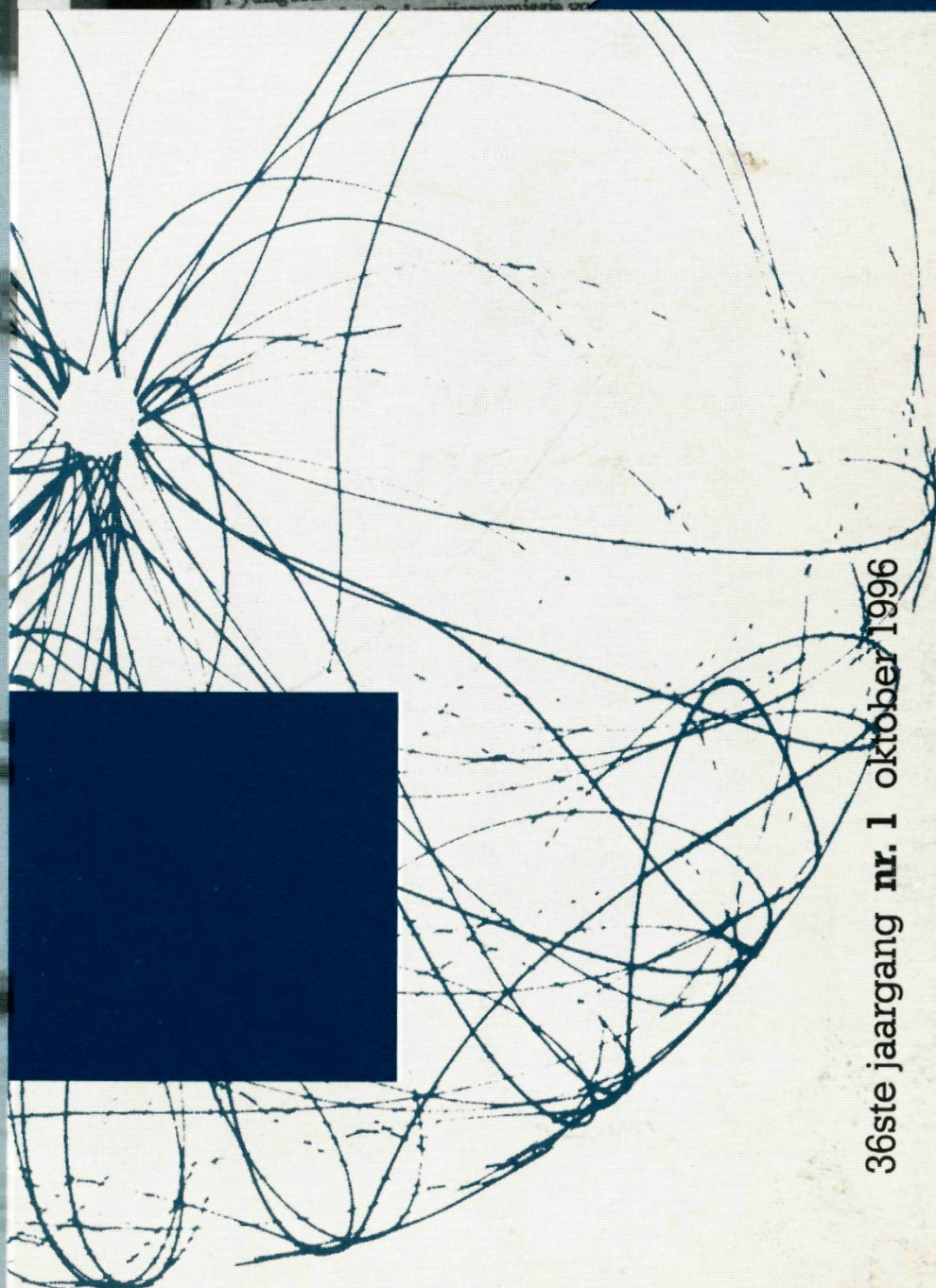
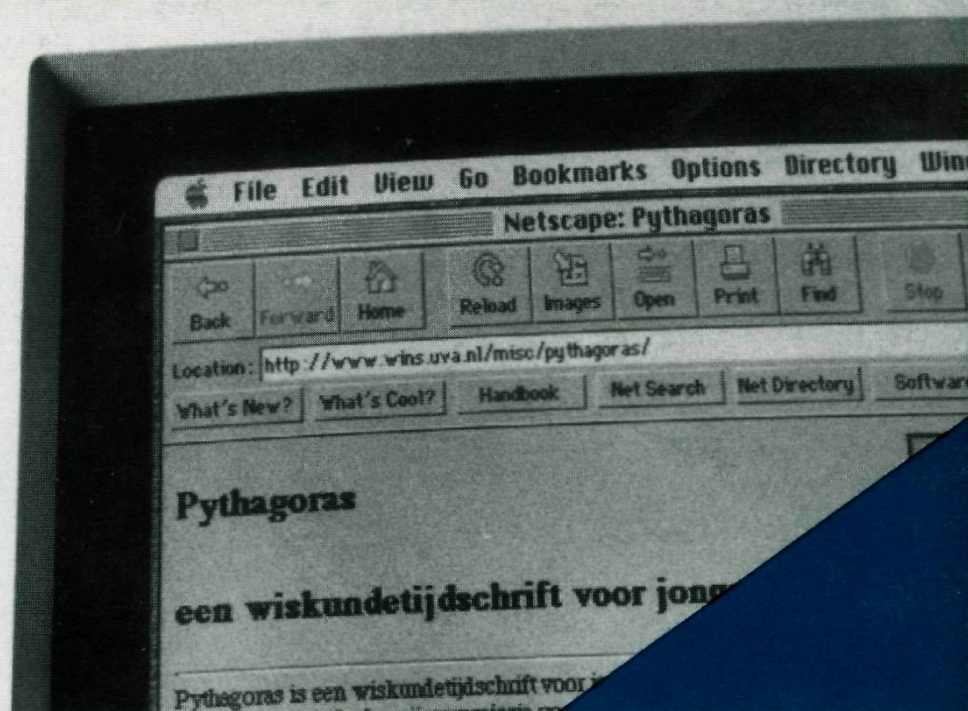


wiskundetijdschrift voor jongeren

pythagoras



36ste jaargang nr. 1 oktober 1996



Inhoud

COLOFON

uitgave

Pythagoras is een uitgave van NIAM b.v. en verschijnt zes keer per jaar

Een jaargang loopt van september tot en met augustus

redactieadres

Erjen Lefeber
Faculteit der toegepaste wiskunde
Universiteit Twente
Postbus 217
7500 AE Enschede
email: A.A.J.Lefeber@math.utwente.nl

WWW

De homepage van Pythagoras is te vinden op het volgende adres:
<http://www.fwi.uva.nl/misc/pythagoras/>

redactie

Klaas Pieter Hart
Harald Haverkorn
Erjen Lefeber
Pier Sinia

eindredactie

Chris Zaal

grafisch ontwerp

Joke Mestdagh, Amsterdam

zetwerk

Taco Hoekwater, bittext, Dordrecht

1 Redactioneel

2 & 3 Pythagoras Olympiade

Wiskunde en chaos

4 t/m 7 De dubbele slinger

Wiskunde en Internet

8 t/m 10 Pythagoras op het Internet

Varia Historica

11 Jan de Witt

12 & 13 Breuken en periodiciteit

14 t/m 16 Oppervlakte en omtrek 17 De schildersparadox

Wiskunde met de computer

18 t/m 21 De zeef van Sierpinski

Onmogelijkheden

22 & 23 Wortel 2 is niet rationaal 24 Het getal e

Verslag

25 VIERKANT wiskundekamp

Verslag

26 & 27 Internationale Wiskunde Olympiade

28 Agenda

Redactioneel

De redactie van Pythagoras wenst om te beginnen alle lezers een plezierig schooljaar toe. Deze jaargang begint met een redactiewijziging—het werk van de oude redactie wordt overgenomen door vijf nieuwe redacteuren. De inspanningen die de scheidende redactie de afgelopen jaren heeft moeten leveren waren niet gering; zij wordt daarvoor hartelijk bedankt!

De nieuwe redactie is vol enthousiasme aan de slag gegaan. Er is een nieuwe groep van schrijvers, een nieuwe vormgeving (T_EX) en een Internet-pagina (een *homepage*).

Voor de nieuwe lezers hebben we enige opmerkingen. In de eerste plaats: leerlingen uit de lagere klassen zullen af en toe begripen tegen komen die nog niet in de klas behandeld zijn. Om de lezer daarbij op weg te helpen, heeft de redactie een oude traditie in ere hersteld: titels van *wiskundige* artikelen worden voorafgegaan door een, twee of drie rondjes. Eén rondje • betekent: voor iedereen vanaf de vierde klas te begrijpen. Twee rondjes ••: hiervoor heb je wiskunde uit de vijfde en zesde klas nodig. Drie rondjes •••: dit gaat net iets verder dan de middelbare school stof.

In de tweede plaats: Pythagoras bevat altijd 'vragen' en 'problemen'. Antwoorden worden *altijd* gegeven. Oplossingen van problemen worden gepubliceerd in het volgende nummer en op de homepage, ongeveer twee weken na verschijning. Moeilijke vragen worden behandeld in vervolgartikelen.

Tot slot: lezers worden uitgenodigd ideeën, suggesties, opmerkingen en eigen artikelen naar de redactie te sturen. Het nieuwe redactieadres is:

Erjen Lefeber
Faculteit der Toegepaste Wiskunde
Universiteit Twente
Postbus 217
7500 AE Enschede
email: A.A.J.Lefeber@math.utwente.nl

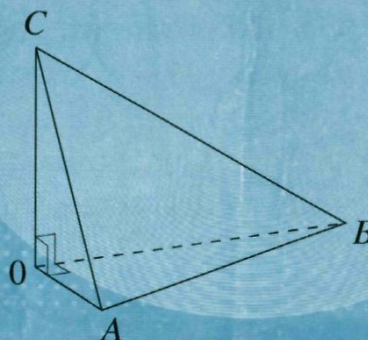
Pythagoras 3D

In de volgende **lezersprijsvraag** krijgt de stelling van Pythagoras een extra, derde dimensie.

Oplossingen kunnen worden opgestuurd naar bovenstaand redactieadres. Vermeld bij je inzending *school* en *klas*. De redactie beoordeelt de oplossingen, en verloot onder de mooiste drie boekenbonnen van fl. 50,-.

Gegeven is de piramide $OABC$, met de hoeken $\angle AOB$, $\angle BOC$ en $\angle COA$ alle recht. Bewijs de volgende stelling over de *oppervlakten* van de zijvlakken van de piramide:

$$OAB^2 + OBC^2 + OCA^2 = ABC^2.$$



De Pythagoras Olympiade is een puzzelrubriek met een wedstrijd karakter. Elke aflevering bevat twee problemen, die in principe door elke leerling uit 4 en 5 Havo en 4, 5 en 6 VWO opgelost kunnen worden. Het oplossen zal zeker enige moeite kosten, maar daar tegenover staat dat goede (ingezonden) oplossingen punten opleveren in een laddercompetitie en kans geven op verschillende prijzen.

Pythagoras Olympiade

De Pythagoras Olympiade is een vast onderdeel van Pythagoras. Een vaste redactie, bestaande uit Ronald van Luijk, Sander van Rijnsouw en Wim Oudshoorn, stelt de opgaven samen en beoordeelt ingezonden oplossingen.

Prijzen

Per opgave wordt onder de inzenders van goede oplossingen een boekenbon van 25 gulden verloot. Tevens levert elke goede oplossing 1 punt op in een *laddercompetitie*. Aan het eind van deze jaargang krijgen de beste deelnemers van de ladderwedstrijd een prijs van 100 gulden. Ook krijgt, dit ter beoordeling van de samenstellers, een aantal mensen een uitnodiging om mee te doen aan de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade.

Oplossingen

Per opgave wordt één van de ingezonden oplossingen in Pythagoras gepubliceerd (hier kan enige tijd overheen gaan). Oplossingen zijn ook op de WWW-pagina van Pythagoras te bekijken. Het is mogelijk de oplossing thuis gestuurd te krijgen; zend hiertoe een aan je zelf geadresseerde en gefrankeerde envelop mee.



Andere olympiaden

Naast de Pythagoras Olympiade is er de Nederlandse Wiskunde Olympiade en de Internationale Wiskunde Olympiade.

De Nederlandse Wiskunde Olympiade bestaat uit twee rondes. De eerste ronde wordt op school gehouden, dit jaar op 11 april. Deze ronde bestaat uit ongeveer 12 opgaven, waarvoor je 3 uur de tijd hebt. De beste honderd deelnemers worden uitgenodigd voor de tweede ronde, die plaats vindt in Eindhoven op 19 september. De tweede ronde bestaat uit ongeveer 4 opgaven, die een stuk moeilijker zijn dan de opgaven in de eerste ronde; het nivo is vergelijkbaar met de opgaven van de Pythagoras Olympiade.

