PYTHAGORAS

WISKUNDE TIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN
35E JAARGANG NOVEMBER 1995 NUMMER 1

INHOUD

UITGAVE:
Pythagoras is een uitgave van NIAM b.v. en verschijnt zesmaal per jaar. Een jaargang loopt van september tot en met augustus.

REDACTIE:
Jan Mahieu
Frank Roos

EINDREDACTIE:
Henk Huijsmans

NIEUWE ARTIKELEN:
Molenstraat 31,
4841 CA Prinsenbeek

CORRESPONDENTIE-ADRES:
Reacties, oplossingen enz.
Frank Roos,
Klink 19
9356 DG Tolkert

MEDEWERKERS:
Bob de Jongste,
Hans de Rijk,
Paul van de Veen,
Thijs Notenboom.

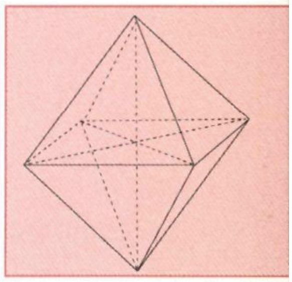
VAN DE REDACTIE

Dit is het eerste nummer van de vijfendertigste jaargang van Pythagoras. Ook in deze jaargang zullen weer allerlei wiskundige onderwerpen aan bod komen.

Ook u als abonnee kunt meewerken aan het tijdschrift.

Stuur uw ideeën, wensen, artikeltjes, suggesties, aardigheidjes enzovoort naar het redactiesecretariaat.

WAT KUN JE VINDEN IN NUMMER 1

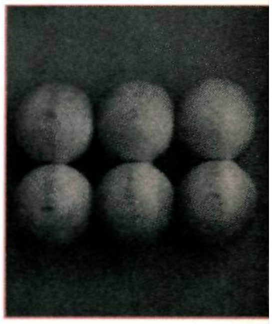


Op pagina 4 en 5 vind je oplossingen van opgave 3 en 4 van de Pythagoras Olympiade naast enkele nieuwe opgaven.

Een schaakbord heeft 64 vakjes. Hoe kun je een weg tekenen die alle vakjes in één keer passeert? Lees verder op pagina 6.

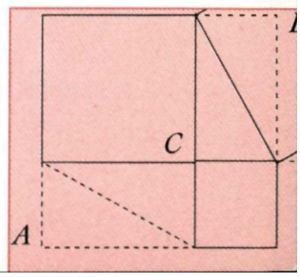
Wat het spel 'Icosian game' inhoudt kun je lezen op pagina 8.

Een verslag van het tweede wiskundekamp tref je aan op pagina 16.



Over rekenkundige rijen tref je twee artikelen aan. Het artikel op pagina 14 kun je lezen als inleiding op het artikel over slierten op pagina 20.

Verder in dit nummer allerlei grote en kleine artikelen, kleine en grote probleempjes en diverse opdrachten. Wij hopen dat iedereen weer aan zijn trekken komt.



Veel lees- en puzzelplezier.
Henk Huijsmans

PYTHAGORAS

Weer een paar nieuwe opgaven.

Stuur je oplossing naar :
Pythagoras Olympiade
TUE Faculteit Wiskunde en Informatica
Hg 9. 84
Postbus 513
5600 MB Eindhoven

Vermeld bij je oplossing je naam, adres, school en klas. Stuur bij je antwoorden altijd een verklaring. Je kan insturen tot 1 maand na het verschijnen van deze Pythagoras.

Veel succes.

Wim Oudshoorn en Sander van Rijnswou

OPLOSSINGEN

3. Als je vier willekeurige gehele getallen opschrijft, dan zitten er altijd twee tussen waarvan het verschil deelbaar is door drie. Kan je dat bewijzen ?

OPLOSSING 3:

We hebben een correcte oplossing gekregen van Florian Allaart, Marieke Quant, Gerben de Klerk en Murat Duran. Onderstaande oplossing is van Robert van Utteren.
We kunnen de gehele getallen verdelen in drie verzamelingen namelijk:
$\{\ldots, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$, $\{\ldots, -4, -1, 2, 5, \ldots\}$ en $\{\ldots, -5, -2, 1, 4, \ldots\}$.
Elk geheel getal komt in precies één zo'n verzameling voor.
Het verschil van twee getallen die in dezelfde verzameling zitten is deelbaar door drie. Van vier gehele getallen komen er zeker twee uit dezelfde verzameling, het verschil van die twee is deelbaar door drie.

4. Je krijgt een schaakbord en een setje dominostenen.
Eén zo'n dominosteen kan precies drie vakjes die naast elkaar liggen bedekken. Die vakjes kunnen horizontaal of verticaal liggen, maar niet diagonaal.

a. kan je het schaakbord netjes met die dominostenen bedekken? Elk vakje op het schaakbord moet onder een dominosteen liggen, en elke dominosteen boven drie vakjes.

b. Nu moet je eerst een vakje van het schaakbord wegzagen, je mag zelf kiezen welk. Dat vakje hoeft niet meer bedekt te worden. Kan het schaakbord nu netjes bedekt worden ?

OPLOSSING 4:

We hebben een correcte oplossing gekregen van Florian Allaart, Marieke Quant, Robert van Utteren, Gerben de Klerk en Murat Duran. Onderstaande oplossing is van Gerben de Klerk.

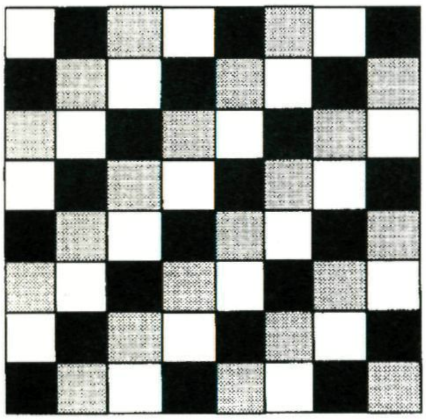
OLYMPIADE

a. Dit is makkelijk. Het aantal vakjes is niet deelbaar door drie.

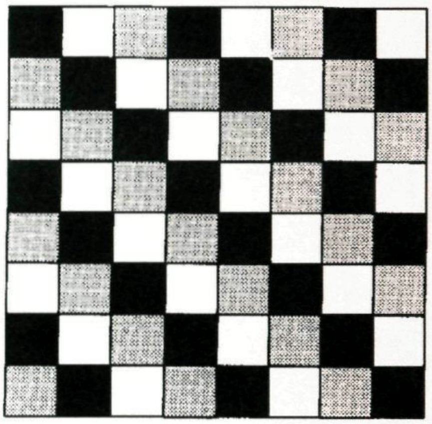
b. Dit is ook makkelijk. Figuur 1 is een mogelijkheid waarop het kan.

Alle inzenders gaven een goede vulling van het schaakbord. De vakjes die ze weglieten waren altijd c3, f3, c6 of f6.
Gerben de Klerk bewees als enige dat deze vakjes ook de enige zijn die je kan weglaten zodat je de rest van het schaakbord kan opvullen.
Hij kleurde de vakjes van het schaakbord zoals in figuur 1. Zoals je ziet, bedekt een dominosteen altijd precies een zwart, een wit en een grijs vakje. Er zijn 22 zwarte, 21 witte en 21 grijze vakjes. Bij een bedekking op één vakje na is het vakje dat overblijft dus zwart. Met hetzelfde argument zie je dat ook van de kleuring in figuur 2 een zwart vakje moet overblijven.
De vier genoemde vakjes zijn de enige die zwart zijn in beide tekeningen. In figuur 3 zie je een mogelijke invulling, waarbij inderdaad één van de zwarte vakjes overblijft.

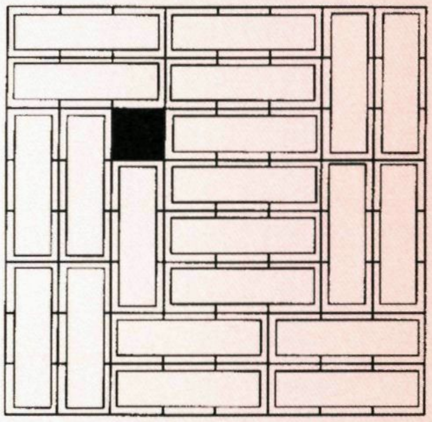
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3



NIEUWE OPGAVEN:

OPGAVE 7

Je hebt gewichten van 1, 2, 3, ...n-1 en n kilo. Voor welke n kan je de gewichten verdelen in twee groepen met gelijk gewicht.

