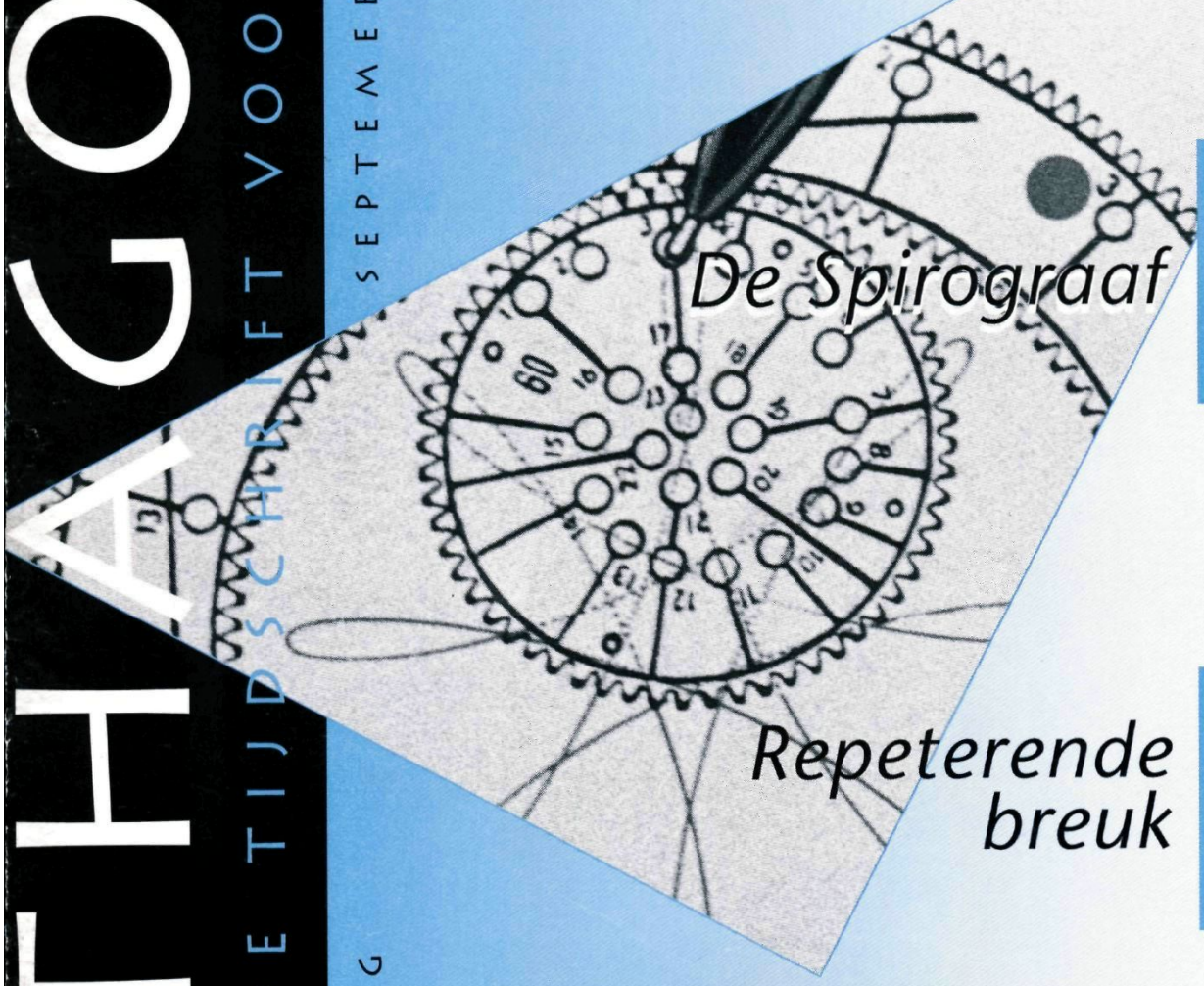
PYTHAGORAS

WISKUNDE TIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

34E JAARGANG

SEPTEMEBR 1995 NUMMER 5/6



Stelling vanStewart 10

De Spirograaf 24

Repeterende breuk 32

De stelling van De Moivre 38

INHOUD

- VOORWOORD 3
- PYTHAGORAS OLYMPIADE 4
- RIJTJE 6
- EEN HARDNEKKIGE LIMIET 6
- PYTHAGORAS-VIERHOEKEN 8
- STELLING VAN STEWART 10
- OPLOPENDE GETALLEN 12
- EEN WEL HEEL MOOI MAGISCH VIERKANT 15
- STAMBREUKEN 16
- DE I 18
- MAANTJES VAN HIPPOCRATES 18
- DE OPTELTRUC 19
- EEN HEUS COLLEGE VOOR VWO'ERS 20
- DE LEGPUZZEL 20
- EEN SOM VAN TWEE KWADRATEN 21
- DE KWADRATUUR VAN EEN CIRKEL 22
- ZES PUNTEN IN EEN REGELMATIGE ZESHOEK 23
- DE SPIROGRAAF 24
- DRIE OPEENVOLGENDE KWADRATEN 25
- STER EN SPITSBOOG 26
- EEN ANDERE DISCRIMINANT 26
- GROTE GETALLEN 28
- PI IN DE BIJBEL 30
- AARDIGHEDEN UIT DE GETALLENTHEORIE 31
- REPETERENDE BREUK 32
- ALTIJD 6 ALS UITKOMST 34
- DOORLOPER 35
- ENIGE BIJZONDERE PYTHAGORAS-DRIEHOEKEN 36
- DRIEHOEKEN MET PYTHAGORAS 36
- DE STELLING VAN DE MOIVRE 38
- DES LEZERS PENNEVRUCHT 40
- ITERATIEVE RIJEN 41
- PROBLEEM VAN BROCARD 42
- OPLOSSINGEN 43

UITGAVE:
Pythagoras is een uitgave van NIAM b.v. en verschijnt zesmaal per jaar. Een jaargang loopt van september tot en met augustus.

REDACTIE:
Jan Mahieu
Frank Roos
Marcel Snel

EINDREDACTIE:
Henk Huijsmans

NIEUWE ARTIKELEN:
Molenstraat 31,
4841 CA Prinsenbeek

CORRESPONDENTIE-ADRES:
Reacties,
oplossingen enz.
Frank Roos,
Klink 19
9356 DG Tolkert

MEDEWERKERS:
Bob de Jongste,
Hans de Rijk,
Paul van de Veen,
Thijs Notenboom.

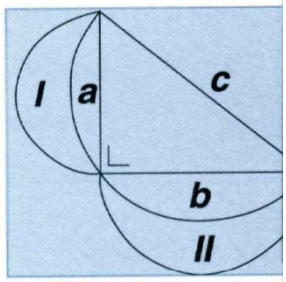
DUBBELDIK...

Voor u ligt het nieuwe nummer van Pythagoras. Dubbeldik deze keer. Om technische redenen hebben we de laatste twee nummers van deze jaargang samengevoegd.

We zijn reeds druk bezig met de voorbereiding van de nieuwe jaargang. Een jaargang waarin we Pythagoras nog aantrekkelijker voor u gaan maken.

EEN GREEP UIT DE INHOUD VAN DIT NUMMER

Heb je wel eens te maken gehad met stambreuken? Toch waren stambreuken al bekend bij de 'oude' Egyptenaren. Meer over stambreuken vind je in het artikel op pagina 16.



Hippocrates van Chios die rond 430 v. Chr. leefde, betudeerde als eerste een aantal figuren die uit cirkelbogen zijn opgebouwd. Dit soort figuren worden daarom wel de Maantjes van Hippocrates genoemd. Lees verder op pagina 18.

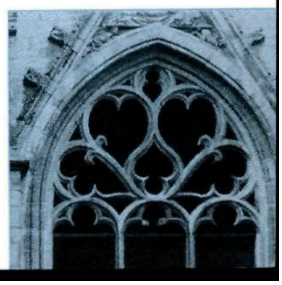
Weet je wat een spirograaf is? Een spirograaf is een oud stukje speelgoed waar je ook met wiskundige ogen naar kunt kijken! Het artikel op pagina 24 vertelt er je meer over.

Sterren en spitsbogen zie je onder andere in ramen van oude kerken. Op pagina 26 vind je er meer over.

De eerste oplossingen van de Pythagoras Olympiade tref je aan op pagina 4 en 5.

Kleine en grote probleempjes, diverse opdrachten, allerlei kleine en grote artikelen vullen verder dit nummer. Je komt beslist weer aan je trekken.

Veel lees- en puzzelplezier.
Henk Huijsmans



PYTHAGORAS

De eerste reacties op de nieuwe rubriek Pythagoras Olympiade (zie 34e jaargang nummer 3) zijn veelbelovend. Maar liefst 11 goede oplossingen. Hiernaast de oplossingen van opgave 1 en 2.

Stuur je oplossingen naar:
Pythagoras Olympiade. TUE Faculteit Wiskunde en Informatica. Hg 9.84 Postbus 513 5600 MB Eindhoven.

OPGAVE1

Dertien vierkanten en rechthoekige driehoeken (zie Pythagoras nr. 3). De maten zijn niet bekend. Alleen van het onderste vierkant weten we, dat de oppervlakte 81 is. Hoe groot is de totale oppervlakte van het grijze gebied?

OPLOSSING

We passen herhaaldelijk de stelling van Pythagoras toe. Uit die stelling volgt dat het oppervlakte van vierkant 1 gelijk is aan de som van de oppervlakken van de vierkanten 3 en 7. Pythagoras toepassen op de vierkanten 3 en 7 geeft dat het oppervlakte van de vierkanten 5,6,10 en 9 gelijk is aan de het oppervlakte van vierkant 1.
Nog éénmaal Pythagoras voor vierkant 10 geeft dat de som van de grijze vierkanten gelijk is aan het oppervlakte van het eerste vierkant, dat is 81

OPGAVE 2

Er staan tweeduizend en één lampjes op een rij. Onder elk lampje zit een knopje. Als je zo'n knopje indrukt dan verandert de toestand van de lampjes ernaast: een lampje, dat uit was gaat aan en omgekeerd. Als je bijvoorbeeld het zesde knopje indrukt, dan veranderen de lampjes vijf en zeven. Als je knopje één indrukt, dan verandert alleen lampje twee. Als je het laatste knopje indrukt, dan verandert alleen lampje tweeduizend. In het begin zijn alle lampjes uit. Kun je alle lampjes aan krijgen door alleen en uitsluitend op knopjes te drukken.

OPLOSSING

Bijna alle oplossingen die we kregen luidden ongeveer als volgt:
Het is makkelijk om vier lampjes aan te krijgen. Ook de eerste of de laatste drie lampjes geven geen problemen. Men kan dus viervouden, viervouden plus 2 en viervouden plus 3 makkelijk aan krijgen.
Omdat 2001 een viervoud plus 1 is kan het dus niet.
Dit is echter geen goed bewijs. We zijn namelijk niet overtuigd dat er geen andere (niet makkelijke) manieren zijn om de lampjes aan te

OLYMPIADE

krijgen. Natuurlijk als je het op papier probeert met wat kleinere getallen zie dat het wel klopt, maar voor een bewijs is dat niet genoeg. We kregen twee correcte oplossingen voor dit probleem, één van Dani Kiss en één van Gerben de Klerk. De oplossing van Gerben was als volgt:.

"Het is niet mogelijk om de lampjes aan te krijgen. Dat bewijs ik door er eerst van uit te gaan, dat het wel kan, en dan vervolgens op een tegenspraak te stuiten. De conclusie moet dan zijn dat het niet kan. Merk allereerst op dat de volgorde waarin we de knopjes indrukken geen verschil maakt voor het eindresultaat. Merk ook op dat het geen zin heeft om een knopje vaker dan eenmaal in te drukken, een knopje tweemaal indrukken geeft hetzelfde resultaat als een knopje niet indrukken.

Het eerste lampje kan alleen van toestand wisselen door op het tweede knopje te drukken. Nadat knopje twee ingedrukt is branden de lampjes 1 en 3. Omdat 3 moet blijven branden mag ik niet op knopje 4 drukken. Omdat 5 moet branden moet ik wel op knopje 6 drukken. Zo verder redenerend moet ik knopje 8 niet, 10 wel,...,1998 wel en 2000 niet indrukken. Maar als knopje 2000 niet ingedrukt mag worden dan kan lampje 2001 nooit aangaan. Dit is in tegenspraak met mijn veronderstelling dat alle lampjes aan konden. Conclusie het is niet mogelijk om alle lampjes aan te krijgen."

Hieronder volgen de nieuwe opgaven. Het is niet nodig om beide opgaven in te sturen. Ook als je voor één opgave een oplossing weet kan je die insturen, tot een maand na het verschijnen van dit nummer.
Veel plezier.

OPGAVE 5

Eén oplossing van de vergelijking $n^{1995} = 1995^n$ is $n = 1995$.
Bewijs dat dit de enige oplossing is waarbij n geheel en positief is.

OPGAVE 6

We maken een lijst met daarop alle getallen die als cijfers tien maal een 1 en tien maal een 2 hebben.
Het getal 11122111122221212122 staat bijvoorbeeld ergens op die lijst.

a. Bewijs dat het aantal getallen op onze lijst even is.
b. Als we de lijst sorteren naar grootte, wat zijn dan de middelste twee getallen ?

EEN HARDNEKK

Bekijk eens de volgende rij breuken:

$$\frac{1}{3}\ \frac{5}{1}\ \frac{11}{5}\ \frac{27}{11}\ \frac{65}{27}\ \frac{157}{65}\ \ldots$$

Elke volgende breuk vind je als volgt: de nieuwe noemer is de oude teller en de nieuwe teller is 2 x de oude teller plus de oude noemer.

De waarde van deze breuk komt steeds dichter bij de waarde van $1 + \sqrt{2}$ te liggen.
Bij benadering is dat 2,414.
Tot zover niets bijzonders.
Nu vervangen we de eerste breuk door een willekeurig andere, bij voorbeeld 7:3.
Dan krijg je met het zelfde recept om volgende breuken te vinden:

$$\frac{7}{3}\ \frac{17}{7}\ \frac{41}{17}\ \frac{99}{41}\ \frac{239}{99}\ \ldots$$

Het treffende is nu, dan de waarden van deze breuken ook steeds dichter bij de waarde van $1 + \sqrt{2}$ komen te liggen.

VARIËREN

Met welke teller en noemer je ook begint, het doet er niets toe: altijd benader je $1 + \sqrt{2}$. Het is verbluffend. Alleen als je met 0:0 begint, dan kom je nergens, maar dat zal je niet verbazen.

MET FACTOR 3

Nu vervangen we in het recept de factor 2 door de factor 3.

RIJTJE

Ik beschouw drie opeenvolgende getallen.
Het kwadraat van de middelste is één meer dan het product van de twee andere.
Om welke getallen gaat het?
Zie bladzijde 43.

Sonja Svetachova

IGE LIMIET

We kijken weer naar een voorbeeld:

$$\frac{2}{7}\ \frac{13}{2}\ \frac{41}{13}\ \frac{136}{41}\ \frac{449}{136}\ \ldots$$

De waarden van deze breuken komen steeds dichter bij $\frac{1}{2}\cdot(3+\sqrt{13}) \approx 3{,}302776$ te liggen.

MET FACTOR 1

kom je tot de limiet $\frac{1}{2}\cdot\{1+\sqrt{5}\}$. Dat getal speelt een belangrijke rol bij de gulden snede en bij berekeningen in de regelmatige vijfhoek.

MET FACTOR *a*

Nu maken we de rij met breuken als volgt:
de nieuwe noemer is de oude teller en de nieuwe teller is *a* maal de oude teller plus de oude noemer.

Dan blijken de waarden van de breuken steeds dichter bij $x = \frac{1}{2}\cdot\{a+\sqrt{(a^2+4)}\}$ te komen, ongeacht hoe de eerste breuk er uit ziet!
x blijkt een oplossing te zijn van $x^2 - ax - 1 = 0$.

Als je *a* erg groot kiest, dan is *x* iets groter dan *a*.

