EEN THEORIE MAKEN	23
• BROERS EN ZUSTERS	24
• ROOSTERPUNTEN	24
• EEN PRIEMTEST	26
• PARTITIES	27
• OPLOSSINGEN	28

VAN DE REDACTIE

In het najaar is de redactie benaderd door een oud winnaar van de wiskunde olympiade. Hij kwam met het voorstel om samen met enkele andere oud deelnemers een puzzelrubriek in Pythagoras op te zetten.

De redactie is blij met dit initiatief. de eerste puzzel kun je vinden op pagina 4. In dit nummer tref je verder ook diverse bijdragen van andere abonnees aan.



EEN GREEP UIT DE INHOUD

De Zwitserse wiskundige Leonhard Euler (Basel 1707 - Petersburg 1783) was een leerling van Johannes Bernoulli. In 1730 werd hij benoemd tot hoogleraar natuurkunde aan de Academie van Wetenschappen te Petersburg, waar hij in 1733 Daniël Bernoulli opvolgde.

In 1741 werd hij door Frederik II uitgenodigd de wiskundige afdeling van de Berlijnse Academie te leiden maar in 1766 keerde hij terug naar Petersburg, waar hij tot zijn dood bleef.

Euler hield zich met verschillende takken van de wiskunde bezig, overal de sporen van zijn geniale geest achterlatend. Hij wijdde zich aan de analyse, de analytische meetkunde, de differentiaalmeetkunde, de getaltheorie, de differentiaal- en integraalrekening en de elementaire meetkunde. Maar ook met mechanica en natuurkunde hield hij zich bezig. De resultaten van zijn onderzoek zijn te vinden in ongeveer 20 werken, en bovendien in vele artikelen, in Berlijn of Petersburg gepubliceerd.

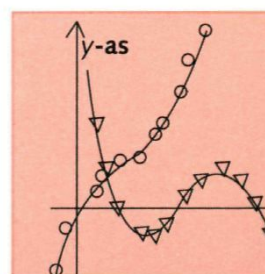
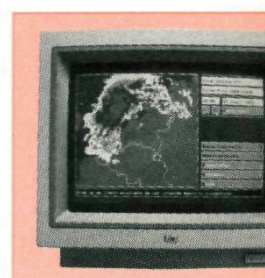
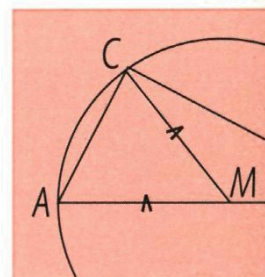
Op pagina 6 vind je een artikel over "De rechte van Euler".

Een wiskundige werkt met getallen die in elke gewenste graad van nauwkeurigheid bekend zijn; een natuurwetenschapper werkt met waarden die een meet-onnauwkeurigheid met zich mee brengen. Een serie artikelen, beginnend op pagina 12 en eindigend op pagina 23 besteedt aandacht aan wiskunde en de natuurwetenschappen.

Puzzels, opdrachten, kleine en grote probleempjes vullen verder het nummer en bieden voldoende mogelijkheden om ook zelf actief bezig te zijn.

Veel lees- en puzzelplezier.

Henk Huijsmans



Dit is een
nieuwe rubriek
in "Pythagoras".

In deze rubriek
komen puzzels
die jullie zelf
kunnen oplossen.

Die oplossingen
kunnen jullie naar
ons opsturen.

Goede inzendingen
worden beloond
met punten.

Wie de meeste
punten verzamelt,
kan prijzen winnen,
waaronder een
jaarabonnement
op Pythagoras, een
boekenbon en ...
een uitnodiging
voor de tweede
ronde van de
Nederlandse
Wiskunde
Olympiade.

Als je het in die
Olympiade ook
heel goed doet
dan maak je
kans op een reis
naar India!

P Y T H A G O R A

D E O P G A V E N

OPGAVE 1.

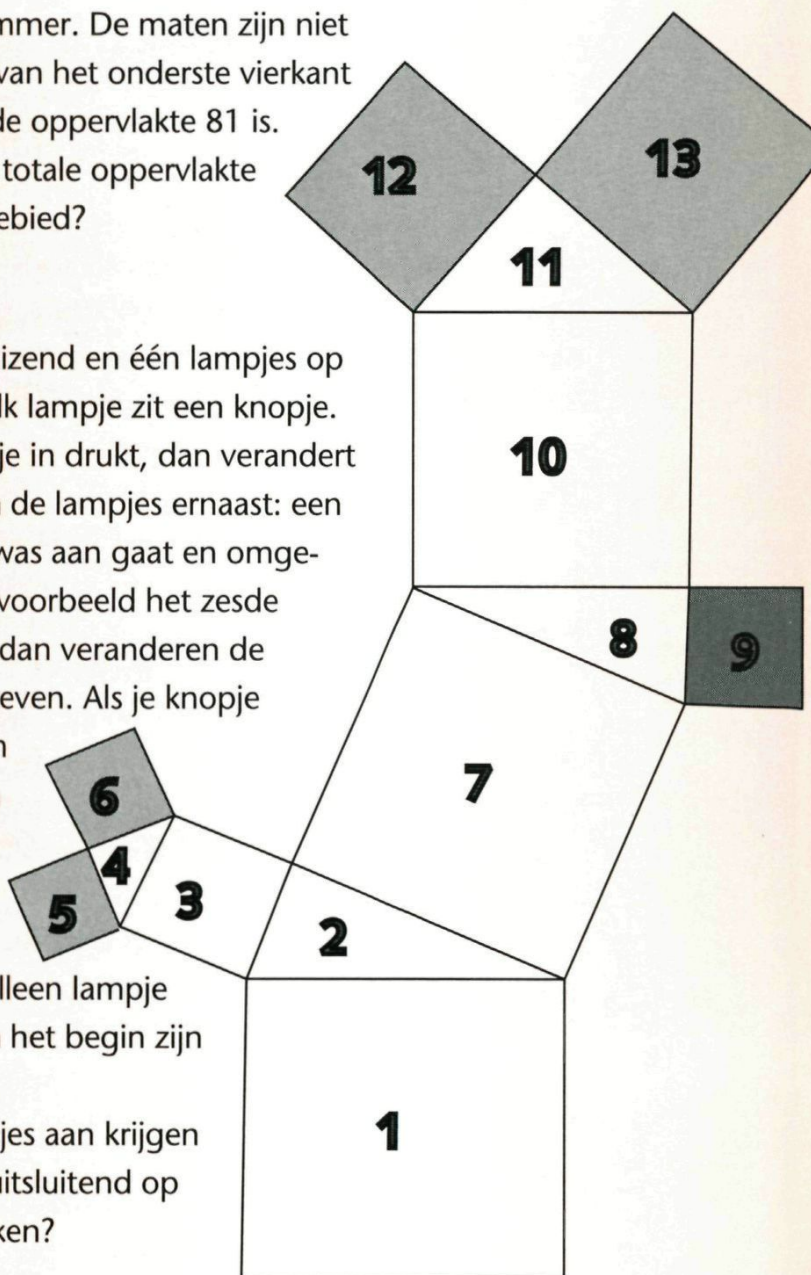
In het plaatje hiernaast zie je uitsluitend vierkanten en rechthoekige driehoeken, elk met een nummer. De maten zijn niet bekend. Alleen van het onderste vierkant weten we, dat de oppervlakte 81 is. Hoe groot is de totale oppervlakte van het grijze gebied?

OPGAVE 2.

Er staan tweeduizend en één lampjes op een rij. Onder elk lampje zit een knopje. Als je zo'n knopje in drukt, dan verandert de toestand van de lampjes ernaast: een lampje, dat uit was aan gaat en omgekeerd. Als je bij voorbeeld het zesde knopje indrukt, dan veranderen de lampjes vijf en zeven. Als je knopje één indrukt, dan verandert alleen lampje twee.

Als je het laatste knopje indrukt, dan verandert alleen lampje tweeduizend. In het begin zijn alle lampjes uit.

Kun je alle lampjes aan krijgen door alleen en uitsluitend op knopjes te drukken?



O L Y M P I A D

S

Stuur je
uitgewerkte
oplossingen

naar:

Pythagoras

Olympiade.

TUE Faculteit

Wiskunde en

Informatica.

Hg. 9.84

Postbus 513

5600 MB

Eindhoven.

Vergeet niet
bij je oplossing
je naam, adres,
school en klas
te vermelden.

Het is niet
voldoende om
alleen een
antwoord te
geven, zoals
ja of nee.

Er moet een
verklaring bij.

Stuur je
oplossing

in voor

25 april 1995.

E

EEN RIJ MANNEN

Er staan n mannen op een rij. $10 < n < 50$.

Elke man heeft goed zichtbaar een nummer op zijn borst. Ze staan op volgorde van nummer.

Voor één man in het bijzonder geldt: hij ziet links

van zich dezelfde som van de getallen als rechts.

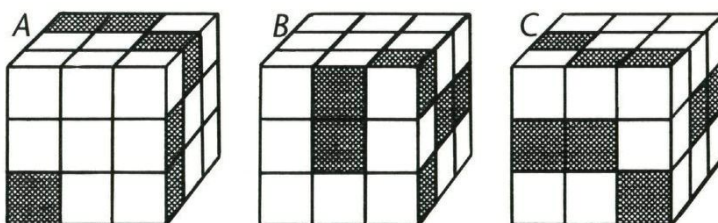
Welk nummer heeft deze man, hoeveel mannen staan er in de rij, wat is de som links en wat is de som rechts?

Zie bladzijde 31.



DE UITGEKLAPTE KUBUS

Hier zie je drie beschilderde kubussen:



En hier zie je een uitslag van een beschilderde kubus.



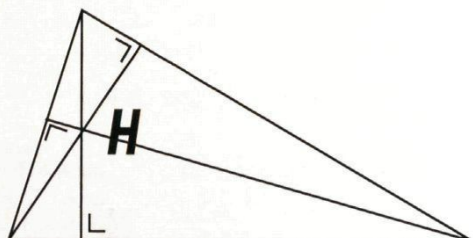
Als je deze uitslag opvouwt tot een kubus, kun je dan A, B of C krijgen?

Walter Schoens

RECHTE VAN E

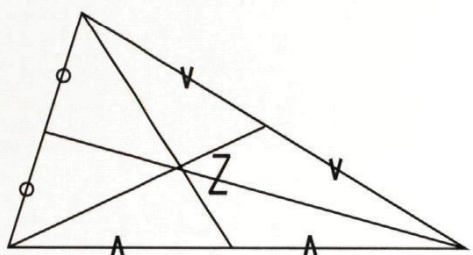
In elke willekeurige driehoek gelden de volgende drie eigenschappen:

De drie hoogtelijnen gaan door één punt.



