

PRYTHAGORAS

WISKUNDE TIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

35 E JAARGANG

JUNI 1996 NUMMER 4

*De derdegraads
vergelijking*

10

*Gelijke
gravitatiekracht*

20

Delen door 5

24

*Cijfers
ontfutselen*

28



INHOUD

UITGAVE:

Pythagoras is een uitgave van NIAM b.v. en verschijnt zesmaal per jaar. Een jaargang loopt van september tot en met augustus.

REDACTIE:

Henk Huijsmans
Jan Mahieu

NIEUWE ARTIKELN:

Molenstraat 31,
4841 CA Prinsenbeek

CORRESPONDENTIE-ADRES:

Reacties,
oplossingen enz.
Jan Mahieu,
Loodiep 29,
8032 TG Zwolle.

MEDEWERKERS:

Bob de Jongste,
Hans de Rijk,
Thijs Notenboom,
Frank Roos.

• VOORWOORD	3
• FRACTALS	4
• REPETEERBOOM	10
• DE DERDEGRAADS VERGELIJKING	10
• MATHEMATELIE	11
• KUSTOBSERVATIE	12
• EEN VERDEELPROBLEEM	14
• TV-QUIZ	15
• VIERKANT WISKUNDE ZOMERKAMPEN	16
• FASCINERENDE CIRKEL	18
• GELIJKE GRAVITATIEKRACHT	20
• SPEUREN OP HET SPOOR	21
• EIGENAARDIGHEDEN	22
• PARALLELLOGRAMMEN IN EEN VIERHOEK	22
• DELEN DOOR 5	24
• PLANK SCHILDEREN	25
• RECTIFICATIE BIJ $\cos 18^\circ$ EN ZO	26
• CIJFERS ONTFUTSELEN	28
• DES LEZERS PENNEVRUCHT	29
• OPLOSSINGEN	30

VAN DE REDACTIE

In dit vierde nummer van de vijfendertigste jaargang van Pythagoras diverse bijdragen van lezers. Het verheugt de redactie dat op onze oproep om mee te werken diverse abonnees gereageerd hebben. Iedereen kan meewerken aan het tijdschrift.

Stuur ideeën, wensen, artikeltjes, suggesties, aardigheidjes, enzovoort naar het redactiesecretariaat.



EEN GREEP UIT DE INHOUD

De Cantor-verzameling is een eenvoudige fractal. Deze verzameling is genoemd naar Cantor die deze in 1883 heruitvond. In 1875 was Henry Smith de eerste die deze verzameling uitvond. Wat is eigenlijk een fractal? Lees verder op pagina 4.

Soms is een derdegraads vergelijking op te lossen.
Hoe men dan te werk moet gaan is te lezen op pagina 10.

Opnieuw opgaven maken die eerder al door duizenden leerlingen waren opgelost stoorde Hans de Rijk. Toch kreeg hij lol in wiskunde. Waarom dat zo was is te vinden op pagina 18.

In het artikel op pagina 20 meer over de vierde wet van Newton.

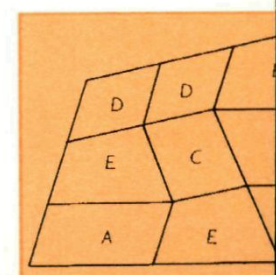
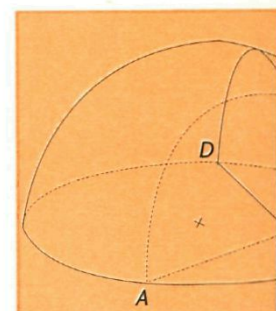
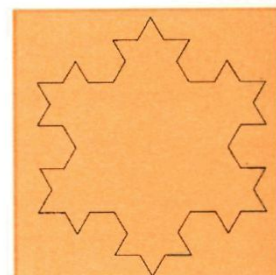
Wat is het verband tussen wiskunde en een plank schilderen?
Lees verder op pagina 25.

Verder wordt onder andere aandacht besteed aan de volgende onderwerpen: 'Parallelogrammen in een vierhoek', 'TV-QUIZ', 'Een verdeelprobleem', 'Delen door 5', en 'Priemgetallenverdelingen.'

Hopelijk kan iedereen weer wat van zijn gading vinden.

Veel lees- en puzzelplezier.

Henk Huijsmans



FRACTALS

Als je een cirkel bekijkt, dan is die rond.

Kijk je er naar met een vergrootglas, dan lijkt hij al een stuk rechter, en hoe meer je hem vergroot, hoe meer hij op een rechte lijn gaat lijken. De cirkel verliest zijn structuur onder vergroting.

Met fractals is dat anders. Er blijft altijd dezelfde structuur te zien.

Een fractal is nooit saai.

CANTOR

De eenvoudigste fractal is de Cantor-verzameling. Deze is in 1875 al uitgevonden door Henry Smith, maar in 1883 heruitgevonden door Cantor. Hoe maak je de Cantor-verzameling?

Begin met het interval $[0,1]$ en verwijder daarvan het open interval $<\frac{1}{3}, \frac{2}{3}>$. Je hebt dan E_1 .

E_2 krijg je door van de twee overgebleven intervallen ook weer het midden te verwijderen. Je haalt dus $<\frac{1}{9}, \frac{2}{9}>$ en $<\frac{7}{9}, \frac{8}{9}>$ weg.

Je hebt nu vier intervallen over, elk met lengte $\frac{1}{9}$.

Je gaat nu op dezelfde manier door. Iedere keer verwijder je de middelste intervallen met een lengte die $\frac{1}{3}$ is van het oorspronkelijke interval. Zie figuur 1.



figuur 1

Hoeveel verwijderen we nu eigenlijk in totaal?

De eerste keer halen we een interval met lengte $\frac{1}{3}$ weg.

Daarna verwijderen we twee intervallen met lengte $\frac{1}{9}$.

En zo gaan we door. In totaal halen we dus de volgende lengte weg:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + \frac{4}{27} + \dots = \\ & = \frac{1}{3} \cdot (1 + \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{1}{9} + \dots) = \\ & = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^k = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1 \end{aligned}$$

Houden we dan eigenlijk nog wel wat over?

Ja! En wel een heleboel, want iedere keer dat we iets verwijderen, halen we open intervallen weg en houden we dus alle eindpunten over.

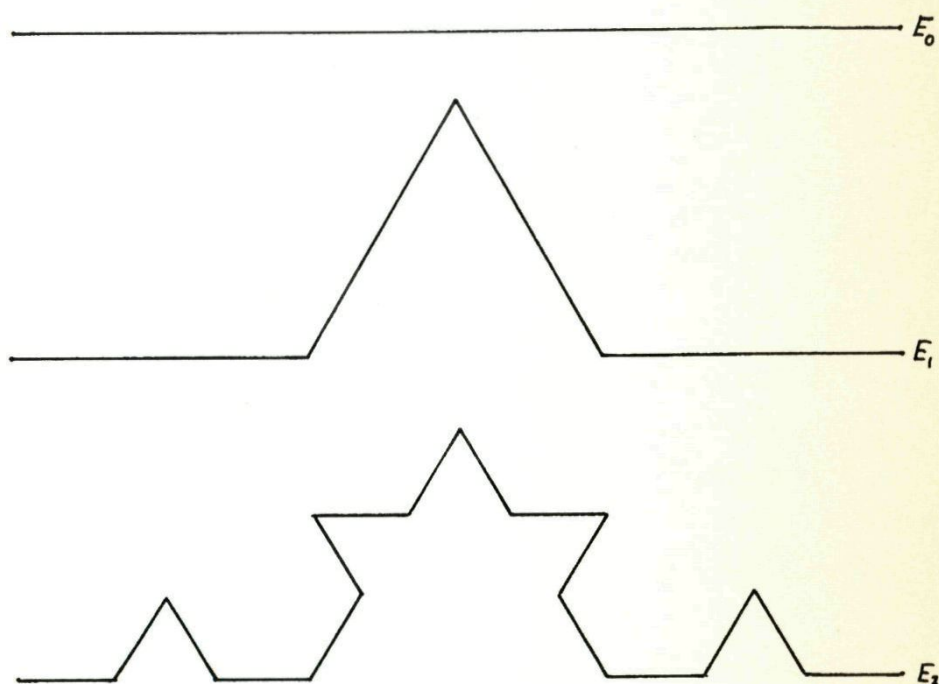
Dus eerst 0 en 1; bij de volgende stap $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{3}$ enzovoort. Dus bij elkaar hebben we nog steeds oneindig veel punten. Hoe zouden we nu de *dimensie* van deze fractal moeten definiëren? Aan de ene kant heeft hij geen lengte en zijn we dus geneigd hem 0-dimensionaal te noemen, maar aan de andere kant bestaat hij wel uit oneindig veel punten, dus moeten we hem toch maar 1-dimensionaal noemen.

KOCH

Een ander voorbeeld is de Koch-kromme.

Ook hier begin je met het interval $[0,1]$ en haal je weer het open interval $\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle$ weg, maar deze keer vervang je het door een gelijkzijdige driehoek.

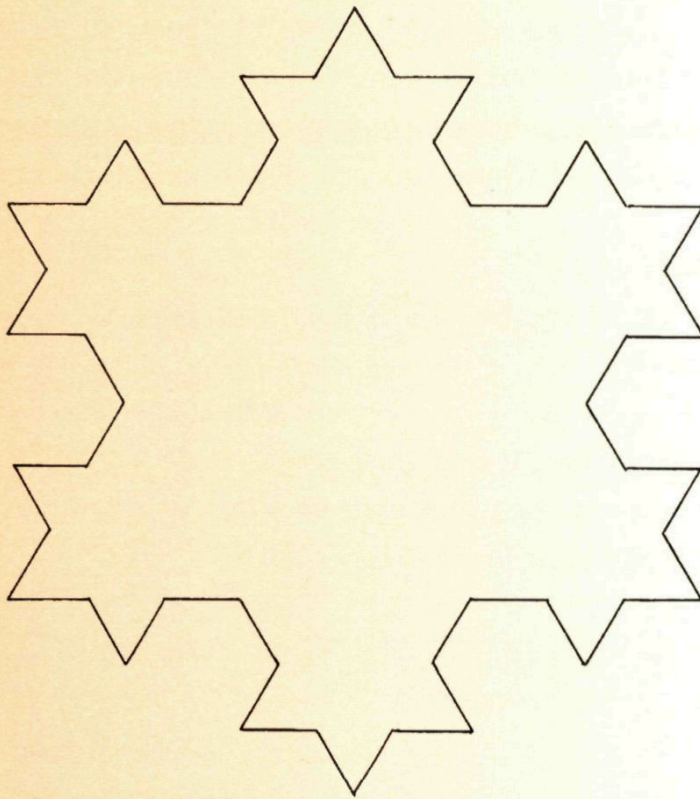
Vervolgens doe je hetzelfde voor de vier zijden die je nu hebt, en zo ga je door. Zie figuur 2.



figuur 2

Je ziet gemakkelijk dat de lengte van E_1 gelijk is aan $\frac{4}{3}$ maal de lengte van E_0 . Op deze manier doorgaand is ook de lengte van E_n $\frac{4}{3}$ keer de lengte van E_{n-1} en is dus de lengte van E_n $(\frac{4}{3})^n$ keer de lengte van E_0 . Hoe groter dus wordt, des te langer wordt de lengte.