UITLEG

Stel, dat de rij breuken naar de limiet *L* gaat. Eén zo'n breuk en zijn opvolger zijn

$$\frac{p}{q} \approx L \text{ en } \frac{a\cdot p+q}{p} = a + \frac{q}{p} \approx L$$

$$L \approx a + \frac{1}{L} \text{ of}$$

$$L^2 - aL - 1 \approx 0$$

SPREAD-SHEET

Om met deze getallen een beetje te kunnen experimenteren, gaan we een spread-sheet of rekenvel ontwerpen voor het algemene geval met factor *a*:

De regels één tot en met drie moet je geheel intypen. Als je regel drie 17 maal kopieert, dan is je rekenvel in principe klaar. Het is handig om het gehele werkblad te beveiligen en de beveiliging van de cellen A2, B2 en C2 weg te halen. Varieer nu eerst B2 en C2 naar hartelust: D20 zal niet noemenswaardig veranderen. Kies de kolombreedte 15, dan kun je veel decimalen te zien krijgen.

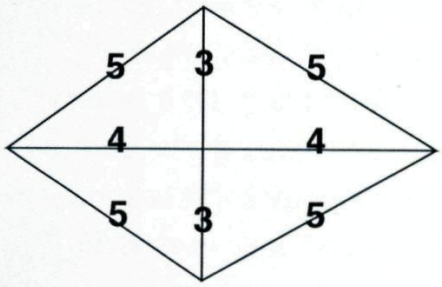
BASIC

Kun je voor dit zelfde probleem een basic-programma schrijven? Zie zonodig bladzijde 43. *Redactie*

	kolom A	kolom B	kolom C	kolom D
regel 1	factor	teller	noemer	breuk
regel 2	2	1	5	B2/C2
regel 3	A2	A2*B2+C2	B2	B3/C3
regel 4	A3	A3*B3+C3	B3	B4/C4
...	...	.....	...	.....
regel 20	A20	A20*B20+C20	B19	B20/C20

PYTHAGORAS V

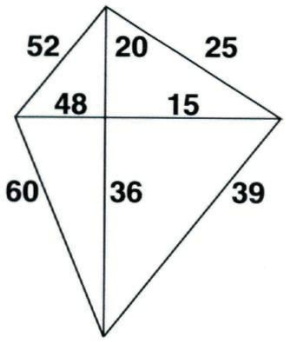
Een Pythagoras-ruit is een ruit, die opgebouwd is uit vier gelijke Pythagoras-driehoeken. Als je vier 3-4-5-driehoekjes tegen elkaar aanlegt, dan krijg je een ruit met omtrek 20 en met diagonalen 6 en 8.

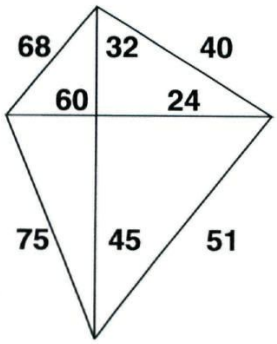


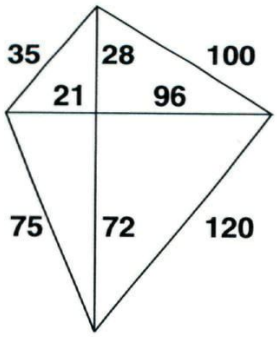
Als je uitgaat van de algemene Pythagoras-driehoek, dat is de $(2mn\,,\ m^2\text{-}n^2\,,\ m^2\text{+}n^2)$ -driehoek, dan worden de zijden van de ruit alle vier m^2+n^2, terwijl de diagonalen $4mn$ en $2\cdot(m^2\text{-}n^2)$ zijn. Alle lettersymbolen in dit artikel stellen positieve gehele getallen voor.
Veel lastiger is het volgende.

PYTHAGORAS-VIERHOEK

Ik stelde mezelf de volgende vraag: zou het mogelijk zijn om vier *verschillende* Pythagoras-driehoeken tegen elkaar aan te leggen, die samen precies een vierhoek vormen ?
Ik begon met het schrijven van een computerprogramma. Het was gebaseerd op proberen. En, waarachtig, ik kreeg een stel oplossingen te pakken. Kijk maar naar de tekeningen, die echter niet op schaal zijn.







Controleer maar met de stelling van Pythagoras: in elke zichtbare rechthoekige driehoek gaat het goed.

EIGENSCHAPPEN

Toen ik eenmaal een stel voorbeelden had, probeerde ik eigenschappen in de voorbeelden te ontdekken.

De belangrijkste ontdekking was, dat de 'overstaande driehoeken' twee aan twee gelijkvormig waren.

Als je mijn voorbeelden bekijkt, dan kun je jezelf daarvan overtuigen door te letten op de verhoudingen van de zijden van de driehoeken.

In het eerste voorbeeld van deze serie zie je twee vergrote 3-4-5-driehoeken en twee vergrote 5-12-13-driehoeken.

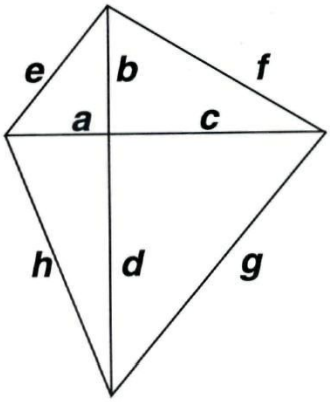
AC = BD

Een ander eigenschap is, dat $ac = bd$. Dat is een gevolg van de gelijkvormigheid.

IERHOEKEN

Hier zijn nog drie voorbeelden:

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
84	80	60	63	116	100	87	105
120	64	48	90	136	80	102	150
140	48	36	105	148	60	111	175



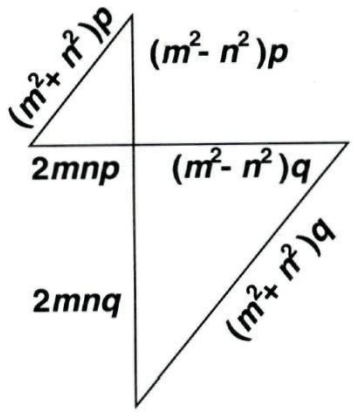
Misschien kan je ook nog een één of andere eigenschap van deze klasse van vierhoeken ontdekken. Een aantal gelijke hoeken volgt uit de gelijkvormigheid. Zie bladzijde 43.

RECEPT

Na deze ontdekking was de tijd rijp om mezelf de volgende vraag te stellen: is het mogelijk om een soort recept op te schrijven, waarmee ik het ene voorbeeld na het andere uit mijn mouw kan schudden? We hebben immers ook een recept voor een Pythagorasdriehoek!

Ik concentreerde me eerst op het ene stel overstaande, gelijkvormige Pythagorasdriehoeken.

Dat leverde deze figuur:

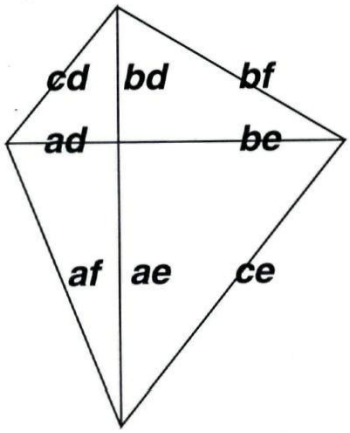


VIER VERGROTINGSFACTOREN

In de driehoek linksboven is de 'vergrotingsfactor' p. In de andere driehoek is dat q. Kijk ik vervolgens naar de niet compleet getekende driehoek linksonder, dan hebben de rechthoekszijden de factor $2mn$ gemeenschappelijk.

De p en de q moeten een (primitieve) Pythagorasdriehoek vormen. Dan moet $p = 2rs$ en $q = r^2-s^2$ zijn.

De schuine zijde van de primitieve driehoek is dan r^2+s^2, maar de schuine zijde van de driehoek linksonder is natuurlijk $2mn$ maal zo groot. De laatste driehoek met vergrotingsfactor m^2-n^2 is nu ook gemakkelijk te bepalen en het eindresultaat zie je hieronder:



$a = 2mn$ $\quad d = r^2-s^2$

$b = m^2-n^2$ $\quad e = 2rs$

$c = m^2+n^2$ $\quad f = r^2+s^2$

Je mag voor m, n, r en s kiezen wat je maar wilt, als ze maar positief en geheel zijn. Ook moeten $m>n$ en $r>s$ zijn, omdat b en d positief moeten zijn.

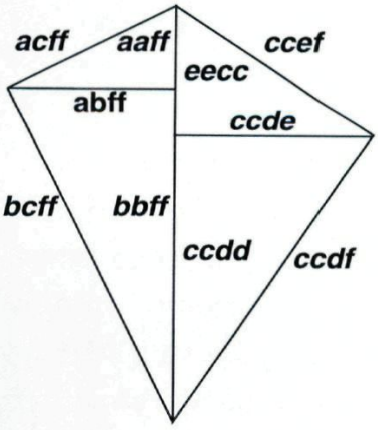
NIEUWE VOORBEELDEN

Het zal de lezer duidelijk zijn, dat mijn doel is bereikt: nu kan iedereen met dit recept een willekeurig voorbeeld verzinnen.

Een proef op de som. Ik kies $m=5$, $n=2$, $r=3$ en $s=1$.
Dat levert:
$a=160$, $b=168$, $c=126$,
$d=120$, $e=232$, $f=210$,
$g=174$, $h=200$.
Met je rekenmachine kun je controleren, dat dit goed is.

EEN TWEEDE SOORT

Een tweede soort Pythagoras-vierhoeken werd me geïnspireerd door de eerste. Bij de eerste soort stonden er twee aan twee Pythagoras driehoeken tegenover elkaar. Bij de tweede soort verwacht ik twee Pythagorasdriehoek naast elkaar. Na een beetje gericht puzzelen vond ik:



Hierin zijn $a^2 + b^2 = c^2$ en $d^2 + e^2 = f^2$. We hebben dus te maken met de Pythagorasdriehoeken *a-b-c* en *d-e-f*. Bij dat puzzelen speelt het begrip kleinste gemeenschappelijke veelvoud tot drie maal toe een rol. Eén van de diagonalen is tevens de middellijn van de omgeschreven cirkel. Dus zijn de grotere driehoeken rechthoekig.
Dat ik dit deze soort niet bij mijn voorbeelden vond, kwam doordat de kleinste vierhoek van deze soort al behoorlijk grote zijden heeft: 3380, 2535, 1625 en 3900.
Hierbij zijn $a=4$, $b=3$, $c=5$, $d=5$, $e=12$ en $f=13$.

ALLE ?

Ik weet zeker, dat ik nog niet alle denkbare Pythagoras-vierhoeken te pakken heb.

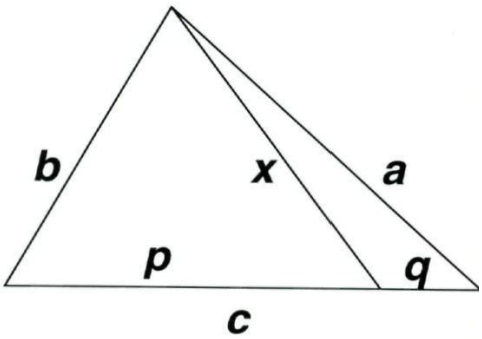
Ten eerste, omdat de $(2mn\,,\ m^2-n^2\,,\ m^2+n^2)$-driehoek niet alle Pythagoras-driehoeken beschrijft. De driehoek 15-20-25 bijvoorbeeld kun je er niet mee maken.

Ten tweede weet ik niet zeker, of ik alle types Pythagoras-vierhoeken nu wel te pakken heb. Misschien, dat iemand dat probleem aan kan.

Frank Roos

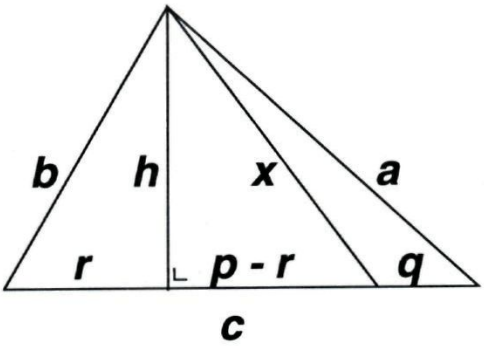
STELLI

In een driehoek zijn de zijden *a*, *b* en *c* bekend. Vanuit de tophoek wordt één of andere lijn met lengte *x* getrokken, die de basis verdeelt in gegeven stukken *p* en *q*. De vraag is nu hoe groot *x* is.



NG VAN STEWART

Om x te berekenen, is het handig, om eerst de hoogtelijn h uit de top te tekenen.



Zie je, dat de lengte van h de kleinste lengte van x kan zijn?

STELLING VAN PYTHAGORAS

Voor de berekening van x maken we drie maal gebruik van de beroemde stelling van Pythagoras.

Steeds is de hoogtelijn één van de rechthoekszijden.

$h^2 + r^2 = b^2$ .....(1)

$h^2 + (p - r)^2 = x^2$ .....(2)

$h^2 + (c - r)^2 = a^2$ .....(3)

We hebben nu een stelsel van drie vergelijkingen met de drie onbekenden h, x en r, waarvan ons nu alleen eigenlijk maar de x interesseert.

Leid zelf de oplossing af:

$$x = \sqrt{\frac{pa^2 + qb^2 - pqc}{c}}$$

Zie zonodig bladzijde 44. Dit resultaat, dat voornamelijk gebaseerd is op de stelling van Pythagoras, heet de stelling van Stewart.

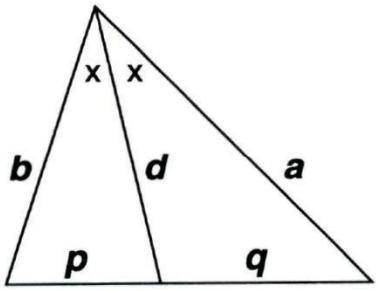
ZWAARTELIJN

Als je $p = q = \frac{1}{2}c$ kiest, dan stelt x de zwaartelijn z_c uit de top op de basis voor. Je kunt dan de volgende formule vinden:

$$z_c = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}$$

DE DEELLIJN

Laat x nu eens de deellijn dc zijn, die de tophoek doormidden deelt.



Voor de deellijn geldt:

$a : b = q : p$. .....(4)

Het bewijs hiervan staat op bladzijde 44.

Bovendien gelden

$p + q = c$ ...(5) en

$$d = \sqrt{\frac{pa^2 + qb^2 - pqc}{c}}$$

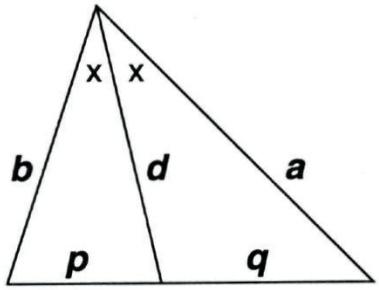
Stelling van Stewart:

$cd^2 = qb^2 + pa^2 - pqc$.

$c = p + q$, dus

$(p+q)d^2 = qb^2 + pa^2 - pq(p+q)$.

$(p+q)d^2 = qb \cdot b + pa \cdot a - pq(p+q)$.



Voor de deellijn geldt

$b : a = p : q$ of $ap = bq$.

$(p+q)d^2 =$

$ap \cdot b + bq \cdot a - pq(p+q)$.

$(p+q)d^2 =$

$ab \cdot (p+q) - pq(p+q)$.

De lengte van de deellijn wordt dus gegeven door

$d = \sqrt{\{ab - pq\}}$.

Arnold de Greef

OPLOPENDE GETALL

Als je de cijfers van een *oplopend getal* opschrijft, dan moeten de cijfers steeds groter worden.
In zo'n getal kunnen de cijfers 1 tot en met 9 voorkomen.
Alle cijfers van zo'n getal zijn verschillend.
Voorbeelden van oplopende getallen zijn: 12345, 568, 6, 1489, 567 en 234679.

DE PROBLEEMSTELLING

Wat is som van alle mogelijke oplopende getallen, die uit een zelfde aantal cijfers bestaan?

EEN VOORBEELD

Hieronder zie je alle oplopende getallen van drie cijfers.