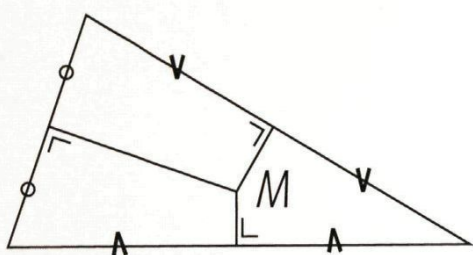
Dat snijpunt noemen we H .

De drie zwaartelijnen gaan door één punt.



Dat snijpunt noemen we Z , het zwaartepunt.

De drie middelloodlijnen van de zijden gaan door één punt.



Dat snijpunt noemen we M . Deze drie eigenschappen beschouwen we als bekend van de wiskundelessen.

SCHOONHEID

Elk van de genoemde eigenschappen vind ik mooi, maar van de volgende eigenschap kan ik helemaal lyrisch worden, zo mooi vind ik die:

H , Z en M liggen op één rechte lijn. Hierbij geldt, dat $HZ = 2 \cdot ZM$.

Deze lijn heet de rechte van Euler, genoemd naar zijn ontdekker. We bekijken slechts de grote lijn van het bewijs.

GEVOEL

Heb jij bij bepaalde wiskundige aspecten een één of ander gevoel van schoonheid, bewondering of waardering?

Zo ja, neem dan eens de moeite om het de redactie te laten weten.

BEWIJS 1

Een willekeurige driehoek heeft zijden met lengtes a , b en c . We leggen deze driehoek op een handige manier in een x - y -assenstelsel: zijde c leggen we op de x -as en de hoogtelijn

EEN BEETJE

ALGEBRA (1)



Kun je aantonen, dat

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9 \text{ is?}$$

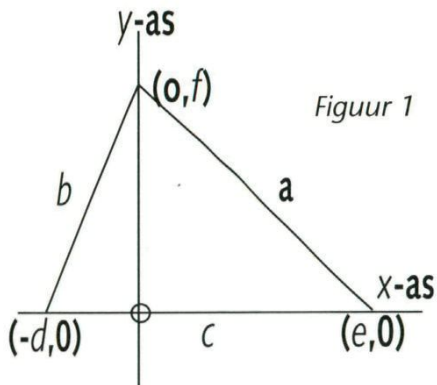


Hierin zijn a , b en c reële getallen, die groter dan 0 zijn. Zie zo nodig bladzijde 31.

Sonja Svetachova

ULER

op c plaatsen we op de y -as. a tot en met f zijn positieve reële getallen (fig. 1).



Figuur 1

d , e en f kunnen in a , b en c uitgedrukt worden:

$$d = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}$$

$$e = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$$

$$f = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - d^2 - e^2)}$$

Hoe vinden we die vergelijkingen? Zie zo nodig bladzijde 29.

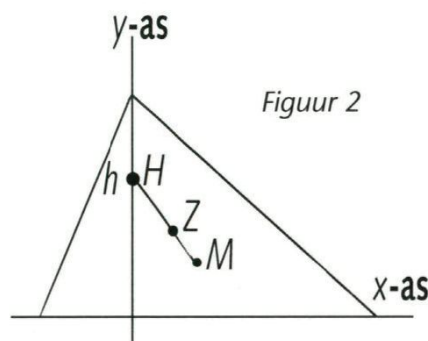
We definiëren $h = de : f$.

Nu geven we de coördinaten van H , Z en M (fig. 2):

$$H = (0, h)$$

$$Z = ((e-d):3, f:3)$$

$$M = ((e-d):2, (f-h):2)$$



Figuur 2

Nu kan de vergelijking van de lijn HZ bepaald worden.

Die is

$$y = \frac{3h - f}{d - e} \cdot x + h$$

Vervolgens kunnen we laten zien, dat de coördinaten van M voldoen aan deze vergelijking. Dan ligt M op HZ . Dus liggen H , Z en M op één lijn.

Uit de coördinaten kunnen we met de stelling van Pythagoras de lengtes van MZ , HZ en HM berekenen.

$$MZ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{e-d}{3}\right)^2 + \left(\frac{f}{3} - h\right)^2}$$

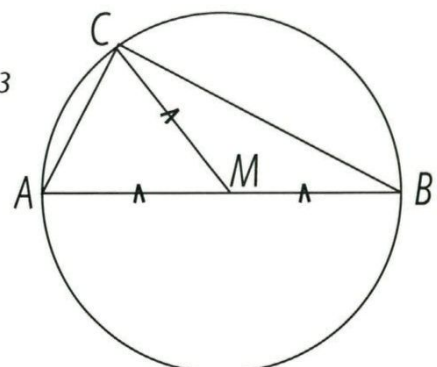
Evenzo kunnen we nagaan, dat $HZ = 2 \cdot MZ$ en $HM = 3 \cdot MZ$

BEWIJS 2

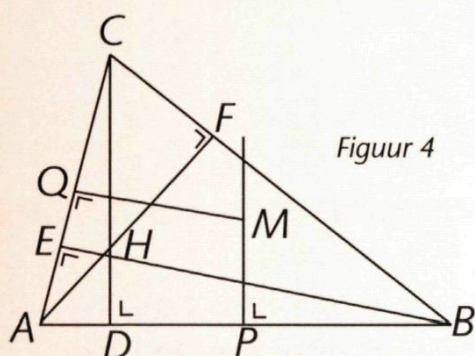
We maken er gebruik van, dat AB de middellijn van een cirkel met straal (fig. 3)

$AM = BM = CM$ is: $\angle ACB = 90^\circ$.

Figuur 3



Zie nu figuur 4:

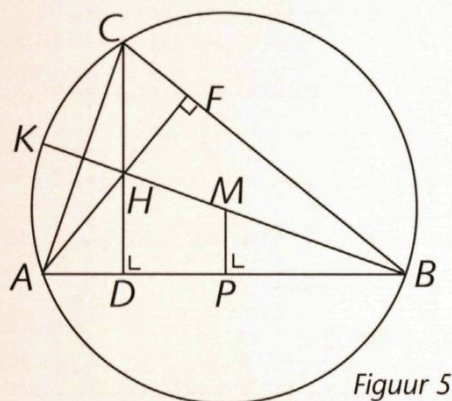


Figuur 4

MP en MQ zijn middelloodlijnen. AF , BE en CD zijn hoogtelijnen, die door het hoogtepunt H gaan.

We gaan eerst aantonen, dat $CH = 2MP$.

Dat doen we met fig. 5.

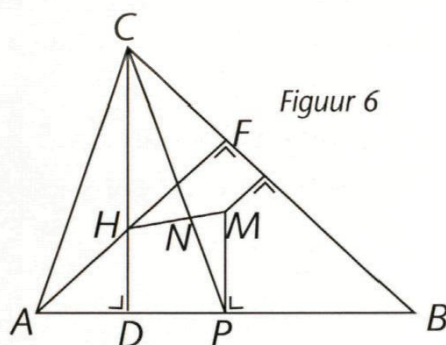


Figuur 5

Het middelpunt M van de omschreven cirkel van $\triangle ABC$ is het snijpunt van de drie middelloodlijnen.

Verleng BM en vind K op de cirkel. Dan is volgens de eigenschap van de eerste figuur $\angle BAK = \angle KCB = 90^\circ$. Dus $KC \parallel AF$ en $KA \parallel CD$.

Dan is $AHCK$ een parallellogram en $AK = HC$. Bovendien is in $\triangle ABK$ $KA = 2MP$. Dus $CH = 2MP$.
Bekijk nu figuur 6:



Figuur 6

Zwaartelij CP snijdt HM in N .

Wegens gelijke hoeken zijn $\triangle CHN$ en $\triangle PMN$ gelijkvormig.

Dan geldt

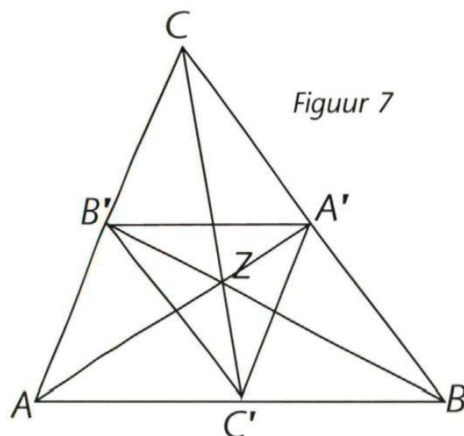
$$CN:PN = CH:PM = 2:1.$$

De zwaartelijnen van een driehoek verdelen elkaar in stukken, die zich verhouden als 2:1.

Dus is N het zwaartepunt. Hiermee is bewezen, dat H , Z en M op één lijn liggen en dat $HZ = 2ZM$.

BEWIJS 3

Teken in driehoek ABC de drie zwaartelijnen AA' , BB' en CC' (fig. 7).



Figuur 7

Vermenigvuldig $\triangle ABC$ met factor $-\frac{1}{2}$ met Z als centrum van vermenigvuldiging.

Het beeld is $\triangle A'B'C'$.

De beelden van de hoogtelijnen van $\triangle ABC$ zijn de hoogtelijnen van $\triangle A'B'C'$.

Het beeld van het hoogtepunt H van $\triangle ABC$ is het hoogtepunt van $\triangle A'B'C'$.

Vanwege de puntvermenigvuldiging liggen H , Z en H' dus op één lijn terwijl $HZ = 2H'Z$.

H' is het hoogtepunt van $\triangle A'B'C'$, maar in $\triangle ABC$ is H' het snijpunt van de drie middelloodlijnen van de zijden, dus H' is ook het middelpunt van de omschreven cirkel van $\triangle ABC$.

Frank Roos
Jan Mahieu
Thijs Notenboom

VIERKANT IN DRIEHOEK

We plaatsen in een gelijkbenige rechthoekige driehoek een vierkant. Dat kan op twee manieren.

REKEN PUZZEL

De som, het verschil, het product en het quotiënt van twee natuurlijke getallen tellen we bij elkaar op. Je krijgt dan 243.



Om welk tweetal gaat het?
Oplossing op bladzijde 30.

Sonja Svetachova
uit Zuidlaren.

In het eerste geval staan de zijden ervan loodrecht op de rechthoekszijden van de driehoek; in het tweede geval staan twee zijden loodrecht op de schuine zijde van de driehoek.