Als je nu drie van deze krommes aan elkaar plakt, krijg je het plaatje van een sneeuwvlok zoals in figuur 3.



figuur 3

De omtrek van deze sneeuwvlok is oneindig, maar tegelijkertijd is de oppervlakte eindig en niet eens zo heel groot. Wat zou de dimensie van de sneeuwvlok en de Koch-kromme zijn? Is het 1 of 2 of misschien nog iets anders?

SIERSPINSKI

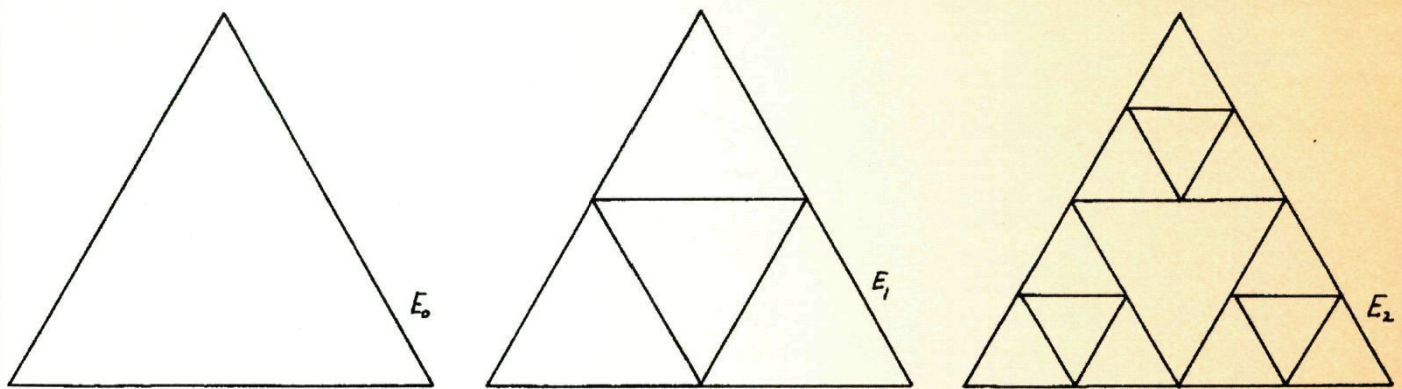
Een derde voorbeeld is het 'Sierpinski-Gasket'.

Deze keer begin je met een gelijkzijdige driehoek en je gaat te werk zoals in figuur 4.

De oppervlakte van E_1 is $\frac{3}{4}$ van die van E_0 en net zoals bij de Koch-kromme zie je al snel dat de oppervlakte van E_n gelijk is aan $(\frac{3}{4})^n$ maal de oppervlakte van E_0 .

Je ziet nu dus dat de oppervlakte snel kleiner wordt.

Als n heel groot wordt dan gaat de oppervlakte naar 0, maar er zijn toch nog een heleboel punten die niet weggehaald worden. Hoe zit dit?



figuur 4

DIMENSIE

Laten we eens wat beter nadenken over de betekenis van dimensie.

Laat $I = [0,1]$ het eenheidsinterval zijn. We definiëren de lengte van een lijnstuk L als het aantal keren dat I in L past.

Nu 2-dimensionaal. Laat $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ het eenheidsvierkant zijn. De oppervlakte van een figuur A is dan gedefinieerd als het aantal keren dat I^2 in A past.

Dus kunnen we lengte in het algemeen definiëren als het aantal eenheden dat er in past. Dus voor een lijnstuk L heb je m kopieën nodig om een m keer zo'n lang lijnstuk te maken.

Van een vierkant A heb je er m^2 nodig om een vierkant te maken dat m keer zo groot is.

Laat nu c het aantal kopieën zijn dat je nodig hebt om een m keer zo groot object te krijgen. Dat hangt van de dimensie van het object af. Voor een lijn is $c = m$, maar voor een vierkant is $c = m^2$ en voor een kubus is $c = m^3$.

Dus $c = m^D$, waarbij D de dimensie is.

Maar we wilden juist over D praten, dus moeten we D hieruit oplossen.

Dat is niet zo moeilijk want: $D = \log m^c$ dus

$$D = \frac{\log c}{\log m}$$

We kunnen nu de fractal-dimensie definiëren.

Maar eerst moeten we weten wat een fractal is.

Afspraak: A is een fractal als A de vereniging is van c kopieën van zichzelf die ieder $\frac{1}{m}$ keer de oorspronkelijke lengte zijn.

Afspraak: De fractal-dimensie van A is $D_A = \frac{\log c}{\log m}$

CONTROLE 1

Als je een nieuw begrip in de wiskunde introduceert, dan is het natuurlijk wel de bedoeling dat alle oude afspraken nog steeds gelden. Laten we nu eens bekijken of dat het geval is. We weten al dat de dimensie van een lijn 1 is.

En bekijk nu eens onze nieuwe afspraak. Een lijn L bestaat uit m kopieën van het eenheidsinterval en zo'n eenheidsinterval heeft dus een lengte van $\frac{1}{m}$ keer de lengte van L .

$$\text{Dus } D_L = \frac{\log m}{\log m} = 1.$$

Dus voor 1-dimensionale objecten geven de twee afspraken van dimensie hetzelfde antwoord.

CONTROLE 2

En nu eens kijken naar vierkanten.

We verwachten dat de dimensie van een vierkant 2 zal zijn.

Een vierkant bestaat uit m^2 kopieën van het eenheidsvierkant en ieder van die vierkantjes heeft een lengte van $\frac{1}{m}$ van het grote vierkant.

$$\text{Dus we zien dat } D_V = \frac{\log m^2}{\log m} = 2.$$

FRACTAL 1

Maar hoe zit het met onze fractals? Laten we beginnen met de Cantor-verzameling.

Deze bestaat uit twee kopieën van zich zelf en iedere kopie heeft $\frac{1}{3}$ keer de lengte van het origineel.

$$\text{De dimensie zou dus zijn: } D_C = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309.$$

Dit is in overeenstemming met onze eerder gemaakte opmerkingen over de Cantor-verzameling.

Het is niet 0-dimensionaal maar ook niet 1-dimensionaal.

Het zit er tussenin.

FRACTAL 2

Nu de Koch-kromme. Deze bestaat uit vier kopieën van zichzelf, ieder een derde van de lengte van het origineel.

Dus nu hebben we $D_K = \frac{\log 3}{\log 4} = 1,2619$.

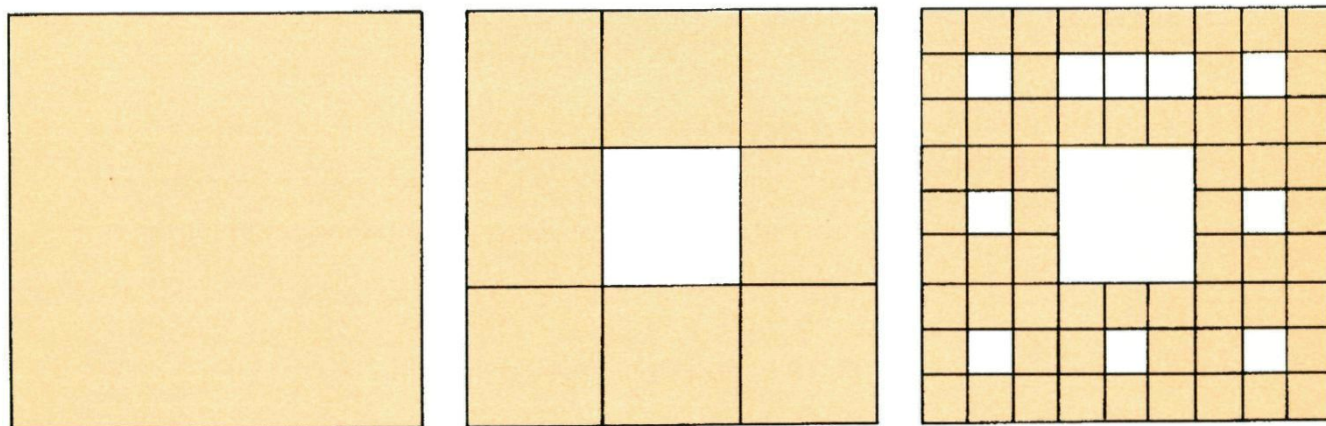
Deze keer dus een dimensie tussen 1 en 2.

Ook dat past goed in ons plaatje, want de Kochkromme mag dan oneindig lang zijn, veel oppervlakte heeft hij niet.

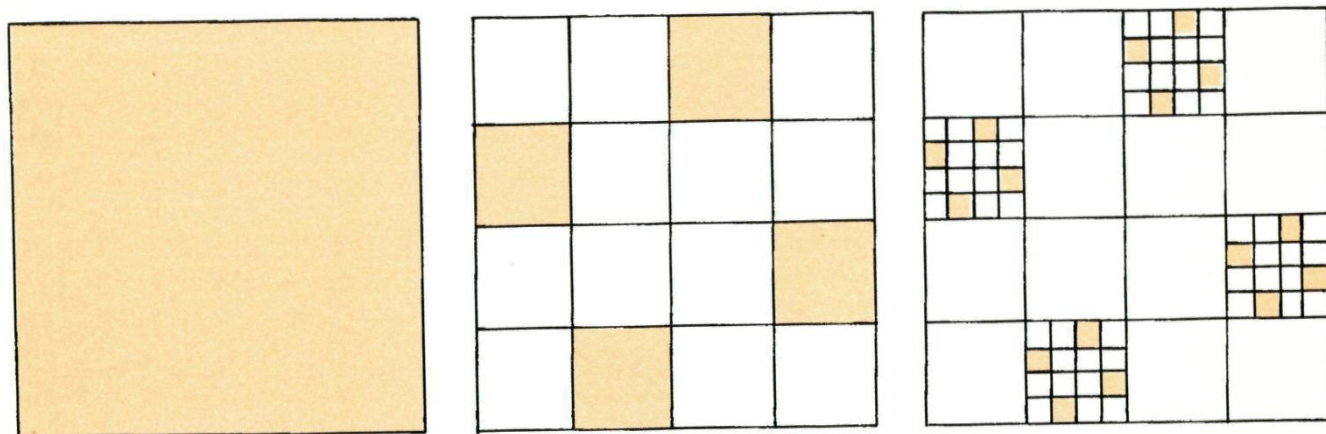
ZELF DOEN

Misschien dat je nu de dimensie van het 'Sierpinski-gasket' kunt uitrekenen en misschien ook die van de fractals in de figuren 5 en 6 hieronder.

figuur 5 'Sierpinsky Carpet'



figuur 6 'Cantor Dust'



Meike Akveld

DE DERDEGRAADS

Soms is een vergelijking van het type $ax^3+bx^2+cx+d=0$ met $a \neq 0$ tot een oplossing te brengen.