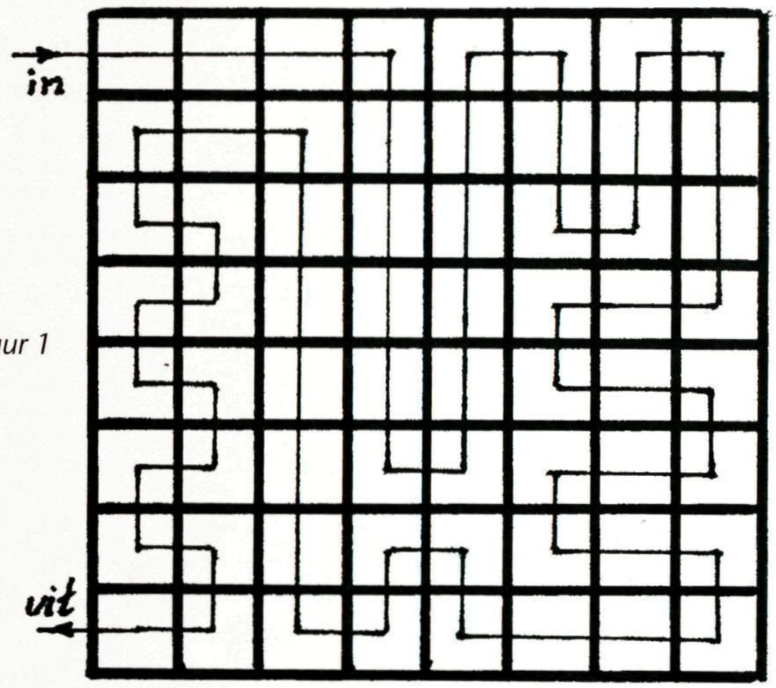
OPGAVE 8

Vind een afbeelding f van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ met de eigenschap $f^n(n)=n$ en waarvoor $f(35)$ zo klein mogelijk is.
Een f die voor de hand ligt is $f(x)=x$, en hierbij is $f(35)=35$. [opmerking $f^n(x)$ betekent dat je de functie f n maal moet toepassen. Dus bijvoorbeeld $f^3(3) = f(f(f(3)))$].

DWALEN OVER EEN

Een schaakbord heeft 64 vakjes. De bedoeling is om een weg te tekenen die alle vakjes in één keer passeert. In figuur 1 staat een voorbeeld hiervan.

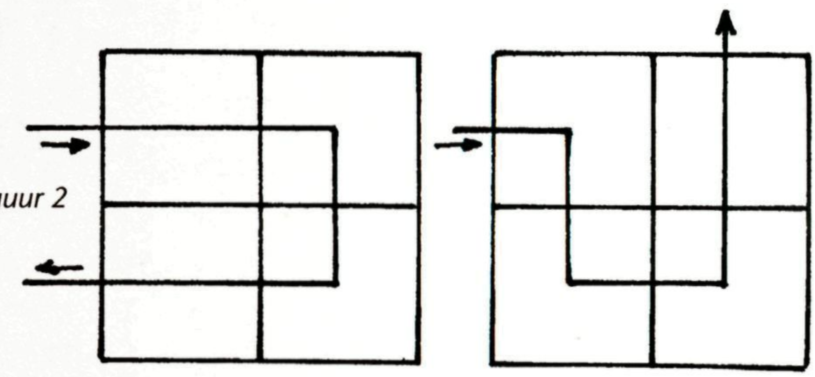
We zijn links boven begonnen en links onder geëindigd. Probeer zelf eerst een paar van die banen te verzinnen. Er zijn gemakkelijke en heel moeilijke.



Figuur 1

INGANG EN UITGANG

Toen we er zelf een aantal geprobeerd hadden, viel het ons op dat bij een zekere keuze van de ingang niet elke uitgang mogelijk is. We beginnen met het eenvoudiger geval.
In figuur 2 staat een twee bij twee schaakbord.
Er zijn hier maar twee mogelijkheden; spiegel-symmetrische of rotatie- symmetrische sluiten we uit.



Figuur 2

CHAAKBORD

Het valt hier bijvoorbeeld op dat je langs een diagonaal niet in en uit kunt gaan. Is daar een verklaring voor?

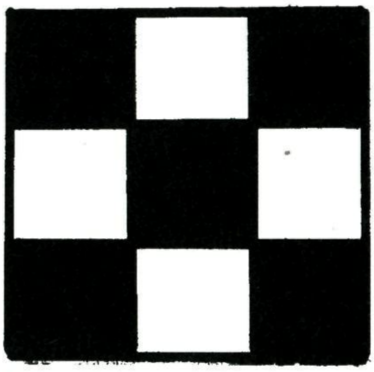
DRIE BIJ DRIE

Probeer zelf nog maar eerst een volgend geval. Bij een schaakbord drie bij drie zijn er vier mogelijkheden. Teken die eens uit. Symmetrische gevallen weglaten.

Bij één oplossing ga je aan een kant erin en recht er tegenover weer uit. Bij een ander geval ga je ergens in en twee hokjes verder aan de zelfde kant er weer uit. verder zijn er nog twee oplossingen met een diagonaal als in- en uitgang. Nu kan de diagonaal dus wel. Als je bij een middenvakje wilt beginnen, lukt het niet. Waarom eigenlijk niet?

ZWART-WIT

We kleuren de vakjes bij een drie bij drie patroon beurtelings zwart en wit (figuur 3).



Figuur 3

Bij een dwaaltocht moet je afwisselend van wit (w) naar zwart (z) en omgekeerd. Omdat er vier witte en vijf zwarte hokjes zijn, is de enige mogelijkheid: *zwzwzwzwz.*

Je moet dus bij zwart beginnen.

Bij starten bij een wit vakje kom je er dus niet uit. Hoe zit dat bij het normale schaakbord met 64 vakjes? Als je bij wit binnen gaat, bij welke kleur kom je er dan weer uit? Bij een oneven aantal kom je er bij dezelfde kleur weer uit. Hoe is dat bij een even aantal?

Henk Mulder

AARDIGHEDEN UIT DE GETALLEN-THEORIE 2

Voor elke gehele n is $n^{13} - n$ deelbaar door 2730.
Het omgekeerde geldt niet: een 2730-voud is niet altijd te schrijven in de vorm $n\ (n^{12} - 1)$.
Een bewijs hiervan is niet één-twee-drie te geven.
Je maakt gebruik van een stelling in de algebra waarin verschillende begrippen worden gecombineerd.
Dat het klopt is gebaseerd op het feit dat 2730 te ontbinden is als $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$, waarbij alle factoren priem zijn, en waar bovendien voor elke factor geldt: als je er 1 van aftrekt, staat er een deler van 12, de exponent binnen de haakjes.

Whee Ky Ma

DE RUIMTEWA

Naar aanleiding van het artikel "Torentjes verplaatsen" in Pythagoras nr. 1 van 1994 herinnerde ik me opeens weer het wiskundige opstel, dat ik in mijn tweede jaar aan de universiteit van Warwick heb geschreven. Lees het maar.

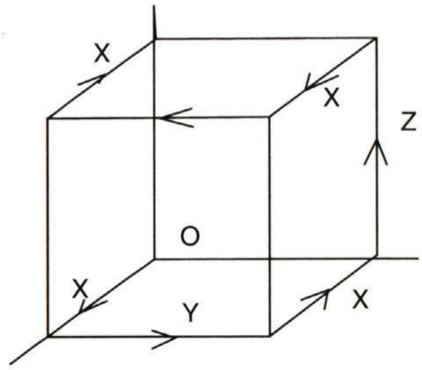
"Icosian game" is de Engelse benaming van een spel, dat ruim honderd jaar geleden uitgevonden is door de Ierse wiskundige Hamilton. Het spel werd in eerste instantie gespeeld op een dodecaëder, een regelmatig twaalfvlak, maar is genoemd naar het regelmatige twintigvlak, de icosaëder. Beide zijn *platonische lichamen*.

SPELVERLOOP

Je begint op een hoekpunt van een platonisch lichaam en je beweegt over de ribben. De bedoeling is een trip te maken over de ribben van het veelvlak, waarbij je ieder hoekpunt precies één keer bezoekt en zodat je uiteindelijk kunt eindigen waar je begon.
Het doorlopen pad vorm dan een gesloten ruimtecircuit. Je hoeft niet elke ribbe aan te doen.

OP DE KUBUS

Zet de kubus in een x-y-z-assenstelsel.
Voor het gemak duid je de beweging in de positieve of negatieve x-richting aan met x. Met y en z gaat het net zo.



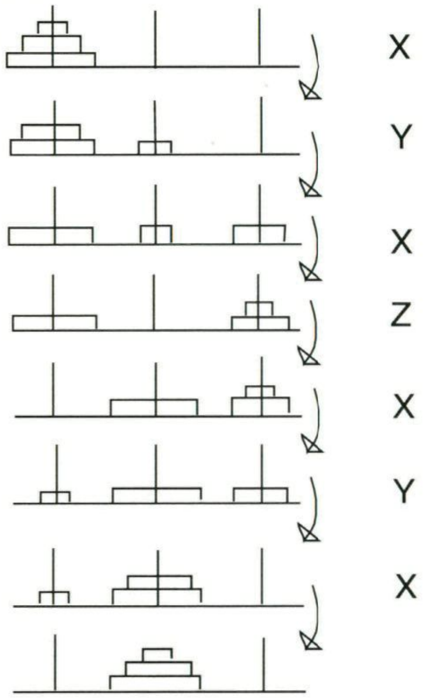
Begin in O(0,0,0). Het pad *"xyxzxyx"* voldoet nu aan de regels van het spel: je bezoekt ieder hoekpunt éénmaal en je maakt door langs de ribben te gaan een gesloten circuit.

DE TORENS

Laten we nu eens terugdenken aan de torens van Hanoi. Er is bewezen, dat het minimum aantal zetten dat nodig is om een toren van n schijven van een staafje naar een andere te verplaatsen gelijk is aan 2^n-1. Daarbij mag je nooit een grotere schijf op een kleinere zetten.
Voor n=3 heb je $2^3 - 1 = 7$ zetten nodig.