Beide vierkanten lijken even groot, maar zijn het niet. Welke is het grootst? Hoe krijgen we ze getekend? Probeer er zonder rekenen achter te komen. Als je wat geschikte hulplijntjes trekt, kun je door eenvoudig te tellen het antwoord aflezen. Bewijs dat in het tweede geval de diagonalen van het vierkant evenwijdig lopen met de rechthoekszijden van de driehoek.

Voor de verhouding van de oppervlakten van beide vierkanten vinden wij 9:8 of 8:9, dat mag je nog zelf beslissen.

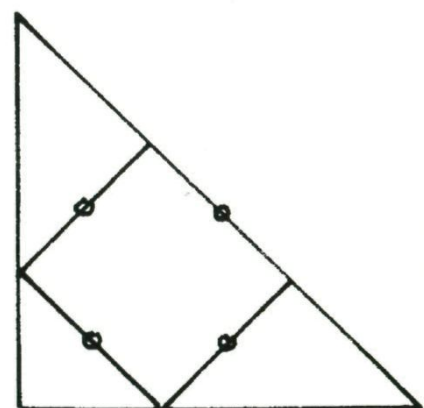
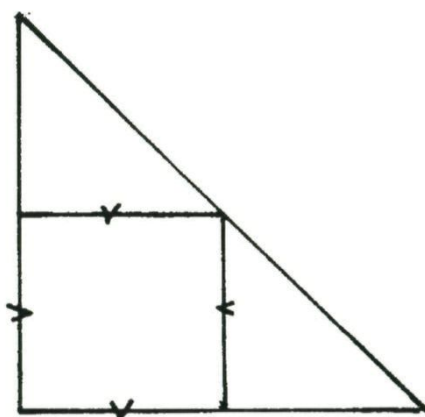
LENGTEN

Hoe is het gesteld met de lengten van de zijden van beide vierkanten?

In het eerste geval is de zijde de helft van een rechthoekszijde van de driehoek, in het tweede geval hebben de zijden een lengte gelijk aan een derde deel van de schuine zijde van de driehoek.

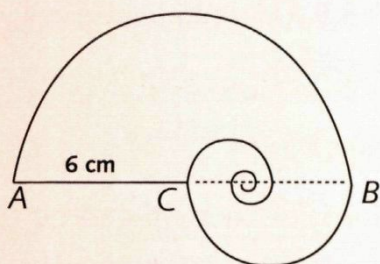
Kijk maar of dat klopt.

Henk Mulder



DE CIRKELSPIR

De figuur hieronder is een spiraal, die opgebouwd is uit oneindig veel halve cirkels. Slechts een klein aantal van die halve cirkels is getekend.



De straal van de buitenste cirkel is 6 cm. Elke volgende halve cirkel heeft een straal, die de helft is van de vorige. Door de straal AC van de buitenste cirkel te tekenen, krijg je een gesloten figuur.

HET EINDE

Het "eindpunt" van de spiraal ligt ergens op AB, zeg bij E. De spiraal draait oneindig vaak om E heen.

Als F een punt is vlak bij E, dan draait de spiraal een eindig aantal malen om F heen.

1. Wat is de oppervlakte van de omsloten wordt?
2. Hoe lang is de spiraal?
3. Waar "eindigt" de spiraal?

Oplossingen op bladzijde 30

SPELLETJES MET DE REKEN

Het is een spelletje voor twee personen. Tik op je zakcomputer 1 aan. Vervolgens mag je om beurten met 2 of 3 vermenigvuldigen. Wie zo het eerst 1000 overschrijdt, is de winnaar..

We willen wel wat meer weten over het verloop van dit spel. Zie je in dat het laagste aantal vermenigvuldigingen 7 wordt (alleen factoren 3).

En het maximale aantal?

VERWISSELBAAR

Bij vermenigvuldigen maakt het geen verschil voor het eindresultaat, in welke volgorde de factoren 2 en 3 gebruikt worden.

Stel dat een spel als volgt verloopt:

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 1728.$$

Dat zijn dan zes factoren 2 en drie factoren 3.

$$\text{Schrijf: } 2^6 \cdot 3^3 = 1728.$$

MOGELIJKHEDEN

In het algemeen betekent winst: $2^x \cdot 3^y > 1000$.

In de tabel hebben we alle mogelijkheden verzameld met waarden voor x en y die tot winst voeren.

Ga maar na dat ze juist zijn.

Er zijn er ook niet meer.

Totaal elf stuks.

Henk Mulder



figuur, die door de omtrek

Tjalie Wéry

MACHINE

x	y	produkt
0	7	2187
1	6	1458
2	6	2916
3	5	1944
4	4	1296
4	5	2288
4	6	2916
6	3	1728
7	2	1152
8	2	2304
9	1	1536
10	0	1024

DE VERGELIJKING VAN PELL

INTRO

In het artikel **Een rij mannen** op bladzijde 5, komen we de volgende vorm tegen:

$$n = \frac{-1 + \sqrt{8k^2 + 1}}{2}$$

Hierin zijn n en k natuurlijke getallen. Dat kan alleen als $8k^2 + 1$ een kwadraat is, zeg p^2 , dus $8k^2 + 1 = p^2$.

Hierin is p natuurlijk ook weer natuurlijk!
 $p^2 - 8k^2 = 1$. Een oplossing is $(p, k) = (3, 1)$.

Dit is een voorbeeld van een vergelijking van Pell.

ALGEMEEN

De algemene vergelijking van Pell is: $x^2 - Dy^2 = \pm 1$.

DE OPLOSSING

Op de volgende manier kun je oneindig veel oplossingen vinden:

$$\text{Stel } x^2 - 8y^2 = 1$$

$$\text{We weten al } 3^2 - 8 \cdot 1^2 = 1$$

of

$$(3 - \sqrt{8})(3 + \sqrt{8}) = 1.$$

Omdat het linker- en rechterlid toch = 1 is,

kunnen we probleemloos tot de n -de macht verheffen:

$$(x - y\sqrt{8})(x + y\sqrt{8}) = 1 = (3 - \sqrt{8})^n \cdot (3 + \sqrt{8})^n.$$

$$\begin{aligned} \text{Stel } x - y\sqrt{8} &= (3 - \sqrt{8})^n \\ \text{en } x + y\sqrt{8} &= (3 + \sqrt{8})^n. \end{aligned}$$

Lossen we hieruit x en y op, dan vinden we:

$$x = \frac{(3 - \sqrt{8})^n + (3 + \sqrt{8})^n}{2} \quad \text{en}$$

$$y = \frac{(3 + \sqrt{8})^n - (3 - \sqrt{8})^n}{2\sqrt{8}}$$

$$n=1 \text{ geeft } (x, y) = (3, 1)$$

$$n=2 \text{ geeft } (17, 6)$$

$$n=3 \text{ geeft } (99, 35)$$

$$n=4 \text{ geeft } (577, 204)$$

Omdat $(3 - \sqrt{8})^n$ voor grote n nagenoeg 0 is, kun je volstaan met het berekenen van $(3 + \sqrt{8})^n$ en af te ronden.

Thijs Notenboom

WISKUNDE

Het is algemeen bekend, dat de wiskundige met getallen werkt, die in elke gewenste graad van nauwkeurigheid bekend zijn, terwijl de natuurwetenschapper noodgedwongen bezig is met waarden, die een meetonnauwkeurigheid met zich mee brengen. Ook de werkwijze van de experimentatoren is anders dan die van de wiskundige en bijvoorbeeld de theoretische fysicus, mensen achter de schrijftafel.

WISKUNDE

De wiskundige gaat meestal uit van een functie.

Daarmee kun je een tabel maken en daarmee een grafiek. Vaker wordt de functie systematisch onderzocht op de aanwezigheid van speciale kenmerken van de te verwachten grafiek, zoals snijpunten met de x- en y-as, waar de functie positief of negatief is, de aanwezig-

heid van asymptoten, uiterste waarden en buigpunten.

NATUURWETENSCHAP

Bij de natuur- en scheikunde, maar evengoed bij b.v. sterrenkunde is het werkproces geheel anders. Centraal staat het experiment: je doet een serie metingen, die je in een tabel samenvat. Van deze tabel maak je een grafiek.

EN NATUUR

ILLUSIE ALS WERKELIJKHEID

De jaarlijkse themadag van de faculteit Wiskunde en Informatica is dit jaar op zaterdag 25 maart, op het Universiteitscentrum

De Uithof in Utrecht.

Het gebruik van modellen in de wiskunde, informatica en computational science staat centraal, onder het thema 'Illuste als werkelijkheid'.

De dag wordt speciaal georganiseerd voor leer-

lingen van 4/5 VWO en hun docenten, maar ook andere belangstellenden zijn van harte welkom.

Locatie: Transitorium 1, Leuvenlaan 21, Universiteitscentrum De Uithof, Utrecht.

Datum: zaterdag 25 maart 1995.

Toegang: gratis (inclusief lunch).

Opgave en informatie bij: mevrouw Elise Goeree, ma. t/m do. 09.00-15.30 uur, Telefoon 030 - 531420.

Of vraag een folder met opgavebon aan bij: Faculteit Wiskunde en Informatica, Antwoordnummer 8427, 3500 VW Utrecht (postzegel niet nodig).

WELKE FUNCTIE?

Als de grafiek recht is, dan kun je er de vergelijking bij vinden.

Maar in de meeste gevallen is de grafiek helemaal niet recht. Dan zit je echt met een lastige opgave, want *hoe weet je nu welke functie bij jouw meetgrafiek behoort?*

Dat is een probleem, waarmee je als fysicus, chemicus of astronoom nogal eens geconfronteerd wordt.

Het probleem wordt bovendien extra vergroot, doordat de ligging van de meet-



WETENSCHAPPEN

punten niet exact is ten gevolge van meetonnauwkeurigheden.

GEEN THEORIE

Heb je geen theorie, omdat je een voor jou nieuw verschijnsel onderzoekt, dan moet je maar op goed geluk proberen om de bijbehorende functie te vinden.

Het zou handig zijn, als er een soort atlas bestond, waarin heel veel grafieken

met bijbehorende functievoorschriften te zien zijn. Dan zou de natuurwetenschapper gemakkelijker zijn keus kunnen maken.

Voor zover ik weet bestaat zo'n atlas nog niet.