WERKWIJZE

We gaan aan de hand van een voorbeeld zien hoe die methode werkt. Van te voren is uitgekiend, dat we uitsluitend met gehele getallen te doen hebben. Dan verdrinken we onderweg niet in ingewikkelde berekeningen. In het algemeen kunnen we echter tegen breuken en derdemachts-wortels aanlopen. Als je vertrouwd bent met complexe getallen, dan kom je een stuk verder met het vinden van oplossingen.

HET VOORBEELD

Los op: $5x^3+40 = -45x(x+1)$

Eerst delen we links en rechts door de coëfficiënt van x^3 , door 5 dus, verwijderen we haakjes en herleiden we het rechter lid op nul: $x^3+9x^2+9x+8 = 0$ (1)

Dit is de *normaalvorm*

REDUCEREN

Nu gaan we deze vergelijking reduceren. Dat betekent, hier dat we de vergelijking willen veranderen in de vorm $y^3+py+q = 0$.

Dat lukt met de volgende invulling:

vervang x door $y - \frac{\text{de coëfficiënt van } x^2}{3}$.

Dus vervang x door $y-3$ (2)

Dat geeft:

$$(y-3)^3+9(y-3)^2+9(y-3)+8 = 0$$

Omdat $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ kunnen we

$(y-3)^3+9(y-3)^2+9(y-3)+8 = 0$ veranderen in $y^3-18y+35 = 0$. Dit is de gereduceerde vorm van (1)

TWEE HULPVARIABELEN

Nu gaan we y vervangen door $u+v$, dus $y = u+v$(3)

$$(u+v)^3-18(u+v)+35 = 0.$$

REPETEERBOOM

$$\frac{33}{1} = 33,0$$

$$\frac{333}{11} = 30,27$$

$$\frac{3333}{111} = 30,027$$

$$\frac{33333}{1111} = 30,0027$$

Arnold de Greef

VERGELIJKING

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 18(u+v) + 35 = 0.$$

$$u^3 + v^3 + (3uv)(u+v) - 18(u+v) + 35 = 0$$

$$u^3 + v^3 + (3uv - 18)(u+v) + 35 = 0$$

Omdat we twee hulpvariabelen hebben gekozen, mogen we zelf één extra eis stellen.

Het is nu handig om $3uv - 18 = 0$ te kiezen, of

$$uv = 6 \dots\dots\dots(4)$$

$$\text{Dan vereenvoudigt } u^3 + v^3 + (3uv - 18)(u+v) + 35 = 0$$

drastisch tot

$$u^3 + v^3 = -35 \dots\dots\dots(5)$$

$$(u^3 + v^3)^2 = 1225$$

$$\frac{4(uv)^3 = 864 \text{ volgens (4)}}{(u^3 + v^3)^2 = 361.}$$

Als hier met een ander voorbeeld een negatief getal had gestaan, dan konden we niet verder en dan werkte deze methode niet; wel als we gebruikt maken van complexe getallen.

We hebben nu:

$$u^3 - v^3 = 19 \dots\dots\dots(6)$$

of $u^3 - v^3 = -19$. Onderzoek later zelf volgens onderstaande manier, dat dan de waarden van u en v verwisseld zijn.

Uit (5) en (6) volgt:

$$u^3 = -8 \text{ of } u = -2 \text{ en}$$

$$v^3 = -27 \text{ of } v = -3.$$

$$\text{Volgens (3) is } y = -5.$$

HOOFDLIJN

We weten nu, $y = -5$ een oplossing is van $y^3 - 18y + 35 = 0$.

Dat is onmiddellijk controleerbaar.

DE REST-STELLING

zegt: als $x = x_1$ een oplossing is van

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

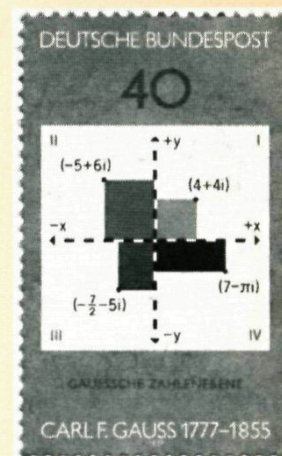
dan bevat die som de factor $(x - x_1)$.

Deze reststelling geldt ook voor hogere-machts-polynomen, maar dat is nu niet aan de orde.

MATHEMATELIE

Onder deze titel is door Henk van Dijk een boekje over mathematische filatelie geschreven.

Wiskundige motieven komen op tal van postzegels voor.



Voor verzamelaars van postzegels met één of ander mathematisch motief kan dit boekje onvermoede mogelijkheden bieden. Het boekje is te bestellen door f14,90 (f12,50 plus f2,40 verzendkosten) over te maken op girorekening 58 35 637 ten name van H.G. van Dijk te Hoogeveen, onder vermelding van 'Mathematelie'.

Volgens de rest-stelling kunnen we $y^3 - 18y + 35$ delen door $y - 5 = y + 5$.

De volgende staartdeling moet dan rest nul opleveren:

$$\begin{array}{r}
 y+5 \mid y^3 \qquad -18y+35 \mid y^2-5y+7 \\
 \underline{y^3+5y^2} \\
 -5y^2-18y \\
 \underline{-5y^2-25y} \\
 7y+35 \\
 \underline{7y+35} \\
 \text{rest } 0
 \end{array}$$

Dat wil zeggen: $y^3 - 18y + 35 = 0$ als

$$(y+5)(y^2-5y+7) = 0.$$

Een produkt is nul als één der factoren nul is.

$$y+5 = 0 \text{ of } y^2-5y+7 = 0.$$

$y+5 = 0$ geeft de ons reeds bekende oplossing $y = -5$.

$y^2-5y+7 = 0$ heeft geen oplossing, want de discriminant is kleiner dan nul.

De enige oplossing is dus $y = -5$.

In verband met (2) is $x = y-3$ of $x = -8$ de enige oplossing van $x^3 + 9x^2 + 9x + 8 = 0$ en dus van de oorspronkelijke vergelijking $5x^3 + 40 = -45x(x+1)$. Invullen van $x = -8$ toont onmiddellijk aan, dat de oplossing correct is.

Wie vertrouwd is met complexe getallen, kan nagaan, dat de discriminant bij $y^2-5y+7 = 0$ $D = -3$ is, zodat

$$y_2 = \frac{5+i\sqrt{3}}{2} \text{ en } y_3 = \frac{5-i\sqrt{3}}{2} \text{ is.}$$

Dan zijn x_2 en x_3 wegens (2) respectievelijk

$$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ en } \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

KUSTOBSERVATIE

In een havenplaats A loopt de kustlijn van het WZW (West-Zuid-West $247\frac{1}{2}^\circ$) naar het ONO ($67\frac{1}{2}^\circ$)

Een schip vaart de haven van A uit pal naar het Noorden.

Na 3000 meter gevaren te hebben peilt men een wrak B op de kust in het ZZO ($157\frac{1}{2}^\circ$).

Bereken de afstand tussen A en B.

De oplossing kun je vinden op pagina 30.

Bob de Jongste

HELP!

- $$uv = \frac{\text{de coëfficiënt van } x}{-3} \text{ en}$$

- Mogelijk bestaat y_1 niet als reëel getal.

- de rest-stelling toepassen.
- de 'resterende' tweedegraads vergelijking oplossen; die geeft y_2 en y_3 als ze bestaan.
- x_1 , x_2 en x_3 berekenen voor zover ze bestaan.

$$5y^3 = 30y^2 - 15y - 50 \text{ op te lossen.}$$

GESCHIEDENIS

Frank Roos

EEN VERDEELPROBLEEM

In een gezelschap van n personen worden - lootjes getrokken. Ieder schrijft zijn naam op een briefje; daarna worden de briefjes goed geschud en trekt ieder een willekeurig een briefje. Er zijn dus n briefjes met alle een verschillende naam erop. Wat is de kans dat de trekking slaagt, dat wil zeggen, dat iedereen de naam van een ander trekt?

DE OPLOSSING

1. Gunstige mogelijkheden zijn geslaagde trekkingen bij het loten: niemand treft een lot van zichzelf.
2. De kans op een geslaagde trekking is het aantal gunstige mogelijkheden gedeeld door het totale aantal mogelijkheden.
3. Het aantal gunstige mogelijkheden, wordt gegeven door $!n$. Waarom dit zo is, is niet eenvoudig uit te leggen. Dat deel van de kansberekening is erg lastig. Uitleg kun je schriftelijk van me krijgen. Dat kost je 5 nog bruikbare postzegels van 80 cent.
4. $!n$ werd in het artikel subfaculteiten behandeld (zie nummer 2 35^e jaargang). Het totaal aantal mogelijkheden is het aantal mogelijke ordeningen of permutaties van n elementen. Dat wordt gegeven door $n!$.
6. De kans dat trekking van de loten slaagt is $!n : n!$. Dat is juist de functie $p(n)$, zoals genoemd in het artikel 'subfaculteit'! $p(n)$ is dus een soort *kansfunctie*.

EEN VOORBEELD

Neem aan, dat er vijf personen meedoen met de loterij. Dan is $n = 5$. De kans op een geslaagde trekking is dan $p(5) = !5 : 5! = 44 : 120 = 11 : 30 \approx 0,3666 \dots$. Dat is bijna 37 %.