NDELING

Noem de kleinste schijf x, de grotere y en de grootste z. Om een zet te noteren noem je de schijf, die je verplaatst.



In dit geval is "het pad" xyxzxyx. Dat pad heeft dezelfde notatie als de wandeling over de kubusribben.

N SCHIJVEN

De algoritme, die ons vertelt hoe we de n schijven met zo min mogelijk zetten moeten verplaatsen is deze:

1) schrijf de getallen 1 tot en met 2^n-1 binair, dus in het tweetallige talstelsel.

2) Geef de schijven de namen $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n$. Ze staan van klein naar groot vermeld.

3) de k-de zet is het verplaatsen van schijf x_i waarin i de eerste plaats is van rechts af gezien, waar k een 1 heeft staan in de binaire voorstelling.

x_1, x_2 en x_3 zijn de drie standaard richtingen in de x-, y- en z-richting, terwijl x_4 de overgang voorstelt van de ene kubus naar de andere.

Dat is dan zogenaamd de vierde richting in de vierdimensionale ruimte.

VOORBEELD MET N=3

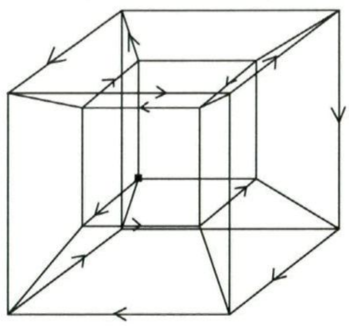
zetnummer k	k binair	positie van de meest rechtse 1	verzet van schijf
1	001	1	x_1
2	010	2	x_2
3	011	1	x_1
4	100	3	x_3
5	101	1	x_1
6	110	2	x_2
7	111	1	x_1

Zowel de toren van Hanoi als "Icosian game" is voor $n = 3$ op dezelfde manier binair te beschrijven.

DE 4-DIMENSIONALE KUBUS

kun je niet echt tekenen. We gebruiken het volgende symbolische plaatje:

Als je begint bij het gemarkeerde hoekpunt, dan kun je het pijlenpad volgen.



Ook hier is een tabel van te maken:

zetnummer k	k binair	positie van de meest rechtse 1	verzet van schijf
1	000**1**	1	x_1
2	00**1**0	2	x_2
3	001**1**	1	x_1
4	0**1**00	3	x_3
5	010**1**	1	x_1
6	01**1**0	2	x_2
7	011**1**	1	x_1
8	**1**000	4	x_4
9	100**1**	1	x_1
10	10**1**0	2	x_2
11	101**1**	1	x_1
12	1**1**00	3	x_3
13	110**1**	1	x_1
14	11**1**0	2	x_2
15	111**1**	1	x_1

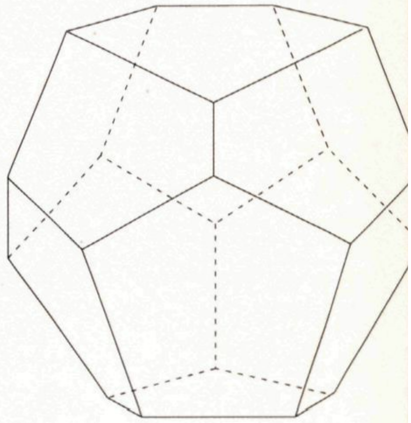
Als we in deze volgorde over de vierdimensionale *hyperkubus* bewegen, dan krijgen we weer een gesloten circuit, waarbij alle 8 hoekpunten eenmaal zijn gepasseerd. *De torens van Hanoi met vier schijven geven dezelfde tabel.*

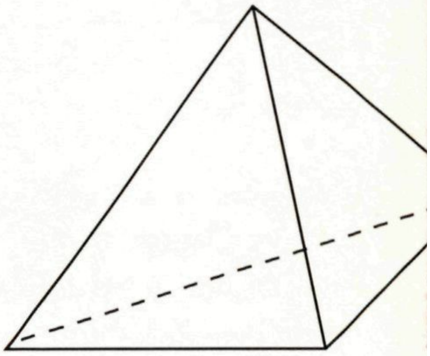
Er is dus een bijzondere relatie tussen de torens van Hanoi en "icosian game". Als het aantal schijven n is en de dimensie van de hyperkubus is n, dan blijkt voor elke n de bedoelde relatie te bestaan.

Meike Akveld
10 Madingley Road
Cambridge CB3 0EE
Engeland

De redactie wil graag weten, hoe je verplaatsingen op ander platonische lichamen eenvoudig zou kunnen aangeven.

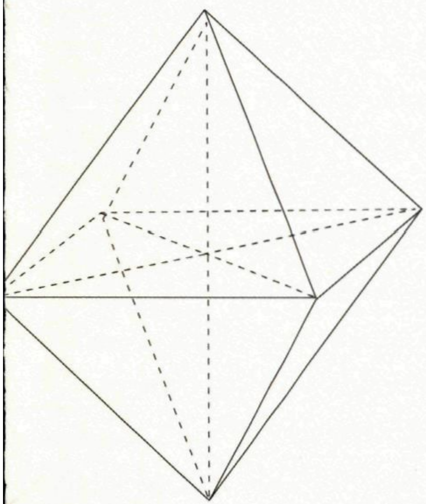
Er zijn dan immers geen rechte hoeken. Wie maakt een correcte wandeling over een

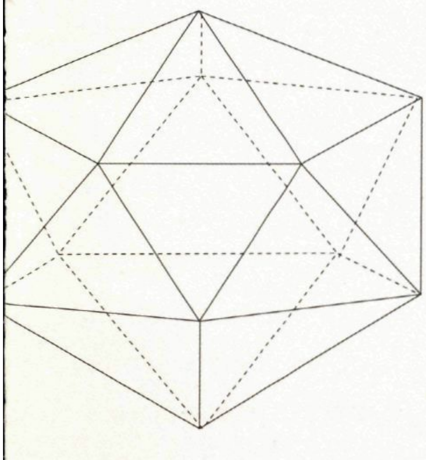




dodecaëder en geeft een goede beschrijving? Probeer het eerst met een tetraëder en daarna een octaëder.

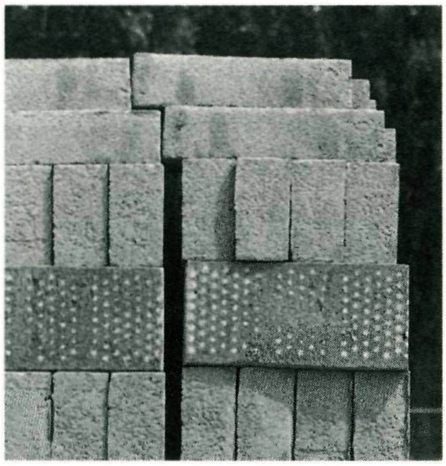
Als service biedt Pythagoras jou reeds enige geschikte tekeningen aan:





HET MASSIEVE BLOK

Je hebt een hele stapel stenen.
Elke steen is 2 bij 5 bij 10.



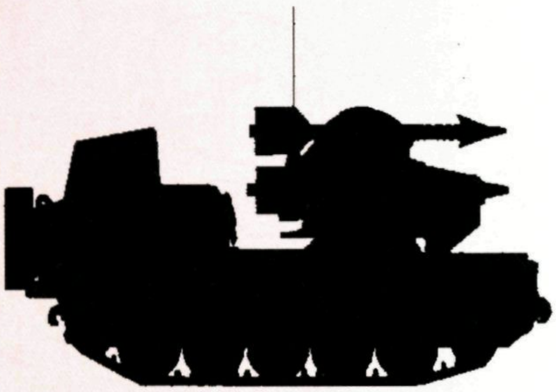
Kun je hiervan een massief blok bouwen met de maten 72 bij 96 bij 200?
Zie zo nodig bladzijde 30.

Thijs Notenboom

PROBLEEM

Al jarenlang wordt voormalig Joegoslavië geteisterd door burgeroorlogen. De Verenigde Naties besloten humanitaire convooien naar de oorlogsgebieden te sturen om de bevolking van voedsel en medicamenten te voorzien. Daarna werden er veilige zones ingesteld en moesten blauwhelmen deze bewaken. Toen er desondanks toch nog werd geschoten, werden er waarnemers van de VN ingezet om te registreren waar deze schoten vandaan kwamen zodat de schuldigen konden worden aangewezen.

De Bosnische hoofdstad Sarajevo lag gisteren weer eens zwaar onder vuur.



Twee waarnemers van de VN hadden de opdracht te rapporteren door hoeveel stukken geschut de stad werd beschoten en op welk moment dat gebeurde.

De wijze waarop zij rapporteerden was niet van belang als het maar nauwkeurig gebeurde.

OVERLEG

De twee waarnemers overlegden met elkaar hoe zij dat zouden doen.
Zij gaven elk stuk een nummer. Bij optelling van de nummers van stukken, die binnen één tijdsinterval schoten, mag er geen getal ontstaan, dat al een toebedeeld nummer is.
Als één willekeurig stuk vuurt, noteren we dat getal naast het bijbehorende tijdsinterval. Indien meerdere stukken gelijktijdig vuren tellen we de nummers van die stukken bij elkaar op en vermelden die som naast het juiste tijdsinterval in het rapport. Zo konden ze met één getal per interval alle informatie verstrekken.
Zij verrasten hun commandant met het volgende rapport.