De beste deelnemers in de tweede ronde worden uitgenodigd deel te nemen aan de voorbereiding voor de Internationale Wiskunde Olympiade van 1998 in Taiwan. Er wordt een ploeg van zes personen die naar Taiwan mogen samengesteld. Aangezien de hele cyclus van de eerste ronde tot en met de Internationale Wiskunde Olympiade meer dan een jaar in beslag neemt, worden voor de tweede ronde alleen mensen uitgenodigd die op het moment van de eerste ronde nog niet in het examenjaar zitten.

Stuur je oplossingen naar:

Pythagoras Olympiade
TU Eindhoven
Faculteit Wiskunde en Informatica
Hoofdgebouw kamer 9.84
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
email: oudshoor@fwi.uva.nl

Vermeld bij de oplossing *naam, adres, school en klas*. Stuur bij de antwoorden ook een *toelichting*, waarin uitgelegd wordt hoe je aan het antwoord gekomen bent (een berekening of een bewijs). Insturen is mogelijk tot één maand na het verschijnen van deze Pythagoras.

Veel succes,
Ronald van Luijk
Sander van Rijnsouw
Wim Oudshoorn

Opgave 15

Je hebt $2n$ lottoballetjes. De balletjes zijn genummerd van 1 tot en met $2n$. Uit deze lottoballen trek je er $n + 1$. Bewijs dat er een getrokken getal is, dat gelijk is aan de som van twee andere getrokken getallen, of gelijk is aan het dubbele van een ander getrokken getal.

Opgave 16

In het vlak trek je n lijnen. Er gaan niet drie lijnen door een punt, ook zijn er geen twee lijnen evenwijdig. In hoeyeel delen wordt het vlak verdeeld?

probleem: De oplichter

Een oplichter komt bij een juwelier en koopt een parelcollier, een prachtsieraad, dat daarom ook heel duur is. Niet minder dan 50.000 DMark verlangt de juwelier ervoor, maar dat vindt de oplichter geen bezwaar; hij betaalt het collier met een ongedekte cheque.

De juwelier is erg in zijn nopjes met deze mooie transactie, waaraan hij 25% verdient. Met deze cheque koopt hij juwelen ter waarde van 50.000 DMark bij een andere juwelier, die hieraan op zijn beurt ook weer 25% verdient. De cheque gaat zo verder in de handen van een derde, een vierde, een vijfde ... en tenslotte in de handen van een tiende juwelier, en ieder van deze juwelienhandelaren verdiende 25%. De tiende juwelier gaat met de cheque naar de bank om deze te verzilveren, maar bij de bank ontdekt men dat de cheque ongedekt is. Wat moet er nu gebeuren? Alle transacties ongedaan maken? "Nee" zegt de tiende juwelier: "er is nog een andere uitweg!". Wat doet de juwelier?

Oplossing: De tiende juwelier riep de andere negen bij elkaar en maakte hen duidelijk dat ieder slechts 5000 DMark van zijn verdiende 12500 DMark af hoefde te staan om de cheque te kunnen dekken. De juweliers gingen hiermee accoord, zodat iedere juwelier toch nog 7500 DMark verdiend had. Merkwaardig dat een ongedekte cheque nog winstgevende zaken mogelijk maakt! Kun jij uitleggen waar het verdiende geld vandaan komt?

Bob de Jongste

Elk nummer van deze jaargang van Pythagoras bevat een artikel over wiskunde en chaos. Dit is het eerste artikel in de reeks en heeft als doel om je een beetje vertrouwd te maken met het begrip chaos. Wat is chaos precies en waar kom je het tegen? Wat heeft chaos met wiskunde te maken. In de wiskunde ligt toch alles vast, hoe kan daar dan chaos optreden?

• De dubbele slinger

Wat chaos is hoeven we je waarschijnlijk niet eens uit te leggen. Misschien is je kamer thuis wel een goed voorbeeld. Dan weet je ook wel dat chaos geen wanorde betekent. Je moeder zal van mening zijn dat je vaker moet opruimen, maar zelf kun je alles in je kamer terugvinden!

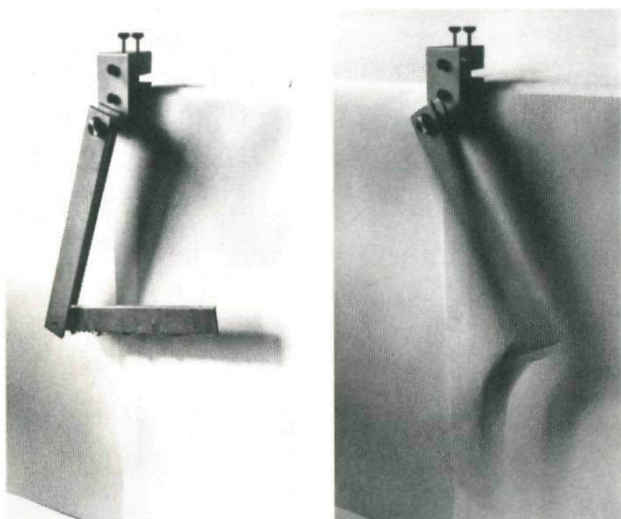
Vroeger werden veel processen als chaotisch, onvoorspelbaar en willekeurig beschouwd: het druppelen van een kraan, het weer, het ontstaan van wolken, wervelingen in vloeistofstromen. Sinds de komst van de computer kunnen we dergelijke processen goed bestuderen. Als voorbeeld van een chaotisch proces bekijken we in dit artikel de beweging van de dubbele slinger. Dit is een slinger waar aan de onderkant een tweede slinger is gehangen. Zo'n slinger kun je in principe zelf maken. Wij gebruiken de afgebeelde slinger. Deze beweegt in

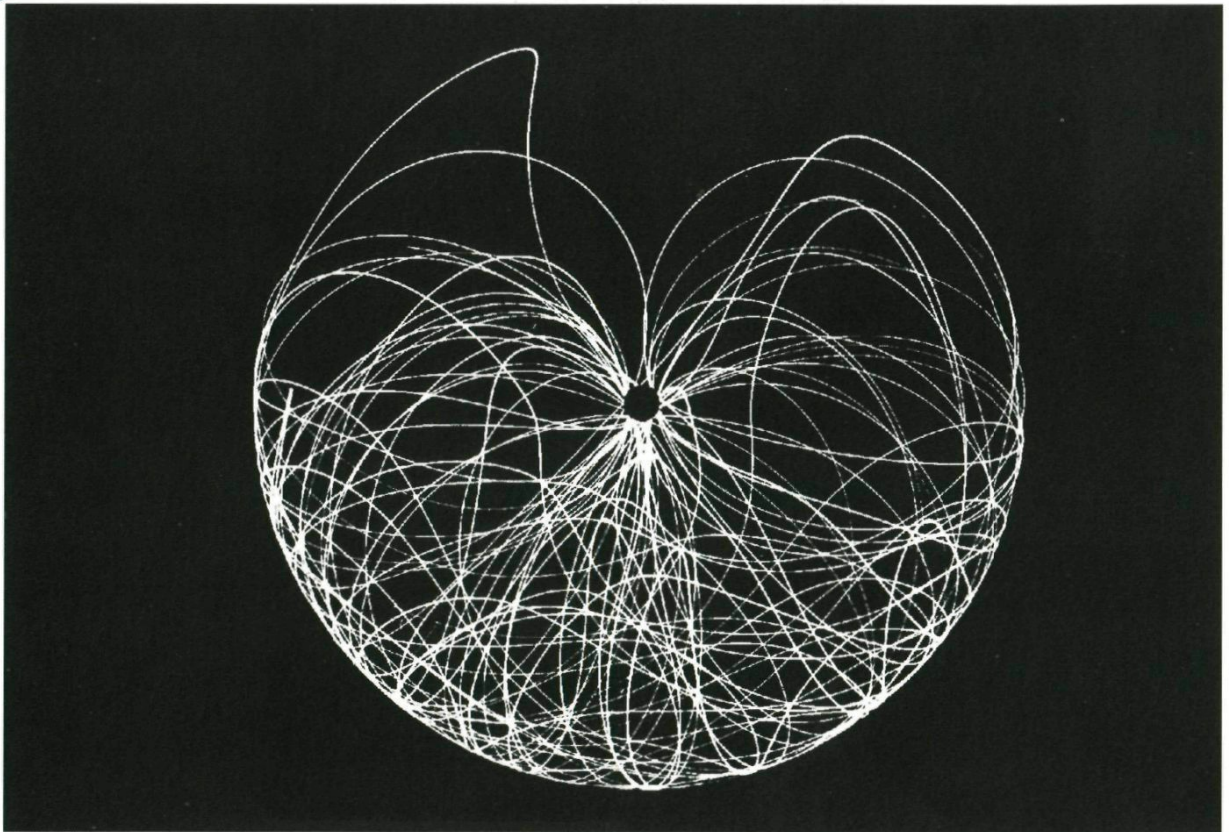
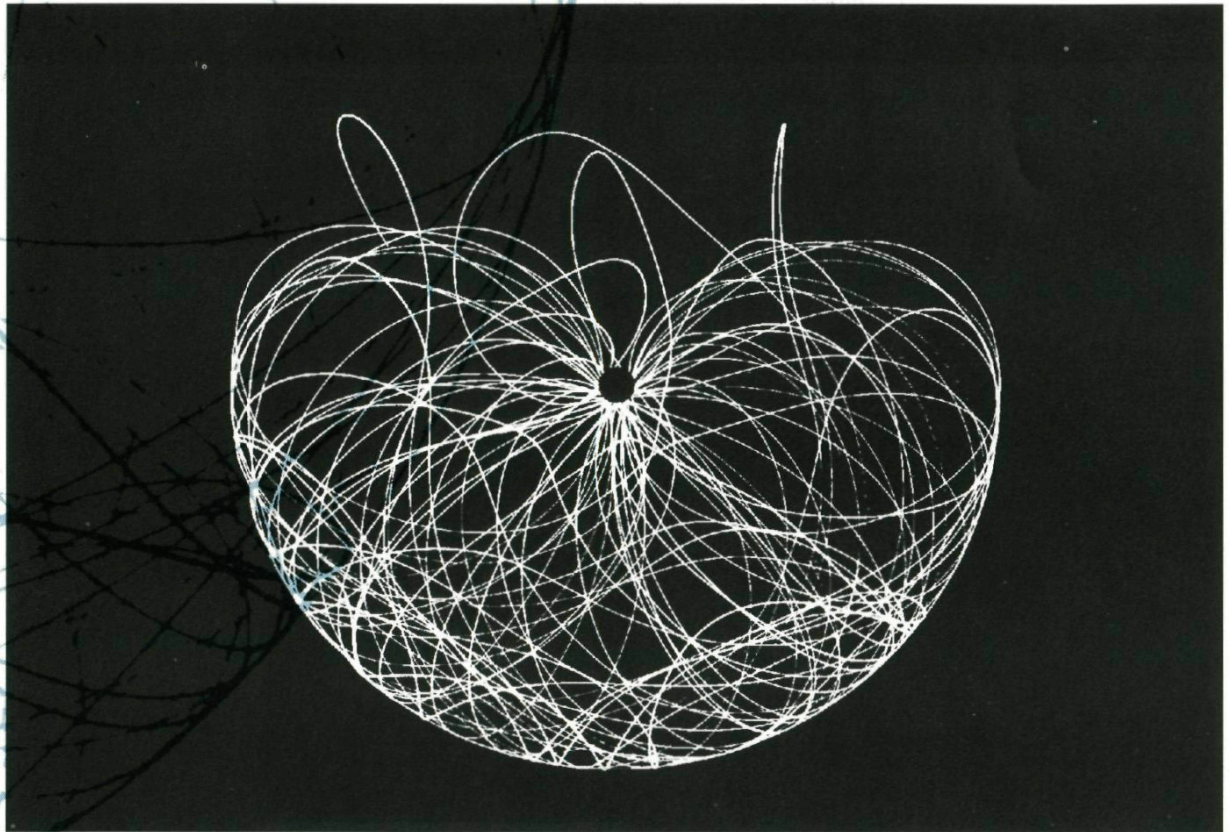
een vlak, en heeft twee aluminium armen van ongeveer veertig centimeter lang. De eerste arm is dubbel uitgevoerd, de tweede arm kan daar tussen door draaien.