123						
124	134					
125	135	145				
126	136	146	156			
127	137	147	157	167		
128	138	148	158	168	178	
129	139	149	159	169	179	189
	234					
	235	245				
	236	246	256			
	237	247	257	267		
	238	248	258	268	278	
	239	249	259	269	279	289
		345				
		346	356			
		347	357	367		
		348	358	368	378	
		349	359	369	379	389
			456			
			457	467		
			458	468	578	
			459	469	479	489
				567		
				568	578	
				569	579	589
					678	
					679	689
						789

ZEVEN OPLOPENDE CIJFERS

Wat is de som van alle getallen van zeven oplopende cijfers?
In de optelling zetten we in gedachten alle getallen recht onder elkaar, en tellen we voor elk van de zeven posities (eenheden,

De som van deze 84 getallen is 25830.

EN

tientallen, honderdtallen, • • •) apart de cijfers op. Er worden telkens twee cijfers weggelaten uit de rij 1 tot en met 9.

VOORBEELD

In het zeven-cijferige oplopende getal 1245689 zijn de 3 en de 7 weggelaten. De 4 staat op positie $n = 3$.

WAT STAAT ER NU OP DE N-DE POSITIE?

We werken van links naar rechts.

I. HET GEVAL, DAT ER NOG GEEN CIJFERS ZIJN OVERGESLAGEN.

In het voorbeeld gaat het om de cijfers 1 en 2. Op plaats n staat het getal n. Het zijn $9 - n$ getallen. Dat geeft

$$\frac{(9-n)!}{(7-n)!\cdot 2!} = \frac{1}{2}(8-n)(9-n) =$$

$$\frac{1}{2}n^2 - 8\frac{1}{2}n + 36$$

mogelijkheden.

EEN GREEP UIT DE COMBINATIELEER

n en k zijn gehele getallen. $0 \le k \le n$.

Als je n voorwerpen in een willekeurige volgorde neerlegt of oppakt, dan kan dat op $n!$ verschillende manieren.

Als je uit n verschillende voorwerpen k van die voorwerpen willekeurig kiest, dan kan dat op $\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ manieren.

Deze breuk kan worden uitgesproken als "n over k".

II. HET GEVAL, DAT ER ÉÉN CIJFER IS OVERGESLAGEN.

In het voorbeeld gaat het om de cijfers 4, 5 en 6. Op plaats n staat het getal $n+1$ als één cijfer uit $1,\ldots,n$ wordt weggelaten. Dit zijn $n(9-(n+2)+1) = -n^2 + 8n$ combinaties.

III. HET GEVAL, DAT ER AL TWEE CIJFERS ZIJN OVERGESLAGEN.

In het voorbeeld gaat het om de cijfers 8 en 9. Op plaats n staat het getal $n+2$ als één cijfer uit de rij $1,\ldots,n+1$ en één cijfer uit de rij $n+2,\ldots,9$ zijn weggelaten. Dit zijn

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!\cdot 2!} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

mogelijkheden.

OPGETELD

Het totaal aantal mogelijkheden is dan

$$\{\tfrac{1}{2}n^2 - 8\tfrac{1}{2}n + 36\} + \{\tfrac{1}{2}n^2 + 8n\} + \{\tfrac{1}{2}n(n+1)\} = 36.$$

Dit klopt, want er zijn $\dfrac{9!}{7!\cdot 2!} = 36$ "weglaatcombinaties" mogelijk.

We moeten dus 36 zevencijferige oplopende getallen optellen.

EEN KOLOM CIJFERS OPTELLEN

Nu de som van de cijfers zelf op de n-de plaats (met m = nummer van de mogelijkheid en a_m = aantal van die mogelijkheid):

$$\sum_{m=n}^{n+2} m a_m =$$

$$\tfrac{1}{2} n(n+1)\cdot(n+2) +$$
$$n(8-n)\cdot(n+1) +$$
$$\tfrac{1}{2}(8-n)(9-n)\cdot n =$$
$$= \tfrac{1}{2} n^3 + 1\tfrac{1}{2} n^2 + n - n^3 + 7n^2 +$$
$$8n + 36n + \tfrac{1}{2} n^3 - 8\tfrac{1}{2} n^2 = 45n.$$

Dus de som van de cijfers van de n-de kolom heeft de verrassende waarde $45n$.

DE SOM VAN ALLE 36 ZEVENCIJFERIGE OPLOPENDE GETALLEN

Voor de uiteindelijke uitkomst moeten we sommeren over alle posities, met telkens de bijbehorende macht van 10 als factor. Dus alle eenheden optellen, alle tientallen, alle honderdtallen, etcetera. Dit wordt:

$$\sum_{n=1}^{7} 45n\cdot 10^{7-n} =$$

$$45\cdot\sum_{n=1}^{7} n\cdot 10^{7-n} =$$

$$= 45\cdot(1\cdot 10^6 + 2\cdot 10^5 + \cdots + 7)$$
$$= 45\cdot 1234567 = 55555515$$

HET ALGEMENE GEVAL

Nu bevatten de oplopende getallen a cijfers, waarin a de waarden 1 tot en met 9 kan aannemen.

ENKELE RESULTATEN

Ik heb alle negen mogelijke optellingen berekend.

De uitkomst van het geval van zevencijferige getallen hebben we als speciaal geval gezien. Toen bleek ook, dat de som van de cijfers op de n-de positie steeds gelijk was aan $45n$. Iets dergelijks is steeds het geval: de som van de cijfers op de n-de positie is gelijk aan een veelvoud van n. Dat veelvoud noemen we in de onderstaande tabel de parameter van de optelling.

Direct valt de symmetrie in de parameters op ten opzichte van $a = 4$.

Whee Ky Ma

SOMMEN VAN OPLOPENDE GETALLEN

a = Aantal cijfers per getal	Parameter v/d optelling	Uitkomst
1	45	45
2	120	1 440
3	210	25 830
4	252	310 968
5	210	2 492 450
6	120	14 814 720
7	45	55 555 515
8	10	123 456 780
9	1	123 456 789

REDACTIONELE TOEVOEGING

Het oorspronkelijke werk van Whee Ky is veel uitgebreider.

Hij behandelt niet alleen het algemene geval voor a cijfers zeer uitgebreid. Hij kijkt ook naar andere talstelsels dan het tientallige. Het denkniveau is voorbij VWO. Daarom is zijn werk voor 'Pythagoras' sterk ingekort.

Wie zijn complete, onbewerkte artikel wil lezen, kan het schriftelijk bij Frank Roos bestellen.

(Graag voor ƒ 5,00 ongebruikte postzegels bijvoegen).

EEN WEL HEEL MOOI MAGISCH VIERKANT

12	13	1	8
6	3	15	10
7	2	14	11
9	16	4	5

De som van elke kolom, rij en diagonaal is 34. Zo'n eigenschap is normaal voor elk magisch vierkant.

12	13	1	8
6	3	15	10
7	2	14	11
9	16	4	5

NU DE EXTRA'S.

De som van de hoeken is ook 34.
De som in het middelste vierkant is 34.

12	13	1	8
6	3	15	10
7	2	14	11
9	16	4	5

De som van de getallen in elk van de aangegeven vierkanten is 34.

12	13	1	8
6	3	15	10
7	2	14	11
9	16	4	5

Let op de diagonalen:

$12^3 + 3^3 + 14^3 + 5^3 = (2 \cdot 34)^2$

$9^3 + 2^3 + 15^3 + 8^3 = (2 \cdot 34)^2$

Let op de eerste en laatste kolom:

$12^2 + 6^2 + 7^2 + 9^2 = 310 = 8^2 + 10^2 + 11^2 + 5^2$

Let op de eerste en laatste rij:

$12^2 + 13^2 + 1^2 + 8^2 = 378 = 9^2 + 16^2 + 4^2 + 5^2$

Let op de tweede en derde kolom:

$13^2 + 3^2 + 2^2 + 16^2 = 438 = 1^2 + 15^2 + 14^2 + 4^2$

Let op de tweede en derde rij:

$6^2 + 3^2 + 15^2 + 10^2 = 370 = 7^2 + 2^2 + 14^2 + 11^2$

Kent iemand de ontwerper van dit fraais?

Frank Roos

STAMBREUK

DEFINITIE

De teller van een stambreuk is één en de noemer is een positief geheel getal.
Als je twee stambreuken optelt, dan is de som in het algemeen geen stambreuk:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{n}{mn}+\frac{m}{mn}=\frac{m+n}{mn}$$

De m en n stellen positieve gehele getallen voor.

Bij voorbeeld: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

TRUC

Met de volgende truc krijg je het wel voor elkaar, dat de som van twee stambreuken weer een stambreuk oplevert:

$$\frac{1}{m(m+n)}+\frac{1}{n(m+n)}=$$

$$\frac{n}{mn(m+n)}+\frac{m}{mn(m+n)}=\frac{1}{mn}$$

dankzij de vereenvoudiging na het optellen.
Kies je bij voorbeeld $m=3$ en $n=4$, dan krijg je:

$$\frac{1}{21}+\frac{1}{28}=\frac{1}{12}$$

NATUURKUNDE

Stambreuken zijn heel goed bruikbaar bij de lenzenformule

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$

maar ook bij de substitutie-weerstand of vervangings-weerstand bij de parallel-schakeling.

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{R_v}$$

OMGEKEERD

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{21}+\frac{1}{28}$$

Hier zie je een stambreuk gesplitst in twee stambreuken.
Lukt dat met elke stambreuk?
Het antwoord is duidelijk: ja!
Kijk maar:

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$$

want

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{(n+1)}{n(n+1)}=\frac{1}{n}$$

Doe we dit voor $n = 24$, dan krijgen we:

$$\frac{1}{24}=\frac{1}{25}+\frac{1}{600}$$

Echter lukt ook:

$$\frac{1}{24}=\frac{1}{33}+\frac{1}{88}$$

Hoe kun je die vinden?

HOEVEEL MANIEREN?

Hoe weet je, of je alle denkbare mogelijkheden te pakken hebt?
We gaan voor dat doel te rade bij de vergelijking

$$\frac{1}{m(m+n)}+\frac{1}{n(m+n)}=\frac{1}{mn}$$

$24 = mn = 1 \times 24 =$
$2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6.$

Dit zijn alle denkbare ontbindingen van 24.
De resultaten van $3 \times 8 = 24$ hebben we al gebruikt.

Ook die van $1 \times 24 = 24$.
$24 = 2 \times 12$ geeft:

$$\frac{1}{24}=\frac{1}{2\times(2+12)}+\frac{1}{12\times(2+12)}=\frac{1}{28}+\frac{1}{168}$$

Je kunt nu zelf wel de laatste, niet genoemde combinatie vinden.
Zie eventueel bladzijde 43.

EN

Als je p op q manieren kunt ontbinden, dan kun je $1:p$ op q verschillende manieren als som schrijven van twee stambreuken. Probeer het eens zelf met $\frac{1}{16}$.

EEN ALTERNATIEF

Het kan nog anders.
Altijd lukt:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$$

Wellicht zijn er nog meer mogelijkheden, maar die ziet de schrijver niet.
Zie jij nog een mogelijkheid? Schrijf dat dan naar de redactie
(Klink 19, 9356 DG Tolbert).

DE PIRAMIDE-BOUWERS

De 'oude' Egyptenaren waren er erg bedreven in om willekeurige breuken te splitsen in verschillende stambreuken.

Zo is bijvoorbeeld

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

Je kunt voor jezelf proberen een lijst te maken van in stambreuken gesplitste breuken.
Een aantal onderdanen van de farao's deden dat ook. Bekend is de 'Papyrus Rhind'.
Het is onbekend waarom deze techniek werd gebruikt. Wel is bekend, dat de techniek niet eenduidig is; kijk maar:

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114} = \frac{1}{12} + \frac{1}{57} + \frac{1}{228}$$

Wie geeft een goede benadering van π als 3 + een aantal stambreuken?

VERMENIGVULDIGEN

Het vermenigvuldigen van stambreuken leidt altijd weer tot stambreuken.

Men drukt dat in wiskunde-jargon als volgt uit:
de vermenigvuldiging van stambreuken is gesloten in de verzameling stambreuken.

(De meest eenvoudige is natuurlijk $3 + \frac{1}{7}$).

Arnold de Greef

MAANTJES VA

DE I

Kies een cijfer, dat niet nul is. Vermenigvuldig het met 9. Tel de cijfers van het product op. Als de som 1 is, dan noteer je a. Is het antwoord 2, dan noteer je b. Enzovoort.
Ik weet nu welke letter je krijgt, namelijk i !
Zie voor uitleg bladzijde 43.

Arnold de Greef

BEETJE GESCHIEDENIS

Wiskundig is en blijft de cirkel een lastpost. In de Griekse oudheid probeerde men voor het eerst exact de omtrek en de oppervlakte van een cirkel te bepalen als de middellijn gegeven is. Dat lukte niet; men kon die omtrek alleen benaderen. Wilde men aangeven, dat men te doen had met de exacte cirkelomtrek, dan gebruikte men daarvoor de eerste letter van het griekse woord *perimeter*, wat omtrek betekent. Dat is dus π.

Een cirkel met middellijn 1 heeft dus exact de omtrek π. Daarmee was dus niets opgelost, want de moeilijkheid was nu opgeschoven naar het vinden van de exacte waarde van π, een probleem, dat de wiskundigen vele eeuwen heeft beziggehouden.
Nu weet men, dat π een getal is, dat niet te schrijven is als het quotiënt van twee gehele getallen. π is dus niet rationaal.

Wel kan men zoveel cijfers achter de komma berekenen als men wil, maar dan komen er oneindig veel cijfers zonder herhaling, die men stuk voor stuk moet berekenen.
Over gevonden waarden is in ons tijdschrift "Pythagoras" eerder melding gemaakt. De cirkel blijft met betrekking tot π een lastpost.

HIPPOCRATES

Al heel lang geleden heeft men geprobeerd om de oppervlakte en de omtrek te bepalen van figuren, die uit cirkelbogen waren opgebouwd en dat gaf meer succes.

Hippocrates van Chios, die rond het jaar 430 v. Chr. leefde, bestudeerde als eerste, voor zover bekend, een aantal van deze figuren.

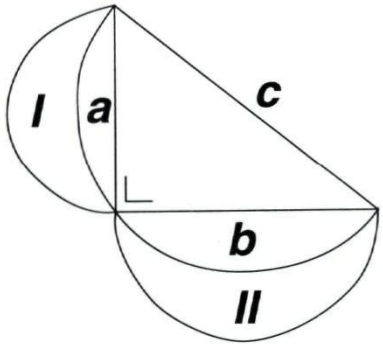
Hij is **niet** de van het eiland Cos afkomstige dokter met zijn beroemde eed.
Wel waren deze naamgenoten tijdgenoten.

N HIPPOCRATES

MAANTJES VAN HIPPOCRATES

Op de schuine zijde van een rechthoekige driehoek is een halve cirkel getekend en op de rechthoekszijden ook.

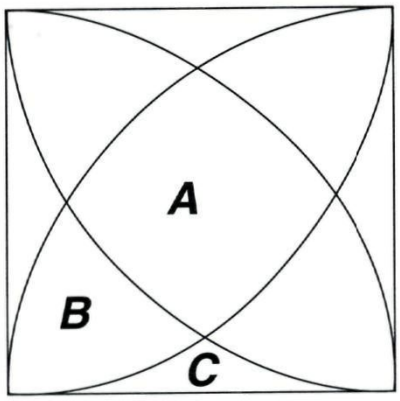
Het is geen toeval, dat de drie halve cirkels elkaar snijden in het hoekpunt van de rechte hoek.



De oppervlakte van de twee maantjes samen is juist gelijk aan de oppervlakte van de rechthoekige driehoek. Bewijs dat zelf. Zie zo nodig pagina 45.

NOG EEN VOORBEELD

Het berekenen van de oppervlakte van figuren, die begrensd zijn door cirkelbogen of door cirkelbogen en lijnstukken blijft interessant zoals in de volgende figuur.



Hier zijn binnen een vierkant met zijde I kwart cirkels getekend.
Er ontstaan drie soorten figuren: *A*, *B* en *C*.
Bereken de oppervlakten van *A*, *B* en *C*.
Zie zo nodig bladzijde 45.

Hans de Rijk

DE OPTELTRUC

```
  725
  413
  586
  211
  788
------ +
 2723
```

Bobbie zegt: "Aly, noem eens een getal van drie cijfers" en Aly zegt 725. "Schrijf het maar op en noem me een tweede getal van drie cijfers".
Aly kiest 413.
"Schrijf het er maar onder en daaronder 586.
Dat laatste doen we nog eens". Aly noemt 211 en Bobbie laat het haar opschrijven en hij vraagt haar daaronder 788 te zetten. Tenslotte laat Bobbie Aly de vijf getallen optellen. Voordat zij klaar is weet Bobbie het antwoord al uit zijn hoofd te noemen: 2723.
Hoe kon Bobbie dat zo snel weten?
Zie zo nodig bladzijde 45.