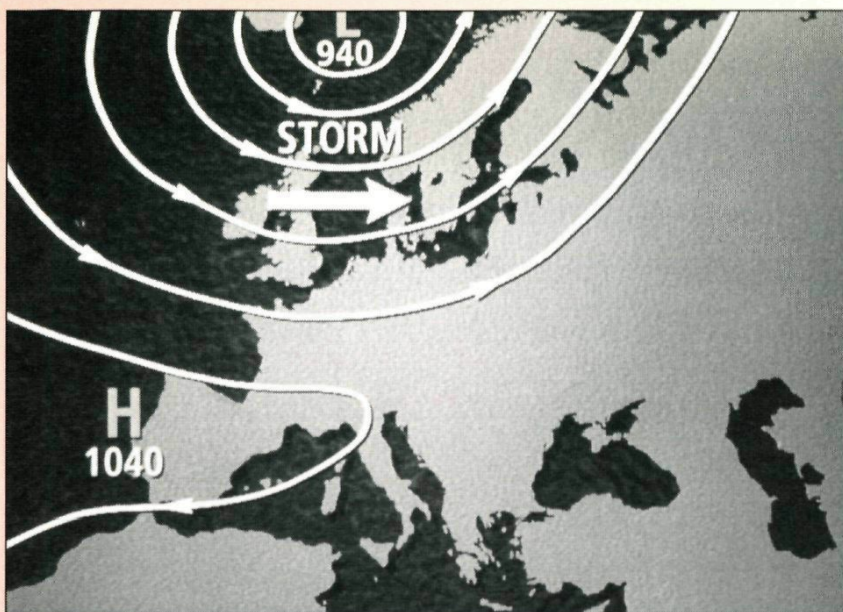
WEL THEORIE

Ga je uit van een bepaalde theorie en verwacht je bij voorbeeld een grafiek in de vorm van een parabool, dan kun je tenminste nog nagaan, of je gevonden

kromme werkelijk een parabool is. Dat doet zich onder andere voor bij de plaatsfunctie van de eenparig versnelde beweging.

LINEARISEREN

Een krachtig hulpmiddel is de wiskunde-hulp-methode, die bekend staat als "lineariseren". De truc is, dat je de twee variabelen wiskundig bewerkt tot twee nieuwe variabelen, zodat de grafiek van de nieuwe



variabelen een rechte lijn wordt. Zie het artikel "Lineariseren".

DE REGRESSIELIJN

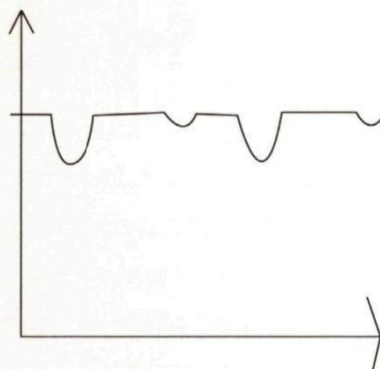
Soms liggen de meetpunten ruwweg op een rechte lijn. De rechte lijn, die hier het beste tussendoor loopt, heet de regressielijn. Nu kun je je terecht afvragen: wat betekent hier precies het beste? Zie hiervoor het artikel "De regressie-lijn".

GRAFIEK MET BOCHTEN

Soms vertoont de meetgrafiek enige bochten. In dat geval probeert men een benadering te vinden met een "polynoom"; dat is een veelterm van het type $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$. Zie hiervoor het artikel "Curve-fitting".

EEN PUT

Soms heeft de grafiek de vorm van een symmetrische put. Dat komt bijvoorbeeld voor bij dubbelsterren, die elkaar van tijd tot tijd bedekken. De zichtbare lichtsterkte neemt periodiek even af:



Ook komt de putvormige grafiek veelvuldig voor bij absorptie en resonantie van straling. Bepaalde kleuren worden sterk opgenomen door de stof, waarop de straling valt, andere kleuren helemaal niet. Zie verder het artikel "De put".

Frank Roos

LINEA

KROMME GRAFIEKEN

De meeste grafieken, die je in de fysica tijdens een experiment vindt, zijn krom. Als de meetpunten in de grafiek wat grillig liggen ten gevolge van meeton-nauwkeurigheden, dan is het alleen maar extra moeilijk om een zo goed mogelijk aansluitende grafiek te tekenen. Het is helemaal lastig om het juiste wiskundige verband tussen de gemeten grootheden te vinden. Let eens op het typische verschil in volgorde van een voor de hand liggende werkwijze bij de fysica en de wiskunde:

Fysica:

Eerst een meettabel.

Dan een grafiek.

Tenslotte: welke functie ???

Soms kan een theorie je in de fysica helpen. Zie het volgende voorbeeld.

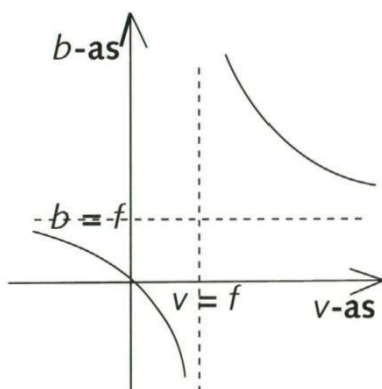
RISEREN

LENZEN

Neem bij voorbeeld aan, dat we de lenzenformule al kennen:

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

Als we grafiek maken van b tegen v , dan is de grafiek zeker krom. In feite krijg je een orthogonale hyperbool met asymptoten bij $v = f$ en $b = f$. Kun je dat aantonen? Zie blz 28.



Wiskunde:

Eerst een functie met voorschrift.
Dan een onderzoek en een tabel.
Tenslotte de grafiek.

Laten we nu eens voor alle meetpunten de volgende truc uithalen:

vervang $\frac{1}{v}$ door x , $\frac{1}{b}$ door y en $\frac{1}{f}$ door c .

De lenzenformule wordt dan $x + y = c$. Als we dan y tegen x uitzetten, dan verwachten we

1^e: een rechte lijn

2^e: met richtingscoëfficiënt -1

3^e: die gaat door $(0, c)$ en door $(c, 0)$.

Met deze kennis en met een liniaal is deze grafiek nu zeer nauwkeurig te tekenen, ondanks de eventuele onnauwkeurigheden in de meetpunten. Uit $c = 1:f$ kan je nu ook f op twee plaatsen nauwkeurig bepalen.

LINEARISEREN

Bij het voorbeeld met de lens heb je gezien, hoe we een rechte lijn als grafiek hebben kunnen krijgen. Elke formule vereist zijn eigen techniek om te lineariseren.

De **wet van Snellius** is:

$\sin i : \sin r = \text{constant}$, waarin i en r de hoeken van inval en breking zijn. De grafiek van r tegen i is beslist krom,

maar de grafiek van $\sin i$ tegen $\sin r$ wordt, afgezien van meetonnauwkeurigheden, rechtlijnig.

De richtingscoëfficiënt is dan de genoemde constante

PROBEREN

Als je geen formule kent, omdat je iets nieuws onderzoekt, dan weet je niet bij voorbaat hoe je moet lineariseren.

Dan is het een kwestie van proberen.

DUBBEL LOGARITMISCH

Als je $y = a \cdot x^n$ verwacht, dan helpt dubbel logaritmisch papier bij het lineariseren. Neem je links en rechts de logaritme, dan krijg je $\log y = \log a + n \cdot \log x$. De richtingscoëfficiënt is dan n . Meestal is het grondtal 10.

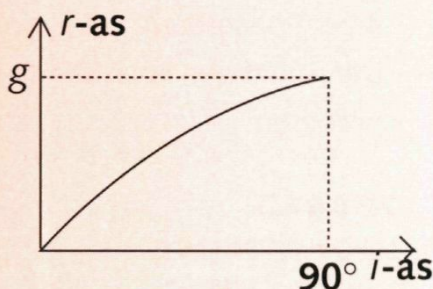
ENKEL LOGARITMISCH

Verwacht je $y = y_0 \cdot a^x$, dan ben je goed af met enkel logaritmisch papier. De laatste twee technieken worden in de lessen Wiskunde A behandeld.

BEETJE GESCHIEDENIS

Snellius onderzocht de breking van het licht bij verschillende grensvlakken tussen verschillende doorzichtige stoffen.

Hij onderzocht hoe de hoek van breking met de hoek van inval veranderde. Steeds vond hij een grafiek, die er ongeveer zo uitzag:



De g in de grafiek is de grenshoek, de grootste hoek van breking bij breking van de normaal af. Snellius had geen flauw idee, welke functie hij moest kiezen.

Was de grafiek een stuk van een cirkel, van een parabool, een sinuslijn, een hyperbool, een ... ?

Er zijn duizenden verschillende functies te verzinnen, die een krom verlopende grafiek geven.

Na vele pogingen ontdekte hij *bij stom toeval* het volgende.

Als je niet de grafiek van r tegen i tekent, maar de grafiek van $\sin r$ tegen $\sin i$, dan krijg je een rechte lijn door $(0,0)$ en toen was de wet van Snellius ontdekt:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n$$

waarin de constante n later de brekingsindex werd genoemd.

CUR

EEN EXPERIMENT

Laten we aannemen, dat x en y twee willekeurige grootheden zijn. Bij een experiment laten wij x met gekozen tussenstappen veranderen. Daardoor verandert y mee.

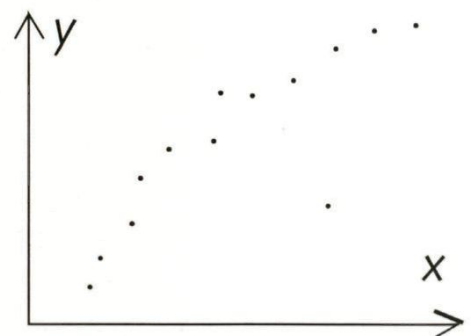
Zo ontstaat zoals we weten een meettabel.

GRAFIEK

Maken we van deze metingen een grafiek, dan liggen de meetpunten meestal niet op een rechte lijn.

Alleen al de onvermijdelijke meeton nauwkeurigheden veroorzaken dat.

Maar vaak bestaat er ook werkelijk geen lineair verband:



AFWIJKEND PUNT

Eén punt heeft een afwijkende ligging. Zijn we iets bijzonders op het spoor of

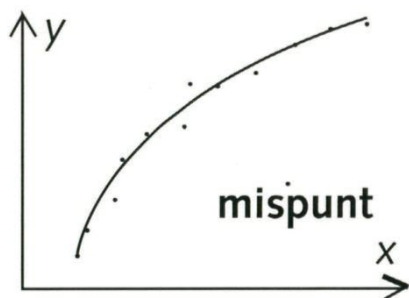
VE-FITTING

hebben we slechts een meet- of schrijffout gemaakt?