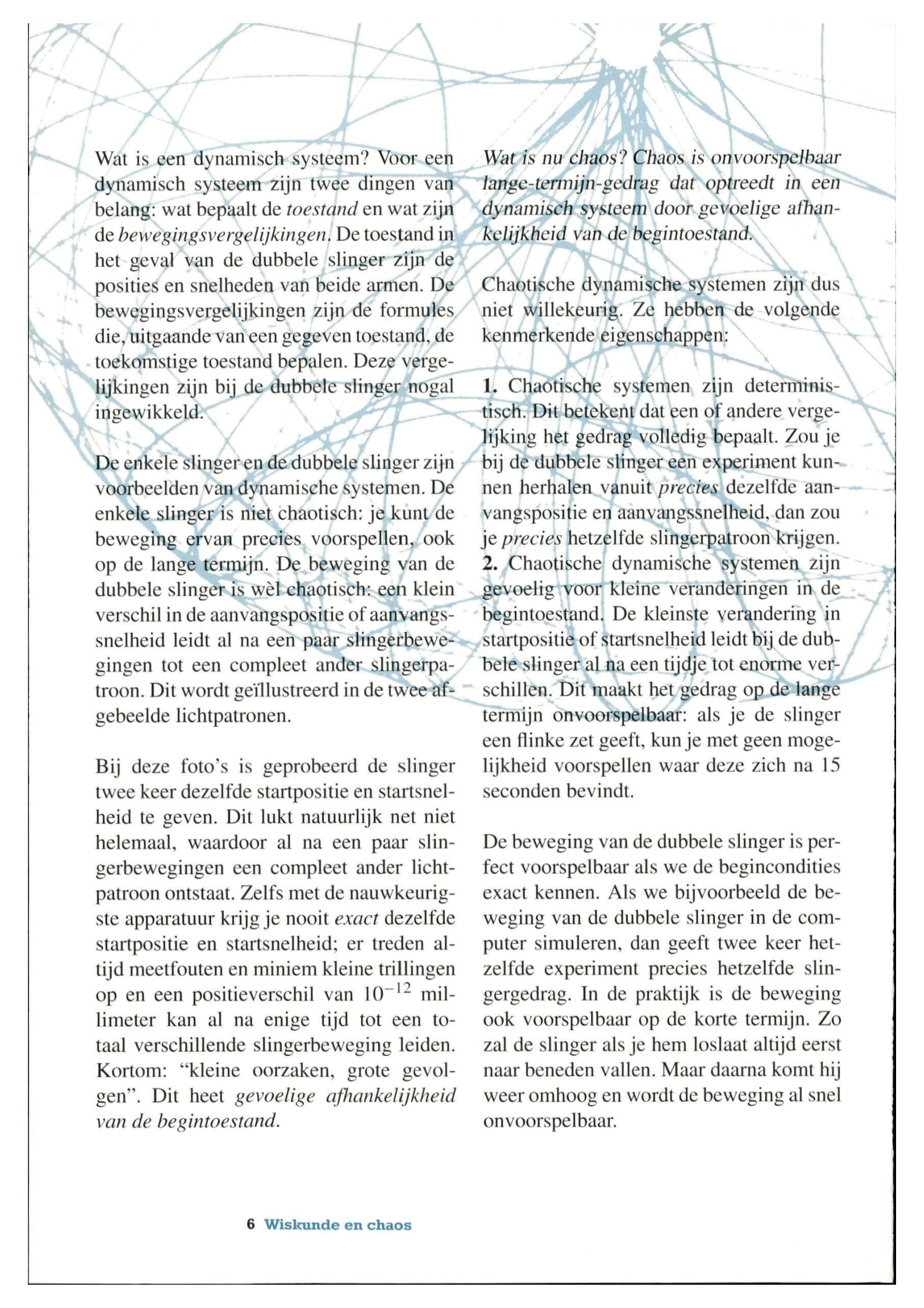
Iedereen weet hoe een enkele slinger zich gedraagt: heel voorspelbaar. Denk aan de slinger van een hangklok, deze gaat zeer regelmatig heen en weer, heen en weer... Geef je daarentegen de dubbele slinger een flinke uitslag, dan beweegt hij wild en onvoorspelbaar. De tweede arm van de slinger lijkt op een eigenzinnige manier rond te dansen: het ene moment voert hij gracieuze pirouettes uit, het andere moment een wilde tarantella.

Om deze wilde bewegingen te demonstreren hebben we aan het eind van de tweede arm een lampje gemonteerd en de beweging ervan in een donkere kamer gefotografeerd. De resulterende lichtpatronen zijn complex en keer op keer verschillend: je krijgt nooit twee keer hetzelfde patroon. Twee van deze patronen zijn hiernaast afgebeeld.

Het gedrag van de dubbele slinger illustreert goed wat we met chaos bedoelen. Hoewel de beweging van de slinger wiskundig goed te beschrijven is, kunnen we het slingergedrag niet voorspellen. De dubbele slinger is een voorbeeld van een *chaotisch dynamisch systeem*. We gaan uitleggen wat dit precies betekent.







Wat is een dynamisch systeem? Voor een dynamisch systeem zijn twee dingen van belang: wat bepaalt de *toestand* en wat zijn de *bewegingsvergelijkingen*. De toestand in het geval van de dubbele slinger zijn de posities en snelheden van beide armen. De bewegingsvergelijkingen zijn de formules die, uitgaande van een gegeven toestand, de toekomstige toestand bepalen. Deze vergelijkingen zijn bij de dubbele slinger nogal ingewikkeld.

De enkele slinger en de dubbele slinger zijn voorbeelden van dynamische systemen. De enkele slinger is niet chaotisch: je kunt de beweging ervan precies voorspellen, ook op de lange termijn. De beweging van de dubbele slinger is wél chaotisch: een klein verschil in de aanvangspositie of aanvangssnelheid leidt al na een paar slingerbewegingen tot een compleet ander slingerpatroon. Dit wordt geïllustreerd in de twee afgebeelde lichtpatronen.

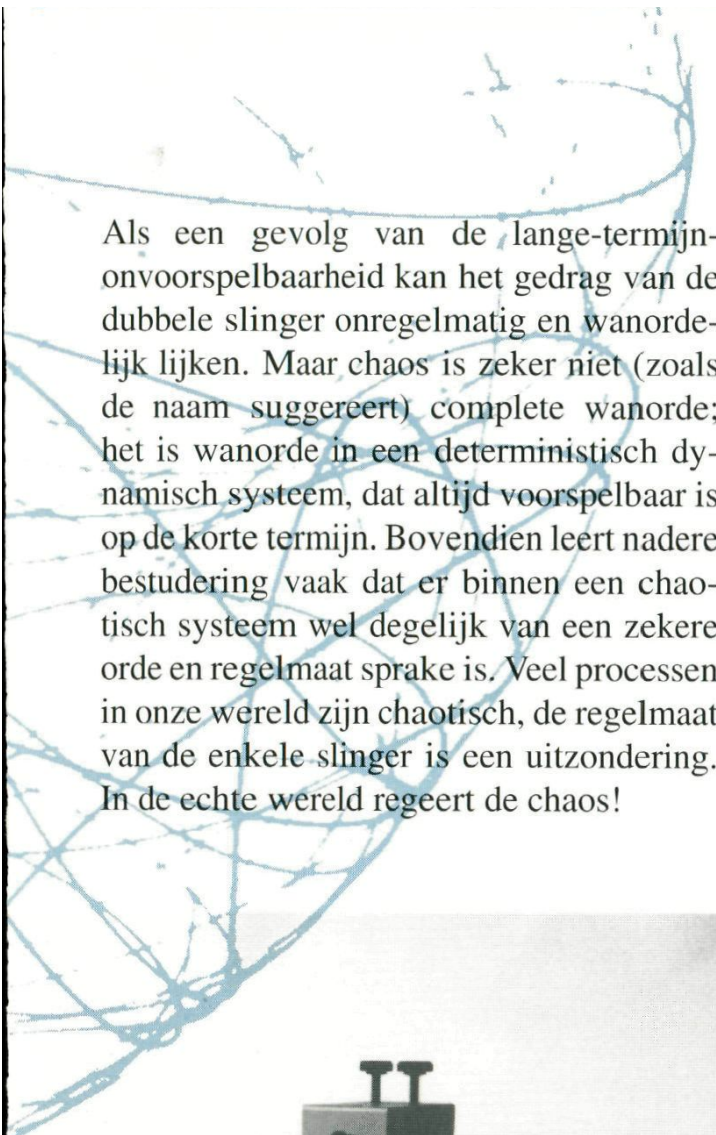
Bij deze foto's is geprobeerd de slinger twee keer dezelfde startpositie en startsnellheid te geven. Dit lukt natuurlijk net niet helemaal, waardoor al na een paar slingerbewegingen een compleet ander lichtpatroon ontstaat. Zelfs met de nauwkeurigste apparatuur krijg je nooit *exact* dezelfde startpositie en startsnellheid; er treden altijd meetfouten en miniem kleine trillingen op en een positieverschil van 10^{-12} millimeter kan al na enige tijd tot een totaal verschillende slingerbeweging leiden. Kortom: "kleine oorzaken, grote gevolgen". Dit heet *gevoelige afhankelijkheid van de begintoestand*.

Wat is nu chaos? Chaos is onvoorspelbaar lange-termijn-gedrag dat optreedt in een dynamisch systeem door gevoelige afhankelijkheid van de begintoestand.

Chaotische dynamische systemen zijn dus niet willekeurig. Ze hebben de volgende kenmerkende eigenschappen:

1. Chaotische systemen zijn deterministisch. Dit betekent dat een of andere vergelijking het gedrag volledig bepaalt. Zou je bij de dubbele slinger een experiment kunnen herhalen vanuit *precies* dezelfde aanvangspositie en aanvangssnelheid, dan zou je *precies* hetzelfde slingerpatroon krijgen.
2. Chaotische dynamische systemen zijn gevoelig voor kleine veranderingen in de begintoestand. De kleinste verandering in startpositie of startsnellheid leidt bij de dubbele slinger al na een tijdje tot enorme verschillen. Dit maakt het gedrag op de lange termijn onvoorspelbaar: als je de slinger een flinke zet geeft, kun je met geen mogelijkheid voorspellen waar deze zich na 15 seconden bevindt.

De beweging van de dubbele slinger is perfect voorspelbaar als we de begincondities exact kennen. Als we bijvoorbeeld de beweging van de dubbele slinger in de computer simuleren, dan geeft twee keer hetzelfde experiment precies hetzelfde slingergedrag. In de praktijk is de beweging ook voorspelbaar op de korte termijn. Zo zal de slinger als je hem loslaat altijd eerst naar beneden vallen. Maar daarna komt hij weer omhoog en wordt de beweging al snel onvoorspelbaar.



Als een gevolg van de lange-termijn-onvoorspelbaarheid kan het gedrag van de dubbele slinger onregelmatig en wanorde-lijk lijken. Maar chaos is zeker niet (zoals de naam suggereert) complete wanorde; het is wanorde in een deterministisch dynamisch systeem, dat altijd voorspelbaar is op de korte termijn. Bovendien leert nadere bestudering vaak dat er binnen een chaotisch systeem wel degelijk van een zekere orde en regelmaat sprake is. Veel processen in onze wereld zijn chaotisch, de regelmaat van de enkele slinger is een uitzondering. In de echte wereld regeert de chaos!

De volgende afleveringen

Deze jaargang van Pythagoras bevat een serie van 6 artikelen over chaos, onder redactie van prof. F. Takens en prof. H. W. Broer. Hieronder bespreken we in het kort de inhoud van deze artikelen.

1. oktober '96

De dubbele slinger.

2. december '96

Het chaotische gedrag van het weer.

3. februari '97

De Newton-methode. Dit is een methode om nulpunten van functies te bepalen. Bij functies die geen nulpunten hebben levert deze methode soms chaos op.

4. april '97

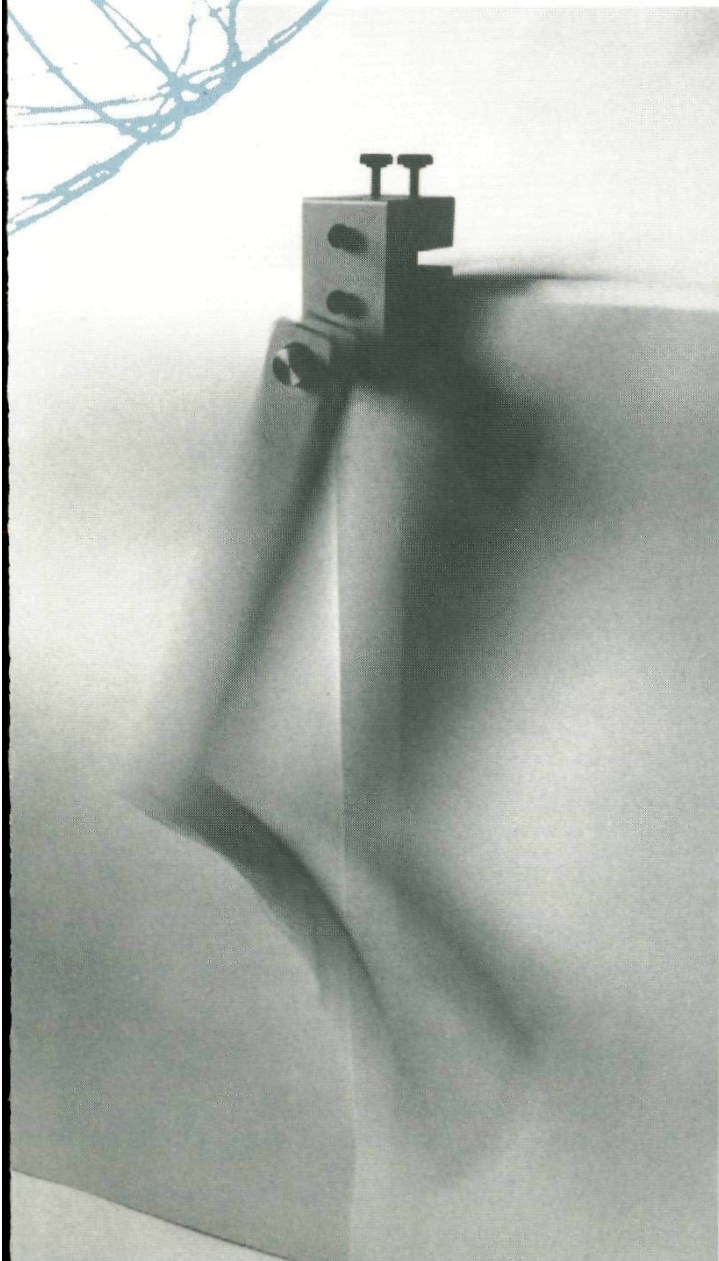
De Mandelbrot-verzameling. Aan de hand van deze verzameling wordt het verband besproken tussen chaos en zogenaamde fractals of fractalen.