KANSEN EN HUN LIMIET

De kans op een geslaagde trekking nadert voor grote waarden van n tot $1:e \approx 0,36788$. We zeggen: als n naar oneindig gaat, is de limiet van de kans gelijk aan $1:e$. Je kunt dat redelijk goed aan de tabel zien, maar het is ook te bewijzen.

Immers $p(n)$ is juist de Taylor-reeks-ontwikkeling van $1:e$, waarbij n naar oneindig gaat. We kunnen $1:e$ een uitstekende benadering noemen voor de genoemde kans.



HET RESULTAAT

Uit de tabel in het genoemde artikel "subfaculteiten" kun je zien: als je de grootste kans wilt hebben dat de trekking van loten slaagt, moet je met twee personen aan tafel gaan zitten! In alle andere gevallen is er een grotere kans dat het misgaat. *In de praktijk moet je opnieuw lootjes trekken zodra het fout gaat.*

DE PRAKTIJK

Het leuke van dit probleem is, dat de formule direct en exact toepasbaar is op een werkelijke situatie. Het is voor de meeste mensen erg verrassend dat de kans van slagen zo laag ligt!

Probeer het maar eens uit in je omgeving: hoeveel procent zit men er na raden gemiddeld naast?

Whee Ky Ma, Wegalaan 39, 9742 NB Groningen

TV - QUIZ

Bij een TV-quiz mag de winnaar voor de hoofdprijs gaan: een auto!

In de zaal zijn drie grote gordijnen en achter één van deze staat, niet zichtbaar, de auto.

De kandidaat moet nu voor één van de gordijnen gaan staan. Op dat moment gaat de presentator voor een ander gordijn staan en zegt: 'Achter mijn gordijn bevindt zich de auto in elk geval *niet*!'

U mag nog veranderen.'

Wat moet de kandidaat doen, blijven

staan en afwachten, of voor het derde gordijn kiezen.

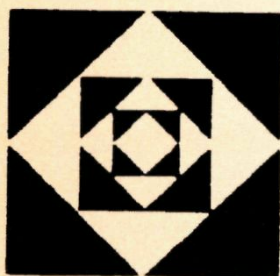
Als hij fout staat en verandert, wint hij zeker de auto.

Als hij goed staat, moet hij blijven staan. Bedenk een goed advies.

De oplossing kun je vinden in het volgende nummer.

Jan Mahieu

puzzels, denks **VIERKANT WISKUND**



VIERKANT organiseert in 1996 al voor het derde jaar zomerkampen voor 12-16 jarige jongeren die het leuk vinden op hun hersenen te kraken. Ex-deelnemers (ook meisjes!) vonden de kampen 'leuk, speels, uitdagend'. Probeer zelf ook te ervaren dat wiskunde leuk kan zijn voor iedereen!

In het kamp zullen diverse wiskundige activiteiten aangeboden worden: bijv. het oplossen van spannende vraagstukken; onderzoekprogramma's om je wiskundige horizon te verruimen, zelf wiskundige kunstwerken ontwerpen. De wiskundige activiteiten (circa 5 uur per dag) zullen worden aangevuld met lezingen, spelletjes en sportactiviteiten.

Het kamp wordt geleid door wiskundigen en universitaire wiskunde-studenten.

TIJDEN: KAMP B

van 19 augustus t/m
23 augustus,
met hetzelfde programma
als kamp B in 1995.

KAMP C

van 12 augustus t/m
16 augustus,
met een nieuw programma.

EEN DERDE KAMP

in het Noorden,
met programma A
(hetzelfde als in 1995)
is nog in voorbereiding!



letjes, wiskunst

ZOMERKAMPEN 1996

Verdere informatie en aanmeldingsformulieren te verkrijgen bij de wiskundedocenten of bij het Vierkant secretariaat:

Zsófia Ruttkay,
Faculteit der Wiskunde en Informatica, Vrije Universiteit Amsterdam
De Boelelaan 1081a, 1081 HV AMSTERDAM
tel: 020-444 7776, e-mail: vierkant@cs.vu.nl

Uitdagende opdrachten

VIERKANT WISKUNDE-CLUBS 1996

Op de Vierkant wiskunde-clubs worden diverse leuke opdrachten gegeven.

De aanpak en de problemen zijn anders dan die in de wiskundelessen.

Het accent ligt op problemen die door zelf na te denken opgelost kunnen worden.

In het schooljaar 1995-96 lopen er vier wiskunde-clubs op de volgende locaties.

Amsterdams Lyceum in Amsterdam

Valeriusplein 15
elke 3de woensdag van de maand
contactpersoon: Dhr. J. Colle,
tel: 020-6627 790

Erasmiaans Gymnasium te Rotterdam

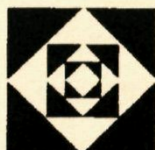
Wijtemaweg 25
elke 3de woensdag van de maand
contactpersoon: Drs. C. Wildhagen,
tel: 010-4360 045

H. Wesselink College in Amstelveen

Startbaan 3
contactpersoon:
Dhr. E. Buissant des Amorie,
tel: 020-6459 751

Gymnasium Coleanum in Zwolle

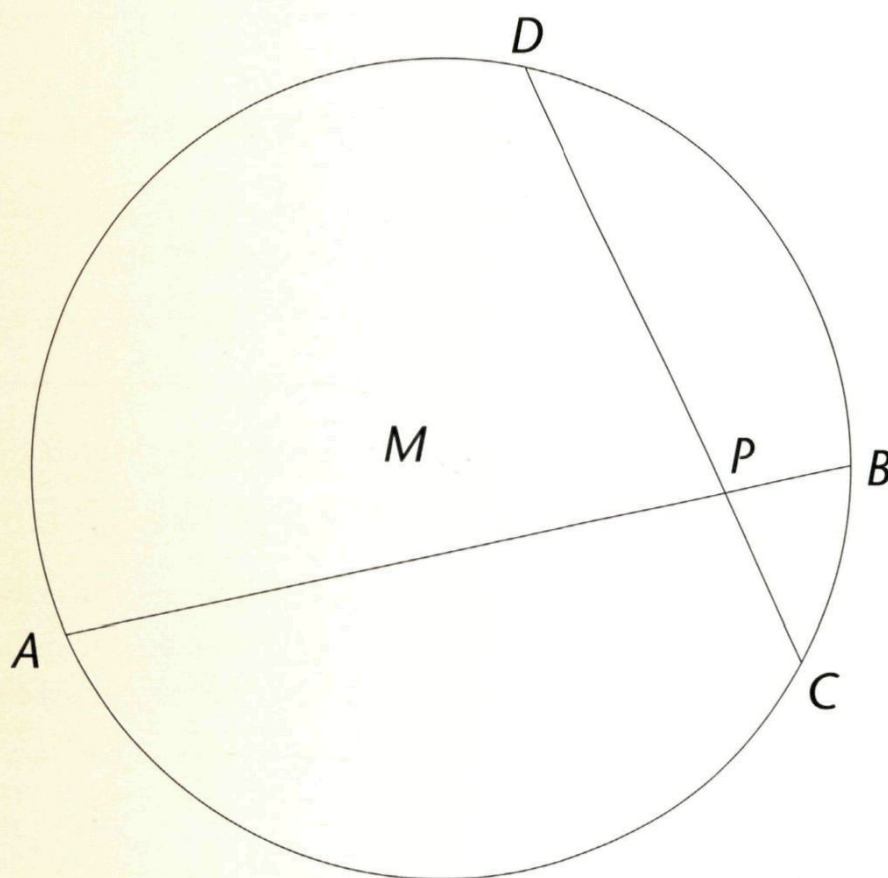
Veerallee 30
elke 3de woensdag van de maand
contactpersoon: Mevr. G. de Vries,
tel: 038-4223 722



Iedereen is welkom, ook van andere scholen!

FASCINERENDE CIRKEL

Op school was wiskunde nou niet direct mijn favoriete vak. Zodra ik in de gaten kreeg dat de opgaven waarop ik me een hele avond suf piekerde al door duizenden leerlingen vóór mij waren opgelost, verloor ik alle belangstelling. Tot ik geconfronteerd werd met een bekende stelling over twee snijdende koorden in een cirkel: het produkt van de stukken waarin ze elkaar verdelen is gelijk.

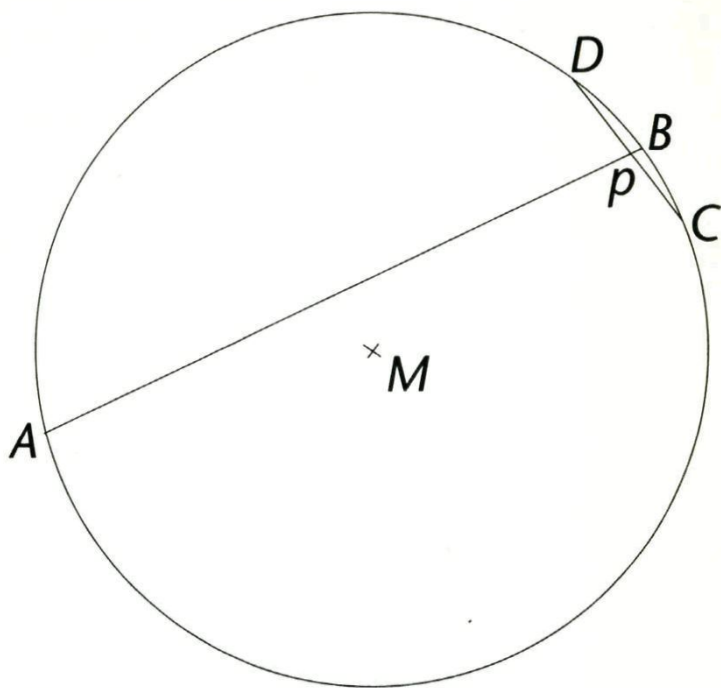


Figuur 1

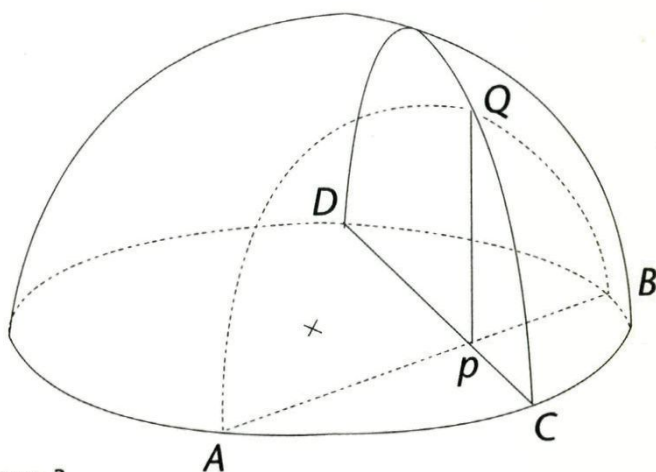
In figuur 1 dus: $AP \cdot PB = CP \cdot PD$. Ik wilde het gewoon niet geloven. Als je nu eens een hele kleine koorde nam en die door een hele grote liet snijden... (fig.2). Maar ik merkte al gauw dat daar geen tegenspraak uit te halen was. Bij de lange koorde AB werd dan het stukje PB juist heel klein, zodat het produkt binnen de perken werd gehouden.