We komen dat alleen te weten, als we in de buurt van het afwijkende punt nog wat extra metingen doen.

DE KROMME

Het zo goed mogelijk tekenen van de kromme wordt soms curve-fitting genoemd. Ook het vinden van de vergelijking van die kromme noemt men curve-fitting.



CURVE-FITTING

De ruwste benadering is, dat we opgeven, dat y een constante is. In het volgende betekent $[y]$ de eenheid van y .

Als y varieert tussen $44[y]$ en $48[y]$, dan is $y = 46[y]$ echt geen gekke, maar

wel grove benadering.

Deze aanpak heet ook wel de nulde-orde-benadering. Hiervan maakt men gebruik van het opgeven van zee-dieptes: effecten van eb en vloed laat men buiten beschouwing.

Ook de afstand aarde-maan = 384 megameter is een nulde-orde-benadering: de maanbaan is een ellips.

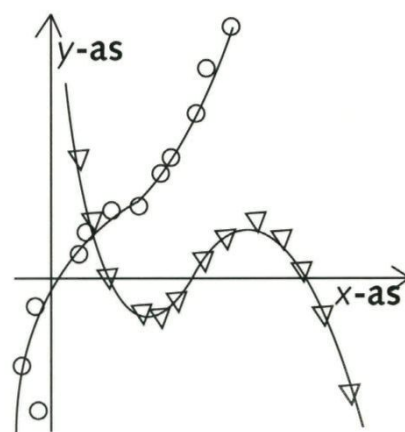
De eerste-orde-benadering van de kromme grafiek is de vergelijking van de rechte lijn, die het beste bij de meetpunten aansluit. Die lijn heet de regressielijn. Daarover volgt een apart artikel.

De tweede-orde-benadering ziet er zo uit:

$y = ax^2 + bx + c$, waarbij a , b en c nog zo goed mogelijk moeten worden gekozen. We benaderen de grafiek dan met een parabool.

Als ax^2 voor elke x erg klein is ten opzichte van bx , dan is de lineaire benadering misschien wel goed genoeg.

De derde-orde-benadering zal het in de volgende twee gevallen goed doen.



PROGRAMMA'S

Er zijn computerprogramma's, die het volgende doen: je geeft zelf een serie meetpunten, een serie geordende tweetallen dus. En je geeft op welke orde benadering je wenst.

De computer berekent dan met zijn "regressieprogramma" de coëfficiënten van de beste benaderingsveelterm. Een voorbeeld van zo'n programma is "Mathcad".

DE REGRESSIE-LI

Hoewel dit onderwerp voor sommige lezers schoolleerstof is, zijn er niettemin vele abonnees, die in hun opleiding dit onderwerp gemist hebben of nog niet hebben gehad. Hen willen we dit artikel, dat goed in het geheel past, niet onthouden.

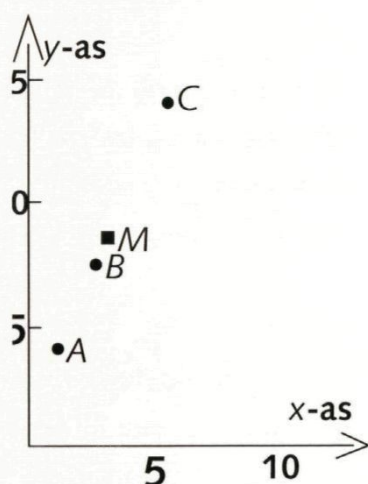
Door twee punten kunnen we altijd een rechte lijn tekenen. Door drie of meer punten meestal niet. We geven nu de drie punten $A(2,8)$, $B(5,15)$ en $C(11,28)$, die beslist niet op één lijn liggen. We vragen ons af, welke rechte lijn het beste bij deze drie punten aansluit. Wat bedoelen we met "het beste"?

M ligt zo goed mogelijk midden tussen de gegeven punten.

EEN LIJN DOOR M

We eisen, dat de gezochte lijn door M moet lopen. Zo'n lijn noemen we m . Stel, dat de vergelijking van m $y = ax + b$ is. Omdat die lijn door $M(6,17)$ loopt, geldt, dat $17 = 6a + b$ of $b = 17 - 6a$. De vergelijking van m is dan $y = ax + 17 - 6a$. Omdat a nog van alles kan zijn, is $y = ax + 17 - 6a$ een waaier van lijnen door $M(6,17)$.

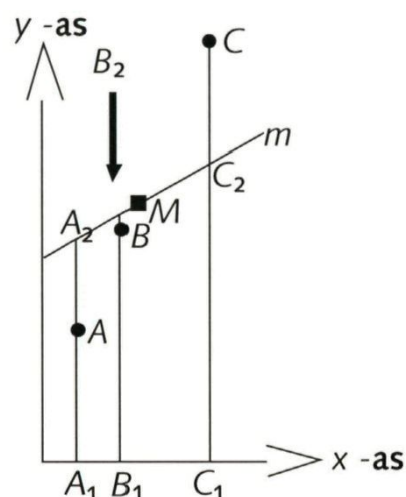
HET GEMIDDELDE PUNT M



Het gemiddelde van 2, 5 en 11 is 6. Dat is het gemiddelde van de x-waarden van de gegeven punten. Het gemiddelde van de y-waarden van de gegeven punten is 17. Zo vinden we "het gemiddelde punt" $M(6,17)$.

AFSTANDEN

Kijk nu naar de volgende figuur.



J N

Hierin hebben we een willekeurige lijn door M getekend. A_1 , B_1 en C_1 liggen op de x -as, terwijl A_2 , B_2 en C_2 op m liggen. A , A_1 en A_2 hebben dezelfde x -coördinaat.

We willen weten hoe lang AA_2 , BB_2 en CC_2 zijn.

We berekenen AA_2 als $AA_1 - A_2A_1$.

Dat geeft $8 - (17-4a) = 4a-9$.
Dus $AA_2 = 4a-9$.

Op dezelfde manier berekenen we, dat $BB_2 = a-2$ en $CC_2 = 11-5a$.

GEMIDDELDE AFSTAND

Merk nu op, dat het gemiddelde van AA_2 , BB_2 en CC_2 nul is, als je boven de lijn m positief en eronder negatief rekent.

De gemiddelde afstand van de gegeven punten A , B en C tot de lijn m is dus nul, mits je in de y -richting kijkt. Dit resultaat is onafhankelijk van de waarde van a .

DE KLEINSTE KWADRATEN

Hoewel m nu netjes door het gemiddelde punt M

loopt, sluit m nog steeds niet zo goed mogelijk aan. We definiëren als de beste methode van aansluiten, dat $AA_2^2 + BB_2^2 + CC_2^2$ zo klein mogelijk is. Dat is omstreeks 1800 bedacht door Carl Friedrich Gauß, die toen 23 jaar oud was. We zien, dat die som gelijk is aan:

$$(4a-9)^2 + (a-2)^2 + (11-5a)^2.$$

Dit kunnen we vereenvoudigen tot

$$42a^2 - 186a + 206.$$

De kleinste waarde van deze som kunnen we vinden, of door kwadraat-afsplitsen, of met de afgeleide functie.

De kleinste kwadraten som wordt bereikt als

$$a = 2 \frac{3}{14}.$$

Zie zo nodig bladzijde 28.

De kleinste waarde op zich interesseert ons niet. Als die nul zou zijn, dan lagen alle gegeven punten op die ene lijn m , maar dat is nu eenmaal hier niet het geval.

Bedenken we nu, dat m als vergelijking $y = ax + 17 - 6a$ heeft.

Dan is de lijn, die het beste bij A , B en C aansluit, de lijn $y = 2 \frac{3}{14} \cdot x + 3 \frac{5}{7}$ is.

Deze lijn heet de regressie-lijn van A , B en C .

ALGEMEEN

Volgens de kleinste-kwadraten-methode, beschreven zoals hiervoor, kun je nu heel in het algemeen de regressielijn van n punten (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , $\dots$, (x_n, y_n) vinden.

Je gaat zo te werk:

1. $\bar{x}$ is het gemiddelde van $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$
2. $\bar{y}$ is het gemiddelde van $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$.
3. Bereken voor elk punt $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ en tel al die antwoorden bij elkaar op. Noem die som T .
4. Bereken voor elk punt $(x_i - \bar{x})^2$ en tel al die antwoorden bij elkaar op. Noem die som N .
5. $a = T:N$.
6. $b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}$

DE PUT

Sommige experimenten leveren meetresultaten, die een grafiek geven in de vorm van een put. In de inleiding staan enige voorbeelden. In wezen zou elke grafiek, die een minimum bevat, een benadering kunnen zijn van zo'n putvormige grafiek.

DE ABSOLUTE WAARDE VAN x

Het symbool $|x|$ spreek je uit als "de absolute waarde van x ".

De twee "modulus-strepen" geven de opdracht: maak de waarde van wat er tussen staat positief.

Als $x \geq 0$, dan is $|x| = x$.

Als $x < 0$, dan is $-x > 0$ en $|x| = -x$

Altijd is $|x| \geq 0$

$|+3| = +3 = 3$ en $|-3| = +3 = 3$

BEPERKENDE AFSPRAKEN.

1. We kiezen slechts voorbeelden van symmetrische putten.
2. Als we ze tekenen, dan leggen we de x -as bij de bovenkant van de put; de y is dan nooit positief.

3. De y -as kiezen we als de symmetrie-as.
4. In de voorbeelden, die we gaan bekijken, stellen a en b steeds positieve reële getallen voor.

DE ONEINDIG DIEPE PUT.

Deze put is als volgt gedefiniëerd:

Als $x < -a$ is, dan is $y = 0$

Als $x > +a$ is, dan is $y = 0$

Als $-a \leq x \leq +a$, dan is $y \rightarrow -\infty$. (∞ = oneindig).

Dit is een put met breedte $2a$, die oneindig diep is.

Deze is alleen geschikt voor het wiskundig beschrijven van een nachtmerrie.

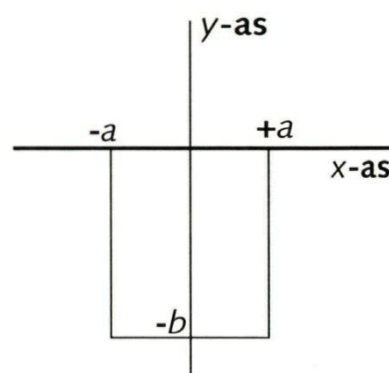
DE RECHTHOEKIGE PUT

Wordt bepaald door:

Als $x < -a$ is, dan is $y = 0$.