De commandant, die wiskundig goed onderlegd was, wist binnen vijf minuten hoeveel stuks geschut de vijand in stelling had; hoeveel keer elk stuk had geschoten; hoe vaak er in

SERAJEVO

dat uur totaal was gevuurd; welk stuk het meest schoot; welk stuk halverwege de tijd door de tegenpartij werd uitgeschakeld.

WAARNEMING VN TE SARAJEVO OP 18 MAART 1995.

Tijdsinterval	Som	Tijdsinterval	Som
10:00-10:03	5	10:30-10:31	2
10:03-10:08	26	10:31-10:35	12
10:08-10:13	21	10:35-10:38	14
10:13-10:15	11	10:38-10:42	22
10:15-10:16	20	10:42-10:46	8
10:16-10:18	9	10:46-10:50	10
10:18-10:21	13	10:50-10:52	22
10:21-10:24	18	10:52-10:53	8
10:24-10:26	13	10:53-10:58	2
10:26-10:30	30	10:58-11:00	30

Had u die VN-commandant kunnen zijn?

Tip 1: maak een matrix; in de eerste kolom de tijd, in de tweede kolom de som der stuknummers en in de overige kolommen het nummer van het stuk, dat schoot.

Tip 2: denk eens aan machten van twee.

Tip 3: de verzamelnaam voor alle soorten schiettuig is stuk; in het meervoud stukken.

Veel succes en.....spieken mag op bladzijde 28 pas na minstens een uur puzzelen.

Henk van der Knaap
uit Zoetermeer

REKENKUNDIGE RIJ

3, 7, 11, 15, • • • is een voorbeeld van een *rekenkundige rij*. Kenmerkend is, dat het *verschil* tussen twee opeenvolgende termen steeds gelijk is.
Dat verschil is hier 4.
De algemene *term* van deze rij is $t_n = 4n - 1$, terwijl n een natuurlijk getal is. De vierde term is $t_4 = 4 \cdot 4 - 1 = 15$.

TERM?

We kunnen nu gemakkelijk nagaan, of 2345 tot deze rij behoort: $4n - 1 = 2345$. Dit heeft geen oplossing binnen de verzameling natuurlijke getallen.
Dus is 2345 geen term van de gegeven rekenkundige rij.

ALGEMEEN

Een algemene gedaante van een rekenkundige rij ziet er zo uit:

$$\begin{aligned} t_1 &= a \\ t_2 &= a+v \\ t_3 &= a+2v \\ t_4 &= a+3v \\ t_5 &= a+4v \\ \hline t_n &= a+(n-1)v \end{aligned}$$

SOM

Wat krijgen we als we de eerste n termen optellen?
$s_n = a + (a+v) + (a+2v) + \cdots + \{a+(n-1)v\}$.

We schrijven deze som er achterstevoren onder en tellen dan op. Tenslotte delen we door 2:

$$\begin{array}{ccccccccc} a & + & a+v & + & a+2v & + & \cdots & + & a+(n-1)v \\ a+(n-1)v & + & a+(n-2)v & + & a+(n-2)v & + & \cdots & + & a \\ \hline 2a+(n-1)v & + & 2a+(n-1)v & + & 2a+(n-1)v & + & \cdots & + & 2a+(n-1)v \end{array} +$$

$$2s_n = n \cdot [2a + (n-1)v] \text{ of}$$
$$s_n = \tfrac{1}{2}\, n \cdot [a + \{a + (n-1)v\}] = n \cdot [(t_1 + t_n)\tfrac{1}{2}]$$
$$= n \cdot \text{(het gemiddelde van de eerste en de laatste term).}$$

EEN VOORBEELD

Bereken $3 + 7 + 11 + 15 + \cdots + 2347$.
Het verschil is 4. De eerste term $t_1 = 3$.
De algemene term is $t_n = 4n - 1$
De laatste term: $4n - 1 = 2347$ of $n = 578$.
Er zijn dus 587 termen.
De som is nu $587 \cdot (3 + 2347) : 2 = 689725$

Bereken zelf eens de som van alle getallen, die uit 3 cijfers bestaan. Zie zo nodig bladzijde 31.

Arnold de Greef

STICKERS

Annet, Benno en Carla gaan in deze volgorde door een deur. Bij de deur krijgen ze een sticker op de rug geplakt. Zelf zien ze niet welke kleur. Degenen die erachter staan wel.
Ze weten dat er drie witte en twee rode stickers zijn.
Daarna wordt in omgekeerde volgorde gevraagd welke kleur ze hebben.
Zodra iemand het goede antwoord gegeven heeft is het spel afgelopen.
Er is afgesproken dat je niet mag gokken.
Carla zegt:
'Ik weet het niet.'
Ook Benno zegt:
'Ik weet het niet.'
Annet zegt:
'Dan moet ik wit hebben.'

Twee vragen hierbij:

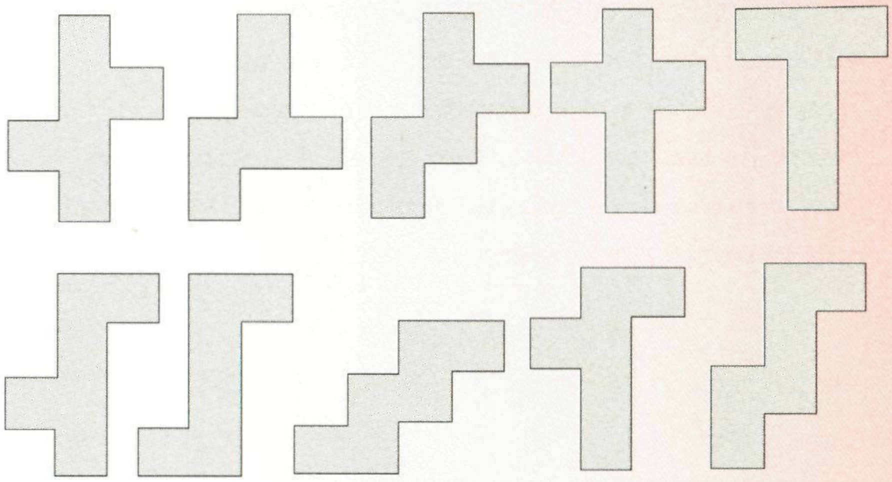
- Hoe kon Annet weten dat ze wit had?
- Wie van de drie heeft de grootste kans om te winnen?

Antwoorden op blz 29.

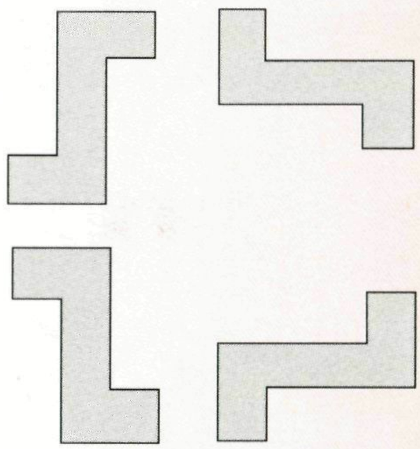
Frank Roos en Jan Mahieu

UITSLAGEN

De uitslag van een kubus kun je op elf wezenlijk verschillende manieren tekenen.
Hier volgen er tien zonder vouwranden:



Niet wezenlijk verschillende uitslagen zijn bijvoorbeeld:



Hoe ziet de elfde uitslag er uit?
Zie zo nodig pagina 30.

Frank Roos

VIERKANT WISK

Voor de tweede keer hebben er met succes twee wiskundekampen plaatsgevonden in Baarn. Ze werden georganiseerd door de stichting 'Vierkant voor Wiskunde', een stichting, die enthousiaste middelbare scholieren aanspoort zich verder in de wiskunde te verdiepen. Naast de wiskundekampen geeft deze stichting ook verscheidene wiskundeboekjes uit, vaak over een bepaald onderwerp.

Dit jaar waren er twee kampen, beide in conferentieoord Drakenburgh te Baarn. Ik zal verslag doen van het tweede kamp:

Maandag 21 augustus begon het kamp. Na onze aankomst in Drakenburgh zijn we (na het leren van de namen) al in de ochtend begonnen met 2 wiskundige probleempjes om even de smaak te pakken te krijgen.
Het zijn bijvoorbeeld problemen over een bepaal-

UNDEKAMP 1995

de winnende strategie bij een spel of getallenraadsels. We hebben bijvoorbeeld uitgerekend van een willekeurig tennistoernooi hoeveel partijen er worden gespeeld en hoe je een rechthoekige taart met in een van de hoeken een rechthoek of vierkant met slagroom moet doormidden snijden, zodat er evenveel taart als slagroom op elke helft zit.

Na de ochtendwiskunde hadden we elke dag een pauze van ongeveer twee uur, waarin je kon voetballen, volleyballen, computeren, pingpongen, enz., want je kunt je natuurlijk niet de hele dag op de wiskunde concentreren. 's Middags werd er aan onderzoeksprogramma's gewerkt over hele verschillende onderwerpen. Je krijgt dan een boekje met een aantal opgaven en uitleg over dat onderwerp en dan moet je in groepjes over de vragen gaan nadenken.