Deze eigenschap van de cirkel vond ik zo boeiend dat mijn belangstelling voor de meetkunde weer begon op te leven. Dit was nu eens een stelling waarvan je niet bij voorbaat al wist dat hij geldig was ... ja het was zelfs verbazingwekkend dat hij waar was.

Onlangs kreeg ik een bewijs van deze stelling onder ogen van de Duitser Heinrich Bubeck waarbij een minimum aan

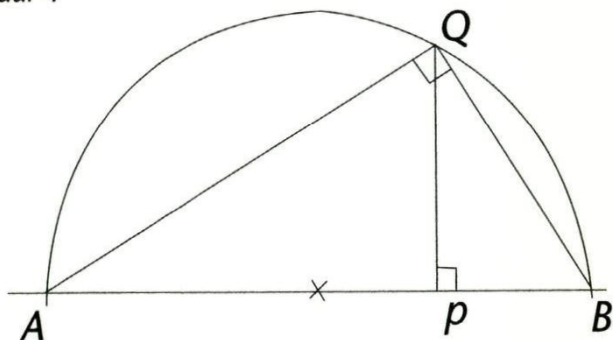


Figuur 2



Figuur 3

Figuur 4



stellingen gebruikt werd en dat vernuftig, doorzichtig en eenvoudig was.

Eerst lijkt het of Bubeck de zaak juist ingewikkelder maakt (fig.3). Hij brengt een halve bol aan op de cirkel. Daarna tekent hij twee snijvlakken door de beide koorden, en loodrecht op het vlak van de cirkel.

Die beide vlakken snijden de bol in twee (ongelijke) halve cirkels: AQB en CQD. Ga even na waarom dit halve cirkels zijn!

Nu hebben we alleen nog twee stellingen nodig:

1. De omtrekshoek die op een cirkelmiddellijn staat is 90° .
2. In een rechthoekige driehoek geldt: de loodlijn vanuit de rechte hoek op de schuine zijde verdeelt die in twee stukken zodat $QP^2 = AP \cdot PB$ (zie fig.4).

We passen dit nu in figuur 3 toe: in cirkel AQB is $QP^2 = AP \cdot PB$ en in cirkel CQD is $QP^2 = CP \cdot PD$.

En daaruit volgt:

$AP \cdot PB = CP \cdot PD$ de stelling die bewezen moest worden.

Een vernuftig bewijs!

Dat noem ik: op een slinkse manier je doel bereiken.

Hans de Rijk

GELIJKE GRAVITATIEKRACHT

De vierde wet van Newton zegt: "elk tweetal massa's trekt elkaar aan met een kracht, die evenredig is met elk van de massa's en omgekeerd evenredig met het kwadraat van hun afstand". Die kracht heet de gravitatiekracht. In formule:

$$F_{\text{grav}} = G \cdot \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

Hierin zijn m_1 en m_2 de beide massa's, d hun afstand. De evenredigheidsconstante G is de gravitatieconstante.

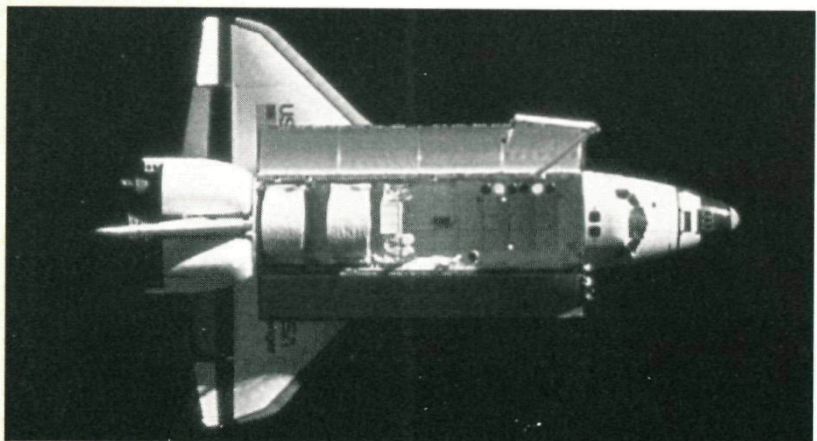
De derde wet van Newton zegt, dat m_1 en m_2 een even grote kracht op elkaar uitoefenen.

RUIMTEREIS

We reizen in gedachte van de aarde naar de maan.

Onderweg letten we op de krachten op het ruimtevaartuig.

Met F_A bedoelen we de aantrekkingskracht van de aarde op het ruimtevaartuig. Met F_M bedoelen we de aantrekkingskracht van de maan op het ruimtevaartuig. Als een ruimtevaartuig van de aarde naar de maan gaat, dan wordt F_A steeds kleiner, terwijl F_M steeds groter wordt. Ergens onderweg worden die krachten gelijk.



Bij werkelijke reizen van de aarde naar de maan is de baan een kromme. Neem nu terwille van de eenvoud aan, dat de baan van dat voertuig een rechte lijn ℓ is.

Op ℓ ligt punt E , waar $F_A = F_M$ is. De twee krachten zijn tegengesteld gericht.

Voorbij de achterkant van de maan, op het verlengde van ℓ , ligt een punt P , waar ook $F_A = F_M$ is.

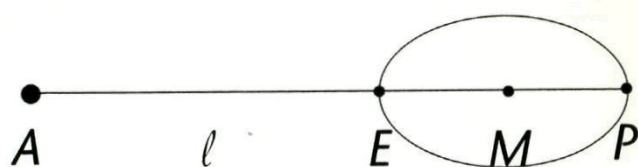
Deze keer zijn de krachten gelijkgericht.

De massa van de aarde is 81 maal de massa van de maan. De afstand aarde-maan is $AM = 60R_A$.

Bereken de ligging van E en P . Gebruik als lengte-eenheid R_A . R_A is de straal van de aarde.

Zie zo nodig bladzijde 30.

GEEN EI VAN COLUMBUS!



Door de punten E en P gaat een gesloten kromme, waarop eveneens geldt, dat $F_A = F_M$ is. In de meeste gevallen maken die twee krachten een scheve hoek met elkaar.

Onderzoek, wat voor soort kromme dat is.

Zie zo nodig bladzijde 31.

LABIEL EVENWICHT

Op deze kromme is er alleen en uitsluitend sprake van kracht-evenwicht in punt E , omdat daar de krachten niet alleen even groot zijn, maar ook tegengesteld gericht zijn. Dat evenwicht is labiel! Immers als het ruimtevaartuig in E stil zou staan en vervolgens een kleine, toevallige verplaatsing krijgt ten gevolge van de aantrekking van bij voorbeeld Jupiter, een "storing", dan "valt" het vaartuig òf naar de aarde, òf naar de maan.

Tjalie Wéry

SPEUREN OP HET SPOOR

Hoe kun je in de trein iedereen laten zitten met gebruik van zo weinig mogelijk materieel?

SMC schrijft een wedstrijd uit waarbij je de optimale inzet van treinstellen op de intercity-lijn Amsterdam-Vlissingen moet aangeven.

De hoofdprijs bedraagt f1500 en deze prijs is ook beschikbaar voor de beste inzending onder scholieren. De deadline is 15 juli.

Een wedstrijdformulier en een folder met een volledige omschrijving van het probleem is aan te vragen bij:

CWI Jubileumwedstrijd

Postbus 94079

1090 GB Amsterdam

Tel. 020-592 9333.

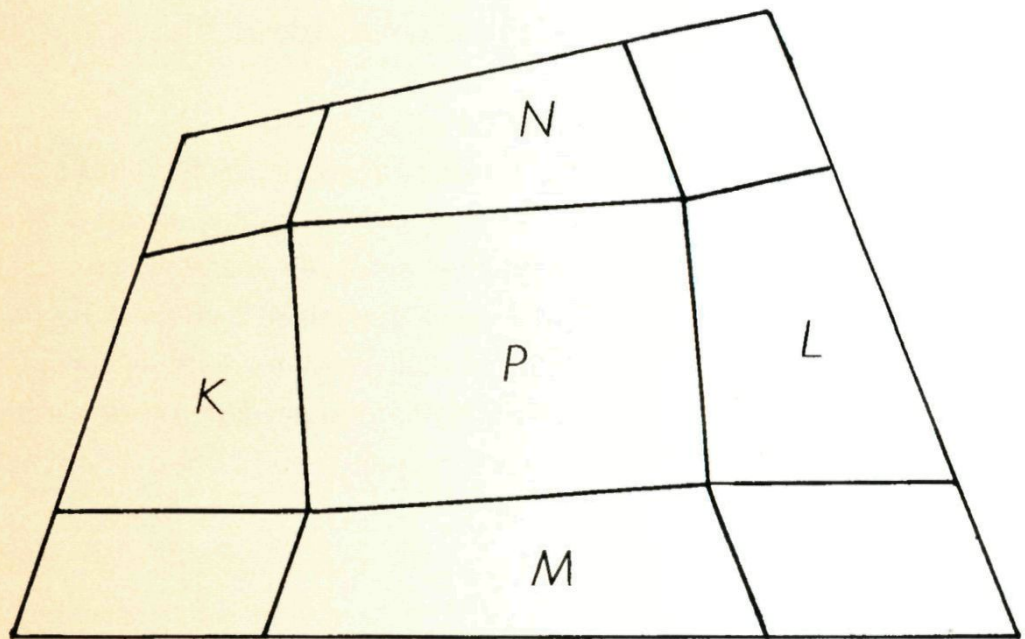
In een vierhoek

PARALLELOGRAMMEN

Soms kan het gebeuren dat achter een onbeduidend gegeven onverwachte wiskundige eigenschappen schuil gaan. Kijk naar het volgende voorbeeld.

Gegeven is de convexe vierhoek V met maximale onregelmatigheid, dat wil zeggen : géén parallellogram, rechthoek, ruit, trapezium.