5. juni '97

De chaotische schommel. Over de Hénon-attractor en oscillator-dynamica.

6. augustus '97

De OGY-methode. Dit is een methode om chaotische processen te regelen. Het hart is een chaotisch systeem. Het is mogelijk gebleken om met behulp van kleine stroompjes het hart vanuit een hartinfarct weer tot normaal kloppen te krijgen. Deze methode wordt ook gebruikt om epileptische aanvallen in de hersenen te voorkomen en de stabiliteit van lasers te vergroten.



Met een computer, een modem en de geschikte software kun je de digitale snelweg op. Je kunt software ophalen uit Amerika, het Louvre bezoeken, en van minuut tot minuut de beurskoersen in Amsterdam opvragen. Je kunt 'live' videobeelden van het Zandvoortse strand bekijken, recente beelden van weersatellieten ophalen in Frankrijk, Engeland en Duitsland, of kaarten van de sterrenhemel bij de NASA. Tussen deze informatie is allerlei interessante wiskunde te vinden. Daarover gaat deze terugkerende rubriek 'Wiskunde en Internet'.



• Pythagoras op het Internet

Leendert van Gastel

Zoeken naar Pythagoras

Bestaat er informatie over Pythagoras op het Internet? Wel, dat kunnen we uitvinden door te gaan *zoeken*. Zoeken op Internet is niet moeilijk, daarvoor bestaan speciale zoekmachines. Deze werken als een soort elektronische Gouden Gids: ze vinden alle adressen die betrekking hebben op een gegeven trefwoord. De meeste *browsers* (programma's om op Internet rond te kijken) hebben verschillende zoekmachines paraat. Wij gebruiken *Lycos*, een computer met een gigantische database waarin op dit moment 60 miljoen documenten zitten. Op alle woorden in die documenten kun je gaan zoeken. Lycos levert ons 892 verwijzingen naar Pythagoras in de vorm van Internet-adressen, zogenaamde URL's (*Uniform Resource Locators*). Niet al deze verwijzingen zijn voor ons bruikbaar. Zo is er een bedrijf in Zweden dat Pythagoras heet, en ook een computerspelletje; wij zoeken natuurlijk informatie over de *persoon* Pythagoras en zijn *stelling*.

Internet

Internet is een internationaal computernetwerk. Het biedt verschillende gebruiksmogelijkheden: WWW, het transport van bestanden, email (electronische post) en het op afstand bedienen van computers (remote login).

WWW

World Wide Web is een informatiesysteem voor Internet. Een *server* (een mogelijk verafgelegen computer) levert documenten, die met een *browser* (een programma op de locale computer) bekeken kunnen worden. Voor het ophalen van een bestand is het meestal voldoende om te klikken op een *link* die verwijst naar een URL.

URL

Een *Uniform Resource Locator* is een adres van een WWW-bestand op een computer die aan Internet gekoppeld is. Het bestaat uit drie delen: het protocol (bijvoorbeeld *http* (hypertext transfer protocol) of *fip* (file transfer protocol), het Internet adres

van de computer, en het pad op de computer naar het bestand, bijvoorbeeld

<http://www.fwi.uva.nl/misc/pythagoras>
protocol computeradres pad op de computer

Pythagoras van Samos

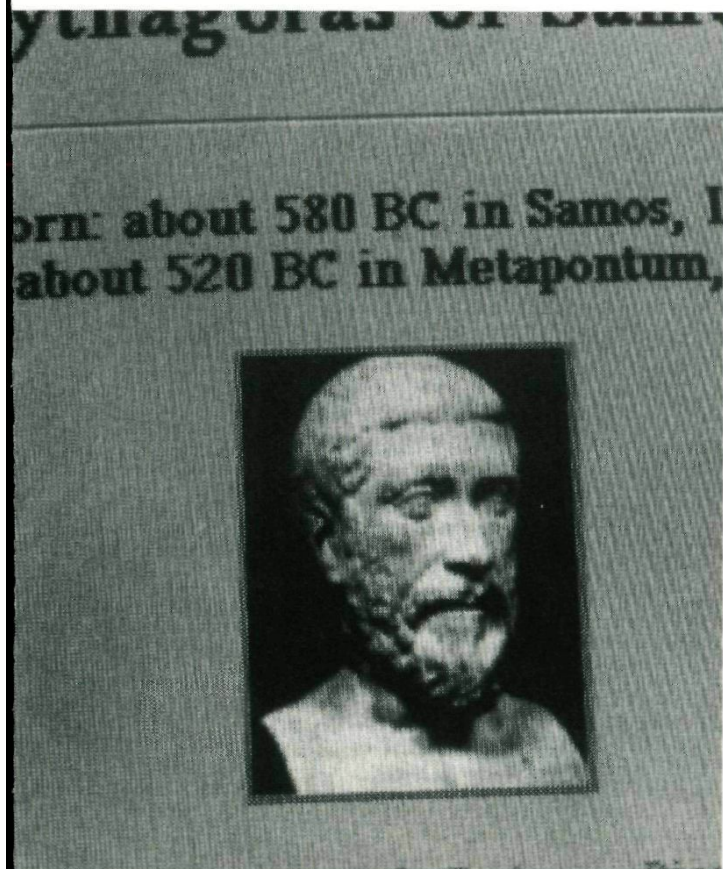
In het Engelse 'MacTutor History of Mathematics Archive' (zie [1]) vinden we historische informatie over Pythagoras en de school der Pythagoreërs. We zien op ons scherm o.a. de onderstaande afbeelding van Pythagoras.

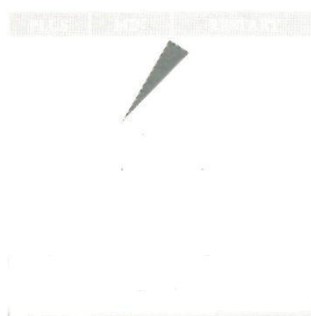
Verder vinden we beknopte informatie over zijn leven en werk: geboren omstreeks 580 v. Chr. op het eiland Samos (Griekenland), gestorven omstreeks 520 v. Chr. in Italië. Pythagoras was niet de ontdekker van de naar hem genoemde stelling; al duizend jaar eerder waren de Babyloniërs daarvan op de hoogte. Wel zou Pythagoras de eerste geweest kunnen zijn die de stelling bewees.

In de 'Masonry Essays' (zie [2]) vinden we uitgebreidere informatie. Op 56-jarige leeftijd stichtte Pythagoras in Crotona (Zuid-Italië) de beroemde school der Pythagoreërs, waar filosofie, wiskunde en natuurwetenschappen gestudeerd werd. Pythagoras bracht zijn meest getalenteerde discipelen onder in een broederschap die bescheidenheid, soberheid, geduld en zelfbeheersing predikte. De leden van de broederschap, 'Pythagoreërs' geheten, aten vegetarisch voedsel en ongegist brood. Naar verluid lieten ze hun haar, baard en nagels groeien. Ze leefden in een soort commune, schreven elke wetenschappelijke ontdekking toe aan de persoon van Pythagoras en zwoeren elke nieuwe ontdekking geheim te houden. De broederschap liet geen enkel manuscript na, zodat onze kennis over de Pythagoreërs uit andere bronnen komt. Getallen en meetkundige vormen hadden volgens de Pythagoreërs heilige eigenschappen. Het mysticisme en de geheimzinnigheid waarmee de school van Pythagoras omgeven was, wekte argwaan bij de overheid, die uiteindelijk de ontbinding van de gemeenschap verordende.

Een beeldenserie

Carl Eberhart, een docent van de University of Kentucky, heeft een animatie gemaakt om de stelling van Pythagoras te bewijzen (zie [3]). Je ziet een serie beelden, die gemaakt zijn met behulp van het wiskunde-pakket *Maple*. Deze beelden vormen samen een soort filmpje, waaruit je met enig nadenken een bewijs van de stelling van Pythagoras kan distilleren.





De homepage van Pythagoras

Sinds kort is ook dit tijdschrift te vinden op Internet. Pythagoras heeft namelijk een *homepage* gekregen. Het adres is:

<http://www.fwi.uva.nl/misc/pythagoras>

Een interactief bewijs

Met *Java*, een programmeertaal speciaal geschikt voor Internet, kun je zèlf een bewijs van de stelling van Pythagoras geven. Er is een Java-programma (zie [4]), dat je in staat stelt interactief één voor één de stappen in het bewijs uit te voeren. In elke stap zie je een aantal driehoeken over het scherm bewegen, terwijl in een aparte tekst elke stap toegelicht wordt. Hierboven zie je één van die stapjes afgebeeld

Hier is allerlei informatie over het blad te vinden. Zo wordt er de stand in de laddercompetitie van de Pythagoras Olympiade bijgehouden en worden oplossingen van problemen beschreven. Ook deze rubriek heeft er een eigen plek. Alle hierboven besproken URL's zijn daar, als service voor de lezer, aanwezig als link.

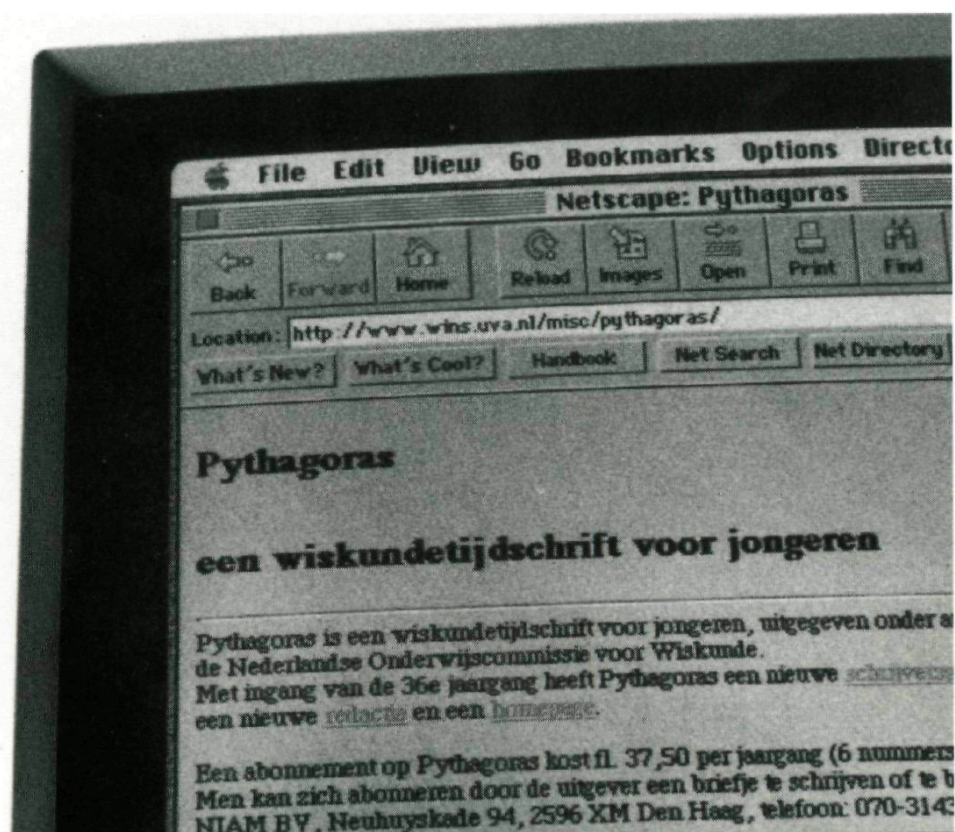
Gebruikte Internetadressen

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Pythagoras.html>

<ftp://thelonious.mit.edu/pub/Masonry/Essays/pythagoras.html>

<http://www.ms.uky.edu/~carl/ma341/pythag.html>

<http://duticai.twi.tudelft.nl/~charles/java/html/pythagoras.html>



Jan de Witt

Teun Koetsier

Iedereen kent wel de naam van Jan (of Johan) de Witt (1625-1672). Hij was afkomstig uit een Dordtse familie van regenten en vanaf 1653 raadpensionaris van de Staten van Holland. Hiermee was hij in de zeventiende-eeuwse Nederlandse politiek een zeer machtig man. Bekend is de uitdrukking 'een jongen van Jan de Witt', waarmee het soort jongen wordt bedoeld waarop de Witt een beroep kon doen als er oorlog gevoerd moest worden. In 1672 werd Jan de Witt, samen met zijn broer, in de Gevangendoor in Den Haag op gruwelijke wijze door het Haagse 'grauw' vermoord.