Als $x > +a$ is, dan is $y = 0$.

Als $-a \leq x \leq +a$, dan is $y = -b$.





DE PUUT

De puut is een gronings woord voor een punt-vormige zak. Deze kun je de volgende vergelijking geven:

Als $x \leq \frac{-b}{a}$ is, dan is $y = 0$.

Als $x \geq \frac{b}{a}$ is, dan is $y = 0$.

Als $\frac{-b}{a} < x < \frac{b}{a}$ is,

dan is $y = a|x| - b$

Hoe breed en hoe diep is deze puut?

Kun je hem correct tekenen? Zie bladzijde 28.

DE PARABOLISCHE PUT

heeft als definitie:

Als $x < -a$ is, dan is $y = 0$.

Als $x > +a$ is, dan is $y = 0$.

Als $-a \leq x \leq +a$, dan is $y = x^2 - a^2$.

Hoe breed en hoe diep is deze put?

Kun je hem correct tekenen? Zie bladzijde 28.

DE COSINUS-PUT

Kun je die zelf bedenken? Zie bladzijde 29.

DE ELLIPTISCHE PUT

zou zo kunnen:

Als $x < -a$ is, dan is $y = 0$.

Als $x > +a$ is, dan is $y = 0$.

Als $-a \leq x \leq +a$, dan is

$$y = -b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

De breedte en diepte zijn $2a$ en b .

Je kunt het middelpunt van de ellips ook iets hoger of lager kiezen.

Als je te hoog of te laag gaat schuiven, dan heb je geen put meer.

Door $b=a$ te kiezen, krijg je een halve-cirkel-put.

EIGENSCHAPPEN VAN PUTTEN

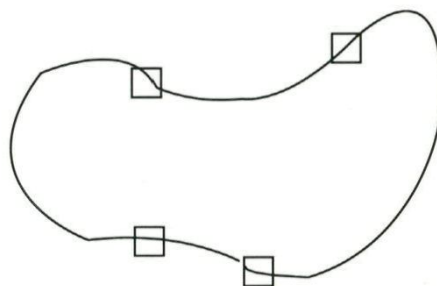
Tot nu toe hebben we slechts putten van eindige

breedte gezien. In volgende voorbeelden komen we ook putten tegen, die oneindig breed zijn.

Putten kunnen eindig, maar ook oneindig diep zijn.

De voorgaande voorbeelden hadden hoekpunten.

In volgende voorbeelden zien we, dat het ook anders kan. Er zijn ook putten met of zonder buigpunten.



Bij een buigpunt kromt de grafiek de andere kant op. De tekening is een willekeurige, gesloten kromme met vier buigpunten.

Als een put bovenaan oneindig breed is, zou zijn oppervlak dan oneindig groot zijn of eindig?

DE HYPERBOLISCHE PUT

De vergelijking van de hyperbolische put is

$$y = \frac{-a}{|x|}$$

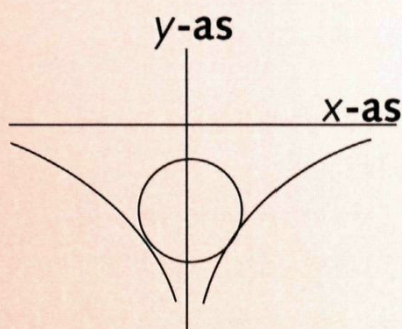
Je kunt zelf nagaan, dat deze put oneindig breed

en oneindig diep is. Hoe dieper, hoe smaller. Met integraalrekening kun je inzien, dat het oppervlak van deze put oneindig groot is.

EEN MOEILIJKE OPGAVE



hoe diep zou het middelpunt van een knikker met straal b in de genoemde hyperbolische put kunnen vallen?



Correcte oplossingen worden gepubliceerd.

Een klasse apart

Een speciale verzameling putten levert de vergelijking

$$y = \frac{-a}{x^n + b^n},$$

waarin n een even getal > 0 voorstelt.

Verwisseling van x door $-x$ heeft geen effect op y , dus deze put is symmetrisch.

Als je $x = 0$ invult, dan vind je, dat $y = \frac{-a}{b^n}$. De diepte van de put is dus $\frac{a}{b^n}$.

Als we in de gegeven vergelijking $x = b$ kiezen, dan vinden we $\frac{-a}{2b^n}$ en dat is juist op halve diepte van de put.

We herkennen b dus als de x , waar de put op halve diepte is.

We gaan terug naar

$$y = \frac{-a}{x^n + b^n}.$$

De afgeleide hiervan is:

$$y' = \frac{a \cdot n \cdot x^{n-1}}{(x^n + b^n)^2}$$

De tweede afgeleide y'' wordt nul als

$$(x^n + b^n)^2 \cdot a \cdot n(n-1)x^{n-2} = a \cdot n \cdot x^{n-1} \cdot 2 \cdot (x^n + b^n) \cdot n \cdot x^{n-1}$$

$$\text{of } (x^n + b^n)(n-1) = 2n \cdot x^n.$$

$$\text{Dus } x^n = \frac{n-1}{n+1} \cdot b^n$$

Hier is de tweede afgeleide nul en hier vinden we in de grafiek een buigpunt.

Vullen we dat in in

$$y = \frac{-a}{x^n + b^n},$$

de vergelijking van de put, dan vinden we de y van het buigpunt:

$$y = \frac{-a(n+1)}{2n}$$

$$\text{Deze } y \text{ is } \frac{n+1}{2n}$$

maal de diepte van de put.

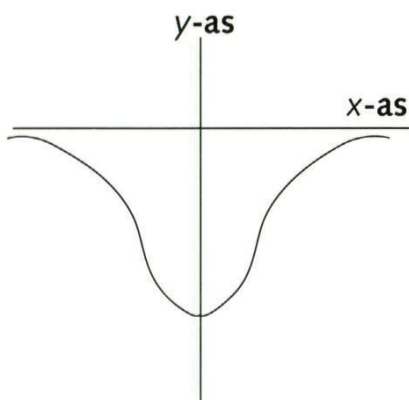
$$\text{De waarde van } -\frac{n+1}{2n}$$

kan met n stapsgewijs veranderen van

$$-\frac{3}{4} \text{ tot } -\frac{1}{2}. \text{ Waarom?}$$

Het buigpunt ligt dus altijd lager dan halve diepte van de put.

Dit type put kan een experimentator als benadering gebruiken voor de wiskundige beschrijving van zijn meetgrafiek, mits het buigpunt in het goede gebied ligt.



Wie van de lezers kan een put verzinnen, waarvan het buigpunt minder diep ligt, dan de halve diepte van de put?



Correcte oplossingen zullen worden gepubliceerd.

ZELF EEN THEORIE MAKEN

Soms bedenkt je zelf een theorie. Wanneer mag je een theorie nu wetenschappelijk noemen? Dan moet je theorie aan een aantal eisen voldoen. Hier volgen die eisen.

- Je theorie moet gaan over een door jou gekozen onderwerp. Je verhaal bevat een aantal beweringen en soms een aantal definities.
- De door jou gebruikte begrippen moeten op een logische manier met elkaar samenhangen.
- Je beweringen mogen elkaar niet tegenspreken.
- Uit je theorie moet minstens één voorspelling of verwachting volgen, die je met een experiment kunt toetsen. Het resultaat van dat experiment moet in overeenstemming zijn met de verwachting, die uit jouw theorie volgt.

Soms kun je een verschijnsel met twee totaal verschillende theorieën beschrijven. De theorie met de eenvoudigste beschrijving geniet dan de voorkeur.

HOE ONTSTAAT EEN NIEUWE THEORIE?

Meestal komt een theorie als volgt tot stand. Eerst doe je een aantal waarnemingen. Vervolgens probeer je orde in je waarnemingen aan te brengen en dan ben je misschien in staat een zekere regelmaat te ontdekken. Dan doe je de belangrijke veronderstelling, dat jouw ontdekte regelmaat een algemene waarheid bevat.

Vervolgens probeer je jouw wetmatigheid te verklaren en er een voorspelling mee te doen. Dan ga je, onder nieuwe omstandigheden, nieuwe waarnemingen verrichten.

Als de nieuwe waarnemingen in strijd zijn met je theorie, dan kun je helaas je theorie in de prullenbak gooien. Als je theorie de toets der kritiek kan doorstaan, dan is de tijd rijp om anderen van je gelijk te gaan overtuigen. Met een beetje geluk zit er een Nobel-prijsje voor je in.

ROOSTERPU

Dit artikel is bestemd voor diegenen, die nog niet zo heel lang met wiskunde bezig zijn.

BROERS

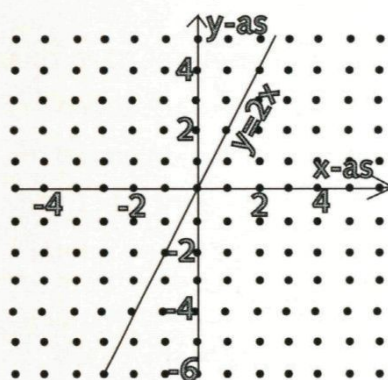
EN ZUSTERS

Ik zeg: "ik heb evenveel broers als zusters".
Mijn zus zegt: "ik heb twee maal zoveel broers als zusters".
Hoeveel zonen en dochters hebben onze ouders?
Oplossing op bladzijde 29.

John Pattiwael
uit *Alteveer gem. Zuidwolde*.

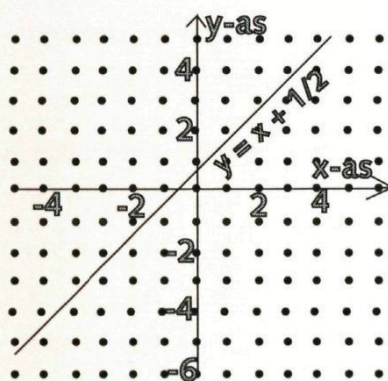
RECHTE LIJNEN

De lijn, die door de punten $(0,0)$ en $(2,4)$ gaat, komt ook door $(10,20)$, $(-127,-254)$ en nog vele andere roosterpunten.