John Pattiwael

EEN HEUS COLLEGE VOOR

Het verschil tussen de manier waarop wiskundeonderwijs op het VWO en hoe het op de universiteiten gegeven wordt, is de laatste jaren groter geworden. Herhaaldelijk is gebleken, dat eerstejaars studenten wiskunde het moeilijk vinden de overstap te maken, omdat de eerstejaarsstof zo anders is dan ze verwachten. Anderen beginnen niet aan een studie wiskunde, omdat ze wiskunde op het VWO saai vinden of denken, dat alle problemen al opgelost zijn.

OPLOSSINGEN

Door middel van voorlichtingsdagen, open dagen en plaatselijke probleem-oplosgroepen proberen universitaire docenten de kloof met het VWO te overbruggen.

EEN NIEUWE OPLOSSING

Ik wil trachten scholieren op een directe wijze kennis te laten maken met het universitaire wiskundeonderwijs. In het najaar van 1995 wil ik in Leiden een college getaltheorie voor middelbare scholieren geven in de vorm, waarin het op universiteiten gebruikelijk is. Over de inhoud kun je iets lezen in het artikel na deze aankondiging.
Op vijf vrijdagmiddagen, **22 september, 13 oktober, 3 en 24 november en 15 december**, zal ik de stuk theorie over de gehele getallen behandelen en vraagstukken geven en toelichten. Elke keer is er een dictaat, dat kan worden verkregen of (elektronisch) kan worden toegezonden. Leraren kunnen dit ook aanvragen en de stof met geïnteresseerde leerlingen behandelen.

CERTIFICAAT

Elke genoemde vrijdagmiddag zullen er ook huiswerkopgaven zijn, die ik zal corrigeren. Wie vijf maal tijdig en met voldoende resultaten huiswerk heeft ingeleverd, krijgt een certificaat.

VERVOLG

Als blijkt, dat deze opzet in een behoefte voorziet, dan zullen later colleges over andere onderwerpen volgen.

GRATIS

Wie meer over deze gratis cursus wil weten of zich wil aanmelden voor deelname

GETALTHEORIE

Getaltheorie is in verband met bovenstaande aankondiging de theorie over de gehele getallen. Het be-kendste getaltheoretische probleem was de zogenaamde laatste stelling van Fermat uit 1638, die zegt, dat de som van twee n-de machten geen n-de macht kan zijn als n een natuurlijk getal is > 2. Pas in 1994 is dit eindelijk door Wiles en Taylor

EEN

Een regelmatige zeshoek bestaat uit 24 gelijkzijdige driehoeken. Als we de oppervlakte van één zo'n driehoekje 1 noemen, dan is de oppervlakte van de regelmatige zeshoek dus 24.

VWO'ERS

aan het college of voor toezending van dictaat, die kan mij als volgt bereiken:

prof. R. Tijdeman
Wiskunde RUL
postbus 9512
2300 RA LEIDEN

of e-mail via internet:
Tijdeman@wi.leidenuniv.nl

bewezen. Dit bewijs is veel te moeilijk voor het college, maar er zal wel aandacht worden geschonken aan die vergelijking met $n = 2$ en $n = 4$ alsmede aan de vergelijking $x^2 - 2y^2 = 1$. Verder zullen eigenschappen van priemgetallen en van Fibonaccigetallen behandeld worden.

prof. R. Tijdeman

EEN SOM VAN TWEE KWADRATEN

Als je een som van twee kwadraten door vier deelt, dan kan de rest nooit drie zijn. Kun je dat bewijzen voor je verder leest?

I. Als je een natuurlijk getal door 4 deelt, dan kan de rest slechts 0, 1, 2 of 3 zijn. Andere mogelijkheden zijn er niet.

II. Een willekeurig even getal is $2n$.
Zijn kwadraat is $4n^2$.
Als je dit deelt door 4, dan is de rest nul.
Een willekeurig oneven getal is $2n+1$.
Zijn kwadraat is $4n^2+4n+1$.
Als je dit deelt door 4, dan is de rest 1.

Uit het voorgaande volgt:
als je een willekeurig kwadraat deelt door 4, dan is de rest 0 of 1.
Wiskundig zegt men: een kwadraat is 0 of 1 modulo 4.

III. Als je de som van twee even kwadraten deelt door 4, dan is de rest 0.
Als je de som van twee oneven kwadraten deelt door 4, dan is de rest 2.
(Deel de som van $(2n+1)^2$ en $(2m+1)^2$ door 4 en zie!)

Als je de som van een even en een oneven kwadraat deelt door 4, dan is de rest 1.

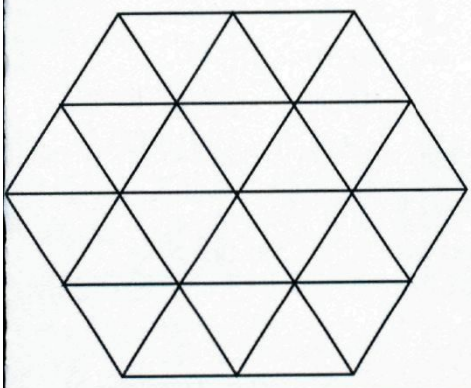
Dus als je de som van twee kwadraten deelt door 4, dan is de rest nooit 3.

Kun je nu zelf aantonen, dat de rest nooit 3, 6 of 7 kan zijn als je deelt door 8?

(Een tip: $8n+5$ geeft na deling door 8 rest 5).

Arnold de Greef

LEGPUZZEL



Lukt het je om de zeshoek in zes wezenlijk verschillend gevormde, samenhangende stukjes te verdelen, die (dus) elk oppervlakte = 4 hebben? Oplossing op bladzijde 46.

Leonardo

DE KWADRATUUR VAN EEN CIRKEL

Ten gevolge van het optreden van π is het uitgesloten om een vierkant te construeren, dat de zelfde oppervlakte heeft als een gegeven cirkel: de kwadratuur van een cirkel is onmogelijk.

Velen hebben geprobeerd het probleem uit te werken tot een bijna-goed oplossing. In 1934 bijvoorbeeld publiceerde de Oostenrijkse officier Quoika zo'n benaderingsmethode.
Geniet met ons mee.

DE CONSTRUCTIE

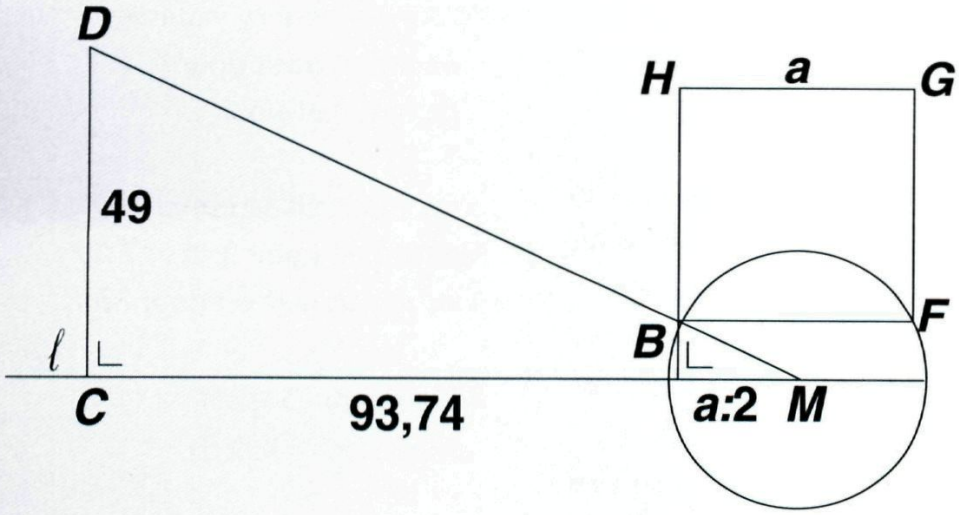
Op de lijn ℓ beschreef hij in M een cirkel met straal *r*. Op ℓ zette hij vanaf *M* 93,74 gelijke lijnstukken af.
In *C* richtte hij een loodlijn op met een lengte van 49 van die lijnstukken.
Dat is *CD*. De lijn *DM* snijdt de cirkel in *B*. Trek nu koorde *BF* evenwijdig aan ℓ.

Nu is volgens Quoika de koorde BF de zijde van het vierkant BFGH, dat de oppervlakte a^2 heeft, hetgeen gelijk moet zijn aan het oppervlak van de cirkel: πr^2.

$\tan\angle CMD = 49 : 93{,}74$

Omdat $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$

is $\cos\angle CMD =$ 0,886227208.
a is 2 x zo groot. Dan is $a^2 = 3{,}141594658 \cdot r^2$.
De oppervlakte van de cirkel is $3{,}141592653 \cdot r^2$.
Zoals je ziet:
een prachtige benadering.



Bob de Jongste

ZES PUNTEN IN EEN REGELMATIGE ZESHOEK

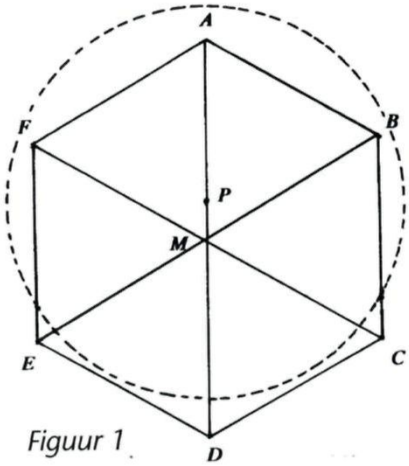
Naar aanleiding van een artikel in één van de vorige jaargangen over zeven punten in een regelmatige zeshoek komt hier een nieuwe bewering: Het is onmogelijk om zes punten in een regelmatige zeshoek met zijde a neer te zetten zó, dat de onderlinge afstand van elk tweetal punten groter is dan a.

HIER VOLGT HET BEWIJS

Noem het middelpunt van de regelmatige zeshoek M en de hoekpunten achtereenvolgens A, B, C, D, E en F.
Teken de lijnstukken AM, BM, CM, DM, EM en FM.

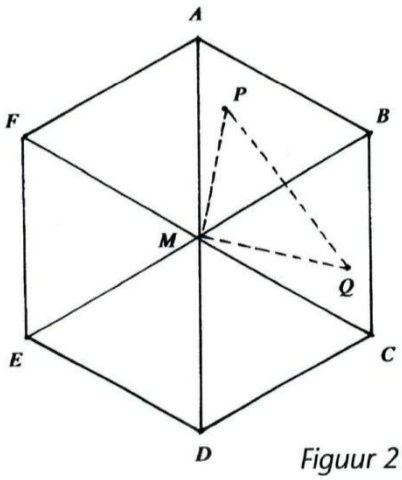
- Elk van de gelijkzijdige driehoeken die nu ontstaan zijn, moet één van de punten bevatten. Het is niet mogelijk om in één driehoek twee punten te plaatsen, omdat dan de afstand niet groter kan zijn dan a.
- Op de lijnstukken AD, BE en CF kan geen punt liggen.

Neem bijvoorbeeld een punt P op AM en teken de cirkel met P als middelpunt en straal a.
Zie figuur 1.



Figuur 1

De twee driehoeken AMB en AMF liggen nu geheel binnen deze cirkel, zodat voor de overige vijf punten slechts vier driehoeken overblijven.
Stel dat het inderdaad mogelijk is om de zes punten *binnen* de driehoeken te plaatsen.
Dit gaat leiden tot een tegenspraak, waarna we moeten vaststellen dat het dus niet mogelijk is. Een bewijs uit het ongerijmde.



Figuur 2

- Neem punt P binnen ΔABM en punt Q binnen ΔMBC. Neem $PQ > a$. $\angle PMQ$ is nu groter dan 60°. Zie figuur 2.

- Op deze manier doorgaand, volgt dat elk tweetal van de zes punten in twee buurdriehoeken met M een hoek vormt die groter is dan 360°. Dat leidt, rondgaand langs zes hoeken van meer dan 60°, tot een totaal van meer dan 360°. We stuiten dus op een tegenspraak.

De conclusie luidt dan ook dat geen zes punten binnen de zeshoek gekozen kunnen worden zó, dat ze twee aan twee meer dan a van elkaar af liggen.

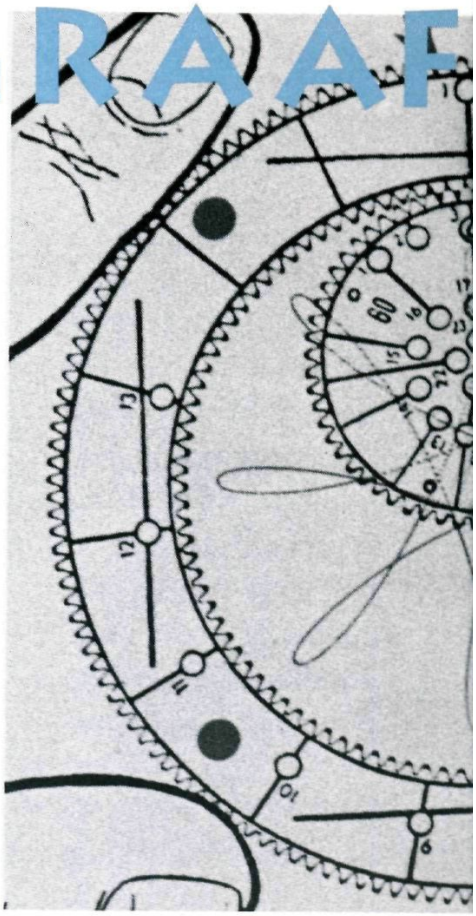
Jan Guichelaar

VIJF PUNTEN

Het is niet moeilijk om *vijf* punten binnen de regelmatige zeshoek te plaatsen die twee aan twee een onderlinge afstand hebben die groter is dan a.

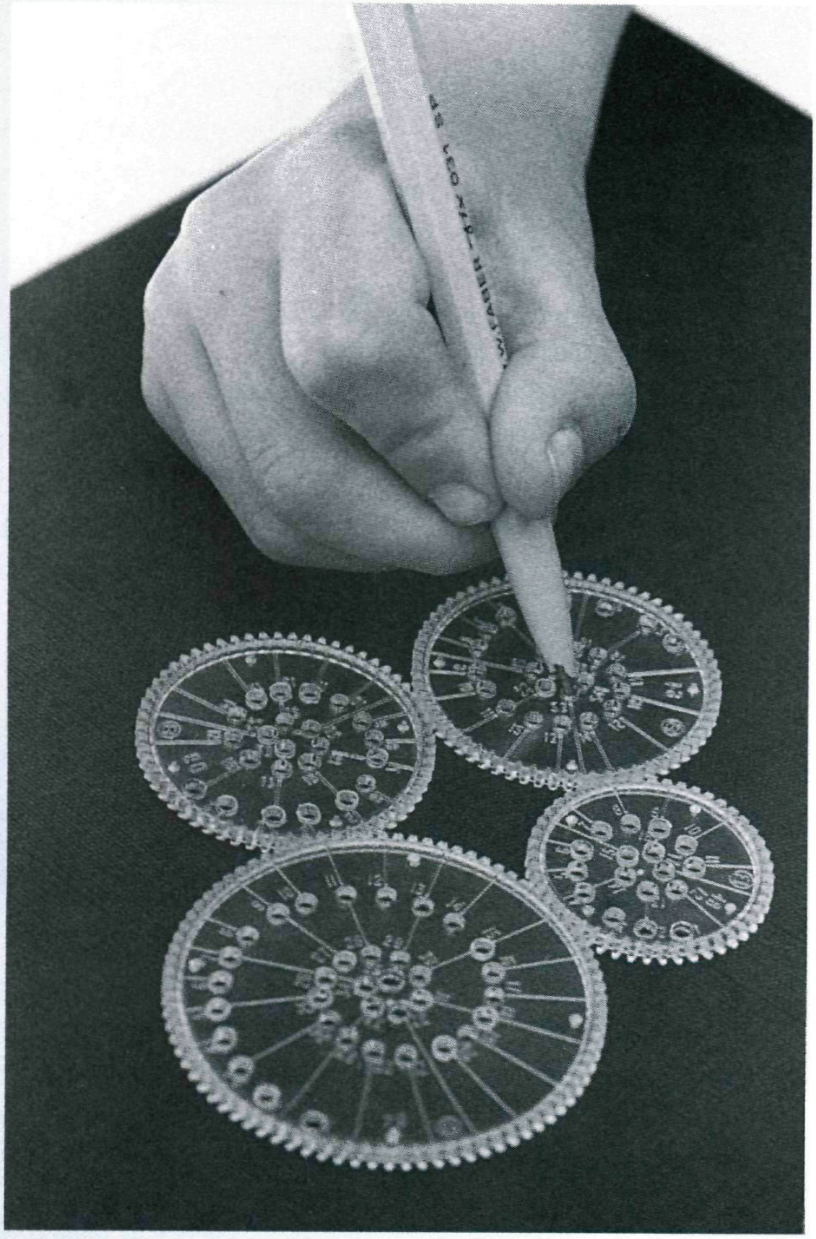
Probeer het maar.