Tijdens het nadenken over de verschillende problemen krijg je veel en goede begeleiding.

Vooral op punten dat je even vastzit met je opgave, kunnen zij je een goede hint of iets dergelijks geven.

Na het diner waren er avondprogramma's met nachtspelen, sport en een casino. Het was erg leuk in elkaar gezet, want zelfs de nachtspelen hadden enigszins met wiskunde te maken.
Om een indruk te geven van de soort wiskunde, die is behandeld, zal ik een aantal van de door ons gedane onderwerpen noemen.

Onze onderzoeksprogramma's gingen over auto's, magische vierkanten, kansrekening en de gulden snede.

We moesten bijvoorbeeld de gulden verhouding (je verdeelt een lijnstuk in een kleiner en een groter deel en het kleinere deel staat dan tot het grotere als het grotere tot het geheel) berekenen en daarna een aantal formules afleiden die daaruit volgen.
Ook hebben we bekeken of wijzelf ook volgens de gulden snede zijn gebouwd. Terwijl we dat aan het doen waren, kregen we bezoek van het Jeugdjournaal, die ons uitgebreid filmde en dingen liet uitleggen.

Verder hebben we met kansrekening nog de kans berekend, dat er uit een groep van 50 mensen twee op dezelfde dag jarig zijn. De uitkomst is onverwacht hoog: 97%.
Met deze voorbeelden is dus duidelijk te zien, dat het leuke, gevarieerde en interessante problemen zijn.
We hebben zelfs een verband gelegd tussen muziek en wiskunde door het opvoeren van een muzikaal dobbelspel van Mozart.
Het stuk bestaat uit zestien maten, met voor elke maat elf mogelijkheden. Door met de dobbelsteen te gooien bepaal je hoe het stuk er voor die keer uit zal zien.

In de ochtenden werkten we meestal aan 'losse' problemen, die erg in moeilijkheidsgraad verschilden, vooral veel cijfer- en meetkundeproblemen. Twee van dat soort probleme hebben we zelfs door heel Nederland verspreid, namelijk via radio 3, die ons vroeg om wat over de wiskundekampen te vertellen in de Breakfast Club. De uiterst originele vraag 'Zijn jullie wel een bÄÄtje normaal' bleef natuurlijk niet uit.
Daar gaven wij de luisteraars ook twee problemen op en via terugbellen konden ze dan een prijs winnen.
Bij de tot nu toe genoemde problemen kregen we dus steeds hulp van begeleiders, vooral studenten wiskunde van Nederlandse universiteiten. We hadden echter ook 3 problemen, die je alleen of samen met iemand moest oplossen als een soort van competitie.
Dat waren echt pittige problemen, waar je je tijd echt wel voor nodig had.
Je moest bijvoorbeeld een winnende strategie op een bepaald spel verzinnen en dat kan echt heel lastig zo niet ondoenlijk zijn.
Ook hebben we nog uitgerekend hoe je een elektro-

nische klok zo goedkoop mogelijk kan laten functioneren door middel van het kleinste aantal cijferverspringingen te berekenen. Zoals je ziet komen er in het programma hele gevarieerde wiskundeonderwerpen voor en als je in wiskunde geinteresseerd bent, is dit de ideale mogelijkheid. In ieder geval worden er volgend jaar weer wiskundekampen georganiseerd door Vierkant.

Arthur van Benthem
Klas 4 Stedelijk Gymnasium
Haarlem

HERLEIDEN VAN REPETERENDE BREUKEN

Je hebt een repeterende breuk. Hoe kun je er een gewone breuk van maken?

Je hebt de volgende repeterende breuk:
$a = 0{,}081081081081081\cdots = 0{,}$. De herhaling komt steeds na drie cijfers: de periode p is 3.

Om a te herleiden tot een gewone breuk, vermenigvuldig je met $10^p = 10^3 = 1000$. Je krijgt:

$$\begin{array}{rl} 1000a = & 81{,}081081081081\cdots = 81{,}\cancel{0}8\cancel{1} \\ a = & 0{,}081081081081\cdots = 0{,}\cancel{0}8\cancel{1} \\ \hline 999a = & 81 \text{ precies of} \\ a = & 81 : 999 = 3 : 37 \end{array} \; -$$

ALGEMEEN

Als je een zuiver repeterende breuk a hebt met periode p, dan kun je hem herleiden door eerst te vermenigvuldigen met 10^p. Daarna trek je er a van af.

Dan kun je a oplossen als een gewone breuk.

EEN GEMENGDE BREUK

bevat "links" een niet repeterend deel. Probeer nu zelf eens $0{,}123\cancel{4}\cancel{5}$ te herleiden.

Zie pagina 31.

Arnold de Greef.

SLIERTEN

We spreken over een sliert, als we de som bepalen van minstens twee opeenvolgende natuurlijke getallen. Alle variabelen in dit artikel stellen positieve gehele getallen voor.

NOTATIE

Voor een lange som kunnen we de *Sigma-notatie* gebruiken:

$$\sum_{k=3}^{7} k = 3 + 4 + \bullet\bullet\bullet + 7 = 25$$

De termen van deze som vormen een rekenkundige rij met verschil 1. Dit is een *sliert*. In dit artikel is de sliert 3++6 hetzelfde als 3+4+5+6. 6++3 heeft geen betekenis.

Nog een sliert:

$1{+}{+}100 = 1 + 2 + \bullet\bullet\bullet + 99 + 100$

$= 50 \times 101 = 5050$

ALGEMEEN

Als $a < b$, dan bevat de sliert $a{+}{+}b$ in totaal b+1-a opeenvolgende termen. Dat zien we zo: aan de rij termen 1 tot en met b ontbreekt de rij termen 1 tot en met a-1.

Het *aantal termen* is dan b - (a-1). Dat aantal noemen we *lengte* van de rij en korten we af tot ℓ.

De lengte ℓ is dus hier b+1-a.

Het gemiddelde van de eerste en laatste term is $\frac{1}{2}(a+b)$.

Dan is de som van alle termen = $a{+}{+}b = \frac{1}{2}(a+b)(b+1-a)$.

Zo is $40{+}{+}85 = \frac{1}{2} \cdot 125 \cdot 46 = 2875$.

$\ell = 2$

De kortste sliert kunnen we schrijven als $a{+}{+}(a+1) = a + (a+1) = 2a+1$ en dat stelt een oneven getal voor.

Omgekeerd kunnen we ook elk oneven getal ≥ 3 schrijven als de som van twee opeenvolgende getallen.

In het bijzonder geldt dit voor priemgetallen > 2

$\ell = 3$

$a{+}{+}(a+2) = a + (a+1) + (a+2) = 3a+3$. We zien hieruit, dat we elk drievoud ≥ 6 kunnen schrijven als de som van drie opeenvolgende getallen. Deze verzameling getallen is een rekenkundige rij; de eerste term is 6 en het verschil is 3.

Een zesvoud kun je schrijven als een sliert, die begint met een oneven getal.
Een getal van het type $6n+3$ is te schrijven als de sliert $(2n){+}{+}(2n+2)$.
Die begint dus met een even getal.

$\ell = 4$

$a{+}{+}(a+3) = a + (a+1) + (a+2) + (a+3) = 4a+6 = 4(a+1)+2$.

De verzameling even getallen, die niet deelbaar zijn door 4 kunnen we dus schrijven als een sliert met $\ell = 4$. Deze verzameling is de rij $1{+}{+}4 = 10$, $2{+}{+}5 = 14$, $3{+}{+}6 = 18$, • • •.
Dat is een rekenkundige rij met beginterm 10 en verschil 4.

$\ell > 4$

Op dezelfde manier kunnen we zelf langere slierten onderzoeken.

VOORBEELD:

voor welke a en b is $a{+}{+}b = 12$?

$a{+}{+}b = \frac{1}{2}(b+1-a)(a+b) = 12$

$(b+1-a)(a+b) = 24$

24 is rijk aan ontbindingen:

$24 = 1 \times 24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6 = 6 \times 4 = 8 \times 3 = 12 \times 2 = 24 \times 1$

We kiezen als voorbeeld $24 = 3 \times 8$.

Dan is $\begin{cases} b+1-a = 3 \\ a+b = 8 \end{cases}$

De oplossing hiervan is $a=3$ en $b=5$.
Dus $12 = 3{+}{+}5 = 3 + 4 + 5$

ALGEMEEN

Laten we de factoren g en k noemen;
g = groot en k = klein.

Dan is $\begin{cases} b+1-a = k \\ \text{en } a+b = g \end{cases}$

De oplossing hiervan is

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}(1+g-k) \\ b = \frac{1}{2}(k+g-1) \end{cases}$$

Omdat a en b natuurlijk zijn, moeten de vormen tussen haakjes even zijn en daarom moet één van de factoren even zijn, het geeft niet welke, en de andere oneven.
Bovendien moeten beide factoren positief zijn, dus moet $k < g+1$ en $k + g > 1$. aan de laatste voorwaarde is steeds voldaan.