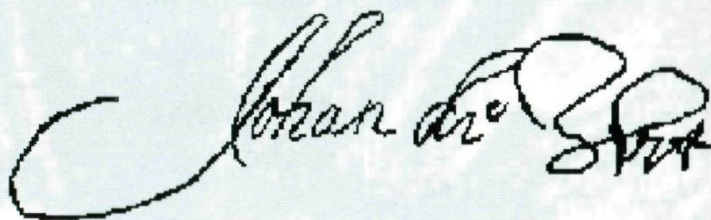
Minder bekend is dat De Witt ook een briljant wiskundige was. In 1659 verscheen van hem een belangrijk werk over kegelsneden (ellipsen, parabolen en hyperbolen) en in 1671 verscheen zijn "Waardijde van Lyf-renten naer Proportie van Los-renten". Dat laatste werk is een van de eerste boeken waarin statistiek en kansrekening worden toegepast. Een 'lijfrente' is een uit de middeleeuwen afkomstige en tot ver in de negentiende eeuw populaire manier om zich tot aan de dood van een bepaald individu van een vast inkomen te verzekeren. Daarbij leende de overheid, die geld nodig had, een bedrag van een individu, de lijfrentenier, en verplichtte zich daarbij om hem of haar een vaste rente te betalen tot aan de dood van een van te voren aan te geven persoon, die als 'lijf' fungeerde. Dat kon de

lijfrentenier zelf zijn, maar ook een ander. Vooral driejarige meisjes schijnen erg populair te zijn geweest als 'lijf' omdat men dacht dat ze een grote levensverwachting hadden. Een lijfrente van 7,14% was in die tijd gebruikelijk.

In zijn boek vergeleek De Witt lijfrenten met 'losrenten'. Bij een losrente leende de overheid een bedrag van een individu en betaalde vervolgens jaarlijks een rentepercentage (gebruikelijk was 4%) plus een deel van de hoofdsom als aflossing totdat het gehele bedrag was afgelost.

Bij een losrente is de totale hoeveelheid geld die de rentenier krijgt precies bekend, bij een lijfrente hangt de gemiddelde totale rente af van de levensverwachting van het lijf. Door uit te gaan van naar zijn mening realistische veronderstellingen over die levensverwachting kon De Witt laten zien dat bij gelijk geleend bedrag een losrente van 4% evenveel opleverde als een lijfrente van 6,25%. De overheid betaalde echter 7,14%! De conclusie van De Witt was dat, gemiddeld, een lijfrente voordeliger was dan een losrente.

Het werk van De Witt over lijfrenten rekent men tegenwoordig tot de verzekeringswiskunde, een bloeiend specialisme.

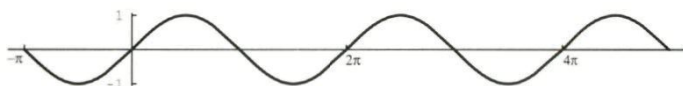
A handwritten signature in black ink, which appears to read 'Johan de Witt'. The signature is stylized with a large, sweeping initial 'J' and a flourish at the end.

Periodieke gebeurtenissen spelen een belangrijke rol in het dagelijks leven. Denk aan de zon die om de aarde draait (of andersom), de maan, de planeten en hun banen aan de sterrenhemel. Na verloop van tijd komen deze hemellichamen op hetzelfde punt terecht en maken dan weer dezelfde loop door. Dit verschijnsel noemen we *periodiciteit*.

• Breuken en periodiciteit

Rob Tijdeman

Ook in de wiskunde kennen we veel periodieke verschijnselen. Bijvoorbeeld, de grafieken van veel goniometrische functies, zoals sinus, cosinus en tangens zijn periodiek.



$$y = \sin x$$

We zeggen dat de grafiek van $y = \sin x$ periode 2π heeft. In dit artikel bekijken we decimale ontwikkelingen van breuken, deze zijn ook periodiek. Neem bijvoorbeeld

$$\frac{2}{7} = 0,285714285714285714\dots$$

We zien dat er een groep van zes cijfers is, namelijk (285714), die steeds herhaald wordt. Dit noemen we een *cykel*. De lengte van een (kortste) zich herhalende cykel heet de *periode* van de decimale breuk. We schrijven kortweg $2/7 = 0,\overline{285714}$, waarbij het bovenstreepte gedeelte steeds herhaald moet worden. Als we $1/7$ uitwerken, dan vinden we

$$\begin{aligned}\frac{1}{7} &= 0,142857142857142857\dots \\ &= 0,\overline{142857}.\end{aligned}$$

De periode is weer 6, de periodecykel is

(142857). Merk op dat de ontwikkelingen van $1/7$ en $2/7$ bijna hetzelfde zijn: ze zijn ten opzichte van elkaar verschoven. De decimale ontwikkeling van $2/7$ kunnen we daarom ook schrijven als

$$\begin{aligned}\frac{2}{7} &= 0,2857142857142857142857\dots \\ &= 0,2857\overline{142857}.\end{aligned}$$

Dus (142857) is ook periodecykel van $2/7$. We gaan laten zien dat de decimale ontwikkeling van elke breuk periodiek is. Voor het gemak vullen we afbrekende breuken met nullen aan, dus in plaats van $\frac{1}{4} = 0,25$ schrijven we $0,25000\dots$. We zeggen daarom dat $1/4$ ook periodiek is, met periode 1.

Stelling. *De decimale ontwikkeling van een breuk is periodiek met een periode die kleiner is dan de noemer.*

BEWIJS. De decimale ontwikkeling van een breuk m/n krijgen we door een *staartdeling* uit te voeren. Als deze afbreekt, dan is volgens afspraak m/n periodiek met periode 1.

Breekt de deling niet af, dan treedt nooit rest 0 op en liggen de optredende resten tussen 0 en n ; daarvan zijn er hoogstens $n - 1$. Vanaf een zeker moment zullen we alleen nog maar nullen aanhalen. Onder n opeen-

volgende resten zullen dan twee gelijke zitten, en de deling vanaf de tweede rest is identiek aan die vanaf de eerste (we halen immers in beide gevallen een nul aan). Q.E.D.

We illustreren dit met de decimale ontwikkeling van $5/7$:

$$7/5,00000000... \setminus 0,7142857...$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \hline 10 \\ 7 \\ \hline 30 \\ 28 \\ \hline 20 \\ 14 \\ \hline 60 \\ 56 \\ \hline 40 \\ 35 \\ \hline 50 \\ 49 \\ \hline 10 \end{array}$$

De optredende resten zijn achtereenvolgens 1, 3, 2, 6, 4, 5, en daarna herhaalt de staartdeling zich: de volgende rest is weer 1, enz. De decimale ontwikkeling van $5/7$ is dus gelijk aan

$$\begin{aligned} \frac{5}{7} &= 0,714285714285714285 \\ &= 0,\overline{714285} = 0,7\overline{142857}. \end{aligned}$$

Dat (142857) ook hier periodecykel is, is niet meer verwonderlijk. Kijk maar naar de bovenstaande staartdeling: als we de eerste stap weglaten krijgen we de decimale ontwikkeling van $1/7$, laten we de eerste twee stappen weg, dan krijgen we die van $3/7$, enz. Conclusie: alle breuken met noe-

mer 7 hebben periode 6 en periodecykel (142857).

Hebben nu alle breuken m/n periode $n-1$? Als volgende voorbeeld nemen we de breuk $1/11$. Volgens onze stelling is $1/11$ ook periodiek, met een periode kleiner dan elf. We berekenen de decimale ontwikkeling:

$$\begin{aligned} \frac{1}{11} &= 0,090909... \\ &= 0,\overline{09}. \end{aligned}$$

De periode is dus niet tien, maar twee!

vragen:

Welke regelmaat kun je nu zelf ontdekken in de periodes en periodecycli van breuken. Bijvoorbeeld, kun je antwoord geven op de volgende vragen? Neem, om onnodige problemen te vermijden, steeds aan dat alle breuken m/n niet te vereenvoudigen zijn.

1. Van welke breuken breekt de decimale ontwikkeling af?
2. Wat kun je zeggen over de periodes van breuken met dezelfde noemer?
3. Wat is de periode van $1/p$ als p een priemgetal is?
4. Hoe hangt de periode van een breuk $1/n$ af van n ?

probleem: Dertig jaar geleden

Uit de Pythagoras van dertig jaar geleden (zesde jaargang, nummer 1) komt het volgende vraagstuk:

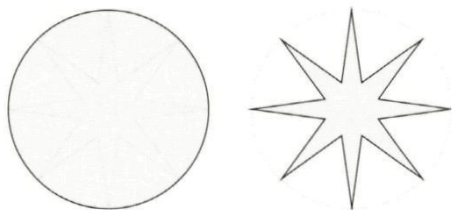
Bepaal de laatste twee cijfers van 13^{1966} .

In het dagelijks leven worden de begrippen groot, groter, klein en kleiner op verschillende manieren gebruikt. Bij mensen gebruiken we deze woorden voor de lengte, bij grasvelden gaat het om de oppervlakte en bij pannen of emmers bedoelen we de inhoud. Bij scholen bedoelen we het aantal leerlingen, bij bedrijven wordt groot of klein gebruikt voor de omzet, het aantal werknemers of de hoeveelheid kapitaal.

• Oppervlakte en omtrek

Fransje Akveld

In de wiskunde spreken we *precies* af wat we onder groot en klein verstaan. Als maat voor de grootte van een vlakke figuur kun je bijvoorbeeld de oppervlakte of de omtrek nemen. Je zou kunnen denken dat dit in de praktijk op hetzelfde neerkomt. Bekijk de volgende twee figuren.



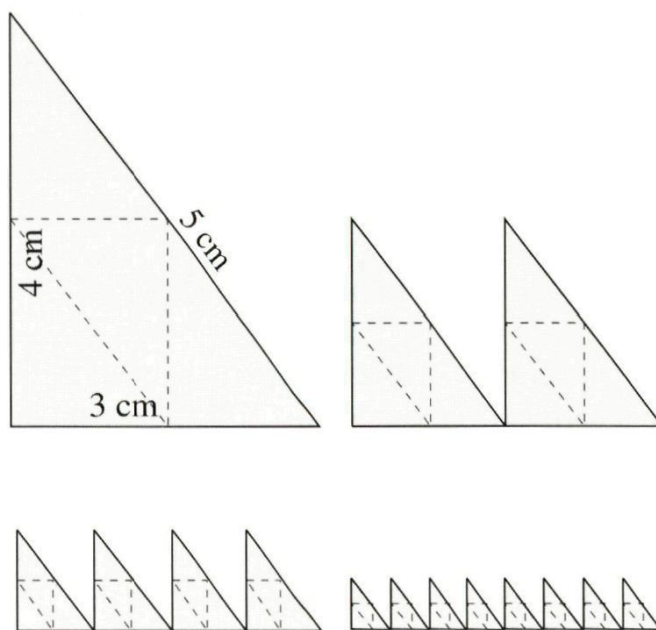
De oppervlakte van de linker driehoek is groter dan de oppervlakte van de rechter, maar de omtrek is juist kleiner. Dit laat zien dat oppervlakte en omtrek heel verschillende begrippen zijn.

1. Van de volgende figuren gaan we de omtrek met de oppervlakte vergelijken. Bekijk de vier figuren hiernaast. De oppervlakte van de grote driehoek is 6 cm^2 , de omtrek is 12 cm (reken zelf na). Verdeel op de aangegeven manier de grote driehoek in vier kleinere driehoekjes en laat de middelste en de bovenste weg. Dit geeft de tweede figuur. Deze heeft oppervlakte 3 cm^2 en omtrek 12 cm . Immers, de oppervlakte is de helft van de oppervlakte van de eerste figuur, terwijl de omtrek niet verandert.

Hetzelfde procédé toegepast op de tweede figuur levert de derde figuur, en uit de derde figuur ontstaat de vierde. Zo doorgaande krijgen we een oneindige rij figuurtjes, waarvan we de oppervlakten aangeven we met $O_1, O_2, O_3, O_4, \dots$. Deze oppervlakten zijn gelijk aan $6\text{ cm}^2, 3\text{ cm}^2, 1,5\text{ cm}^2, 0,75\text{ cm}^2, \dots$ en deze rij getallen gaat naar nul. We noteren dit op de volgende manier:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O_n = 0,$$

en zeggen: “de rij getallen O_n gaat naar 0 als n naar oneindig gaat”.