DE SPIROGRAAF



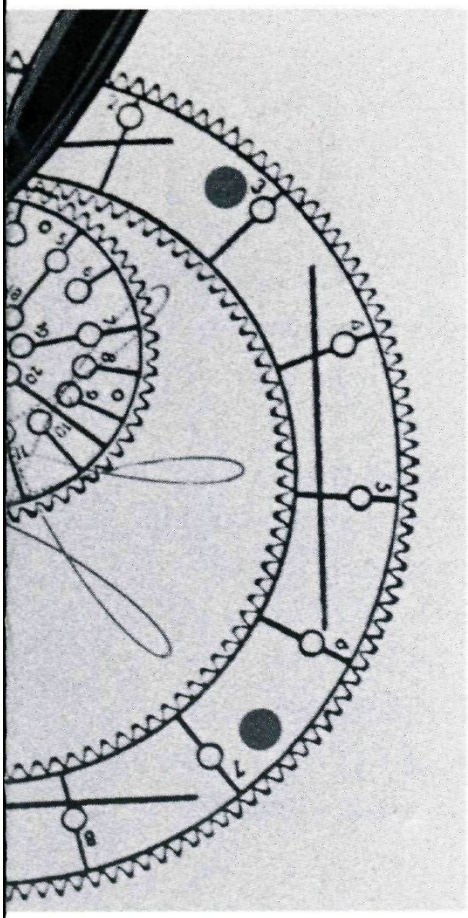
De spirograaf is een stukje speelgoed, dat al jaren oud is en dat vooral voor kinderen bedoeld is. De kans is redelijk groot, dat je dit spel kent.

De spirograaf bestaat uit een verzameling platte tandwieltjes van verschillende grootte. Alle tanden zijn echter wel even groot, zodat ze alle keurig in elkaar kunnen grijpen.



Sommige wielen zijn ringvormig. Ook aan de binnen-omtrek zijn dan tanden bevestigd.
Op elk wieltje zitten een aantal gaten, waardoor je een punt van een potlood moet steken. Eén van de wieltjes zet je vast met een punaise of zoiets.
Door nu het ene wiel om het vastgezette wiel te bewegen, ontstaat er op papier een één of andere kromme figuur.

Er zijn ook langwerpige onderdelen met rechte zijden (afgezien van de



tanden), maar die laten we buiten beschouwing.
Over de mogelijke verzameling figuren heb ik de volgende vragen:

1. Welke eigenschappen hebben alle figuren?

2a Welke eigenschappen hebben sommige figuren en

b onder welke voorwaarde(n) treden ze op?

Je vindt een voorzet op bladzijde 46, maar wellicht heeft de lezer(es) nog verdere ideeën. Die mag je naar de redactie toe sturen.

Frank Roos

DRIE OPEENVOLGENDE KWADRATEN

$6^2+7^2+8^2 = 147$.
Dit is geen kwadraat.
Met welk getal moet ik beginnen, opdat de som wel een kwadraat is?

DOEL

In dit artikel gaan we onderzoeken, onder welke voorwaarden een som van drie opeenvolgende kwadraten weer een kwadraat is.

BEREKENING VAN EEN SOM VAN DRIE OPEENVOLGENDE KWADRATEN

n is een natuurlijk getal groter dan 1. *som* = $(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=3n^2+2$
We noemen k een kwadraat, als $\sqrt{k}$ een natuurlijk getal is.
De vraag is nu voor welke n *som* ook een kwadraat is.
Stel, dat *som* kwadraat van p is, dan is $3n^2+2=p^2$.
Hier staat, dat p^2 een drievoud plus 2 is. We gaan inzien, dat dat onmogelijk is.

MODULO DRIE

De natuurlijke getallen kunnen in drie klassen verdeeld worden; ze kunnen één van de volgende gedaanten hebben: $3m$, $3m+1$ of $3m+2$.
Andere mogelijkheden zijn er niet. De kwadraten hiervan zijn $9m^2$, $9m^2+6m+1$ of $9m^2+12m+4$.
Als we deze vormen delen door 3, dan is de rest 0, 1 òf 1. De rest is dus nooit 2.

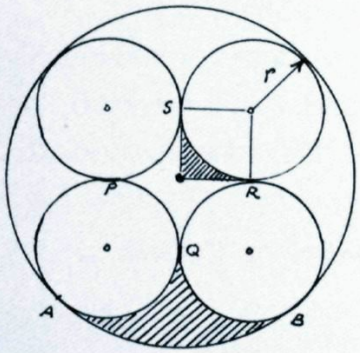
SAMENVATTING

Kun je nu zelf onderzoeken, of de som van vijf opeenvolgende kwadraten wel of niet een kwadraat is?
Zie zo nodig bladzijde 47.

Frank Roos

STER EN SPITSBOOG

In een cirkel zijn vier even grote cirkels getekend, die elkaar uitwendig raken. Ze raken de grote cirkel elk inwendig.



Daardoor ontstaat in het centrum een stervormig gedeelte *PQRS*, waarvan we een kwart gearceerd hebben. Aan de randen ontstaan vier congruente spitsboogvlakken.

Daarvan hebben we er één gearceerd. De straal van de kleine cirkel noemen we *r*.

Laat met een berekening zien, dat het oppervlak van drie 'sterren' iets meer is dan twee maal het oppervlak van zo'n spitsboogvlak.

De oplossing kun je vinden op pagina 47.

Kun je ook nagaan, hoe de vork in de steel zit, als er niet vier maar drie of zes kleine cirkels zijn?

Henk Mulder

DIS

Zoals je weet wordt een parabool meestal in de vorm $y = ax^2 + bx + c$ gegeven.
Als je wil weten, wanneer $y = 0$, dan kijk je eerst naar de waarde van de discriminant $D = b^2 - 4ac$.
Als D minstens nul is, dan zijn $x_1 = (-b - \sqrt{D})/2a$ en $x_2 = (-b + \sqrt{D})/2a$.

EEN ANDERE CRIMINANT

Stel je voor, dat je de traditie verandert en dat je als uitgangspunt de volgende vergelijking voor een parabool kiest: $y = p(x-q)^2+r$.

Dat is niet zo'n gek idee, want uit deze vergelijking zie je direct de positie van de top van de parabool, namelijk (q,r).
Ook zie je gemakkelijk in, dat de parabool de y-as snijdt bij $(0\ ,\ pq^2 + r)$.

Nu de vraag, waar de parabool de x-as snijdt.
Als $y = 0$, dus als $p(x-q)^2+r = 0$, dan is $(x-p)^2 = -\frac{r}{p}$.
Je kunt nu slechts links en rechts worteltrekken, als $\frac{r}{p} \leq 0$ is.

Bij deze traditie zou dan je een geheel andere discriminant vinden voor de vierkantsvergelijking $y = p(x-q)^2+r$ dan je gewend bent, namelijk $D = \frac{r}{p}$.

Als $D > 0$, dan heeft de vergelijking geen oplossing; als $D = 0$, dan heeft de vergelijking één oplossing; als $D < 0$, dan zijn er twee oplossingen.

Tenslotte vind je natuurlijk, als $D < 0$ is:
$y = 0$ als $x = p - \sqrt{(-\frac{r}{p})}$ en als $x = p + \sqrt{(-\frac{r}{p})}$.

Misschien zeg je wel: deze discriminant $-\frac{r}{p}$ is veel gemakkelijker te onthouden dan de discriminant $b^2 - 4ac$, maar vergeet niet, dat er wel eerst iets gebeuren moet om de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ om te zetten in de vorm $p(x-q)^2+r = 0$.

Herken je, dat dat kwadraatafsplitsen is ?!

Vraag: wat is de eenvoudigste vergelijking van de parabool, die gaat door $(d,0)$, $(e,0)$ en $(0,g)$?
Zie bladzijde 47.

Frank Roos

GROTE GE

Mijn zakrekenmachine kan maximaal acht cijfers tonen.
Als ik 34567 x 765432 wil berekenen, dan krijg ik 2,6458688 x 10^{10}.
Maar ik wil zo graag alle cijfers precies weten.
Kan dat met mijn rekenmachine? Ja!

HET DUIZENDTALLIGE TALSTELSEL

8765432 =
8 x 10^6 + 765 x 10^3 + 432
Je zou dit, iets afgekort kunnen schrijven als
8765432 = 8 EE 6+765 EE 3 + 432. Een computer geeft ook in de EE-notatie grote antwoorden.
Dit is het noteren van getallen in het duizendtallige talstelsel.
De duizend "cijfers" staan als gewone getallen in het tientallige talstelsel opgeschreven.
Als je geen macht groter dan 10^{18} nodig hebt, dan is het volgende handig.
Dat is geleend uit de fysica.

MACHTEN VAN DUIZEND

Een factor duizend kort ik af tot de k van kilo. Een factor miljoen is M van mega en G staat voor giga = miljard.
Zo kan ik 8765432 schrijven als 8M + 765k + 432
Deze symbolen, die in de fysica voorvoegsels zijn, staan ook in het binas-tabellenboekje, tabel 2

MACHTEN VAN DUIZEND

10^{03}	= k	= kilo	= duizend
10^{06}	= M	= mega	= miljoen
10^{09}	= G	= giga	= miljard
10^{12}	= T	= tera	= biljoen
10^{15}	= P	= peta	
10^{18}	= E	= exa	= triljoen

REKENREGELS

Fysici zijn redelijk aan deze machten van 1000 gewend.

TALLEN

Je kunt nagaan, dat de volgende regels gelden: $k^2 = M$ $M \cdot k = G$ $M^3 = E$.
Kun je er zelf ook nog een paar bedenken? Zie zo nodig bladzijde 47.
Een belangrijke rekenregel is ook:
$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

HET VOORBEELD UITGEWERKT

We gebruiken de notatie met k, M, G,• • •.
34567 x 765432 = (34k+567) x (765k+432)=
(34k x 765k) + (34k x 432) + (567x765k)+
(567kx 432) =

Nu gebruik ik mijn rekenmachine
26010M + 14688k + 433755k + 244944 =
26010M + 448443k + 244944 =
(26G + 10M) + (448M + 443k) +
(244k + 944) = 26G + 458M + 687k + 944 =
26.458.687.944

NOG GROTER

Deze methode werkt natuurlijk ook met veel grotere getallen.
Als bijvoorbeeld $p = a \cdot G + b \cdot M + c \cdot k + d$
en $q = e \cdot G + f \cdot M + g \cdot k + h$,
dan is
$pq = ae \cdot E + (af+be) \cdot P + (ag+bf+ce) \cdot T +$
$(ah+bg+cf+de) \cdot G +$
$+ (bh+cg+df) \cdot M + (ch+dg) \cdot k + dh.$
De variabelen a tot en met h stellen natuurlijke getallen < 1000 voor.
Als de vormen tussen haakjes > 999 worden, dan moet je delen door 1000. De rest "blijft staan" en het geheeltallige quotiënt wordt toegevoegd aan de coëfficiënt, die één term naar links staat.
Wat is de exacte waarde van 987654321^2?
Zie zo nodig bladzijde 47.

HOE SPREEK JE GROTE GETALLEN UIT?

Als je weet, dat
10^6 = miljoen, 10^{12} = biljoen, 10^{18} = triljoen,
10^{24} = kwadriljoen, 10^{30} = cinquiljoen,
10^{36} = sextiljoen, 10^{42} = septiljoen,
10^{48} = oktiljoen, 10^{54} = noniljoen,
10^{60} = deciljoen zijn, dan kun je elk getal met minder dan 66 cijfers uitspreken.
Dat lijkt zelfs voor Dagobert Duck en de astronomen toereikend. Hoe spreekt je
1.211.312.234.543.234.567.135.238.057.007.5
01.206.793.000.235.111.589.163.045.312 uit?
Om dat vlot te kunnen, voeg je enige getallen als volgt toe:
1.211.312.234.543.234.567.135.238.057.007.
10 9 8 7 6 5
4
501.206.793.000.235.111.589.163.045.312
4 3 2 1
Nu gaat het uitspreken vlot:

- één deciljoen
- tweehonderdelfduizend driehonderdtwaalf noniljoen
- tweehonderdvierendertigduizend vijfhonderddrieënveertig oktiljoen
- tweehonderdvierendertigduizend vijfhonderdzevenenzestig septiljoen
- honderdvijfendertigduizend tweehonderdachtendertig sextiljoen
- zevenenvijftigduizend en zeven cinkwiljoen
- vijhonderdééndUizend tweehonderdzes kwadriljoen
- zevenhonderddrieënnegentigduizend triljoen
- tweehonderdvijfendertigduizend honderdelf biljoen
- vijfhonderdnegenentachtigduizend honderddrieënzestig miljoen
- vijfenveertigduizend driehonderdtwaalf.

Oef.

PI IN DE BIJBEL

In de Bijbel wordt het getal pi op 3 gesteld. Hierover kan men lezen in I Koningen VII vers 23 en in 2 Kronieken IV vers 2.
"Voorts maakte hij de zee, van gietwerk, tien el van rand tot rand, geheel rond, vijf el hoog, terwijl een meetsnoer van 30 el haar rondom kon omspannen".... en dit betekent dat pi gelijk is aan 3.

Nu was er in die tijd omstreeks 150 jaar na Christus in Palestina een rabbijn genaamd Nehemiah.
Deze Nehemiah was de schrijver van een werk over wiskunde. Hij beschrijft onder meer de constructie en de afmetingen van het Tabernakel. Wat ons interesseert is zijn opvatting over het getal pi, speciaal in relatie tot het getal 3 in de Bijbel.
Rabbi Nehemiah zegt in zijn tekstboek: "Als je de omtrek wilt berekenen, vermenigvuldig dan de diameter van de cirkel met $3\frac{1}{7}$".

Dit is dus de Archimediaanse waarde van pi.
Maar Nehemiah was behalve wiskundige óók priester en hij kon derhalve niet om het Bijbelse getal 3 heen! Hoe loste hij dit op?
Wij moeten drie belangrijke gegevens in het oog houden:

1. Men mat 10 el **van** rand **tot** rand.
2. Een meetsnoer van 30 el kon haar **om**spannen.
3. Haar wanddikte was een handbreedte.

Nehemiah zegt: "Daar de mensen zeggen, dat de omtrek van een cirkel $3\frac{1}{7}$ maal de diameter bedraagt, trekken wij $\frac{1}{7}$ af voor de dikte van de wand.
Een slimme oplossing van onze rabbijn.

De mensen zeggen dat pi gelijk is aan $3\frac{1}{7}$ maar de Bijbel zegt dat pi gelijk is aan 3, dus meet hij de binnencirkel, terwijl de diameter gemeten wordt over de buitenzijde van de wand.
De vraag is nu of dit klopt.
Laten we eens kijken.

De diameter over de buitenkant is 10 el. Stellen wij de el op 68,8 cm, dan is de diameter dus 688 cm.
De wanddikte is een handbreedte. Een handbreedte is moeilijk te schatten, maar laten we deze op ongeveer 12 cm stellen, dan scheelt dat op de diameter 24 cm.
Nu moet de volgende vergelijking gelden;
$3 \times 688 = 3\frac{1}{7} \times 664$.