Terug naar $a + + b = 12$ of

$$\begin{cases} k \cdot g = 24 \\ a = \frac{1}{2}(1+g-k) \\ b = \frac{1}{2}(k+g-1) \end{cases}$$

k	g	$k<g+1$?	$k+g$ oneven?	a en b?
1	24	ja	ja	12 en 12
2	12	ja	nee	geen
3	8	ja	ja	3 en 5
4	6	ja	nee	geen
6	4	nee		geen
8	3	nee		geen
12	2	nee		geen
24	1	nee		geen

$k=1$ levert blijkbaar ook geen goede oplossing, omdat $12{+}{+}12 = 12$ geen sliert is. Een sliert bevat immers minstens twee termen.

ALGEMENE SAMENVATTING

Hoe schrijven we p als een sliert $a{+}{+}b$?

$p = a{+}{+}b = \frac{1}{2}(b+1-a)(a+b)$

$2p = (b+1-a)(a+b)$

Ontbind $2p$ in twee factoren k en g. $2p = k \cdot g$

Eén van k en g is even, de andere is oneven.

$k \neq 1$ en $k < g+1$

$b+1-a = k$

en $a+b = g$

De oplossing hiervan is

$a = \frac{1}{2}(1+g-k)$

$b = \frac{1}{2}(k+g-1)$

en $a < b$

Waarom kunnen machten van twee niet als slierten geschreven worden?

Zie zo nodig bladzijde 31.

MEER MANIEREN

Het schrijven van een getal als sliert is zeker niet éénduidig. Kijk maar eens naar het getal 9.

Als oneven getal kunnen we hem schrijven als 4++5 = 4+5 = 9.

Als 3-voud maken we er 2++4 = 2+3+4 = 9 van.

Schrijf 60, 61 en 64 als slierten. Oplossingen op bladzijde 31.

ANDERE SLIERTEN

De voorgaande slierten zijn alle gebaseerd op de optelling. We zouden deze slierten daarom ook *additieve slierten* kunnen noemen. Zo zouden we ook *multiplicatieve slierten* kunnen verzinnen, die zijn gebaseerd op de vermenigvuldiging. Met 3xx7 bedoelen we dan 3x4x5x6x7. Deze slierten hebben natuurlijk niets te maken met rekenkundige rijen. In een volgend artikel zullen dit soort slierten besproken worden.

Arnold de Greef

PRIEMSLIERTEN

Als reactie op het artikel 'slierten' van Arnold de Greef komt de redactie met een variant: *priemslierten*. Een priemsliert is de som van een aantal opeenvolgende priemgetallen, waarbij de som zelf ook een priemgetal is.

Wij dagen de lezers uit tot een eigen onderzoek.

Redactie

AFLEV

Dit is een eerste aflevering uit een serie van vier. De te verwachten afleveringen zijn:

Pythagorasdriehoeken, aflevering "Delen door 3"

Pythagorasdriehoeken, aflevering "Delen door 4"

Pythagorasdriehoeken, aflevering "Delen door 5"

In deze artikelen stelt elke variabele een positief geheel getal voor.

PRIMITIEF

De notatie (a, b, c) stelt een driehoek voor met zijden a, b en c. De (12, 16, 20) en (21, 28, 35) zijn voorbeelden van pythagorasdriehoeken, die gelijkvormig zijn met (3, 4, 5).

De gehele verzameling, die hiermee gelijkvormig is, is $(3n, 4n, 5n)$.

Als we $n=1$ kiezen, dan hebben we de kleinste driehoek uit deze verzameling.

De grootste gemeenschap

ERING "PRIMITIEF"

PYTHAGORAS

pelijke deler van de lengtes van de drie zijden is dan 1. De (3, 4, 5) is de representant of primitieve pythagorasdriehoek, die behoort bij deze voorbeeld-verzameling.

UITGEBREID RECEPT

Stel $m=fp$ en $n=fq$, waarbij p en q geen gemeenschappelijke deler $\neq 1$ hebben. Dan is f de grootste gemeenschappelijke deler van m en n.
Als $a = 2fpq$, $b = f(p^2-q^2)$ en $c = f(p^2+q^2)$ zijn, dan is (a, b, c) een pythagorasdriehoek. Immers
$\{2fpq\}^2 + \{f(p^2-q^2)\}^2 = \{f(p^2+q^2)\}^2$

GEMEENSCHAPPELIJKE DELER

De zijden hebben dan de gemeenschappelijke factor f en de driehoek is dan niet primitief. Als f echter 1 is, dan kan de driehoek wel een primitieve pythagrasdriehoek zijn, want p, q, $(p+q)(p-q)$ en p^2+q^2 zijn allemaal verschillende factoren.
Maar• • •:

EEN BIJZONDER GEVAL:

***m* en *n* zijn beide oneven.**
Als m en n beide oneven zijn, dan kunnen we ze vervangen door $2p+1$ en $2q+1$. Dan zijn, als $f=1$ is:
$a = 2(2p+1)(2q+1)$,
$b = (2p+1)^2 - (2q-1)^2 = 4(p^2-q^2) + 4(p-q)$ en
$c = ((2p+1)^2 + (2q+1)^2 = 4(p^2+q^2) + 4(p+q) + 2$
We zien dat dan alle drie de zijden deelbaar zijn door 2.

SAMENGEVAT

We kunnen slechts dan primitieve pythagorasdriehoeken krijgen, als èn $m+n$ oneven is èn als m en n geen gemeenschappelijke delers hebben.

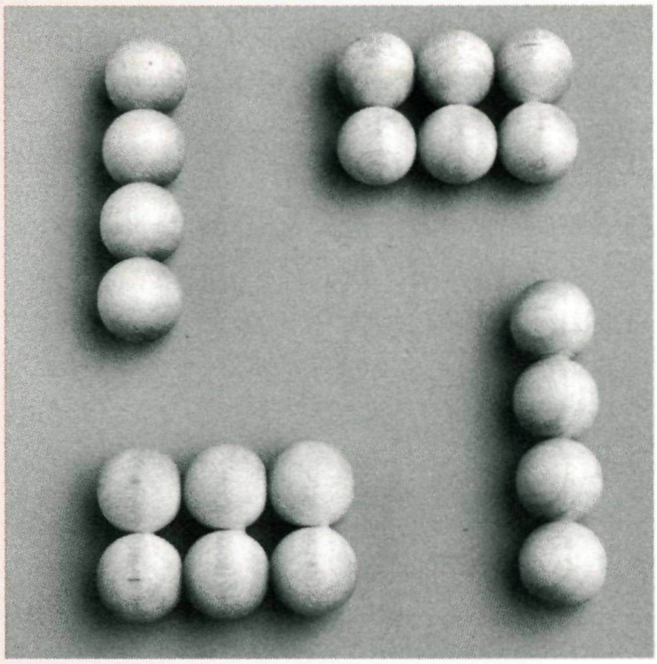
BASIC PROGRAMMA,

dat primitieve pythagorasdriehoeken geeft en dat dus rekening houdt met de genoemde eisen.

```
10  defint a-t: cls
15  print "primitieve pythagorasdriehoeken": print
20  for m=2 to 16: for n=1 to m-1
30    t=0: gosub 110: if t=1 then 80: 'even-oneven-test
40    t=0: gosub 140: if t=1 then 80: 'deler-test
50    a=2*m*n: b=m*m-n*n: c=m*m+n*n
60    if a>b then d=a: a=b: b=d: 'wisseling hoeft niet
70    print using"######";a;b;c;: print "    ",
80   next:next
90   end
100 '
110 k=m+n: if int(k/2)=k/2 then t=1
120 return
130 '
140 g=m: k=n:                       ' deze methode is geba-
150 r=g-k*int(g/k): if r=0 then 170: ' seerd op die van
160 g=k: k=r: goto 150:             ' Euclides. Zie Pyth. nr 2
170 if k>1 then t=1:                ' van januari 1985.
180 return
```

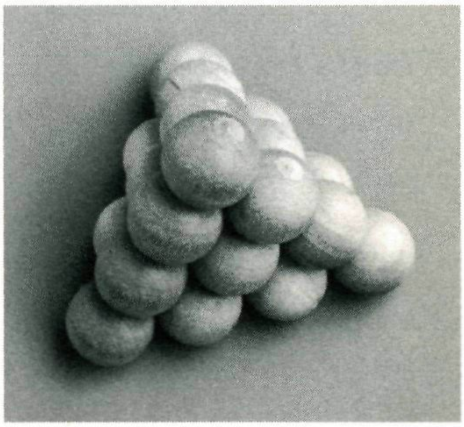
TETRAËDER

Hier volgt een artikel over een puzzeltje, dat ik te koop zag. Het vraagt ruimtelijk inzicht.



Het puzzeltje bestaat uit vier onderdelen. Alle onderdelen zijn opgebouwd uit even grote bolletjes, die aan elkaar geplakt zijn.

Plaats deze vier onderdelen zodanig op elkaar, dat je een tetraëder, een regelmatige vierzijdige pyramide, krijgt.



Zie zo nodig bladzijde 30.

Arnold de Greef

GETALBOMEN

Onder deze naam start de redactie met een nieuwe serie. In elk nummer willen we een voorbeeld van een getallenboom opnemen. De bedoeling is dat we voornamelijk door de abonnees aangeleverde voorbeelden plaatsen.
Stuur bijdragen naar het redactiesecretariaat, Molenstraat 31, 4841 CA Prinsenbeek.
In dit nummer tref je een door A. Hanekuyk ingestuurde 'boom' aan.