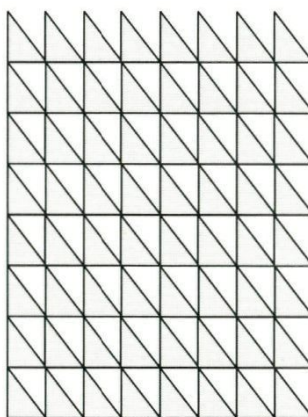
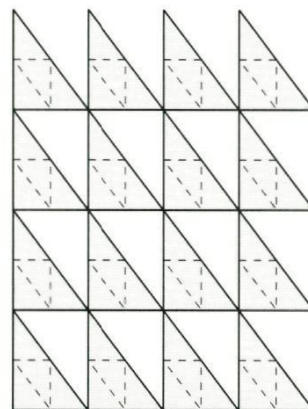
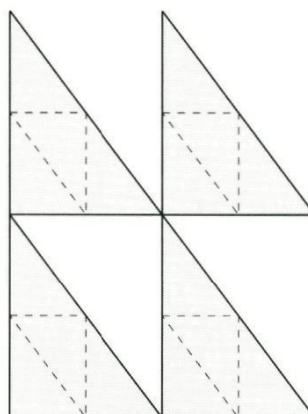
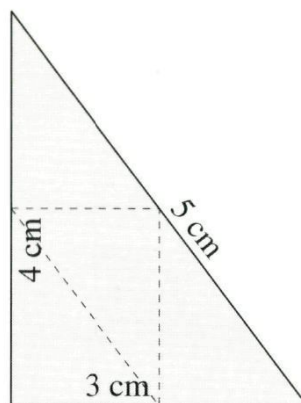
2. We hebben hierboven een voorbeeld gegeven van een oneindige rij figuurtjes, waarvan de oppervlakten naar nul gaan en de omtrekken hetzelfde blijven. Kunnen we nu ook een rij figuurtjes maken, waarvan de oppervlakten allemaal gelijk zijn en de omtrekken steeds groter worden? Bekijk de figuren hiernaast.

De eerste figuur is weer een rechthoekige driehoek met oppervlakte 6 cm^2 en omtrek 12 cm . De tweede figuur ontstaat uit de eerste door deze weer in vier driehoeken te verdelen, en het middelste driehoekje 'naar buiten te klappen'. De oppervlakte van de tweede figuur is gelijk aan die van de eerste, 6 cm^2 . De omtrek is gelijk aan vier keer de omtrek van een klein driehoekje, dus gelijk aan $4 \times \frac{1}{2} \times 12 = 24\text{ cm}$. De omtrek is dus twee keer zo groot!

Hetzelfde procédé toegepast op de tweede figuur levert de derde figuur, evenzo ontstaat de vierde figuur uit de derde. We krijgen zo een oneindige rij van figuren, die allemaal oppervlakte 6 cm^2 hebben, terwijl de omtrek steeds twee keer zo groot wordt. Geven we deze omtrekken aan met $M_1, M_2, M_3, M_4, \dots$, dan is deze rij gelijk aan $12\text{ cm}, 24\text{ cm}, 48\text{ cm}, 96\text{ cm}, \dots$. De rij getallen M_n gaat naar oneindig als n naar oneindig gaat. We noteren dit met

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \infty.$$

3. Tot slot construeren we een rij figuurtjes, waarvan de oppervlakten naar nul gaan en de omtrekken naar oneindig. We combineren de methodes uit (1) en (2).



Bekijk de figuren hiernaast.

De tweede figuur ontstaat uit de eerste door het aangegeven driehoekje weg te laten. We berekenen oppervlakte en omtrek. Van de vier driehoekjes houden we er drie over, dus is de oppervlakte van de tweede figuur gelijk aan $\frac{3}{4} \times 6 = 4,5 \text{ cm}^2$. De omtrek van de tweede figuur is daarentegen gelijk aan $3 \times \frac{1}{2} \times 12 = 18 \text{ cm}$.

Door dit procédé te herhalen ontstaan de derde en de vierde figuur. In elke stap wordt de oppervlakte met $\frac{3}{4}$ vermenigvuldigd, terwijl de omtrek steeds $\frac{3}{2}$ keer zo groot wordt. Voor de oppervlakten $O_1, O_2, O_3, O_4, \dots$ geldt dat $O_2 = \frac{3}{4} O_1$, $O_3 = \frac{9}{16} O_1$, $O_4 = \frac{27}{64} O_1$, enz. Dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O_n = 0.$$

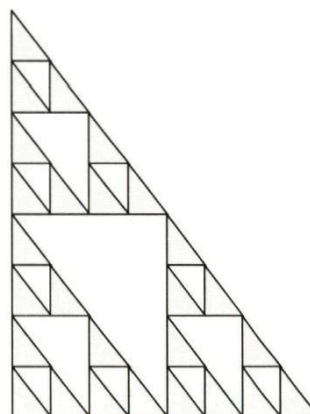
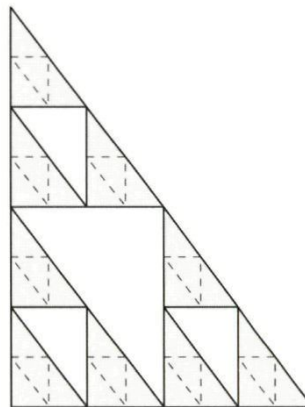
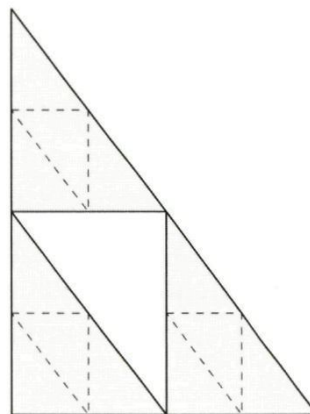
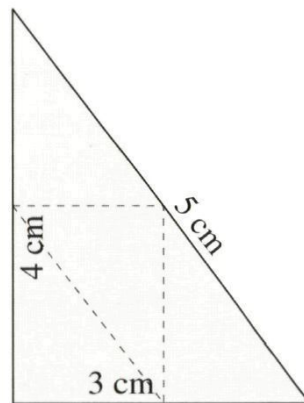
De omtrek wordt steeds met $\frac{3}{2}$ vermenigvuldigd: $M_2 = \frac{3}{2} M_1$, $M_3 = \frac{9}{4} M_1$, $M_4 = \frac{27}{8} M_1$, enz. Dus M_n gaat naar oneindig als n naar oneindig gaat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \infty.$$

vragen:

Wij zijn steeds van driehoeken uit gegaan. Kun je zelf rijen bedenken van rechthoeken of vierkanten waarin een soortgelijk systeem zit?

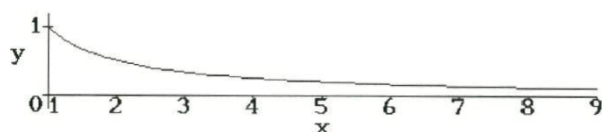
Een moeilijkere vraag is de volgende: is het ook mogelijk een rij figuren te bedenken, waarvan de oppervlakten gelijk blijven en waarvan de omtrekken naar nul gaan? Of de omtrekken blijven gelijk en de oppervlakten gaan naar oneindig?



•• De schildersparadox

Peter Stevenhagen

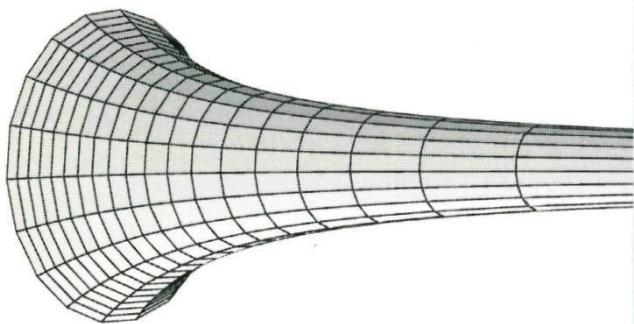
In het voorafgaande artikel zagen we dat oppervlakte en omtrek zich onafhankelijk kunnen gedragen. Er zijn ook leuke voorbeelden in 3 dimensies. Neem maar eens de grafiek van de functie $f(x) = 1/x$ voor $x \geq 1$.



Als we deze grafiek om de x -as wentelen, ontstaat een oneindig lange trompet. Torricelli, bekend vanwege luchtdrukproeven met kwikbuisjes, ontdekte in 1641 dat de oppervlakte van deze trompet oneindig is, maar de inhoud eindig, en in feite gelijk aan

$$\begin{aligned}\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \pi \cdot [-1/x]_1^{\infty} \\ &= \pi(0 - (-1)) = \pi.\end{aligned}$$

Indien we het oppervlak van onze trompet zouden willen verven, dan zou je zeggen dat voor een oneindig oppervlak oneindig veel verf nodig is. Torricelli's berekening laat echter zien dat we de trompet kunnen vullen met een π -literblik verf. Dan is het oppervlak zeker geverfd, en we zijn niet eens zuinig geweest.



probleem: **Leg uit**

Vier zwarte kippen en drie witte kippen leggen in vijf dagen evenveel eieren als drie zwarte kippen en vijf witte in vier dagen. Wat zijn nu de beste legkippen, de zwarte of de witte?

Bob de Jongste

probleem: **Het waterreservoir**

In een oud algebraboek van 1916 kwam ik de volgende opgave tegen.

Een reservoir ontvangt continu water via een pijpleiding, waar het water met een constante snelheid uit stroomt. Er zijn tien gelijke afvoerpijpen, die het water kunnen verspreiden over de velden. Het reservoir bevat M liter water. Als alle tien afvoerpijpen tegelijkertijd open gezet worden, is het reservoir na twee en een half uur leeg. Indien er slechts zes pijpen open gezet worden, is het reservoir na vijf en een half uur leeg. Hoe lang duurt het voor het reservoir leeg is als er slechts drie pijpen open gezet worden?

Bob de Jongste

Dit is het eerste artikel in de rubriek 'Wiskunde met de computer'. Voor sommigen is de computer alleen maar een schrijfmachine, maar in de handen van iemand die handig met formules weet om te gaan, is de computer is een fantastisch reken- en tekeninstrument. Het onderzoeken van wiskundige problemen op de computer gaat bijna spelenderwijs, is spannend, en levert soms verrassende resultaten.

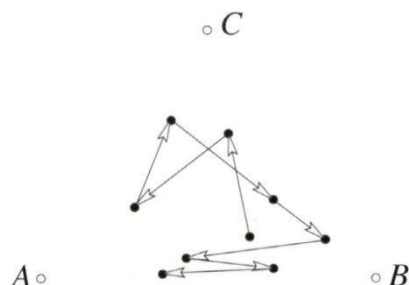
• De zeef van Sierpiński

Hans Lauwerier

Wiskunde
met de computer

Een chaotisch golfspel

Een golfspeler speelt een vreemd spelletje golf. Er zijn drie holes die we A , B en C noemen. De golfspeler slaat de bal precies *halverwege* een hole. Welke hole is een kwestie van toeval. Hij beschikt daartoe over een dobbelsteen. Na telkens een worp weet hij in welke richting hij moet slaan, in de richting van A , B of C . Als een goede speler markeert hij na elke slag de positie van de bal. De eerste paar stappen kunnen er bijvoorbeeld als volgt uitzien.



De bovenstaande stappen horen bij de 'dobbelsteenworpen' C, A, C, B, B, A, B, A . Dit spel kun je zelf spelen op een velletje papier en een gewone dobbelsteen. Kies een willekeurige beginpositie (binnen of buiten de driehoek) en markeer de posities van een paar honderd opeenvolgende slagen, waarna je stopt. In wiskundige zin is dit spel nooit afgelopen, omdat de bal nooit verder dan halverwege een hole komt.

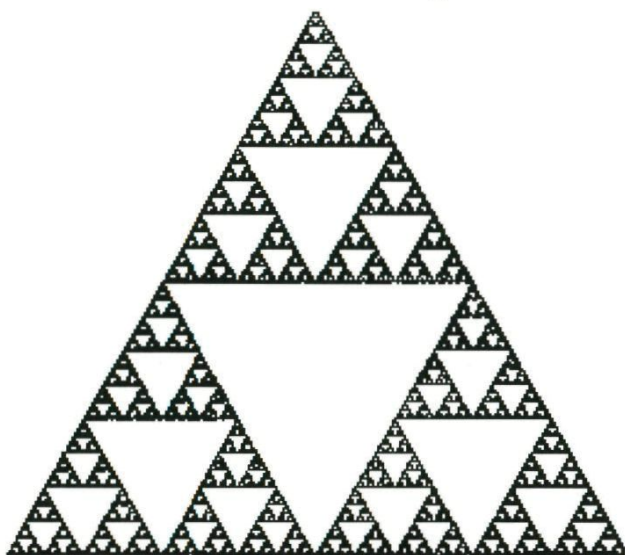
De kunst is te voorspellen hoe het patroon van die honderden puntjes er uiteindelijk uit gaat zien. Je zou bijvoorbeeld kunnen denken dat het uiteindelijke patroon niet te voorspellen is, dat het afhangt van het toeval. Je zou ook kunnen denken dat, als je maar lang genoeg doorspeelt, de hele driehoek gelijkmatig gevuld wordt met golfbalpuntjes.

Met behulp van het volgende BASIC-programma kunnen we dit golfspel op de computer simuleren.

```
SCREEN 12 : CLS
WINDOW (-1.2,-.6)-(1.2,1.2)
RANDOMIZE 11
A=1/2
X=0 : Y=1/2
DO WHILE INKEY$=""
  R=INT(3*RND)
  SELECT CASE R
    CASE 0
      X=A*X+A-1 : Y=A*Y
    CASE 1
      X=A*X-A+1 : Y=A*Y
    CASE 2
      X=A*X : Y=A*Y-A+1
  END SELECT
  PSET (X,Y)
LOOP
END
```


Dit programma gaat uit van een gelijkbenige rechthoekige driehoek met hoekpunten $(\pm 1, 0)$ en $(0, 1)$. De variabele r simuleert het werpen met een dobbelsteen. Bij elke worp wordt het punt (x, y) (de golfbal) halverwege een der hoekpunten gebracht; het beginpunt is $(0, \frac{1}{2})$. Het programma stopt wanneer je een willekeurige toets indrukt.