Als je dit narekent zul je zien, dat er een verschil is van 1% wat op zichzelf niet zo slecht is, vooral omdat wij de handbreedte niet precies kunnen aangeven.
Je ziet dat er ook hier een conflict is tussen wetenschap en religie.

In dit geval is dat op een simpele en vreedzame wijze opgelost.

Bob de Jongste

AARDIGHEDEN UIT DE GETALLENTHEORIE

MACHTREEKSEN

Een voorbeeld van een *machtreeks* is:

$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 =$

$1 + 3 + 9 + 27 = 40.$

Het is hier een som van opeenvolgende machten van hetzelfde grondtal, beginnend met de nulde macht.

HET BEREKENEN VAN MACHTREEKSEN

Er is een elegante methode om een machtreeks of een deel daarvan uit te rekenen.

Daartoe bekijken we eerst zo'n som, waarbij de exponent begint bij 0. We schrijven dan:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

Vermenigvuldigen we nu beide kanten met $(1 - x)$ en schrijven we het rechterlid uit, dan staat er:

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k =$$

$$(1-x)\,(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n) =$$

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n - (x+x^2+x^3+\cdots+x^{n+1}) = 1 - x^{n+1}$$

Alle termen, behalve de eerste en de laatste, vallen weg. Dit heet ook wel een telescoopsom: als je een uitschuifbare telescoop in elkaar schuift, blijft het eerste stuk aan de buitenkant en het laatste stuk aan de binnenkant over.

Delen we nu weer het eerste en het laatste deel van de gelijkheid door $(1 - x)$, dan krijgen we het gevraagde resultaat:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

We kunnen nu bijvoorbeeld uitrekenen:

$1+17+17^2+17^3+17^4+17^5 =$

$(17^6-1)/(17-1) = 1.508.598$

Maar ook een deelsom, zoals:

$2^{18} + 2^{19} + \cdots + 2^{32} =$

$(1+2+\cdots+2^{32}) - (1+2+\cdots+2^{17}) =$

$(2^{33}-1)/(2-1) - (2^{18}-1)/(2-1) =$

$2^{33} - 2^{18} = 8.589.672.447$

Dit is veel sneller dan term voor term optellen!

In het algemeen geldt voor zo'n deelsom:

$$\sum_{k=m}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{m-1} x^k =$$

$$\frac{x^{n+1}-1}{x-1} - \frac{x^m-1}{x-1} = \frac{x^{n+1}-x^m}{x-1}$$

Dit is een aspect van de theorie van de meetkundige rijen.

PROBLEEMSTELLING

We zoeken getallen, die op meerdere manieren als machtreeksen te schrijven zijn.

Ik heb maar twee getallen met een basic-programma gevonden: 31 en 8191. Beide oplossingen zijn op twee manieren als een machtreeks te schrijven.

Hier staan ze:

$31 = 1 + 5 + 5^2 =$

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$

en

$8191 = 1 + 90 + 90^2 =$

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{12}.$

In dat computerprogramma heb ik van de formules uit de vorige paragraaf gebruik gemaakt.

Ik ben er helaas nog niet in geslaagd een algemene oplossingsmethode te vinden.

Whee Ky Ma

REPETERNDE

Als je door 2 of 5 deelt, dan krijg je altijd een opgaande deling: met een eindig aantal stappen ben je klaar. ***Eigenlijk gaat de nul repeteren!***

PERIODE

Als je 1:7 berekent, dan gaan de cijfers na 6 stappen repeteren.
Als je 1:23 berekent, dan gaan de cijfers na 22 stappen repeteren. Als je 1:*n* berekent, dan gaan de cijfers na *n*-1 stappen repeteren. De periode is *n*-1.

KORTERE PERIODE

Bij sommige getallen *n* is de periode korter dan *n*-1. Zo verwacht je bij 1:13 een periode of herhaling na 12 stappen, maar het zijn er maar 6.

Welke getallen geven een kortere periode dan te verwachten is? Dat blijken de delers te zijn van getallen, die met alleen maar negens te schrijven zijn.
Zo is 13 is een deler van 999.999.

#9#

Met #9# bedoel ik een één of ander getal, dat uit alleen maar negens bestaat, dus 9, 99, 999, enz, maar niet 9^9 of zoiets.

Het aantal negens is willekeurig.

#12#9#

Met #12#9# bedoel ik 999.999.999.999, dus een getal van twaalf negens.

Natuurlijk kun je #9# altijd delen door 9, dan krijg je #1#, dus getallen met alleen maar enen.
Hier zie je er een stel.
#2#1# =
11(p) (p=priemgetal)
#3#1# =
111 = 3 x 37(p)

BREUK

#4#1# =
1111 = 11 x 101(p)
#5#1# =
11.111 = 41(p) x 271(p)
#6#1# =
111 x 1001 = 3 x 7 x 11 x 13 x 37#7#1# =
239(p) x 4649(p)
#8#1# =
1111 x 10001 = 11 x 73(p) x 137(p) x 101
#9#1# =
111 x 1001001
#11#1# =
21649(p) x 513.239(p)
#12#1# =
111.111 x 1.000.001

#13#1# =
4187(p) x 265.371.653(p)
#14#1# =
239(p) x 4649(p) x 10.000.001
enz.

Je kunt nu zelf gemakkelijk een onderzoek doen naar de periode van 1:*n*

1:271 = 0,0036900369• • •
Het vijf-cijferige getalpatroon 00369 is de verrassend korte periode.
Gebruikelijk is de notatie
1:271 = 0,$\dot{0}$3690$\dot{0}$
In Engelstalige landen is het gebruikelijk om het begin en het eind van de periode te markeren met een punt onder de twee cijfers, dus
$a = 0{,}\dot{0}3690\dot{0}$
Gegeven: $a = 0{,}\dot{1}7073\dot{3}$
Welke breuk $\frac{\text{teller}}{\text{noemer}} = a$?
Zie bladzijde 46.

Je kunt, als het je aantrekt, het volgende onderzoek doen.
1. Je berekent 1:*n* en je ziet, dat de periodes *n*-1 is.
Kun je dan met zekerheid zeggen, dat *n* geen deler van #9#?

2a. Kun je de volgende grilrij opstellen: de verzameling getallen, die geen deler zijn van #9#?

2b. Is het echt een grilrij, of bevat de rij een herkenbare regelmaat?

2c. Welke rij is 'dichter bevolkt': de delers van #9# of de niet delers van #9#?

WISKUNDE OF COMPUTER

Het zal duidelijk zijn, dat de computer altijd handig is om een aantal voorbeelden te zoeken.

Voorgestelde onderzoek 1 zul je nooit alleen met een computer de baas kunnen. Je zult echte wiskunde technieken moeten gebruiken.

Interessante vondsten kun je insturen ter publikatie. De redactie maakt, zoals gebruikelijk, een selectie.

Frank Roos

ALTIJD 6 ALS UIT

In Pythagoras van september 1992 stond "Altijd 6 als uitkomst". Daarin werd het volgende beschreven:
Kies een willekeurig geheel getal.
Vermenigvuldig het met 9 en trek er 3 van af.
Tel de cijfers op, net zo vaak tot er één cijfer overblijft.
Dat cijfer is altijd 6.

Interessant. Maar er stond geen verklaring bij. Die zal ik hier voor het algemene geval geven.

TOTALE SOM VAN EEN GETAL

x is een positief geheel getal.

SC(x) = de som van de cijfers van x.

TSC(x) = de *totale som* van de cijfers van x

= het cijfer dat ontstaat door, beginnend met x, net zolang de cijfers van de uitkomst op te tellen tot er 1 cijfer overblijft. TSC(x) = som van de cijfers van [som van de cijfers van {som van de cijfers van (• • •)}].

Bijv.: TSC (15894) = TSC (1+5+8+9+4) = TSC (27) = 2+7 = 9

DE REKENTRUC

die gegeven is in de inleiding kunnen we nu ook zo formuleren: TSC(getal x •9 - 3) = 6 voor elk geheel getal > 0.

NOTATIE

Met $\overline{cba}$ bedoelen we een getal, dat bestaat uit de cijfers c, b en a. Als we met een getal > 999 te maken hebben, dan noteren we $\overline{\bullet\bullet\bullet cba}$ en dat is $\bullet\bullet\bullet + 100c + 10b + a$.

REST BIJ DELEN DOOR 9

Gaan we nu $\overline{\bullet\bullet\bullet cba}$ delen door 9, dan krijgen we

$$\frac{\overline{\bullet\bullet\bullet cba}}{9} = \frac{\bullet\bullet\bullet + 100c + 10b + a}{9} = \frac{\bullet\bullet\bullet + 99c + c + 9b + b + a}{9} =$$

$$= \frac{\text{een 9-voud} + \bullet\bullet\bullet + c + b + a}{9} =$$

$$\text{een geheel getal} + \frac{\bullet\bullet\bullet + c + b + a}{9}$$

Als je $\overline{\bullet\bullet\bullet cba}$ deelt door 9, dan krijg je dezelfde rest als wanneer je de som van de cijfers deelt door 9.

KOMST

Volgens het voorgaande kunnen we dan ook zeggen:

$$\text{rest van } \frac{\overline{\cdots cba}}{9} = \text{rest van } \frac{\text{TSC}\{\overline{\cdots cba}\}}{9}$$

De resten kunnen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 of 8 zijn.

GEVOLG 1

Is die rest nul, dan volgt de volgende belangrijke eigenschap van gehele getallen:

een getal is deelbaar door 9 precies dan als de totale som van zijn cijfers 9 is

Voorbeeld:
TSC(3447) = 3+4+4+7 = 18 —> 1+8 = 9.
TSC(3447) = 9, dus 3447 is deelbaar door 9. Dat klopt, want 3447 : 9 = 383 rest 0.

GEVOLG 2

Als je 9 of een veelvoud van 9 optelt bij of aftrekt van een getal, verandert de TSC niet.
Voorbeeld: TSC(42) = 4+2 = 6
TSC(42 + 3x9) —> 69 —> 6+9 = 15 —> 1+5 = ook 6.

GEVOLG 3

r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 of 8
Als je bij een getal $\pm r$ optelt, dan verandert ook de totale som van de cijfers van dat getal met $\pm r$.

DE REKENTRUC WAS :

TSC (getal $x \cdot 9 - 3$) = 6 voor elk geheel getal > 0 en volgt onmiddellijk uit **gevolg 2** en uit **gevolg 3**.

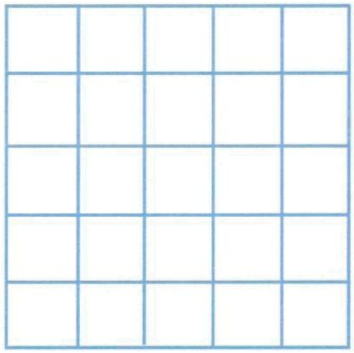
Hiermee is de werkzaamheid van het trucje niet alleen bewezen voor -3, maar kunnen we het eindeloos variëren. De opdracht had bijvoorbeeld ook kunnen luiden:
Vermenigvuldig met 9, tel er 50 bij op en bereken de TSC. Die is altijd 5.
Immers vermenigvuldigen met 9 geeft gegarandeerd TSC = 9;
50 = 5x9 + 5;
5x9 erbij verandert de TSC niet.
5 erbij verhoogt de TSC met 5.
9 + 5 = 14 —> 1 + 4 = 5.

ZELF PROBEREN

Nu kunnen we inzien, dat de truc bijvoorbeeld ook zo kan: neem een willekeurig positief geheel getal.
Vermenigvuldig met 18. Tel er 20 bij op.
Bereken de TSC.
Beredeneer nu, dat je geheid 2 krijgt.

Zie zo nodig bladzijde 46. *Whee Ky Ma*

DOORLOPER



Horizontaal:
1. veelvoud van 823
2. deler van 1 hor.; DCCC
3. driehoeksgetal; priem x 43
4. dozijn^2 + paar^2; deka
5. 3 • 19 • 953

Verticaal:
1. priem-palindroom; driehoeksgetal + 5
2. kwadraat; gros
3. palindroom, waarvan de som der cijfers 25 is.
4. CD; wortelgros
5. kwadraat + 1; deler van 1111.

Oplossing op bladzijde 45.

Arnold de Greef

ENIGE BIJZONDERE

Er zijn een aantal combinaties van gehele getallen die samen een rechthoekige driehoek vormen.

Zo zijn 3-4-5 en 5-12-13 bekende voorbeelden. De schuine zijde is 1 meer dan de lange rechthoekszijde. Als we proberen die rij voort te zetten, blijkt het nogal wat speurwerk te kosten om volgende te vinden. Dat zijn 7-24-25 en 9-40-41. Het lijkt allemaal nogal chaotisch.

FORMULE

Er is een formule die een oneindige serie van deze combinaties aflevert. Deze luidt:
$(2k+1)^2 + (2k^2+2k)^2 = (2k^2+2k+1)^2$.
Vul achtereenvolgens voor k in: $k = 1,2,3,4...$ en je ziet bovenstaande uitkomsten verschijnen. Bereken de volgende twee maar.

BEWIJS

Is de formule wel betrouwbaar voor hogere waarden van k? Als je de vergelijking uitwerkt, zul je zien dat het keurig klopt. Voor elke waarde van k klopt de stelling van Pythagoras.

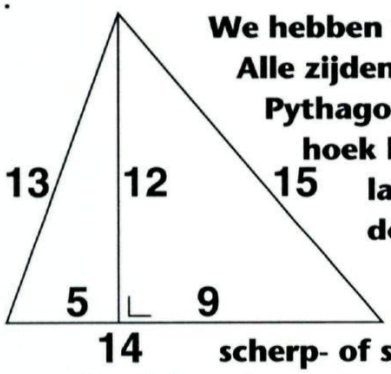
VEELVOUDEN

Overigens geeft de formule niet de uitkomsten voor alle mogelijke Pythagoras-driehoeken.
Enkel de primaire gevallen, niet de afgeleide.
Je kunt uit 3-4-5 nog oneindig veel gevallen afleiden door met een willekeurig getal te vermenigvuldigen. Naast 3-4-5 heb je ook 6-8-10 en ga zo maar door.

Die combinaties geeft de formule niet.

Henk Mulder

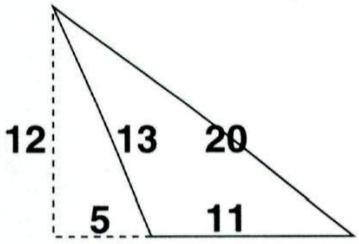
DRIEHOEKEN MET PYTHAGORAS



We hebben twee rechthoekige driehoeken. Alle zijden zijn gehele getallen. Dat zijn dus Pythagoreïsche driehoeken. De ene driehoek heeft een rechthoekzijde, die even lang is als een rechthoekszijde van de tweede driehoek. Met die zijden plakken we de twee driehoeken aan elkaar. Zo krijgen we een scherp- of stomphoekige driehoek, die zowel alle zijden als een hoogtelijn heeft met lengtes, die met een geheel getal te schrijven zijn.

EEN VOORBEELD

Hoe we zelf een plaatje als deze gaan maken, gaan we in dit artikel bekijken.



BEROEMD RECEPT

Voor de nieuwe lezers herhalen we, omdat we dat nodig hebben, hoe we een Pythagoras-driehoek (a,b,c) kunnen maken. Neem drie willekeurige, gehele getallen k, m en n, waarbij $0 < m < n$ en $k > 0$.

Dan is
$a^2 + b^2 = c^2$ als
$a = 2kmn$,
$b = k(n^2 - m^2)$ en
$c = k(m^2 + n^2)$

Willen we compleet zijn, dan moeten we elke gehele $k > 0$ toelaten. We kiezen echter in het vervolg steeds $k = 1$.

EÉN RECHTHOEKSZIJDE

Neem eens aan, dat we van een Pythagoreïsche driehoek één rechthoekszijde kennen. We vragen ons nu af, hoe we een bijpassende andere rechthoekszijde kunnen vinden.
Als we die hebben, dan is dankzij de stelling van Pythagoras de schuine zijde geen probleem meer.
We laten ons leiden door 'het recept'.

TWEE GEVALLEN

Nu kunnen zich twee gevallen voordoen: de gegeven rechthoekszijde is van het type $2mn$ of van het type n^2-m^2. De andere rechthoekszijde is dan juist van het andere type. Laten we aannemen, dat f de gegeven rechthoekszijde is.