Bij de vier hoekpunten van V zijn parallellogrammen getekend, waarvan de zijden een lengte hebben die gelijk is aan $\frac{1}{4}$ van de bijbehorende zijde van V . Zie figuur 1.



figuur 1

EIGENAARDIGHEDEN

$$\begin{aligned}\sqrt{121} &= 12 - 1 \\ \sqrt{64} &= 6 + \sqrt{4} \\ \sqrt{49} &= 4 + \sqrt{9} = 9 - \sqrt{4} \\ \sqrt{169} &= 16 - \sqrt{9} = \sqrt{16} + 9 \\ \sqrt{256} &= 2 \cdot 5 + 6 \\ \sqrt{324} &= 3 \cdot (2 + 4) \\ \sqrt{11881} &= 118 - 8 - 1 \\ \sqrt{1936} &= -1 + 9 + 36\end{aligned}$$

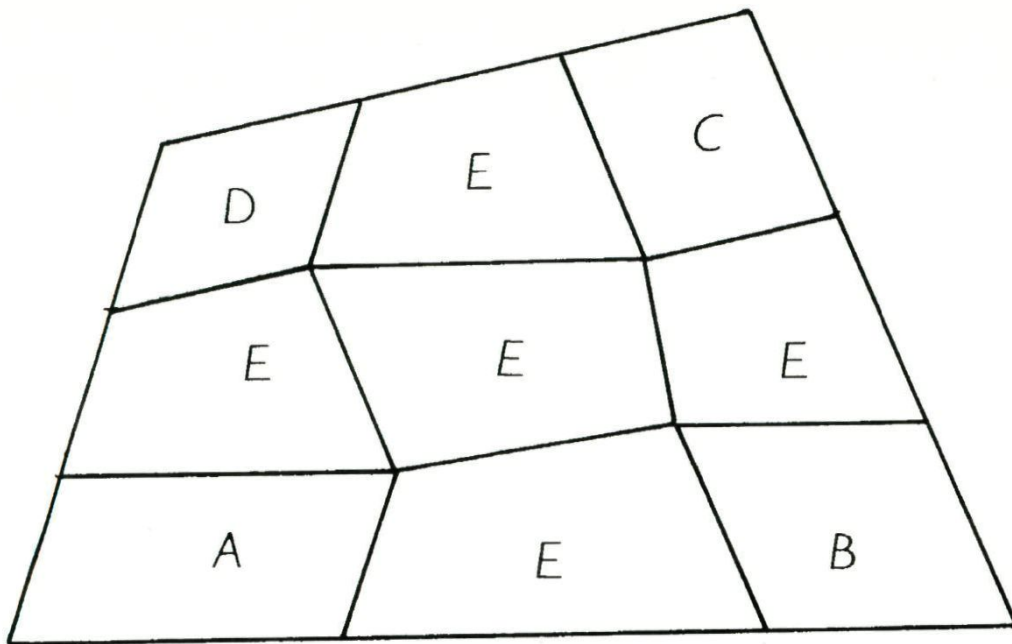
Jan Mahieu

De vier punten binnen V , die zo ontstaan zijn, vormen de hoekpunten van P , en P blijkt ook weer een parallellogram te zijn, waarvan de oppervlakte gelijk is aan de som van de vier parallellogrammen in de hoekpunten.

Dit is te bewijzen door gebruik te maken van de diagonalen van V en van evenredigheid.

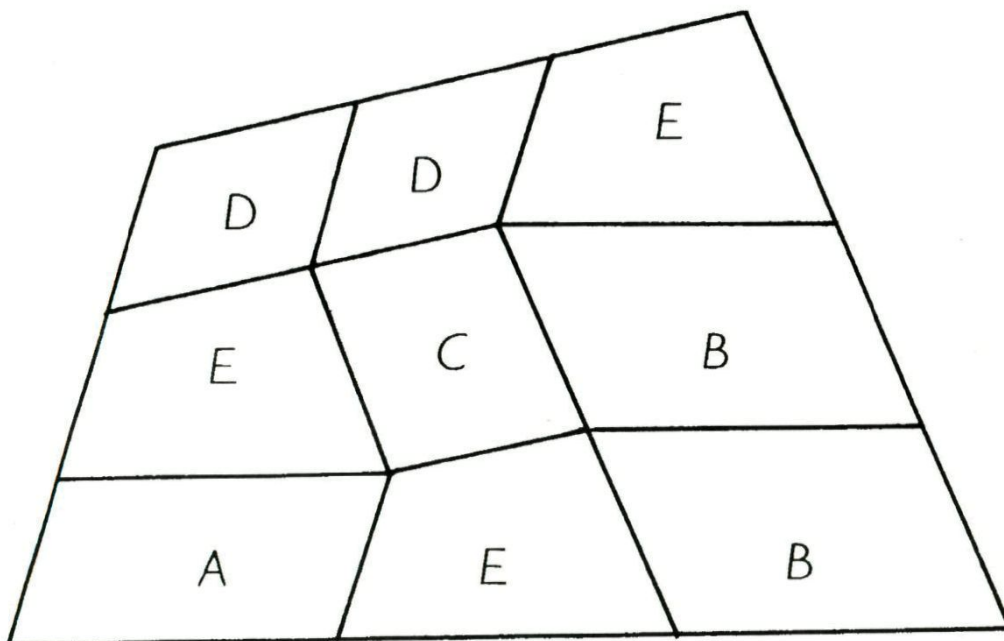
Verder blijkt dat door K en L samen te voegen een vierhoek ontstaat die gelijkvormig is met V .

Diezelfde vierhoek ontstaat natuurlijk ook door M en N samen te voegen. Maken we de parallellogrammen bij de hoekpunten geleidelijk aan groter totdat de zijden een lengte hebben gelijk aan $\frac{1}{3}$ van de bijbehorende zijde van V , dan ontstaat figuur 2.



figuur 2

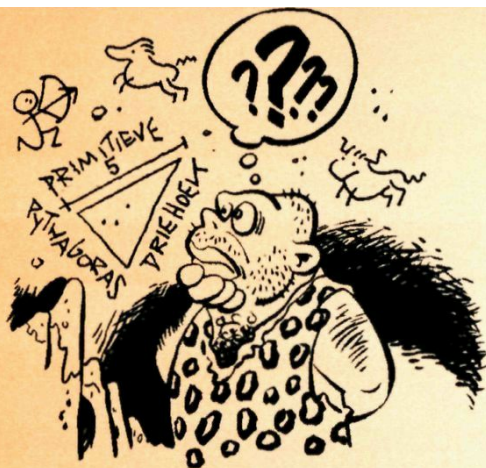
Ook hier is iets bijzonders. De vierhoeken K , L , M , N en P uit fig. 1 veranderen alle vijf in vierhoek E van fig. 2. Makkelijk is te bewijzen dat K , L , M en N overgaan in E en daarmee is te bewijzen dat P overgaat in E . In fig. 3 zien we dezelfde stukjes A t/m E als in fig. 2, maar in een andere samenstelling.



figuur 3

Het is te bewijzen dat V in totaal op **zeven** manieren kan worden samengesteld. De vijf verschillende vormen hoeven daarbij niet allemaal gebruikt te worden. Probeer de verschillende bewijzen zelf te vinden. In het volgende nummer zullen ze gepubliceerd worden.

Herman Zunneberg



Elke variabele is een positief geheel getal.

We gaan de volgende stelling bewijzen:

Elke pythagoras-driehoek
($a=2mn$, $b=m^2-n^2$, $c=m^2+n^2$)

heeft minstens één zijde, die de factor 5 bevat.

De primitieve pythagoras-driek bevat precies één zijde die deelbaar is door 5.

Elke variabele is een positief geheel getal

DELEN DOOR 5

We bekijken de volgende primitieve pythagoras-driehoek:

$$(a=2mn, b=m^2-n^2, c=m^2+n^2).$$

Hierin moet $m+n$ oneven zijn terwijl m en n geen gemeenschappelijke delers bevatten.

Omdat we moeten delen door 5 schrijven we m als $5p+r$ en n als $5q+s$.

Hierin kunnen r en s de resten 0, 1, 2, 3 en 4 zijn.

Geval, dat

$$m = 5p+2 \text{ en } n = 5q+1.$$

Dan zijn

$$a = 2(5p+2)(5q+1) = 5\text{-voud} + 4$$

$$b = (5p+2)^2 - (5q+1)^2 = 5(5p^2 - 5q^2 + 4p - 2q) + 3 = 5\text{-voud} + 3$$

$$c = (5p+2)^2 + (5q+1)^2 = 5(5p^2 + 5q^2 + 4p + 2q) + 5 = 5\text{-voud}.$$

Geval, dat

$$m = 5p+3 \text{ en } n = 5q+2.$$

geeft dat

$$a = 5\text{-voud} + 2$$

$$b = 5\text{-voud}.$$

$$c = 5\text{-voud} + 3.$$

Op dezelfde manier bekijk je alle denkbare combinaties.

We vatten alle resten samen in de nevenstaande tabellen.

BEWIJS GELEVERD

Andere gevallen zijn er niet. We zien, dat in elk van de gevallen precies één zijde van de primitieve pythagoras-driehoek na deling door 5 rest 0 geeft.

Frank Roos

$2mn$	$5q$	$5q+1$	$5q+2$	$5q+3$	$5q+4$
$5p$	b	0	b	0	b
$5p+1$	0	b	2	b	4
$5p+2$	b	2	b	1	b
$5p+3$	0	b	1	b	2
$5p+4$	b	4	b	2	b

b betekent, dat m en n beide even of beide oneven zijn.

m^2-n^2	$5q$	$5q+1$	$5q+2$	$5q+3$	$5q+4$
$5p$	b	4	b	1	b
$5p+1$	1	b	2	b	0
$5p+2$	b	3	b	0	b
$5p+3$	4	b	0	b	3
$5p+4$	b	0	b	2	b

m^2+n^2	$5q$	$5q+1$	$5q+2$	$5q+3$	$5q+4$
$5p$	b	1	b	4	b
$5p+1$	1	b	0	b	2
$5p+2$	b	0	b	3	b
$5p+3$	4	b	3	b	0
$5p+4$	b	2	b	0	b

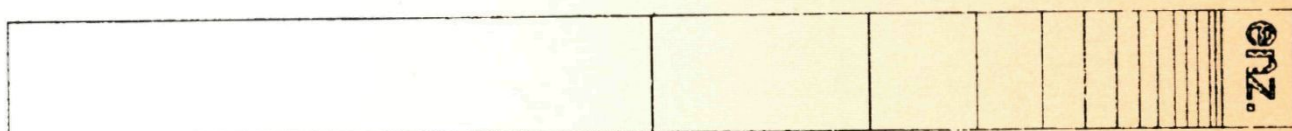
PLANK SCHILDEREN

Manuela besluit een plank als volgt tegaan verven: eerst verft ze de helft. Daarna verft ze éénderde van de rest. Vervolgens schildert ze éénvierde van de volgende rest. Dan schildert ze éénvijfde van de daaropvolgende rest. Enzovoort. Gaat Manuela nu de gehele plank verven of slechts een deel?