Op je scherm verschijnen eerst losse punten. Na een tijdje rijgen deze punten zich aaneen tot de onderstaande figuur!

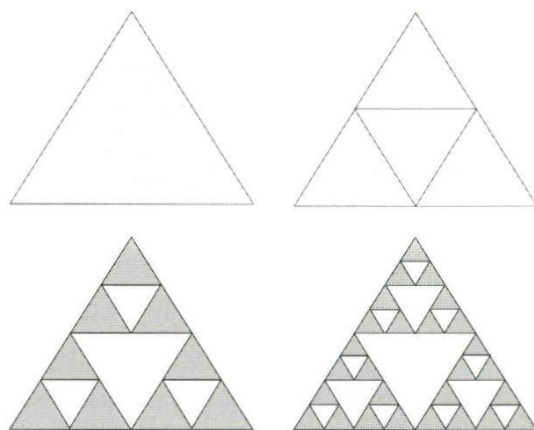


Deze driehoek staat bekend als de zeef van Sierpiński. Je krijgt praktisch dezelfde figuur als je een ander beginpunt kiest (wijzig x en y in de vijfde regel).

Je kunt ook de spelregels iets wijzigen. De parameter $a = \frac{1}{2}$ (vierde regel) zorgt er voor dat de bal steeds halverwege een hole geslagen wordt. Neem bijvoorbeeld eens $a = 0,4$ of $a = 0,53$. Wat gebeurt er?

Sierpiński's zeef

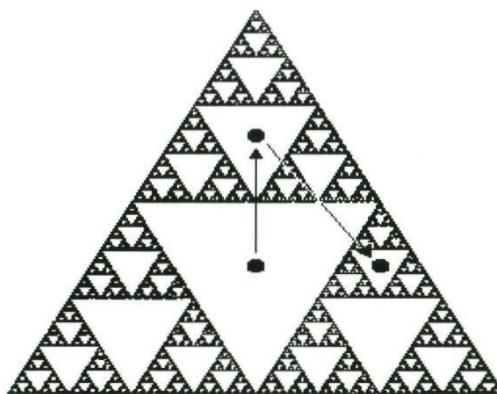
De zeef van Sierpiński's kunnen we construeren *zonder* gebruik te maken van het toeval. Begin met een willekeurige drie-



hoek. De middens van de zijden vormen de hoekpunten van een kleinere driehoek, die we uit het origineel verwijderen. We houden drie driehoekjes over, die elk half zo groot zijn als de originele driehoek.

Deze stap kunnen we herhalen. Van elk van de overgebleven drie driehoeken verwijderen we het middelste driehoekje, zodat we negen kleinere driehoekjes overhouden. In de volgende stap krijgen we 27 driehoekjes, enzovoort. Gaan we oneindig lang door, dan krijgen we de zeef van Sierpiński (zie ook pagina 16: *Oppervlakte en omtrek*).

Er is een eenvoudige verklaring waarom de zeef van Sierpiński ontstaat uit het chaotische golfspel. Veronderstel dat we ergens in het midden van de centrale witte driehoek beginnen. Waarheen gaat de golfbal na één slag? Bekijk de volgende figuur.



We zien dat na één stap de bal naar het midden van een van de drie kleinere witte driehoekjes geslagen wordt. Na de volgende stap gaat de bal naar een van de volgende negen kleinere driehoekjes, enzovoort. De bal komt terecht in steeds kleinere witte driehoekjes, zodat de bal de zeef van Sierpiński nooit zal bereiken. Maar deze driehoekjes worden zéér snel microscopisch klein. Daarom zal het in de praktijk lijken alsof de bal al na een klein aantal stappen terecht komt op de zeef van Sierpiński.

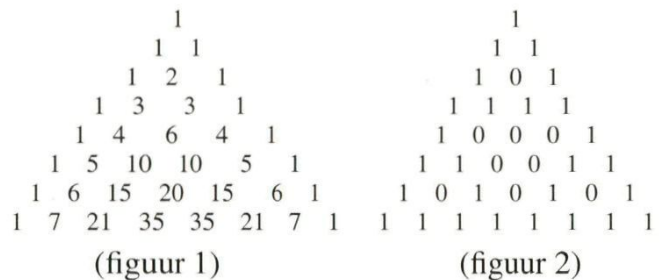
De honderden slagen die we in ons chaotisch golfspel maken beschrijven daarom vrij nauwkeurig Sierpiński's zeef, op misschien de eerste tien à twintig stappen na (het aantal hangt af van de nauwkeurigheid van de tekening die je maakt). Als je het simulatie-programma iets uitbreidt door bv. de eerste twintig slagen niet te plotten, dan krijg je een zéér nauwkeurige weergave van de zeef van Sierpiński, welk startpunt je ook kiest!

De driehoek van Pascal

Een andere manier om de zeef van Sierpiński te tekenen maakt gebruik van de driehoek van Pascal; dit is het getallenschema uit figuur 1.

Elk getal in deze driehoek is gelijk aan de som van de twee getallen die er onmiddellijk boven staan (dit klopt ook voor de getallen in de rand van de driehoek, als we op de posities buiten de driehoek nullen denken). Met deze regel kun je de driehoek van Pascal zelf voortzetten.

De getallen in de driehoek van Pascal heten binomiaalcoëfficiënten. Als we beginnen bij de 1 bovenaan de driehoek, en we



gaan n stapjes naar het zuidwesten en k stapjes naar het oosten, dan komen we uit bij de binomiaalcoëfficiënt $\binom{n}{k}$.

We vervangen nu de even getallen door 0 en de oneven getallen door 1. Dit levert de driehoek uit figuur 2. Als je goed kijkt, zie je hier de zeef van Sierpiński verschijnen!

Het volgende **BASIC**-programma tekent deze driehoek van nullen en enen; de enen worden vervangen door een puntje, met de nullen gebeurt niets. Het programma kijkt op een heel slimme manier of een binomiaalcoëfficiënt even of oneven is.

SCREEN 12

```
FOR I=0 TO 256 : FOR J=0 TO 256
  IF (I AND J-I)=0
    THEN PSET (320+I/2,32+J)
NEXT J : NEXT I
END
```

vraag:

Kun je uitleggen *waarom* je de zeef van Sierpiński krijgt, als je in de driehoek van Pascal de oneven getallen door een 1 vervangt, en de even door een 0?

•• Hoe het programma werkt

Om het aantal factoren 2 in een binomiaalcoëfficiënt te bepalen blijkt het tweetallig stelsel handig te zijn. Voor een positief geheel getal n geven we het aantal enen van n in het tweetallig stelsel aan met $s_2(n)$. De stelling is dan: het aantal factoren 2 in $n!$ is $n - s_2(n)$.

Voor positieve gehele getallen a en b is dan het aantal factoren 2 in $\binom{a+b}{a}$ gelijk aan $s_2(a) + s_2(b) - s_2(a+b)$. Er volgt dat $\binom{a+b}{a}$ oneven is als (en alleen dan als) $s_2(a) + s_2(b) = s_2(a+b)$. Deze conditie betekent dat a en b in het tweetallig stelsel op geen enkele plaats beide een 1 hebben.

Dit laatste is precies de conditie in de derde regel van het programma: **I AND J-I** is een getal dat in het tweetallig stelsel alleen een 1 heeft op de plaatsen waar **I** en **J-I** (in het tweetallig stelsel) beide een 1 hebben. Als **I AND J-I** gelijk aan 0 is, dan is dus $\binom{J}{I}$ oneven en zet het programma een puntje.

Een voorbeeld: $J=7$ en $I=2$. Het programma berekent **I AND J-I**, dus **2 AND 5**. In het tweetallig stelsel is dit gelijk aan **010 AND 101**, en dit is **000**. Kortom, in dit geval is $(2 \text{ AND } 5)=0$. Dit klopt, want de binomiaalcoëfficiënt $\binom{7}{2} = 21$ is oneven.

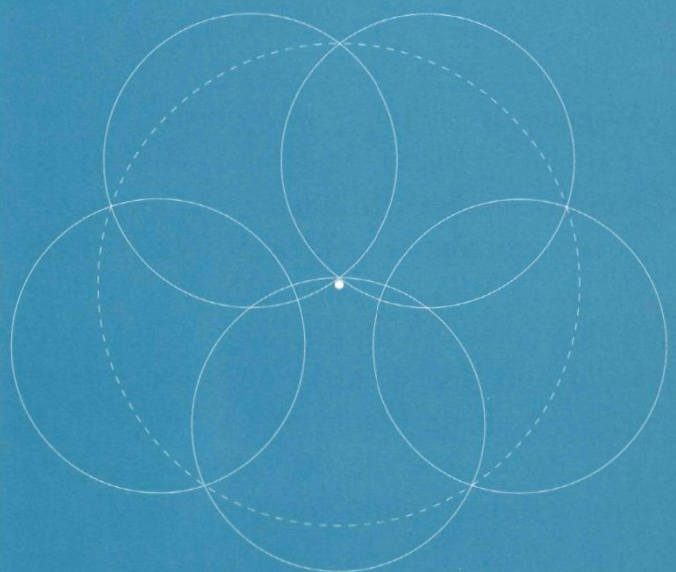
vragen:

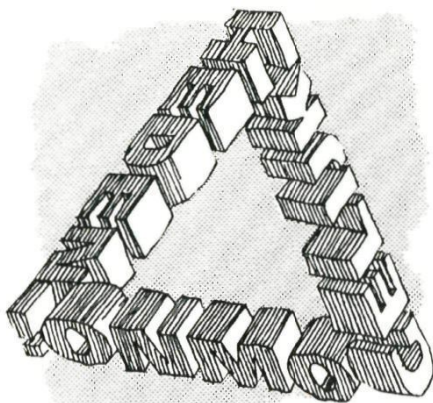
1. Bewijs dat het aantal factoren 2 in $\binom{2n}{n}$ gelijk is aan $s_2(n)$.
2. Kun je zelf bewijzen dat het aantal factoren 2 in $n!$ is gelijk aan $n - s_2(n)$?

Rectificatie

In het Pythagoras-nummer van September zijn enkele fouten geslopen. In het artikel over de stelling van Fermat zijn de Fermat-getallen gedefinieerd als $F(n) = 2^{2^n} + 1$. Dit moet zijn $F(n) = 2^{2^n} - 1$.

Het plaatje in de oplossing van het vijf cirkel probleem klopt niet helemaal. De beste overdekking staat hierbij afgebeeld. Deze oplossing werd bewezen door Károly Bezdek (en niet Bedzek).





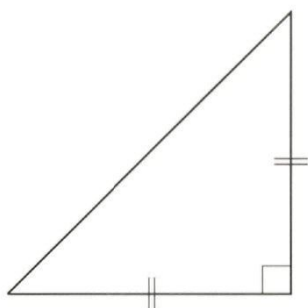
Dit is het eerste artikel in een reeks over wiskundige onmogelijkheden. Een wiskundige onmogelijkheid is een *bewijsbare* onmogelijkheid; uit een waterdichte redenering moet blijken dat iets echt niet kan. In dit artikel laten we zien dat $\sqrt{2}$ geen breuk van twee gehele getallen kan zijn.

• Wortel 2 is niet rationaal

Klaas Pieter Hart

De Pythagoreërs (zie pagina 9: *Pythagoras op het Internet*) dachten dat relaties tussen veel dingen in het universum uitgedrukt konden worden in gehele getallen. Het motto van hun school was "Alles is getal". In moderne wiskundige terminologie dachten de Pythagoreërs dat elk getal een breuk van twee gehele getallen was. Zo'n breuk heet een *rationaal getal*.

De Pythagoreërs bestudeerden de volgende gelijkbenige driehoek:

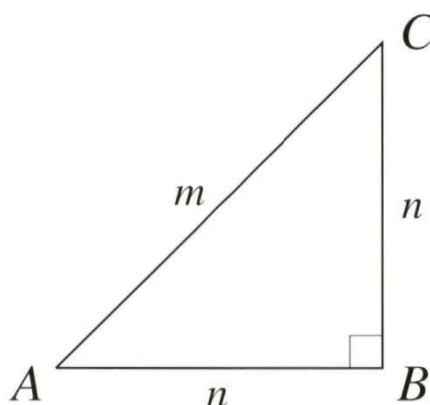


Wegens de stelling van Pythagoras is de verhouding tussen de schuine zijde en de rechthoekszijde gelijk aan $\sqrt{2}$. Op een gegeven moment ontdekten de Pythagoreërs dat deze verhouding niet de breuk van twee gehele getallen kan zijn. Kortom, $\sqrt{2}$ is *niet rationaal*. Deze ontdekking was een grote schok voor de Pythagoreërs. Het verhaal gaat dat degene die het ontdekte door de broederschap vermoord werd. Dat $\sqrt{2}$ niet

een breuk van twee gehele getallen is, laten we in dit artikel op twee manieren zien, op een meetkundige manier en op een algebraïsche (rekenkundige) manier. In beide gevallen gaan we *bewijzen* dat $\sqrt{2}$ geen rationaal getal is door een gedachtenexperiment te doen: we nemen aan dat $\sqrt{2}$ wél rationaal is. Met behulp van een logische redenering leiden we hieruit een tegenspraak (een wiskundige onwaarheid) af. Daaruit concluderen we dat we in ons experiment een foute aanname gedaan hebben, dat wil zeggen, dat $\sqrt{2}$ niet rationaal is. Dit heet een *bewijs uit het ongerijmde*.