Henk Huijsmans

EEN BEETJE ALGEBRA 2

Kun je aantonen, dat voor elk drietal positieve getallen p, q en r altijd geldt:

$$\frac{p}{q}+\frac{q}{r}+\frac{r}{p}\geq 3$$

Het lijkt een simpel probleem, maar er komt nogal wat bij kijken.

STAP ÉÉN

In deze eerste stap stellen we vast, dat $(p-q)^2 \geq 0$ is.

Daaruit volgt, dat
$p^2+q^2-2pq \geq 0$ is.
Evenzo zijn ook

$$q^2+r^2-2qr \geq 0$$

$$r^2+p^2-2rp \geq 0$$

Tel de laatste drie ongelijkheden op en deel daarna door twee, dan:

$$p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp \geq 0$$

STAP TWEE

Als tweede stap naar het gegeven probleem gebruiken we, dat

$$(p+q+r)(p^2+q^2+r^2-pq-qr-pr) = p^3+q^3+r^3-3pqr.$$

Dat kun je zelf nagaan door de haakjes weg te werken.

Omdat de tweede factor van het linkerlid volgens de eerste stap minstens nul is, is het rechterlid dat ook, dus: $p^3+q^3+r^3 \geq 3pqr.$

Stel nu
$x=p^3$, $y=q^3$ en $z=r^3$,
dan is

$$x+y+z \geq 3\cdot\sqrt{(xyz)}$$

Dit gebruiken we in stap drie.

STAP DRIE

$$\frac{a}{b}=x,\quad \frac{b}{c}=y \quad\text{en}\quad \frac{c}{a}=z$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\left\{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\right\}}$$

De wortel is 1, dus hieruit volgt hetgeen te bewijzen was.

ANDERS?

Als iemand een kortere en/of elegantere oplossing weet, dan mag hij/zij hem opsturen naar de redactie.

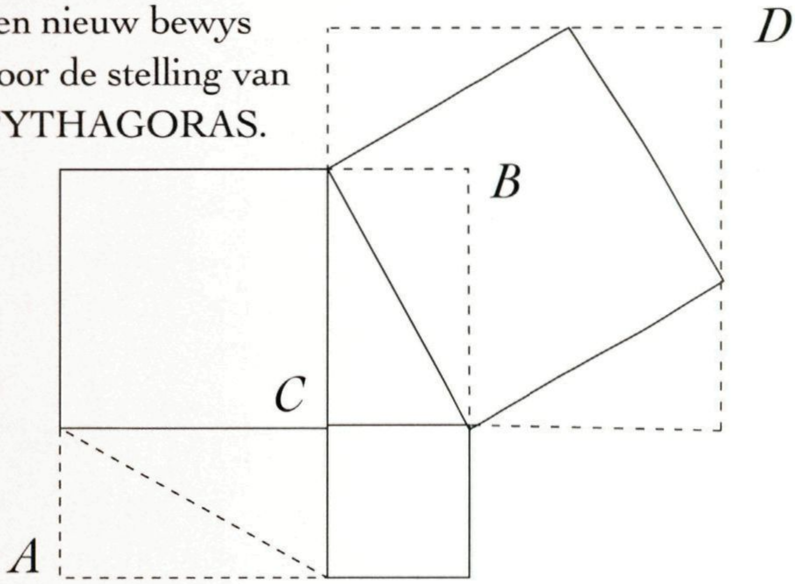
De beste inzending wordt gepubliceerd.

Sonja Svetachova

IDEEËN VA

Van de stelling van Pythagoras is een groot aantal bewijzen gegeven.
Eén van deze bewijzen kwam uit een onverwachte hoek: de Nederlandse schrijver Eduard Douwes Dekker, beter bekend onder zijn pseudoniem Multatuli. In zijn bewijs (Ideeën, 529) gebruikt hij nog de uitdrukking kwadraat voor vierkant. Bovendien was voor hem een vierkant al bepaald door de twee uiteinden van een diagonaal, zodat hij voor de omschrijving maar twee letters nodig had. Ook op het gebied van de kansrekening heeft hij onderzoek gedaan. Vooral van de roulette was hij bezeten.

529. Ik vond onlangs een nieuw bewys voor de stelling van PYTHAGORAS.



Hier is het. Door, als op nevenstaand voorbeeld, zes driehoeken te construeren - ieder gelyk aan den gegeven rechthoekigen driehoek - verkrygt men twee gelyke kwadraten A B en C D. *)
Als men van elk dezer figuren vier driehoeken aftrekt, bewyst de gelykheid van 't overschot aan weerszy, wat er te bewyzen was.

Eenvoudiger kan het niet, dunkt me.
Na dit bewys gevonden te hebben, vernam ik dat er een werkje bestond, waarin dit onderwerp werd behandeld.
Ik schafte my dat boek-

GETALBOOM

Aflevering 1

1x9+2 = 11
12x9+3 = 111
123x9+4 = 1111
1234x9+5 = 11111
12345x9+6 = 111111
123456x9+7 = 1111111
1234567x9+8 = 11111111
12345678x9+9 = 111111111

A. Hanekuyk

N MULTATULI

jen aan**) en vond er myn demonstratie niet in. Ook meen ik dat geen der daarin voorkomende bewyzen zoo aanschouwelyk en helder is als 't myne. Wie beweren mocht dat het reeds vroeger was gevonden, zou me verplichten met de opgave waar 't gepubliceerd is? ***)
Professor HOFMANN kende 't niet, en ook STROOTMANN zou er wèl melding van gemaakt hebben, als 't hem bekend ware geweest. HOFMANN schynt een speciale studie te hebben gemaakt zoowel van de propositie zelve, als van de litteratuur over dit onderwerp. Ik hoop dat iemand vragen zal welk nut het heeft te zoeken naar eenvoudiger bewyzen voor 'n bekende waarheid? Dit streven leidt tot helderheid van opvatting en gewent ons aan de duidelijke voorstelling.
"Bien poser une question, c'est presque la résoudre."
Dit geldt zowel in de menschkunde, moraal, politiek, enz. als in de eigenlyk gezegde wiskunde. De Natuur kent al die onderscheidingen niet. Zy streeft - onbewust - met één middel naar één doel, en er is verband tusschen de helderheid van myn bewys voor de stelling van PYTHAGORAS, en de eenvoudigheid der geloofsbelydenis die ik neerlegde in de vertelling over LYSTERMANNETJE. De leerlingachtige verdeeling in verschillende soorten van kunden, in *logiën*, is een gevolg onzer kleinheid, die niet in staat is alles tegelyk te omvatten. Wy ontleden, waar de Natuur samenvat, en spellen, wat zy schryft. Nu, schande is 't niet, dat wy door spellen tot lezen moeten komen. Maar 't is van belang, te onthouden dat ons spellen geen lezen is.

*) *Volgens 't postulaat, zyn de zyden onderling gelyk en de hoeken recht. Dat de figuren A B en C D inderdaad vier gelyke zyden hebben en niet meer, wordt hieruit bewezen, dat overal de tegen die zyden aanliggende hoeken twee rechten uitmaken.*

**) *De 47e Propositie van EUCLIDES, door J.J.I. HOFMANN, hoogleraar in de wiskunde te Aschaffenburg, vertaald door H.STROOTMANN, lector in de wiskunde, aan de militaire akademie te BREDA. (1865).*

***) *Niemand heeft my tot nu toe de prioriteit betwist. (1872)*

PROBLEEM SERAJEVO

Door elk stuk een nummer te geven, dat een macht van twee is, dus 1, 2, 4, 8 of 16, kunnen door optelling de combinaties van 1 t/m 31 worden gemaakt.

We gebruiken: *elk getal is òf een macht van 2, òf op een unieke manier een som van machten van 2.*

Indien stuk 1, 4 en 8 gelijktijdig vuren wordt het getal 13 genoteerd. Om dat getal weer te kunnen uitlezen moet er andersom worden gewerkt: trek van 13 de hoogste macht van 2 af, dus 8 en er blijft 5 over.
Herhaal die procedure, totdat je op nul bent uitgekomen.

Tijdsinterval	Som van de nummers van de stukken	Nummers van de stukken				
		16	8	4	2	1
10:00-10:03	5	-	-	X	-	X
10:03-10:08	26	X	X	-	X	-
10:08-10:13	21	X	-	X	-	X
10:13-10:15	11	-	X	-	X	X
10:15-10:16	20	X	-	X	-	-
10:16-10:18	9	-	X	-	-	X
10:18-10:21	13	-	X	X	-	X
10:21-10:24	18	X	-	-	X	-
10:24-10:26	13	-	X	X	-	X
10:26-10:30	30	X	X	X	X	-
10:30-10:31	2	-	-	-	X	-
10:31-10:35	12	-	X	X	-	-
10:35-10:38	14	-	X	X	X	-
10:38-10:42	22	X	-	X	X	-
10:42-10:46	8	-	X	-	-	-
10:46-10:50	10	-	X	-	X	-
10:50-10:52	22	X	-	X	X	-
10:52-10:53	8	-	X	-	-	-
10:53-10:58	2	-	-	-	X	-
10:58-11:00	30	X	X	X	X	-
Aantal schoten per stuk:		8	12	11	11	6

Hierdoor blijkt dus dat de stukken 8, 4 en 1 gelijktijdig hebben geschoten.
Om het gehele rapport te kunnen uitlezen dient er een matrix met 7 kolommen te worden gemaakt.
Zet in de eerste kolom de tijdseenheid en in de tweede de gerapporteerde stukkencombinatie.
Elke volgende kolom is bestemd voor een stuk waarvan het nummer bovenaan wordt neergezet.
Door uitlezing komt er een kruisje te staan in de kolom van het stuk dat heeft gevuurd. Het hoogst gerapporteerde getal is 30 zodat er 5 stukken in stelling zijn.
Stuk nummer 1 schoot 6 keer, 2 schoot 11 keer, 4 schoot 11 keer, 8 schoot 12 keer en 16 schoot 8 keer.