Bij roosterpunten spelen alleen gehele getallen een rol. Kun je het met de volgende bewering eens zijn? *Als een rechte lijn door twee roosterpunten gaat, dan komt hij door oneindig veel roosterpunten.*

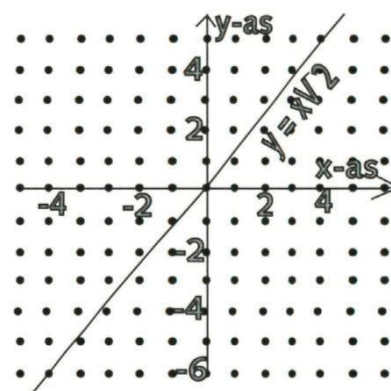
De rechte lijn $y = x + \frac{1}{2}$ komt door geen enkel roosterpunt.



Dat is als volgt in te zien.

Als x een geheel getal is, dan kan y geen geheel getal zijn. Als een geheel getal is, dan kan x geen geheel getal zijn. x en y kunnen dus nooit tegelijk een geheel getal zijn. (x,y) kan dan geen roosterpunt zijn.

EÉN ROOSTERPUNT



De rechte lijn $y = x\sqrt{2}$ komt door $(0,0)$. Dat is het enige roosterpunt, waar deze lijn door heen komt.

Voor je gevoel is dat niet-waar, want je gelooft vast, dat "ergens verderop" een roosterpunt zal worden getroffen, vooral omdat je de lijn net zo ver mag door-trekken, als je maar wilt. $\sqrt{2} \approx 1,41421$, zodat $\frac{y}{x} \approx 1,41421$ is. Je kunt bewijzen, dat $\sqrt{2}$ niet te schrijven

NTEN

is als een deling van twee gehele getallen. Zie hiervoor "Pythagoras" nummer 5 van 1994.

Hieruit volgt dan direct, dat de lijn $y=x\sqrt{2}$ alleen door het roosterpunt (0,0) komt.

RAKELINGS

Omdat $\frac{17}{12}$ en $\frac{41}{29}$ benaderingen zijn van $\sqrt{2}$, komt de lijn $y=x\sqrt{2}$ wel rakelings langs (12, 17) en (29, 41).

Hetzelfde geldt voor (70, 99) en (985, 1393). In de genoemde volgorde is de afstand van het punt tot de lijn steeds kleiner. Hoe je deze punten kunt vinden, lees je in het kader.

SAMENVATTING

Een rechte lijn komt door nul, één of oneindig veel roosterpunten.

Een rechte lijn kan nooit door precies n roosterpunten komen als n een natuurlijk getal ≥ 2 is.

HOE VIND JE ZE?

Pak je rekenmachine en gebruik de $1/x$ toets; doe maar mee:

$$\sqrt{2} = 1,41421\dots = 1 + 0,41421\dots =$$

$$1 + \frac{1}{1,4142136\dots} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$1 + \frac{1}{1 + 0,4142136\dots} =$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1,4142136\dots}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Je kunt net zover door gaan als je maar wilt.

Je ziet, dat er herhaling optreedt bij deze "kettingbreuk".

Een eerste benadering van $\sqrt{2}$ is $1 + \frac{1}{1} = 2$

De volgende benadering is $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2}$

De derde benadering van $\sqrt{2}$ is $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{5}{3}$

etcetera.

CIRKELS

Bij cirkels geldt een ander verhaal. Neem voor het gemak cirkels, waarvan het middelpunt (0,0) is.

1. Kun je nagaan, dat het aantal roosterpunten, waar een cirkelrand doorheen komt, altijd een viervoud is?

2. Door hoeveel roosterpunten komt een

cirkel met straal

$r < 1$, $r = 1$ en $r = \sqrt{5}$?

3. De cirkel, die een straal heeft van $\sqrt{1105}$ komt door 32 roosterpunten, o.a. door (23,24), (12,31), (9,32) en (4,33).

Kun je nu gemakkelijk de overige roosterpunten vinden?

Zie bladzijde 29.

Arnold de Greef

EEN PRIEMTE

Wanneer je een breuk met grote teller en noemer wil vereenvoudigen, kan het handig zijn van een getal te weten, of het een priemgetal is of niet.

Hier volgt een manier om na te gaan, of een natuurlijk getal p , dat kleiner is dan 341 niet of wel een priemgetal is.

Maak twee kolommen en schrijf in de linker kolom de getallen één tot en met p . Schrijf in de rechter kolom bovenaan het getal één. Vermenigvuldig dit nu met twee. Als je hier p van af kunt trekken, zodat het verschil niet negatief wordt, doe dat dan. Schrijf de oplossing een kolom lager. Vermenigvuldig nu dit getal met twee en herhaal de procedure.

Ga zo door tot de regel, waar in de linker kolom p staat. Als de rechter kolom niet eindigt op één, dan is p in ieder geval geen priemgetal.

$p = 11$ geeft:

1	1
2	2
3	4
4	8
5	16-11=5
6	10
7	20-11=9
8	18-11=7
9	14-11=3
10	6
11	12-11=1

$p = 6$ geeft:

1	1
2	2
3	4
4	8-6=2
5	4
6	8-6=2

11 is dus wel een priemgetal en 6 niet.



Kun je zelf verzinnen wat er aan de hand is, als je op nul eindigt?

Het bijbehorende basic-programma ziet er zo uit:

```

10 defint K-T
20 A0$="macht van 2"
30 A1$="priemgetal"
40 A2$="getal met delers"
50 FOR L=1 TO 10
60 INPUT "Welk geheel
   getal > 1 ";P
70 T=1:K=1
80 K=K+1: IF K=P+1
   THEN 130
90 PRINT K;T: T=T x2
100 IF T<P THEN 120
110 T=T-P
120 GOTO 80
130 PRINT P;" is een ";
140 IF T=0 THEN PRINT
   A0$:GOTO 170
150 IF T=1 THEN PRINT
   A1$:GOTO 170
160 IF T>1 THEN PRINT A2$
170 NEXT L
    
```

Probeer het programma zowel met getallen boven als onder de 341. Blijft de vraag: waar komt die genoemde 341 vandaan?

EEN STELLING VAN FERMAT

De kleine stelling van Fermat zegt:

— als p een priemgetal is, dan is $2^p - 2$ deelbaar door p ;

Equivalent daarmee: als $2^p - 2$ niet deelbaar is door p , dan is p geen priemgetal.

Nu zit hier een addertje onder het gras want de omkering is algemeen niet waar: als $2^p - 2$ deelbaar door p is, dan hoeft p niet perse een priemgetal te zijn!

De kleinste uitzonderingen zijn $341 = 11 \times 31$ en $561 = 3 \times 11 \times 17$.

Kijk nu zelf maar, wat er gebeurt, als je de test toepast op 341 en 561. Bij deze getallen gaat de test fout. Kun je zelf grotere uitzonderingen vinden?

Martijn Leisink
en Frank Roos

Elk geheel getal groter dan 1 is te schrijven als de som van minstens twee positieve gehele getallen.

Eén zo'n mogelijkheid heet een partitie.

Hieronder zie je alle mogelijke partities van 6:

$$6 = 6 = 5 + 1 = 4 + 2 =$$

$$4 + 1 + 1 = 3 + 3 =$$

$$3 + 2 + 1 = 3 + 1 + 1 + 1 =$$

$$2 + 2 + 2 = 2 + 2 + 1 + 1 =$$

$$2 + 1 + 1 + 1 + 1 =$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

De partitie $6 = 6$ is erg flauw, maar we tellen hem wel mee. Het aantal partities van 6 is 11 of $p(6) = 11$.

SNELLE TOENAME

De functie $p(n)$ stelt het aantal partities van n voor. Deze functie stijgt razendsnel. $p(200)$ is al 4×10^{18} . Srinivasa Ramanujan uit het vroegere Brits Indië, het huidige India, die leefde van 1887 tot 1920, heeft zichzelf na een bescheiden middelbare schoolopleiding wiskunde aangeleerd,

waarbij hij van alles zelf ontdekte. Zijn genie is ontdekt door de Britse wiskunde-professor Hardy. Ramanujan vond als enige in de geschiedenis een uitstekende, maar zeer moeilijke formule voor $p(n)$.

Tussen neus en lippen door vond hij een "aardige" benadering tot op een miljardste voor π , te weten:

$$\pi \approx \sqrt[4]{\frac{2143}{22}}$$

BIJZONDERE PARTITIES

Je kunt natuurlijk ook wat strengere eisen stellen: je wilt n schrijven als de som van alleen

- verschillende getallen
- kwadraten
- priemgetallen
- kwadraten van priemgetallen
- machten van 2

Zit hier voor jou een uitdaging in ?

Frank Roos

LENZENFORMULE

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad \frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{v}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{v}{fv} - \frac{f}{fv} = \frac{v-f}{fv}$$

$$b = \frac{fv}{v-f} \text{ lijkt op } y = \frac{ax+0}{x-a}$$

Dit is de vergelijking van een orthogonale hyperbool.

Orthogonaal betekent, dat de asymptoten loodrecht op elkaar staan.

De asymptoten zijn de lijnen $v = f$ en $b = f$

KLEINSTE KWADRAAT

We zoeken de kleinste waarde met kwadraat-afsplitsen:

$$42a^2 - 186a + 206.$$

$$42(a^2 - \frac{186}{42}a) + 206 =$$

$$42(a^2 - 2 \times 2 \frac{3}{14}a + (2 \frac{3}{14})^2) + 206 - 42 \times (2 \frac{3}{14})^2 =$$

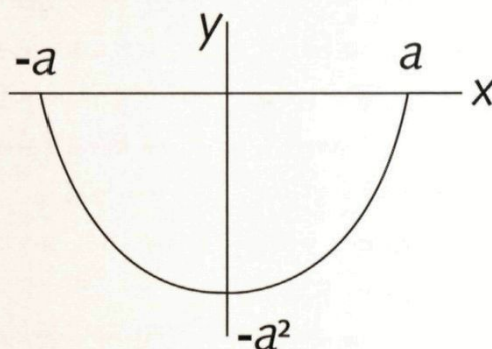
$$42(a - 2 \frac{3}{14})^2 + \frac{1}{14}$$

De kleinste waarde van de linker term is nul, vanwege het kwadraat.

De kleinste waarde van de som is dan $\frac{1}{14}$.

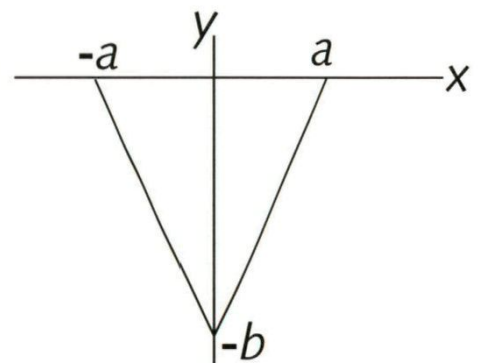
Die kleinste waarde wordt bereikt als $a = 2 \frac{3}{14}$.