We kunnen dat het best bekijken aan de hand van de volgende tabel:

te verven stuk	totaal reeds geverfd	nog te verven rest
$1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$	$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$	$\frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$	$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
....		
$\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p(p+1)}$	$\frac{p-1}{p} + \frac{1}{p(p+1)} = \frac{p}{p+1}$	$\frac{1}{p+1}$
....		

Naarmate p steeds groter wordt gekozen, wordt $\frac{1}{p+1}$ steeds kleiner. Het niet geverfde stuk nadert dus tot nul. Dat betekent uiteindelijk, dat Manuela op een ingewikkelde manier heeft gezegd, dat ze hele plank wil gaan verven! Voor elk stuk trekt ze 8 minuten uit. Zou ze het karwei ooit afkrijgen?



PLANK 2

Carmen, geïnspireerd door Manuela, besluit een andere plank op een schijnbaar verwante manier te gaan verven: eerst verft ze de helft. Dan verft ze een nieuw stuk, dat een oppervlak heeft, dat éénderde van het reeds geverfde deel is. Vervolgens verft ze een nieuw stuk, dat een oppervlak heeft, dat éénvierde van het reeds geverfde deel is. Dan éénvijfde; vervolgens éénzesde,

Welk deel verft Carmen uiteindelijk?
Zie zo nodig bladzijde 31.

COS 18° EN ZO

Soms moet een mens in zijn enthousiasme worden teruggefloten. Dat overkwam mij, toen ik volkomen terecht commentaar kreeg op mijn artikel over "cos18° en zo" in "Pythagoras" #2 van december 1995.

Daarin beweerde ik, dat de sinus, cosinus en tangens van elk geheel aantal graden te berekenen was, waarbij de moeilijkste functie de tweedemachtswortel is.

Slechts veelvouden van 3° voldoen hier echter aan.

Drie bollebozen wezen mij erop. Fouten maken is niet leuk, maar wel nuttig, als je er iets van leert.

Eén van de geleerden zond mij een tabel, die er na bewerking zo uitzag:

SINUSTABEL VAN $n \times 3^\circ$

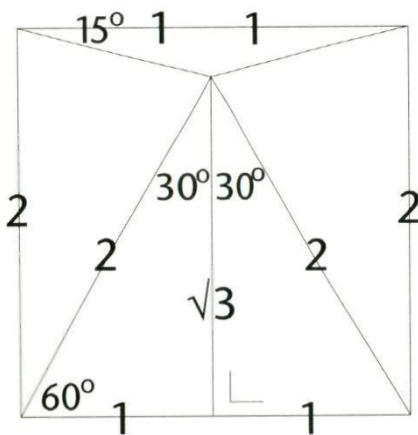
$$\begin{aligned} \text{Stel } a &= \sqrt{3} - 1, & b &= \sqrt{3} + 1, \\ p &= \sqrt{5} - 1, & q &= \sqrt{5} + 1 \\ v &= \sqrt{5 - \sqrt{5}} & w &= \sqrt{5 + \sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16 \cdot \sin 3^\circ &= +\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1) - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{(5+\sqrt{5})} = +bp\sqrt{2} - 2aw \\ 16 \cdot \sin 21^\circ &= -\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1) + 2(\sqrt{3}+1)\sqrt{(5-\sqrt{5})} = -aq\sqrt{2} + 2bv \\ 16 \cdot \sin 33^\circ &= +\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1) + 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{(5+\sqrt{5})} = +bp\sqrt{2} + 2aw \\ 16 \cdot \sin 39^\circ &= +\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1) - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{(5-\sqrt{5})} = +bq\sqrt{2} - 2av \\ 16 \cdot \sin 51^\circ &= +\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1) + 2(\sqrt{3}+1)\sqrt{(5-\sqrt{5})} = +aq\sqrt{2} + 2bv \\ 16 \cdot \sin 57^\circ &= -\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1) + 2(\sqrt{3}+1)\sqrt{(5+\sqrt{5})} = -ap\sqrt{2} + 2bw \\ 16 \cdot \sin 69^\circ &= +\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1) + 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{(5-\sqrt{5})} = +bq\sqrt{2} + 2av \\ 16 \cdot \sin 87^\circ &= +\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1) + 2(\sqrt{3}+1)\sqrt{(5+\sqrt{5})} = +ap\sqrt{2} + 2bw \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 \cdot \sin 6^\circ &= \sqrt{6} \cdot \sqrt{(5-\sqrt{5})} - (\sqrt{5}+1) & &= +v\sqrt{6} - q \\ 8 \cdot \sin 42^\circ &= \sqrt{6} \cdot \sqrt{(5+\sqrt{5})} - (\sqrt{5}-1) & &= +w\sqrt{6} - p \\ 8 \cdot \sin 66^\circ &= \sqrt{6} \cdot \sqrt{(5-\sqrt{5})} + (\sqrt{5}+1) & &= +v\sqrt{6} + q \\ 8 \cdot \sin 78^\circ &= \sqrt{6} \cdot \sqrt{(5+\sqrt{5})} + (\sqrt{5}-1) & &= +w\sqrt{6} + p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 \cdot \sin 12^\circ &= +\sqrt{2} \cdot \sqrt{(5+\sqrt{5})} - \sqrt{3}(\sqrt{5}+1) & &= w\sqrt{2} - q\sqrt{3} \\ 8 \cdot \sin 24^\circ &= -\sqrt{2} \cdot \sqrt{(5-\sqrt{5})} + \sqrt{3}(\sqrt{5}+1) & &= -v\sqrt{2} + q\sqrt{3} \\ 8 \cdot \sin 48^\circ &= +\sqrt{2} \cdot \sqrt{(5+\sqrt{5})} + \sqrt{3}(\sqrt{5}-1) & &= w\sqrt{2} + p\sqrt{3} \\ 8 \cdot \sin 84^\circ &= +\sqrt{2} \cdot \sqrt{(5-\sqrt{5})} + \sqrt{3}(\sqrt{5}+1) & &= v\sqrt{2} + q\sqrt{3} \\ 4 \cdot \sin 36^\circ &= +\sqrt{2} \cdot \sqrt{(5-\sqrt{5})} & &= v\sqrt{2} \\ 4 \cdot \sin 72^\circ &= +\sqrt{2} \cdot \sqrt{(5+\sqrt{5})} & &= w\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8 \cdot \sin 9^\circ &= -2 \cdot \sqrt{(5-\sqrt{5})} + \sqrt{2} \cdot (\sqrt{5}+1) &= -2v + q\sqrt{2} \\
8 \cdot \sin 81^\circ &= +2 \cdot \sqrt{(5-\sqrt{5})} + \sqrt{2} \cdot (\sqrt{5}+1) &= +2v + q\sqrt{2} \\
8 \cdot \sin 27^\circ &= +2 \cdot \sqrt{(5+\sqrt{5})} - \sqrt{2} \cdot (\sqrt{5}+1) &= +2w - q\sqrt{2} \\
8 \cdot \sin 63^\circ &= +2 \cdot \sqrt{(5+\sqrt{5})} + \sqrt{2} \cdot (\sqrt{5}-1) &= +2w + p\sqrt{2} \\
4 \cdot \sin 75^\circ &= \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}+1) &= +b\sqrt{2} \\
4 \cdot \sin 15^\circ &= \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}-1) &= +a\sqrt{2} \\
4 \cdot \sin 18^\circ &= \sqrt{5}-1 &= p \\
4 \cdot \sin 54^\circ &= \sqrt{5}+1 &= q \\
2 \cdot \sin 30^\circ &= \sqrt{1} \\
2 \cdot \sin 45^\circ &= \sqrt{2} \\
2 \cdot \sin 60^\circ &= \sqrt{3} \\
2 \cdot \sin 90^\circ &= \sqrt{4}
\end{aligned}$$



Het zou prachtig zijn, als je met geschikte figuren tot deze waarden zou kunnen komen. Thijs Notenbomer leverde de redactie de volgende twee voorbeelden.

Met deze figuur kun je heel gemakkelijk $\tan 15^\circ$ uitrekenen. Je ziet een gelijkzijdige driehoek met zijn basis op de zijde van een vierkant. Kom je ook op $\tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}$?

Een tweede voorbeeld biedt driehoek ABC , die je krijgt, als je een regelmatige tienhoek vanuit het midden in tien gelijke driehoeken verdeelt. Stel $AB = 1$ en $AC = BC$. De bissectrice of deellijn van hoek A verdeelt de driehoek in twee gelijkbenige driehoeken. De driehoeken ABD en CAB zijn gelijkvormig. Stel $BD = x$.

Dan: $BD : AB = AB : BC$ of

$x : 1 = 1 : (1+x)$. Deze bijzondere verdeling van dit lijnstuk BC heet "de gulden snede", maar nu niet afdwalen.

Dan is $x^2 + x - 1 = 0$. Alleen $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ voldoet.

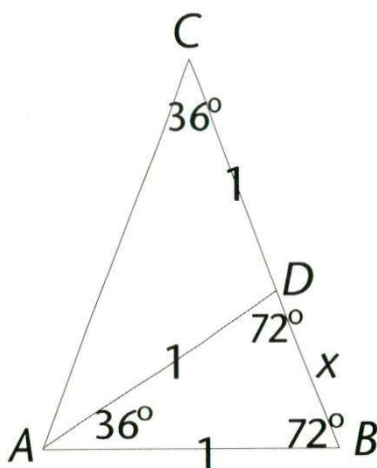
Trek nu de hoogtelijn uit C op AB . Dan $\sin 18^\circ = \frac{1}{2} AB : BC$

$$\frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{1}{1+\sqrt{5}}$$

$$\text{of } \sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$$

Zou jij ook zo'n functionele figuur kunnen verzinnen?

Frank Roos



Ik neem aan, dat de rekenmachine meer cijfers achter de komma kent, dan dat hij laat zien. Hoe kan ik de nog niet zichtbare cijfers te weten komen?

CIJFERS ONTFUTSELEN

Als ik de decimalen van $\sqrt{2}$ te weten wil komen, dan kan ik niet herkennen, wanneer het mis gaat.