Er is totaal 8+12+11+11+6 = 48 keer geschoten.
Stuk 8 schoot het meest, namelijk 12 keer.
Stuk nummer 1 staakte na 10:26 uur het vuren zodat het niet meer werd gehoord.

Aangenomen wordt dat het stuk door de vijand onklaar is gemaakt.

OPMERKING:
indien er nog meer stukken waren geweest, kreeg het volgende stuk een nummer gelijk aan twee maal het voorgaande nummer.
De som van alle getallen geeft dan het aantal combinaties aan.

Aantal stukken	Laatste cijfer	Aantal combinaties
6	32	63
7	64	127
8	128	255
9	256	511
10	512	1024
...		

Ook in andere gevallen kan deze techniek van digitaliseren worden gebruikt.

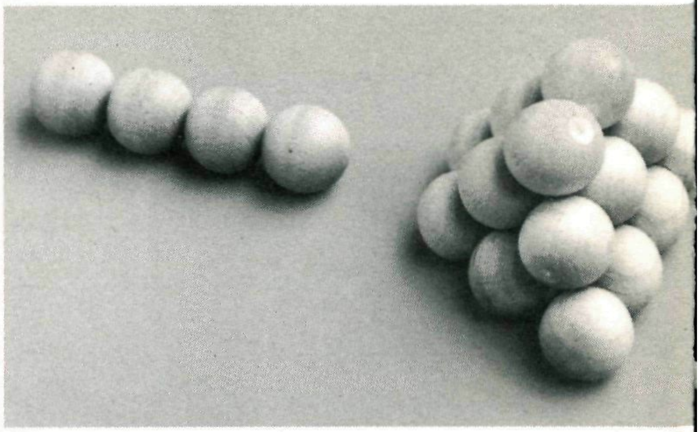
BIJ STICKERS

Carla kan alleen weten welke kleur ze heeft als ze twee rode stickers heeft zien opplakken. Omdat ze geen antwoord kan geven zitten er dus één of twee witte bij. Dit weet Benno nu.
Hij weet dus zijn kleur als hij bij Annet een rode sticker heeft gezien. Omdat hij het antwoord ook niet kan geven, weet Annet met zekerheid dat zij een witte sticker heeft.
Uit het voorgaande is duidelijk dat Carla alleen wint als de andere twee een rode sticker hebben. De kans hierop is $0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}1$
Benno wint als hij een witte en Annet een rode sticker heeft. Deze kans is $0{,}4 \cdot 0{,}75 = 0{,}3$.
Annet wint zodra ze een witte sticker heeft.
De kans is 0,6.
Bij dit probleem krijg je de meeste informatie en heb je de grootste winstkans als je niets gezien hebt!

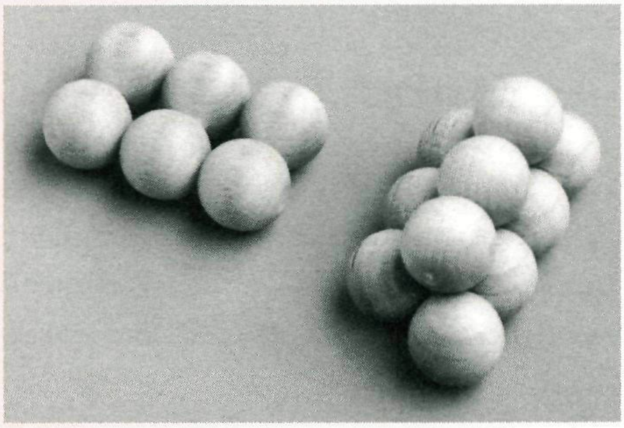
OPLOSSINGEN

TETRAEDER PUZZEL

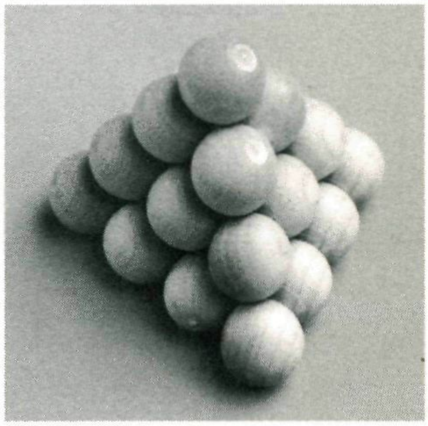
1



3



2



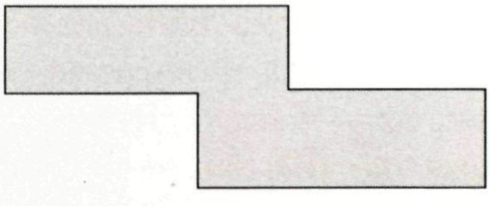
4

HET MASSIEVE BLOK

Het kan niet, want de stenen hebben zijvlakken, die altijd een vijfvoud als oppervlakte hebben.

Het bedoelde blok heeft een zijvlak met oppervlakte 72 x 96 en dat is geen vijfvoud.

DE ELFDE UITSLAG



BEREKENING VAN EEN SOM

Gevraagd wordt
100+101+102+• • •+998+999.
Het gemiddelde van de eerste en laatste term is 549,5.
Er zijn 999-99=900 termen.
De som is 900 x 549,5 = 494.550.

MACHTEN VAN TWEE

Machten van twee geven bij ontbinding geen oneven factor. De ene factor moet immers even en de andere oneven zijn.

OPLOSSING VAN 60

$a{+}{+}b = \frac{1}{2}(b+1-a)(a+b) = 60$

$(b+1-a)(a+b) = 120$

$120 = k \cdot g = 1\text{x}120 = 2\text{x}60 = \mathbf{3x40} = 4\text{x}30 =$ $\mathbf{5x24} = 6\text{x}20 = \mathbf{8x15} = 10\text{x}12$.

Omdat $k<g+1$ behoeven we niet verder te gaan met 12x10, 15x8,• • •.

De vetgedrukte ontbindingen zijn bruikbaar, omdat de ene factor oneven en de andere even is.

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}(1+g-k) \\ b = \frac{1}{2}(k+g-1) \end{cases}$$

Oplossing met k=3 en g=40:
a=19 en b=21, dus 60 = 19++21

Oplossing met k=5 en g=24:
a=10 en b=14, dus 60 = 10++14

Oplossing met k=8 en g=15
a=4 en b=11, dus 60 = 4++11

Meer oplossingen kunnen er niet zijn.
Samengevat:
60 = 19++21 = 10++14 = 4++11.

OPLOSSING VAN 61/64

61 is een priemgetal > 2 en is dus oneven. 61 = 30++31 = 30 + 31.
Dit is de enige mogelijkheid.
64 is een macht van 2 en kan niet als sliert geschreven worden.

GEMENGDE BREUK

Manier 1:

$a = 0{,}123$ en $100.000a = 12345{,}45$

$$\begin{array}{r} 1000a = 123{,}45 \\ \hline 99.000a = 12.222 \text{ exact} \end{array} \; -$$

$$a = \frac{12.222}{99.000} = \frac{679}{5500}$$

Manier 2:

$a = 0{,}12345 = 0{,}123 + b$ met $b = 0{,}00045$.

$100b = 0{,}045$, dus $99b$ = exact 0,045

$$b = \frac{0{,}045}{99} = \frac{45}{99.000} = \frac{5}{11.000}.$$

$$\text{Dan is } a = \frac{123}{1000} + \frac{5}{11.000} = \frac{123 \times 11 + 5}{11.000} = \frac{679}{5500}.$$

VERANTWOORDING ILLUSTRATIES:

Cartoons: Pieter Hoogenbirk
Foto's Pagina 30: Roelof Feninga

ABONNEMENTEN:

Nederlandse en Belgische abonnees:
aanmelden telefonisch 070 - 314 35 00,
of schriftelijk, NIAM b.v.
Antwoordnummer 97007,
2509 VH Den Haag.

TARIEVEN:

Jaarabonnement Pythagoras *f* 36,–
Jaarabonnement inclusief Archimedes *f* 67,–
Jaarabonnement België *f* 46,–/of BF 820,–
Jaarabonnement België
inclusief Archimedes *f* 77,–/of BF 1490,–
Jaarabonnement Buitenland *f* 52,–
Losse nummers *f* 8,–/of BF 150,–

BETALING:

Wacht met betalen tot u de acceptgirokaart krijgt toegestuurd.
Bij tussentijdse abonnering ontvangt u alle nummers van de lopende jaargang.
Abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk bij de uitgever is opgezegd.

UITGEVER:

NIAM b.v.,
Neuhuyskade 94,
2596 XM Den Haag.
Tel.: 070 - 314 35 00
Fax: 070 - 314 35 88
Giro 33.84.52.