DE PARABOLISCHE PUT



heeft bovenaan een breedte van $2a$ en zijn diepte is in het midden a^2 .

DE PU(U)T



heeft een breedte $2a$ en diepte b .

DE COSINUS-PUT

Als $x < -\frac{1}{2}\pi$ is, dan is $y = 0$.

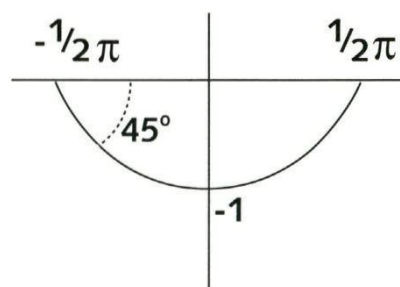
Als $x > +\frac{1}{2}\pi$ is, dan is $y = 0$.

Als $-\frac{1}{2}\pi \leq x \leq +\frac{1}{2}\pi$, dan is $y = -b \cdot \cos x$

Breedte = π en diepte = b .

Natuurlijk mag je voor b elk getal kiezen.

In de grafiek is dat 1.



BROERS EN ZUSTERS

Als "ik" een vrouw zou zijn,
dan moet ik hetzelfde
beweren als mijn zus.

Dat doe ik echter niet, dus
ik moet een man zijn.

Stel mijn ouders hebben x
zonen. Dan heb ik $x-1$
broers en $x-1$ zusters.

Dan hebben mijn ouders
 $2x-1$ kinderen.

Mijn zus heeft x broers en

$\frac{1}{2}x$ zusters.

Dat zijn samen $1\frac{1}{2}x+1$
kinderen.

$2x-1 = 1\frac{1}{2}x+1$ of $x=4$.

Mijn ouders hebben dus
vier zonen en drie dochters.

CIRKELS

1. Stel, dat de cirkel in het
eerste kwadrant n roos-
terpunten treft.

Dan treft de cirkel in
totaal $4n$ roosterpunten.

Bij elk punt (a, b)

behoren ook $(-a, b)$, $(a, -b)$
en $(-a, -b)$.

Maar evengoed doen
 $(\pm b, \pm a)$ mee.

In totaal nu een achtvoud.

Soms doen echter ook de
vier snijpunten met de
assen mee: altijd een
viervoud.

2 Als $r < 1$ dan 0.

Als $r=1$ dan 4, de snijpun-

ten met de x - en y -as.

Als $r=5$, dan 4×3 .

$(\pm 3, \pm 4)$, $(\pm 4, \pm 3)$, $(0, \pm 5)$
en $(\pm 5, 0)$.

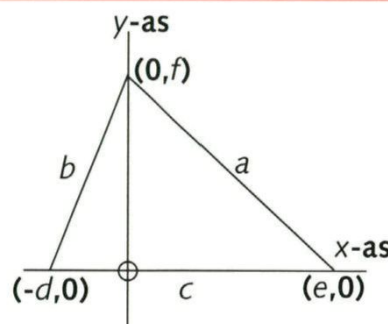
3. Bij $(4, 33)$ heb je ook
 $(4, -33)$, $(-4, 33)$, $(-4, -33)$;
 $(33, 4)$, $(-33, 4)$, $(33, -4)$ en
 $(-33, -4)$;
enzovoort.

EULER

Pas eerst twee keer de stel-
ling van Pythagoras toe:

$$d^2 + f^2 = b^2 \text{ en } e^2 + f^2 = a^2.$$

Los uit beide f^2 op en stel
gelijk: $b^2 - d^2 = a^2 - e^2$.



Bedenk, dat $e = c - d$ en
vul dat in: $b^2 - d^2 = a^2 - (c-d)^2$.

Los hieruit d op.

Nu we d hebben, kunnen
we e vinden met $e = c - d$.

REKEN-PUZZEL

$$(x+y) + (x-y) + xy + \frac{x}{y} = 243$$

$$x(2y+y^2+1) = 243y$$

$$x = \frac{243y}{(y+1)^2}$$

Omdat x geheel is en omdat y en $y+1$ onderling ondeelbaar zijn, moet 243 deelbaar zijn door het kwadraat $(y+1)^2$. $243 = 3^5$.

$(y+1)^2$ kan dan 3^2 en 9^2 zijn.

y is dan 2 of 8.

y is -4 of -10 voldoen niet.

x is dan 54 of 24.

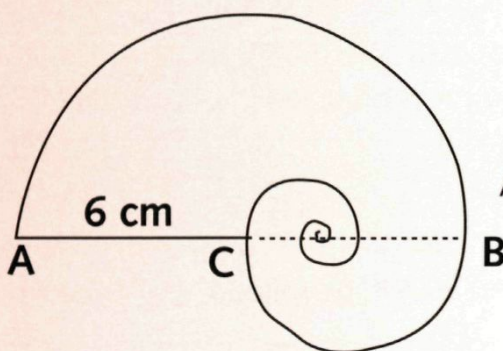
Het ene getallenpaar is dan 54 en 2.

Het andere getallenpaar is 24 en 8.

CIRKEL-SPIRAAL

1. Wat is de oppervlakte van de figuur, die door de omtrek omsloten wordt?

De omsloten oppervlakte is de som van de oppervlakten van twee halve cirkels $= \pi \cdot (6 \text{ cm})^2 + \pi \cdot (3 \text{ cm})^2 = 45\pi \text{ cm}^2 \approx 141 \text{ cm}^2$.



2. Hoe lang is de spiraal?

De omtrek van een halve cirkel is πr .

De lengte van de spiraal is

$$\pi r_1 + \pi r_2 + \pi r_3 + \pi r_4 + \pi r_5 + \dots = (\pi \text{ cm}) \cdot (6 + 3 + 1,5 + 0,75 + \dots)$$

De som bevat oneindig veel termen.

Elke volgende term is 0,5 x de vorige. Dit is een oneindig voortlopende meetkundige rij.

$$\text{Die som is } \frac{6}{1 - 0,5}$$

De lengte van de spiraal is dan $12\pi \text{ cm} \approx 37,7 \text{ cm}$.

3. Waar "eindigt" de spiraal?

$$AE = 2 \times (6 - 3 + 1,5 - 0,75 + 0,375 - \dots) \text{ cm.}$$

Ook hier is sprake van een oneindig voortlopende meetkundige rij.

Nu vermenigvuldig je steeds met $-\frac{1}{2}$.

$$AE = \frac{2 \times 6}{1 + 0,5} \text{ cm} = 8 \text{ cm.}$$

Het "eindpunt" ligt dan 8 cm rechts van A, dus 2 cm rechts van C en 4 cm links van B.

ALGEBRA (1)

We moeten aantonen, dat

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9 \text{ is.}$$

Daartoe gaan we eerst de haakjes wegwerken en een beetje herschrijven.

$$1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 : \\ 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right)$$

Maken we de breuken gelijknamig, dan

$$= 3 + \frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{b^2+c^2}{bc} + \frac{c^2+a^2}{ca}$$

Het gegeven probleem is nu herleid tot

$$\frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{b^2+c^2}{bc} + \frac{c^2+a^2}{ca} \geq 6 \text{ of } (*) \geq 6.$$

Om verder te kunnen, bekijken we eerst $(a - b)^2 \geq 0$, omdat een kwadraat altijd minstens nul is.

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Dit gebruiken we:

$$(*) \geq \frac{2ab}{ab} + \frac{2bc}{bc} + \frac{2ca}{ca}$$

Nu zijn we er, want inderdaad $(*) \geq 6$.

EEN RIJ MANNEN

Ga er van uit, dat

$$1+2+3+\dots+(p-1)+p =$$

$$(1+p)+(2+(p-1))+(3+(p-2))+\dots = \frac{1}{2} p(p+1).$$

Er staan n mannen. De bedoelde man is $\#k$ (= nummer k).

Vòòr $\#k$ staan $(k-1)$ mannen.

De som van hun nummers is $\frac{1}{2} (k-1)k$.

Na $\#k$ staan $(n-k)$ mannen.

De som van hun nummers is

$$\frac{1}{2} n(n+1) - \frac{1}{2} k(k+1). \text{ Nu moet gelden:}$$

$$\frac{1}{2} n(n+1) - \frac{1}{2} k(k+1) = \frac{1}{2} (k-1)k.$$

Dit is te vereenvoudigen tot

$$n(n+1) = 2k^2 \text{ of } n^2+n-2k^2=0.$$

De ene oplossing

$$n = \frac{-1 - \sqrt{(8k^2+1)}}{2}$$

voldoet niet, want die is negatief en n moet positief zijn.

De andere oplossing is

$$n = \frac{-1 + \sqrt{(8k^2+1)}}{2}$$

n is slechts geheel en tussen 10 en 50 als $k=35$. n is dan 49.

Het totaal aantal mannen is dan 49.

Voor de man met nummer 35 is de som van de borstnummers links van hem 595 en rechts ook 595.

Zie ook het artikel: de vergelijking van Pell.

Arnold de Greef

VERANTWOORDING ILLUSTRATIES:

Cartoons: Pieter Hoogenbirk

Foto omslag: KNMI

Foto Pagina 5: Johan van Gurp

Foto's Pagina 13/14: KNMI

ABONNEMENTEN:

Nederlandse en Belgische abonnees:
aanmelden telefonisch 070 - 314 35 00,
of schriftelijk, NIAM b.v.

Antwoordnummer 97007,
2509 VH Den Haag.

TARIEVEN:

Jaarabonnement Pythagoras f 35,-
Jaarabonnement inclusief Archimedes f 65,-
Jaarabonnement België f 45,-/of BF 800,-
Jaarabonnement België
inclusief Archimedes f 75,-/of BF 1450,-
Jaarabonnement Buitenland f 50,-
Losse nummers f 7,50/of BF 140,-

BETALING:

Wacht met betalen tot u de acceptgiro-
kaart krijgt toegestuurd.

Bij tussentijdse abonnering ontvangt u
alle nummers van de lopende jaargang.
Abonnementen zijn doorlopend, tenzij
voor 1 juli schriftelijk bij de uitgever is
opgezegd.

UITGEVER:

NIAM b.v.,
Neuhuyskade 94,
2596 XM Den Haag.
Tel.: 070 - 314 35 00
Fax: 070 - 314 35 88
Giro 33.84.52.