Het is daarom handig om een repeterende breuk als voorbeeld te nemen, omdat je dan kunt herkennen, wanneer de machine afhaakt.

Zo weten we bijvoorbeeld, dat

$$5:7 = 0,714285714285714285 \dots$$

Tik in	Lees in het venster van je machine
$5 \div 7 =$	0.7142857
$\times 1000000 =$	7142877.1
$- 7142857 =$	0.14285
$\times 1000000 =$	1428500
$- 1428500 =$	0

Uit dit schema leer ik, dat *mijn* rekenmachine $5 \div 7$ kent als 0,714285714285.

Hij kent $5 \div 7$ dus in twaalf cijfers nauwkeurig.

Kun je het zelf voor $2 \div 3$?

Hoe nauwkeurig kent jouw rekenmachine π ?

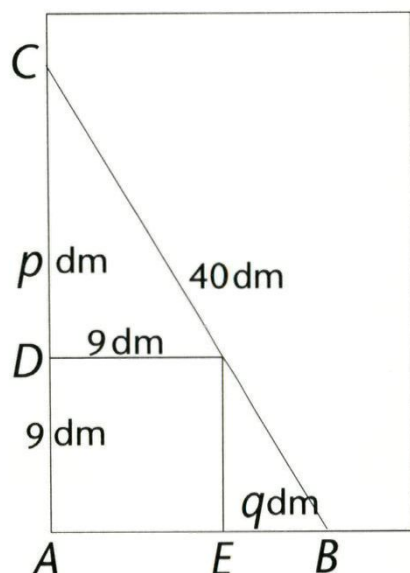
Tjalie Wéry

DES LEZERS *Deine vrucht*

DE KIST EN DE LADDER

Ir. Alleijn uit Middelburg reageert op het artikel "de kist en de ladder" van Pythagoras #4 van 1995, bladzijde 14. *Met mijn manier kan ik een vierdegraads vergelijking voorkomen.*

Dr. Veen uit Velp stuurde inhoudelijk een vrijwel identieke brief!



Ik geef de kist lengte a dm en de ladder lengte b dm.

Dan is $p:a = a:q$ of $pq = a^2$ (1).

In $\triangle ABC$ geldt:

$$(a+p)^2 + (a+q)^2 = b^2$$

$$a^2 + 2ap + p^2 + a^2 + 2aq + q^2 = b^2$$

$$p^2 + q^2 + a^2 + a^2 + 2ap + 2aq = b^2$$

$$p^2 + q^2 + 2a(p+q) = b^2 \text{ en dat is te schrijven als:}$$

$$(p+q)^2 + 2a(p+q) = b^2.$$

Stellen we $p+q = x$, dan is

$$x^2 + 2ax = b^2 \text{ of } x = -a \pm \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Omdat x een som is van twee lengtes, vervalt de oplossing met het minteken.

$$\text{Dus } p+q = -a + \sqrt{a^2 + b^2} \text{(2)}$$

We hebben nu twee vergelijkingen met de twee onbekenden p en q . Substitueer nu $a=9$ en $b=40$.

Dan komt er:

$$pq = 9^2 \text{ en } p+q = -9 + \sqrt{9^2 + 40^2} \text{ of } q = 32-p$$

$$p(32-p) = 9^2$$

$$p^2 - 2 \cdot 16p + 16^2 = 16^2 - 9^2$$

$$(p-16)^2 = 25 \times 7$$

$$p = 16 \pm 5\sqrt{7}$$

$$\text{Als } p = 16 + 5\sqrt{7} \text{ is, dan is } q = 16 - 5\sqrt{7};$$

$$\text{als } p = 16 - 5\sqrt{7} \text{ is, dan is } q = 16 + 5\sqrt{7}.$$

DERDEGRAADS VERGELIJING

$$5y^3 = 30y^2 - 15y - 50$$

Deel door 5 en herleid op nul:

$$y^3 - 6y^2 + 3y + 10 = 0$$

$$\text{Stel } y = x + \frac{\text{coëfficiënt van } y^2}{-3}$$

$y = x + 2$. Dan krijgen we

$$(x+2)^3 - 6(x+2)^2 + 3(x+2) + 10 = 0$$

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 6x^2 - 24x - 24 + 3x + 6 + 10 = 0$$

$$x^3 - 9x = 0$$

Niet alleen de kwadratische term, maar

ook de constante zijn we kwijt. Dat maakt het een stuk eenvoudiger.

$$x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 3 \text{ en } x_3 = -3$$

Omdat $y = x + 2$, vinden we tenslotte:

de oplossing van

$$5y^3 = 30y^2 - 15y - 50 \text{ is}$$

$$y_1 = 2, y_2 = 5 \text{ en } y_3 = -1.$$

KUSTOBSERVATIE

Trek de kustlijn van $247\frac{1}{2}^\circ$ via het punt A naar $67\frac{1}{2}^\circ$.

Zet in A een lijn uit $AP = 3000$

meter naar het Noorden.

Trek uit P (de positie van het schip na 3000 meter) een lijn PS die met het Noorden een hoek vormt van $157\frac{1}{2}^\circ$.

Je ziet nu dat de hoek $PBR 90^\circ$ is.

In de driehoek ABP berekenen wij AB.

$$\sin 22\frac{1}{2}^\circ = \frac{AB}{3000}$$

$$AB \text{ is dan } 3000 \sin 22\frac{1}{2}^\circ.$$

$$AB \text{ is } 1148 \text{ meter.}$$

WAAR IS EVENWICHT?

De afstand aarde-maan noemen we voorlopig d .

$AE = x$. $EM = d - x$. Nu geldt: $F_A = F_M$ of

$F_{\text{grav}}(\text{aarde op ruimtevaartuig}) = F_{\text{grav}}(\text{maan op ruimtevaartuig})$

$$G \cdot \frac{m_{\text{aarde}} m_{\text{ruimtevaartuig}}}{x^2} = G \cdot \frac{m_{\text{maan}} m_{\text{ruimtevaartuig}}}{(d-x)^2} =$$

$$\frac{81 \cdot m_{\text{maan}}}{x^2} = \frac{m_{\text{maan}}}{(d-x)^2} =$$

$$81 \cdot (d-x)^2 = x^2$$

$$9(d-x) = x \text{ of } 9(d-x) = -x$$

$$x_1 = \frac{10}{9}d \text{ of } x_2 = \frac{8}{9}d$$

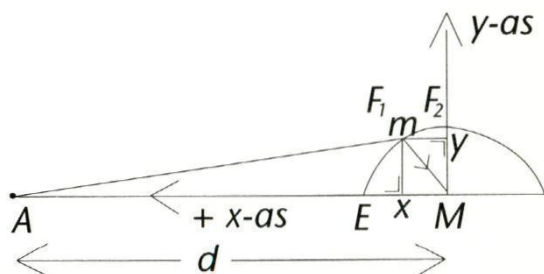
$$x_1 = AP = (10:9) \cdot d \approx 67 R_A.$$

$$x_2 = AE = (8:9) \cdot d \approx 53 R_A.$$

Het evenwichtspunt E en het punt P liggen blijkbaar nogal dicht bij de maan.

WELKE GESLOTEN KROMME?

We leggen een x -as over de lijn ℓ . Om mintekens te vermijden kiezen we nu de positieve x -as naar links! De y -as laten we door het middelpunt van de maan (M) gaan.



$$F_1 = F_2$$

$$G \cdot \frac{m_{\text{waarde}} m_{\text{voertuig}}}{(d-x)^2 + y^2} = G \cdot \frac{m_{\text{maan}} m_{\text{voertuig}}}{x^2 + y^2} =$$

$$\frac{81}{d^2 - 2xd + x^2 + y^2} = \frac{1}{x^2 + y^2} =$$

$$81x^2 + 81y^2 = d^2 - 2xd + x^2 + y^2$$

$$80x^2 + 2xd + 80y^2 = d^2$$

$$x^2 + \frac{2xd}{80} + \frac{d^2}{80^2} + y^2 = \frac{d^2}{80^2} + \frac{d^2}{80}$$

$$\left(x + \frac{d}{80}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{9d}{80}\right)^2$$

Dit is de vergelijking van een cirkel met middelpunt $\left(-\frac{d}{80}, 0\right)$ en straal $\frac{9d}{80}$.

De gezochte gesloten kromme is blijkbaar een cirkel waarvan het middelpunt op een afstand van $0,75 R_A$ rechts van het middelpunt van de maan ligt, dus kort voorbij de maan.

De straal van die cirkel is bijna $7 R_A$.

PLANK 2

Carmen verft

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \dots =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots =$$

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots = s$$

We weten dat

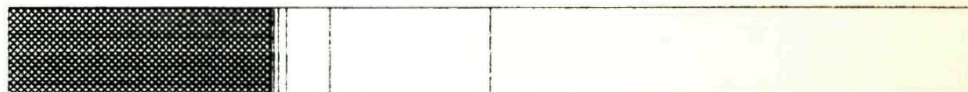
$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

en dat $0! = 1! = 1$, dus $s = e - 2$.

Carmen gaat dus het $(e - 2)$ -de gedeelte van de plank verven.

Omdat $e \approx 2,71828 \dots$ is, is $s \approx 0,71828 \dots$.

Carmen schildert dus slechts circa 72% van de plank.



VERANTWOORDING ILLUSTRATIES:

Cartoons: Pieter Hoogenbirk

Foto's: © Benelux Press

ABONNEMENTEN:

Nederlandse en Belgische abonnees:
aanmelden telefonisch 070 - 314 35 00,
of schriftelijk, NIAM b.v.

Antwoordnummer 97007,
2509 VH Den Haag.

TARIEVEN:

Jaarabonnement Pythagoras f 36,-
Jaarabonnement inclusief Archimedes f 66,-
Jaarabonnement België f 46,-/of BF 820,-
Jaarabonnement België
inclusief Archimedes f 77,-/of BF 1470,-
Jaarabonnement Buitenland f 51,-
Losse nummers f 7,50/of BF 140,-

BETALING:

Wacht met betalen tot u de acceptgiro-
kaart krijgt toegestuurd.

Bij tussentijdse abonnering ontvangt u
alle nummers van de lopende jaargang.
Abonnementen zijn doorlopend, tenzij
voor 1 juli schriftelijk bij de uitgever is
opgezegd.

UITGEVER:

NIAM b.v.,
Neuhuyskade 94,
2596 XM Den Haag.
Tel.: 070 - 314 35 00
Fax: 070 - 314 35 88
Giro 33.84.52.