ONEVEN f

Als f oneven is, dan kan f niet van het type $2mn$ zijn. Dus $f = n^2-m^2=(n+m)(n-m)$
Stel, dat we f kunnen ontbinden in p en q, dan is dus $f = pq$. Neem aan, dat $q > p$.

Vaak kan dat op meerdere manieren, bij voorbeeld $15 = 1 \times 15 = 3 \times 5$.
Overigens beschouwen we 3×5 als identiek met 5×3.
Alleen priemgetallen hebben een unieke ontbinding, bijvoorbeeld $13 = 1 \times 13$. In dat geval vind je maar één Pythagoreïsche driehoek.

Nu stellen we, lettende op het recept,
$p = n - m$ en
$q = n + m$.
Lossen we hieruit m en n op, dan vinden we:

$$m = \frac{q-p}{2} \text{ en } n = \frac{q+p}{2}$$

We accepteren alleen gehele oplossingen.

Nu kunnen we met 'het recept' a,b en c berekenen. Eén van de drie is natuurlijk f.

f IS EVEN.

Als f even is, maar geen viervoud groter dan 4, dan is f alleen maar te schrijven als $2mn$.
Als we f:2 gaan ontbinden, dan vinden we direct (verschillende mogelijkheden voor) m en n.

VIERVOUDEN

Als f een viervoud > 4 is, dan blijkt f zowel van het type $2mn$ als van het type n^2-m^2 te kunnen zijn.

PYTHAGORAS-DRIEHOEKEN

Dankzij het voorgaande zijn we nu in staat om alle Pythagoras-driehoeken bij een gegeven rechthoekszijde te vinden.

NIET-RECHTHOEKIGE DRIEHOEK

Dankzij het voorgaande kunnen we nu gemakkelijk twee rechthoekige driehoeken aan elkaar leggen

tot een niet-rechthoekige driehoek met gehele zijden. De gemeenschappelijke zijde wordt dan de hoogtelijn.

EEN UITGEWERKT VOORBEELD

Eén rechthoekszijde is 12.

Eerste mogelijkheid:

$12 = n^2 - m^2 = (n + m)(n - m)$

$12 = 1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$

Eerste geval:

$12 = 1 \times 12 = (n - m)(n + m)$

Dan is $n + m = 12$ en $n - m = 1$ of $m = 5\frac{1}{2}$ en $n = 6\frac{1}{2}$.

Deze oplossing voldoet niet.

Tweede geval:

$12 = 2 \times 6 = (n - m)(n + m)$

leidt op dezelfde manier tot $m = 2$ en $n = 4$.

De andere rechthoekszijde is dan $2mn = 16$. De schuine zijde is $m^2 + n^2 = 20$.

We heben nu driehoek (12, 16, 20).

Het derde geval geeft geen oplossing door het optreden van een $\frac{1}{2}$.

Tweede mogelijkheid:

$12 = 2mn$ of $mn = 6$

Eerste geval: $m = 1$ en $n = 6$ geeft als andere rechthoekszijde $n^2 - m^2 = 35$.

De schuine zijde is dan $n^2 + m^2 = 37$. We hebben nu driehoek (12, 35, 37).

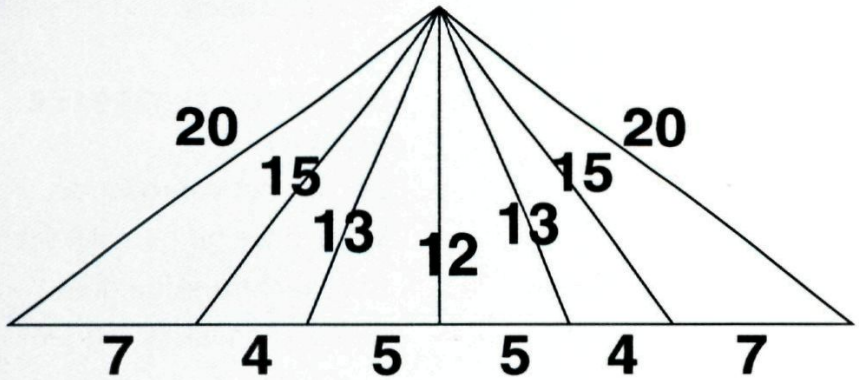
Tweede geval:

$m = 2$ en $n = 3$. Dat geeft driehoek (12, 5, 13)

De vondsten vind je in onderstaande tekening terug.

Naar een idee van *Hugo Schnack*

Om dit artikel te kunnen begrijpen is enige kennis van complexe getallen nodig. Zie eventueel het artikel "Getallen, getallen, getallen" in het oktober nummer van 1994.



LING VAN DE MOIVRE

Je rekenmachine kan e^z berekenen met

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

Dit is de *Taylor-reeks-ontwikkeling* van e^z.
Het interessante van deze formule is, dat die niet alleen goed is voor elke reële z, maar zelfs voor elke complexe z, waarbij $z = a + ib$ is.

Als je term voor term naar z gaat differentiëren, dan krijg je dezelfde functie weer terug. Ga dat zelf na.

Kies je $z = 1$, dan krijg je

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \approx 2{,}7182818.$$

De cijfers achter de komma repeteren niet.

Kies je $z = -1$, dan krijg je

$$\frac{1}{e} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots \approx 0{,}3678794$$

Kies je $z = i\varphi$, dan krijg je te maken met

$i^2 = -1$ $\quad i^3 = -i$ $\quad i^4 = 1$ $\quad i^5 = i$

$i^6 = -1$ $\quad i^7 = -i$ $\quad i^8 = 1$

$i^{4n+2} = -1$ $\quad i^{4n+3} = -i$ $\quad i^{4n} = 1$ $\quad i^{4n+1} = i.$

Hierin is n een natuurlijk getal.
φ moet worden uitgedrukt in radialen.
Dan wordt e^z

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \frac{(i\varphi)^6}{6!} + \frac{(i\varphi)^7}{7!} + \frac{(i\varphi)^8}{8!} + \cdots$$

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - \frac{(i\varphi)^7}{7!} + \frac{\varphi^8}{8!} + \cdots$$

$$e^{i\varphi} = \underbrace{\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} + \cdots\right)}_{\cos\varphi} + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} \cdots\right)$$

De reeksontwikkeling van $\cos\varphi$ is

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} + \cdots$$

sinφ

De reeksontwikkeling van $\sin\varphi$ is

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} \cdots$$

Als je $\sin\varphi$ term voor term differentiëert, krijg je dan de reeks van cosa?

STELLING VAN DE MOIVRE

Als we nu de Taylorreeksontwikkelingen van $e^{i\varphi}$, $\cos\varphi$ en $\sin\varphi$ met elkaar vergelijken, dan vinden we tenslotte

de stelling van De Moivre:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$$

Bijzonder geval

Als we $\varphi = \pi$ kiezen, dan vinden we een uiterst merkwaardig verband tussen de vier getallen e, i, π en -1:

$$e^{i\pi} = -1$$

Willeurig complex getal

$$a + ib = r \cdot \left(\frac{a}{r} + \frac{ib}{r}\right) \text{ met } r = \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

$$a + ib = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = r \cdot e^{i\varphi}$$

terwijl $\cos\varphi = a:r$ en $\sin\varphi = b:r$ en dus

$\tan\varphi = b:a$

Je kunt controleren, dat dankzij $r = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ voldaan is aan

$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1.$

Frank Roos

DES LEZERS PENNEV

OMTREK OPPERVLAKTE

In het januari-nummer van 1995 stond een raadsel over een rechthoekige driehoek waarvan de oppervlakte en de omtrek beide 30 waren. Ik vroeg me af, of er meer van zulke voorbeelden te vinden waren.

ALGEMEEN

De omtrek van een driehoek geeft men naar gewoonte aan met $2s$. Voor de rechthoekige driehoek (a,b,c) geldt dan

$2s = a + b + c$ **(1)**,

$a^2 + b^2 = c^2$ **(2)** en

de oppervlakte $p = \frac{1}{2}ab$ of $2ab = 4p$ **(3)**.

Uit **(2)** en **(3)** volgt, dat $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 4p$ **(4)**.

Uit **(1)** volgt: $(a + b)^2 = (2s - c)^2$ **(5)**.

Uit **(4)** en **(5)** volgt $(2s - c)^2 = c^2 + 4p$ of

$c = \dfrac{s^2 - p}{s}$. Met de eis $p = 2s$, de oppervlakte = de omtrek, vinden we dan: $c = s - 2$

SAMENGEVAT

We hebben nu het volgende vereenvoudigde stelsel:

$ab = 4s$ **(6)**

$a+b = 2s - c$ **(7)**

$c = s - 2$ **(8)**

Dat zijn drie vergelijkingen met vier onbekenden: als je meer onbekenden dan vergelijkingen hebt, dan zijn er oneindig veel oplossingen. Dat is hier ook zo.

OPLOSSEN

(8) in **(7)** geeft $a + b = s + 2$, dus $a = s + 2 - b$.

Dit in **(6)** geeft $(s + 2 - b)b = 4s$ of $b^2 - (s+2)b + 4s = 0$

De discriminant van deze kwadratische vergelijking in b is $(s+2)^2 - 16s = s^2 - 12s + 4$. Wil je, dat dit een zuiver kwadraat is, zeg t^2, dan moet $s^2 - 12s + 4 = t^2$ **(9)** zijn en dan is $b = (s+2\pm t):2$ **(10)**.

Uit **(9)** volgt $s^2-12s+4-t^2= 0$.

Lossen we hieruit s op dan vinden we eerst de discriminant

$144 - 4\cdot(4-t^2) = 4(t^2 + 32)$

en dan is $s = 6 \pm \sqrt{(t^2 + 32)}$

Nu willen we vervolgens dat t^2+32 een kwadraat is, zeg u^2.

Dat levert een extra vergelijking! Dan is $t^2+32 = u^2$ of $(u-t)(u+t) = 32$ en $s = 6 \pm u$

Stel $u-t = m$ en $u+t = n$.

Ofwel $t = \frac{1}{2}(n-m)$ en $u = \frac{1}{2}(n+m)$

Dan heb je de volgende mogelijkheden:

$32 = 1 \times 32 = 2 \times 16 = 4 \times 8$

n	m	t	u	$s=6+u$
32	1	$15\frac{1}{2}$	$16\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$
16	2	7	9	15
8	4	2	6	12

n	m	t	u	$s=6+u$
32	1	$15\frac{1}{2}$	$16\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$
16	2	7	9	15
8	4	2	6	12

n	m	t	u	$s=6-u$
32	1	$15\frac{1}{2}$	$16\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{2}$
16	2	7	9	-3
8	4	2	6	0

RUCHT

SAMENVATTING

De enige rechthoekige driehoeken, die we als oplossing hebben gevonden, zijn in de notatie (a, b, c):
$(4\frac{1}{2}, 20, 20\frac{1}{2})$,
oppervlak = omtrek = 45
(6, 8, 10),
oppervlak = omtrek = 24
5, 12, 13), die we al hebben gezien in het artikel van Marcel Snel; oppervlak = omtrek = 30. We hebben nu wel met zekerheid alle gevallen met gehele getallen gevonden, maar we hebben niet systematisch naar alle rationale gevallen gezocht!

J.O. Kranenborg

$b=(s+2+t):2$	$c=s-2$	$a=4s:b$
20	$20\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$
12	13	5
8	10	6

$b=(s+2-t):2$	$c=s-2$	$a=4s:b$
$4\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{2}$	20
5	13	12
12	10	$c<b$ voldoet niet

$b=(s+2\pm t):2$	$c=s-2$	$a=4s:b$
de omtrek moet > 0 zijn		
idem		
idem		

ITERATIEVE RIJEN

Een iteratieve rij is een rij getallen: elk getal, behalve de gegeven startwaarde(n), vind je met behulp van zijn voorganger(s).
In de voorbeelden is *n* steeds een natuurlijk getal groter dan 0.

Voorbeeld 1

De simpelste iteratieve rij is deze: $t_1 = 1$ en $t_{n+1} = 1 + t_n$.
Dat is de rij telgetallen.

Voorbeeld 2

$t_1 = a$ en $t_{n+1} = v + t_n$.
Dat is een rekenkundige rij. Elke term is v groter is dan zijn voorganger. Die v heet terecht het verschil.

Voorbeeld 3

$t_1 = a$ en $t_{n+1} = r \cdot t_n$.
Als $a = 1$ en $r = 2$ krijg je b.v.
1 2 4 8 16 32 64 • • •.
Dit is de meetkundige rij met reden $r = 2$.

Voorbeeld 4

Een aardige rij is deze:
$t_1 = a$, $t_2 = b$ en
$t_n = t_{n-1} - t_{n-2}$.
Deze keer is $n > 2$.

Ga maar na, dat je het volgende krijgt:
$a \quad b \quad b\text{-}a \quad -a \quad -b \quad a\text{-}b \quad a \quad b \quad \ldots$
De rij is cyclisch: na zes termen treedt herhaling op.

Voorbeeld 5

Even aardig is deze rij, die ook cyclisch is:
$t_1 = a$, $t_2 = b$ en $t_n = \frac{t_{n-1}}{t_{n-2}}$
waarbij a en b niet nul mogen zijn. Ook nu is $n > 2$.
Hoe lang is de periode?

Voorbeeld 6

$t_1 = a$, $t_2 = b$ en
$t_n = \sqrt{(t_{n-1} \cdot t_{n-2})}$.
Weer is $n > 2$.
De eerste termen zijn:
$a \quad b \quad (ab)^{\frac{1}{2}} \quad (ab^3)^{\frac{1}{4}}$
$(a^3b^5)^{\frac{1}{8}} \quad (a^5b^{11})^{\frac{1}{16}}$
Deze rij heeft een limiet. Dat wil hier zeggen, dat elke volgende term steeds dichter bij $(ab^2)^{\frac{1}{3}}$ komt te liggen!

Voorbeeld 7

$t_{n+1} = |t_n - \sqrt{|t_n|}|$
Wat je ook voor eerste term neemt (behalve nul), steeds kom je dichter bij $\frac{1}{4}$ terecht!

Kun je ook rijen bedenken met een interessant gedrag?

Frank Roos

PROBLEEM VAN BROCARD

Onder het kopje "Pret zonder wet" in nummer 5 van 1994 werden een paar eigenaardigheden gemeld:
$4! + 1 = 5^2$
$5! + 1 = 11^2$
$7! + 1 = 71^2$
Dit zijn voorbeelden van het probleem van Brocard :
wanneer is $n! + 1$ een kwadraat?

DE TOTALE SOM
- **De som van de cijfers van 3456 is 18.**
- **De som van de cijfers van 18 is 9.**
- **9 noemen we de totale som van de cijfers van 3456.**

De hierboven genoemde oplossingen zijn de enige bekende. We kunnen het probleem in zijn algemeenheid niet oplossen, maar er is wel iets over mogelijke oplossingen te zeggen.

ONEVEN

Elke faculteit > 1! is even. Dus alle faculteiten + 1 zijn oneven.
Dan zijn de kwadraten van het rechterlid ook oneven. Dus, als de wortel geheeltallig is, is die wortel ook oneven.
$n = 2$ is geen oplossing van $n!+1 = k^2$.
Alle faculteiten > 2! zijn deelbaar door 3.
Dit betekent, dat de **totale som** van $n!$ deelbaar is door 3, dus gelijk aan 3, 6 of 9.
Van het kwadraat moet dus de totale som van de cijfers gelijk zijn aan 4, 7 of 1.
Die som kan natuurlijk niet 0 zijn.

SYSTEMATISCH ZOEKEN

Overigens is het handiger om de faculteiten langs te gaan, omdat die veel sneller oplopen.

Alleen $4! + 1 = 5^2$, $5! + 1 = 11^2$ en $7! + 1 = 71^2$ bestaan als oplossing voor het probleem van Brocard als $n < 10$.
Door proberen zijn 8! en 9! afgekeurd als oplossing.

Verder kun je zeggen over oplossingen voor $n > 9$, dat zij deelbaar zijn door 2, 5 en 10, en dus door 100, en dus op 00 eindigen.
Het kwadraat moet dus op 01 eindigen. Dit kan alleen voor grondtallen die eindigen op 01, 51, 49 of 99.
De keuze van de kwadraten is daarmee al aardig beperkt.
Omdat getallen n met $10 \leq n \leq 15$ ook niet voldoen (nagerekend), geldt zelfs dat $n!$ deelbaar is door $2*4*5*10*15 = 6000$, dus dat het kwadraat eindigt op 001, dus dat k, het grondtal van het kwadraat, eindigt op 001, 501, 251, 751, 249, 749, 499 of 999.

Bovendien is $n!$ deelbaar door 9, dus de totale som van de cijfers van het kwadraat moet 1 zijn.

Etcetera. Maar een algemene oplossing? Wie zal het zeggen?

Whee Ky Ma

RIJTJE

Stel het zijn de getallen x, $x+1$ en $x+2$.
Dan is $(x+1)^2 = x(x+2) + 1$

Dat is waar voor elke x, dus elk opeenvolgend drietal is goed.

BASIC VOOR LIMIET

Het volgende BASIC-programma is een mogelijke oplossing.

```
10 defint k
20 input"Factor";f
30 input"Beginteller";t
40 input"Beginnoemer";n
50 for k=1 to 19
60 print t/n,
70 nn=t:t=f*t+n:n=nn
80 next k
```

NOG EEN EIGENSCHAP

Als je de gelijke hoeken in een Pythagorasvierhoek met de diagonalen opzoekt, dan kun je daarna het volgende zien: de overstaande hoeken zijn samen 180°.

Dat heeft als gevolg, dat de Pythagorasvierhoek een omgeschreven cirkel heeft.
De vierhoek heet dan een koordenvierhoek.

STAMBREUKEN

24 = 4 x 6 en 4 + 6 = 10

$$\frac{1}{24} = \frac{1}{4x10} + \frac{1}{6x10}$$

DE I

De som van de cijfers is steeds 9.
De negende letter is *i*.
Ik maak misbruik van het feit, dat de meeste mensen niet uit het hoofd weten, dat *i* de negende letter van het alfabet is.

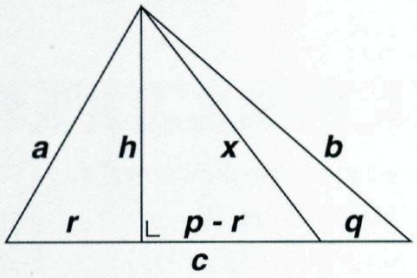
BEWIJS: STELLING VAN STEWART

We zagen de volgende vergelijkingen:

$h^2 + r^2 = b^2$ ..... **(1)**

$h^2 + (p - r)^2 = x^2$ ..... **(2)**

$h^2 + (c - r)^2 = a^2$ ..... **(3)**



De oplossing van dit stelsel kan als volgt verlopen:

(3) - (1) geeft $c^2 - 2cr = a^2 - b^2$

of

$$r = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \text{ ..... } \textbf{(7)}$$

Dit geeft in **(1)**:

$$h^2 + \{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\}^2 = b^2$$

$$h^2 = b^2 - \{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\}^2 \text{ ... } \textbf{(8)}$$

(7) en **(8)** in **(2)** geeft

$$b^2 - (\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c})^2 +$$

$$(p - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c})^2 = x^2$$

Vermenigvuldig links en rechts met $4c^2$, dan:

$4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2 + \{2cp - (b^2+c^2-a^2)\}^2 = 4c^2x^2$

Dus: $4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2 +$

$+ \{4c^2p^2 - 4cp(b^2+c^2-a^2) + (b^2+c^2-a^2)^2\} = 4c^2x^2$

$4b^2c^2 + \{4c^2p^2 - 4cp(b^2+c^2-a^2)\} = 4c^2x^2$

$b^2c + cp^2 - p(b^2+c^2-a^2) = cx^2$

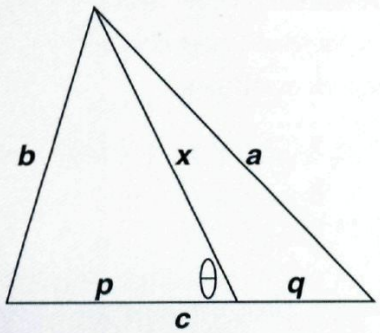
$cx^2 = pa^2 + (c-p)b^2 - cp(c-p)$

$cx^2 = pa^2 + qb^2 - pqc.$

De rest moge duidelijk zijn.

Kun je deze formule ook afleiden met de cosinusregel? Dat gaat veel sneller! Zie zonodig hieronder.

STEWART MET DE COSINUSREGEL



$b^2 = p^2 + x^2 - 2px \bullet \cos\theta$

$qb^2 = p^2q + qx^2 - 2pqx \bullet \cos\theta$ ...**(9)**

$a^2 = q^2 + x^2 - 2qx \bullet \cos(\pi-\theta)$

$pa^2 = pq^2 + px^2 + 2pqx \bullet \cos\theta$...**(10)**

(9) + **(10)** geeft:

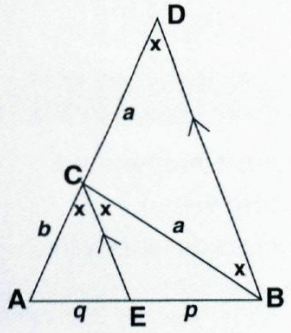
$qb^2 + pa^2 = pq(p+q) + x^2(p+q)$

Bedenk, dat $p+q=c$.

$qb^2 + pa^2 = pq \bullet c + x^2 \bullet c$

$$x = \sqrt{\frac{pa^2 + qb^2 - pqc}{c}}$$

EIGENSCHAP VAN DE DEELLIJN



CE is de deellijn van $\angle ACB$.

BD is evenwijdig aan EC getekend.

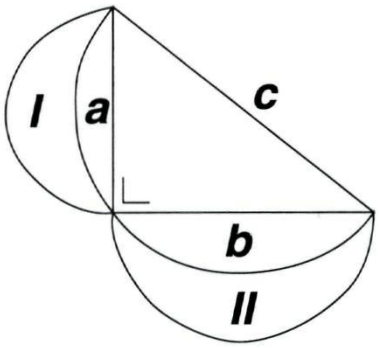
Daardoor zijn

$\angle ACE = \angle D$ en $\angle BCE = \angle CBD$

Dus is ΔBCD gelijkbenig en is $DC = BC = a$.

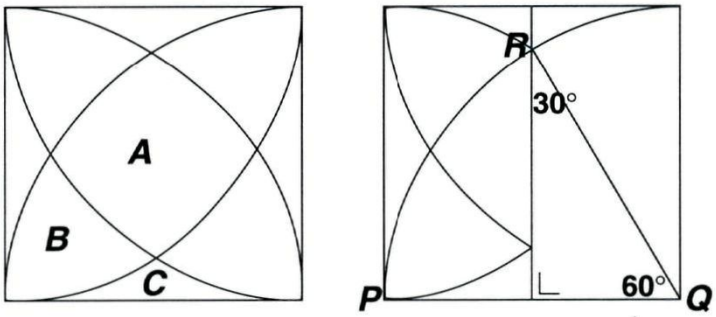
Vanwege de evenwijdigheid is $AC : CD = AE : EB$ of $b : a = q : p$ of $a : b = p : q$

HIPPOCRATES



Opp. I + opp.II =
opp. ene halve cirkel +
opp. tweede halve cirkel +
opp. driehoek -
opp. grote halve cirkel =
$\pi(\frac{1}{2}a)^2+\pi(\frac{1}{2}b)^2+\frac{1}{2}ab-\pi(\frac{1}{2}c)^2 =$
$(\pi:4)(a^2+b^2-c^2)+\frac{1}{2}ab = 0+\frac{1}{2}ab$
Dus Opp. I + opp.II = $\frac{1}{2}ab$.

3 OPPERVLAKTEN



De rechter figuur is een hulpfiguur.
Driehoek *PQR* is gelijkzijdig, dus er zijn hoeken van 60° en 30°.
Bereken eerst $\frac{1}{2}C$, dan *B* en tenslotte *A*.

$$A = 1 + \frac{1}{3}\pi - \sqrt{3}$$

$$B = \frac{1}{12}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1$$

$$C = 1 - \frac{1}{6}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3}$$

DE OPTELTRUC

413 + 586 = 999
211 + 788 = ook 999
Deze vier getallen zijn samen 2000 - 2.
Bobbie zet een 2 voor het eerste getal (+ 2000) en trekt van het laatse cijfer 2 af.

Met deze kennis kun je varianten bedenken, bijvoorbeeld met vier cijfers per getal of drie paren getallen van drie cijfers, waarbij je 3 x 999 = 3000 - 3 gebruikt.

DOORLOPER

Bij 1 en 3 vert: een palidroom blijft gelijk, als je de volgorde van de cijfers omkeert.
Bij 2 hor. en 4 vert.:
Romeins: C=100 en D=500.

1	2	3	4	5
1	5	8	0	0
2	1	3	0	1
1	4	8	1	0
5	4	3	2	1

DE REKENTRUC

Vermenigvuldig met 18 = 2x9 geeft een 9-voud.
Daarvan is de TSC = 9
20 = 2x9 + 2.
2x9 erbij optellen laat de TSC ongemoeid.
2 bij het gekozen getal opgeteld verhoogt de 9 tot 11 en TSC(11) = 1+1 = 2.
Dit resultaat is onafhankelijk van het gekozen getal.

DE LEGPUZZEL

De puzzel is niet op te lossen, want er zijn maar drie verschillende vormen met oppervlakte = 4 mogelijk: een parallellogram, een "visgraat" en een gelijkzijdige driehoek.
Op hoeveel wezenlijk verschillende manieren kun je met deze stukjes (die in veelvoud aanwezig zijn) een regelmatige zeshoek met oppervlakte = 24 leggen?

DE REPETERENDE BREUK

$a = 0,\cancel{1}7073\cancel{3}=$
$0,17037317073170703\bullet\bullet\bullet=$
$17073 \times 0,000010000100001\bullet\bullet\bullet=$
$17073 \times (10^{-5} + 10^{-10} + 10^{-15} + \bullet\bullet\bullet)$.
Deze som is een oneindig voortlopende meetkundige rij.
Als $-1 < r < 1$ en $r + r^2 + r^3 + \bullet\bullet\bullet$ oneindig veel termen bevat, dan is de som r:(1-r).
Dus $10^{-5} + 10^{-10} + 10^{-15} + \bullet\bullet\bullet = 10^{-5}:(1-10^{-5})$.
Vermenigvuldig je deeltal en deler met 105, dan krijg je 1:99.999.

Dan is a = 17073:#5#9#= 7:41. Voilà.
Samengevat: 0,17073 = 7:41.

DE SPIROGRAAF

1. Alle figuren zijn krom.[1]
Geen der figuren heeft een buigpunt.
Alle figuren hebben een uitwendige raakcirkel.

[1] *In enkele zeldzame gevallen is een deel van de tekening recht. Probeer maar eens 90 en 45 tanden, waarbij het kleine wiel binnen de grote draait.*

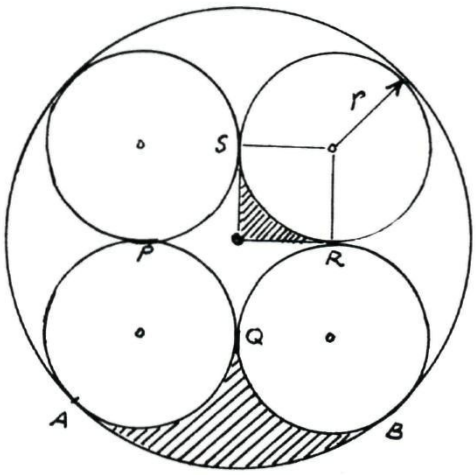
2. Sommige figuren snijden zichzelf: sommige heel vaak, sommige soms en sommige nooit.
Sommige figuren hebben een inwendige raakcirkel.
3. Neem aan, dat het aantal tanden van het ene wieltje $k \bullet a$ is en van het andere wiel $k \bullet b$.
Hierin is k het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van de aantallen tandwielen.
Als het ene wiel b maal rond is gegaan, dan is het andere wiel a maal rond gegaan.
De getekende figuur is dan gesloten.
Zou er een verband zijn tussen k, a en b en het aantal snijpunten?

SOM VAN VIJF KWADRATEN

$n \in N$, $p \in N$ en $n>2$.
$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2$
$= 5n^2+10 = 5(n^2+2) = p^2 =$ 5-voud.
n^2+2 moet dan ook een 5-voud zijn.
Een 5-voud eindigt op 0 of 5.
n^2 eindigt altijd op 0, 1, 4, 5, 6 of 9.
n^2+2 eindigt dan nooit op een 0 of 5.
n^2+2 kan geen 5-voud zijn. Conclusie:
vijf opeenvolgende kwadraten leveren nooit als som een kwadraat.

STER EN SPITSBOOG

De oppervlakte van de ster is:
$(2r)^2 - \pi r^2 = (4-\pi)r^2 = 0{,}8584... \times r^2$.
Oppervlak van de spitsboog is:
$\frac{1}{4}$(opp. cirkel - 4 x opp. cirkeltje - opp. ster) =
$\frac{1}{4}(\pi(1+\sqrt{2})^2 r^2 - 4\pi r^2 - (4-\pi)r^2) =$
$\frac{1}{4} r^2((3+2\sqrt{2})\pi - 4\pi - 4 + \pi) =$
$\frac{1}{4} r^2(2\pi\sqrt{2} - 4) \approx$
$1{,}221... \times r^2$.



Oppervlak van 3 sterren $\approx 2{,}575... \times r^2$.
Oppervlak van 2 spitsboogvlakken $\approx 2{,}442... \times r^2$.
Het verschil is ongeveer 5%.
De oppervlakken verhouden zich **bij benadering** volgens onderstaande verhoudingstabel:

ster	spitsboog	cirkeltje	cirkel
1	1,422	3,659	21,33
---	2	5	---
---	---	1	6

Merk op, dat de ster dezelfde omtrek heeft als de kleine cirkel.
De oppervlakte van de kleine cirkel is echter ruim 3,6 maal zo groot.

REKENREGELS

Mogelijk zijn bijvoorbeeld:
$k^2 = M$ en omgekeerd $\sqrt{M} = k$
$k \bullet M = M \bullet k = k^3 = G$
$M^2 = k^4 = G \bullet k = k \bullet G = T$
enzovoort.

ANDERE DISCRIMINANT

$$y = \frac{g}{d \bullet e}(x - d)(x - e)$$

987654321^2

$987654321^2 = (987M + 654k + 321)^2 =$
$(987M)^2 + (2 \times 987M \times 654k)$
$+ (2 \times 987M \times 321) + (654k)^2$
$+ (2 \times 654k \times 321) + 321^2 =$
$(974E + 169T) + (1E + 290T + 996G)$
$+ (633G + 654M) + (427G + 716M)$
$+ (419M + 868k) + (103k + 41) =$
$975E + 459T + 2056G + 1789M + 971k + 41$

Boven de 999, dan "opschuiven", want cijfers kunnen in het duizendtallige talstelsel niet groter dan 999 zijn.

$975E + 461T + 57G + 789M + 971k + 41 =$
$987654321^2 = 975.461.057.789.971.041$

Verantwoording illustraties:

Cartoons: Pieter Hoogenbirk
Foto omslag: Johan van Gurp
Foto pagina 24: Johan van Gurp

Abonnementen:

Nederlandse en Belgische abonnees:
aanmelden telefonisch 070 - 314 35 00,
of schriftelijk, NIAM b.v.
Antwoordnummer 97007,
2509 VH Den Haag.

Tarieven:

Jaarabonnement Pythagoras *f* 35,–
Jaarabonnement inclusief Archimedes *f* 65,–
Jaarabonnement België *f* 45,–/of BF 800,–
Jaarabonnement België
inclusief Archimedes *f* 75,–/of BF 1450,–
Jaarabonnement Buitenland *f* 50,–
Losse nummers *f* 7,50/of BF 140,–

Betaling:

Wacht met betalen tot u de acceptgiro-kaart krijgt toegestuurd.
Bij tussentijdse abonnering ontvangt u alle nummers van de lopende jaargang.
Abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk bij de uitgever is opgezegd.

Uitgever:

NIAM b.v.,
Neuhuyskade 94,
2596 XM Den Haag.
Tel.: 070 - 314 35 00
Fax: 070 - 314 35 88
Giro 33.84.52.