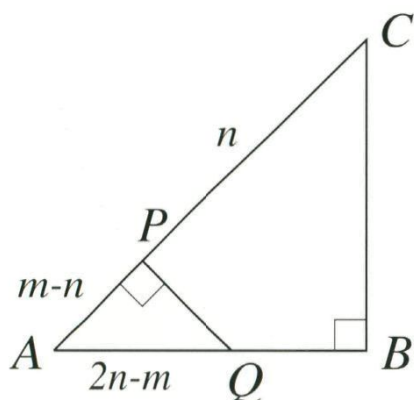
Een meetkundig bewijs

We beginnen met aan te nemen dat $\sqrt{2}$ wél rationaal is. Dat wil zeggen, we nemen aan dat $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, met m en n gehele getallen. Teken een rechthoekige driehoek ABC , waarvan de rechthoekszijden



beide lengte n hebben. De schuine zijde heeft dan lengte $n\sqrt{2} = m$.

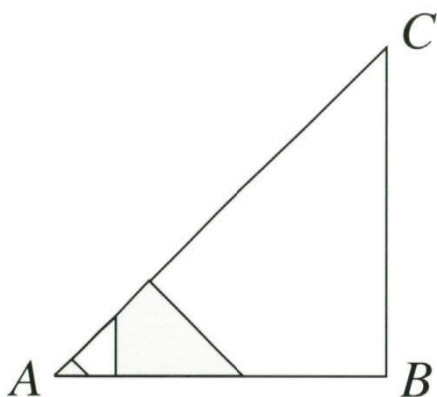
We doen nu het volgende: pas op de schuine zijde CB een lijnstuk CP af van lengte n . Trek door dit punt een lijn loodrecht op de schuine zijde. Het snijpunt hiervan met AB noemen we Q .



Dan is de kleine driehoek APQ gelijkvormig met de grote driehoek ABC . De rechthoekszijden van $\triangle APQ$ hebben lengte $m - n$. De schuine zijde AQ heeft lengte

$$\begin{aligned}\sqrt{2}(m-n) &= \frac{m}{n}(m-n) \\ &= \frac{m^2}{n^2}n - m \\ &= 2n - m.\end{aligned}$$

Dit is een geheel getal. Dus $\triangle APQ$ is een driehoek, waarvan de zijden *gehele* lengte hebben. De bovenstaande stap kunnen we steeds herhalen.



We vinden een oneindige rij van steeds kleiner wordende driehoekjes, waarvan de zijden steeds een *gehele* lengte hebben. Maar dit is onmogelijk! We concluderen daarom dat onze aanname fout was, dus dat $\sqrt{2}$ niet rationaal is.

Een algebraïsch bewijs

De volgende redenering berust op het feit dat het kwadraat van een oneven getal weer oneven is (schrijf $(2n+1)^2$ maar uit). Het is weer een bewijs uit het ongerijmde.

Neem aan dat $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, met m en n natuurlijke getallen. Door eventueel gemeenschappelijke factoren weg te delen, mogen we aannemen dat $\frac{m}{n}$ niet verder te vereenvoudigen is.

Uit $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$ volgt door kwadrateren $m^2 = 2n^2$. Dus m is even, zeg $m = 2k$. Daaruit volgt dat $4k^2 = 2n^2$, ofwel $n^2 = 2k^2$. Dus n is ook even! Dit is een tegenspraak, want we hebben nu afgeleid dat m en n beide even zijn, terwijl we aangenomen hadden dat $\frac{m}{n}$ niet te vereenvoudigen was.

vragen:

Probeer de volgende beweringen te bewijzen door de redeneringen voor $\sqrt{2}$ aan te passen:

1. $\sqrt{3}$ en $\sqrt{5}$ zijn niet rationaal;
2. $\sqrt[3]{2}$ is niet rationaal.

••• Het getal e

Ook het getal $e = 2,7182818284\dots$ is niet rationaal. In de voorafgaande bewijzen gebruikten we dat $\sqrt{2}$ eenvoudig te beschrijven is: als lengte van de hypothenusa in een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van lengte 1 of door de eigenschap $(\sqrt{2})^2 = 2$.

Om te bewijzen dat e niet rationaal is moeten we eerst een goede beschrijving van e vinden. Nu is het getal e gelijk aan het unieke getal a waarvoor de functie $f(x) = a^x$ zichzelf als afgeleide heeft. De functie $f(x) = e^x$ blijkt te schrijven te zijn als een oneindig voortlopend polynoom:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Differentieer dit maar; de afgeleide is weer hetzelfde 'polynoom'. Kiezen we $x = 1$, dan krijgen we een beschrijving

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

van e als een 'oneindige som' (wie dit niet gelooft, moet met de rekenmachine maar eens de som van de eerste paar termen berekenen).

Met behulp van deze definitie gaan we bewijzen dat e niet rationaal is. Dit doen we weer uit het ongerijmde. Stel dat $e = \frac{m}{n}$, met m en n gehele getallen. Dan is $n! \cdot e$ een geheel getal, evenals

$$n! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right).$$

Het verschil tussen deze twee getallen is gelijk aan

$$\begin{aligned} n! \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots \right) \\ = \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \end{aligned}$$

Dit getal is enerzijds positief, en anderszijds kleiner dan

$$\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots = \frac{1}{n}.$$

Maar dat is onmogelijk, want het verschil tussen twee gehele getallen is een geheel getal.

In de laatste stap hebben we gebruikt dat voor $|x| < 1$ geldt

$$x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1-x}, \quad (*)$$

waarbij we $x = 1/(n+1)$ genomen hebben. De oneindige som in $(*)$ heet een *meetkundige reeks*.

vraag:

Probeer een bewijs te geven van de gelijkheid in $(*)$. Neem als voorbeeld eerst eens $x = \frac{1}{2}$.

Voor het derde achtereenvolgende jaar zijn deze zomer door de stichting VIERKANT wiskundekampen georganiseerd. Over het eerste kamp gaat het volgende verslag van Henriëtte Verburg, leerlinge van de zesde klas van het Driestar College te Gouda.

VIERKANT Wiskundekamp

Henriëtte Verburg

We verbleven een hele week in conferentieoord Drakenburgh. Het ochtendprogramma bestond uit het maken van losse opgaven. Begonnen werd met een paar logische problemen, waaronder altijd een zogenaamd 'Ridders & Schurken' probleem. De ochtendopgaven waren in het algemeen niet al te moeilijk. Een voorbeeld:

De som van een aantal (minstens 2) opeenvolgende getallen is gelijk aan 1000. Vind deze getallen.

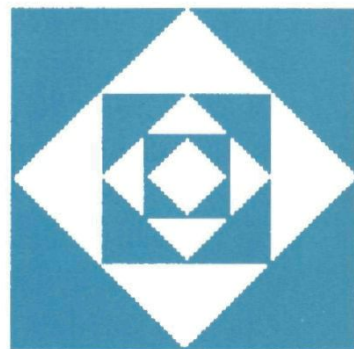
's Middags deden we 'onderzoeksprogramma's'. Hierbij werd een wiskundig onderwerp uitgebreider behandeld. We werkten in groepjes van ongeveer zes kinderen, uit door de begeleiders gemaakte boekjes met theorie en opgaven. Aan bod kwamen: het bepalen van het kruisingsgetal van knopen, construeren met passer en lineaal, het Euclidisch algoritme, Pythagoreïsche drietalen, Fareyreeksen en Fibonaccigetallen.

Dan waren er nog de (traditionale) drie problemen die je aan het begin van het kamp te horen kreeg. Het was bedoeling dat je de hele week hierover kon nadenken, zodat de tijd (en nachtrust) die je over had hiermee gevuld werd.

We hebben niet alleen wiskunde gedaan.

De leiding had het een en ander georganiseerd, zoals een middag kanovaren, avondspelen in het bos en een avondje topologische puzzels (niet aan beginnen—ze zijn *onmogelijk*). Om de gedachten te verzetten waren er lezingen over sterrenkunde en zelf-reproducerende systemen (wat dat zijn, weet nog steeds niemand).

Dit jaar kwamen we voor het eerst *niet* op radio of tv, ja zelfs niet in de krant. Desalniettemin was het een ontzettend leuk kamp, en als iemand overweegt om er volgend jaar heen te gaan, zou ik zeggen: beslist doen!



De stichting Vierkant voor Wiskunde wil middelbare scholieren kennis laten maken met de uitdaging en het plezier van echte wiskunde.

Informatie: Zsafia Ruttkay

telefoon: (020)4447776

email: vierkant@cs.vu.nl

Internet: <http://www.cs.vu.nl/~vierkant/>

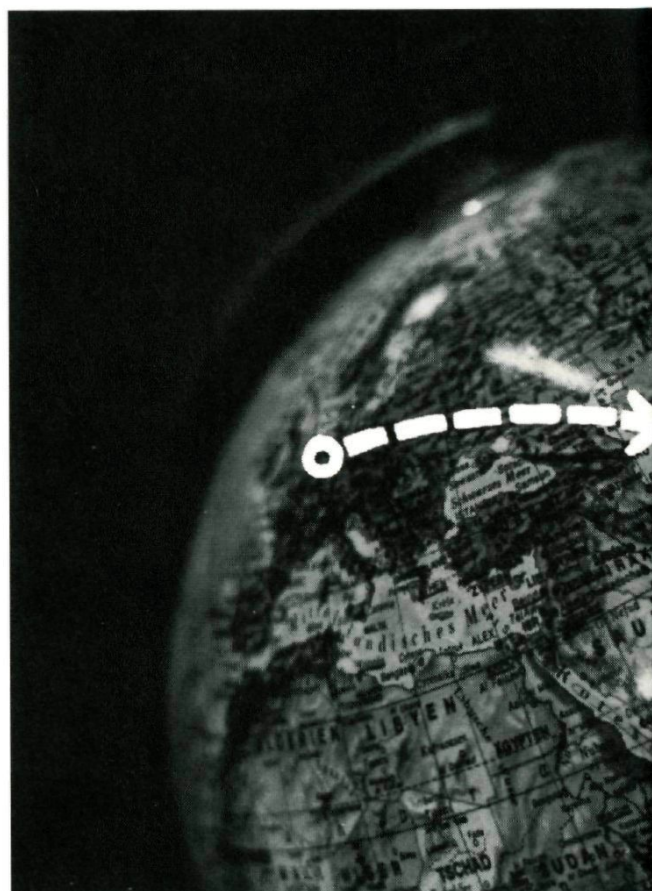
Van 5–17 juli werd in Bombay, India de Internationale Wiskunde Olympiade gehouden, waaraan 75 landen deelnamen. Nederland was vertegenwoordigd met een team van zes personen: Dion Gijswijt, Roel Harbers, Gerben de Klerk, Erik Postma, Mark Reinders en Kees van Schenk Brill. Het Nederlandse team scoorde in totaal 26 punten en bereikte daarmee een 59e plaats. Hieronder volgen de opgaven.

Internationale Wiskunde Olympiade

De maximale score was 42 punten (7 punten per opgave). De top drie bestond uit: Roemenie 187 punten, U.S.A. 185 en Hongarije 167. Laatste werd Kuweit met 1 punt. De organisatie was ronduit slecht. Bombay is een grote en drukke stad, waarvan alle wegen verstopt zijn: het duurde uren voordat je Bombay uit was, of zelfs maar in een ander stadsdeel had bereikt. Het gevolg was dat iedereen op de campus moest blijven. Het onderkomen was 'spartaans': harde bedden, douches op de gang, sportvoorzieningen die niet toegankelijk waren. Op de koop toe werd iedereen ziek!

Opgave 1 Een rechthoekig bord $ABCD$ met $AB = 20$ en $BC = 12$ is verdeeld in 20×12 eenheidsvierkanten. Op dit bord zijn alleen de volgende zetten toegestaan: men mag van een eenheidsvierkant naar een ander, indien de afstand tussen de twee middelpunten van deze vierkanten gelijk is aan $\sqrt{r}$, waarin r een gegeven geheel getal is groter dan nul. Men probeert nu een serie zetten te vinden die, achtereenvolgens uitgevoerd, leidt van het eenheidsvierkant met hoekpunt A naar het eenheidsvierkant met hoekpunt B .

- Laat zien dat zo'n serie zetten niet bestaat als r deelbaar is door 2 of door 3.
- Bewijs dat zo'n serie zetten wel bestaat als $r = 73$.
- Bestaat er zo'n serie zetten als $r = 97$?



Opgave 2 P is een punt binnen driehoek ABC zodanig dat

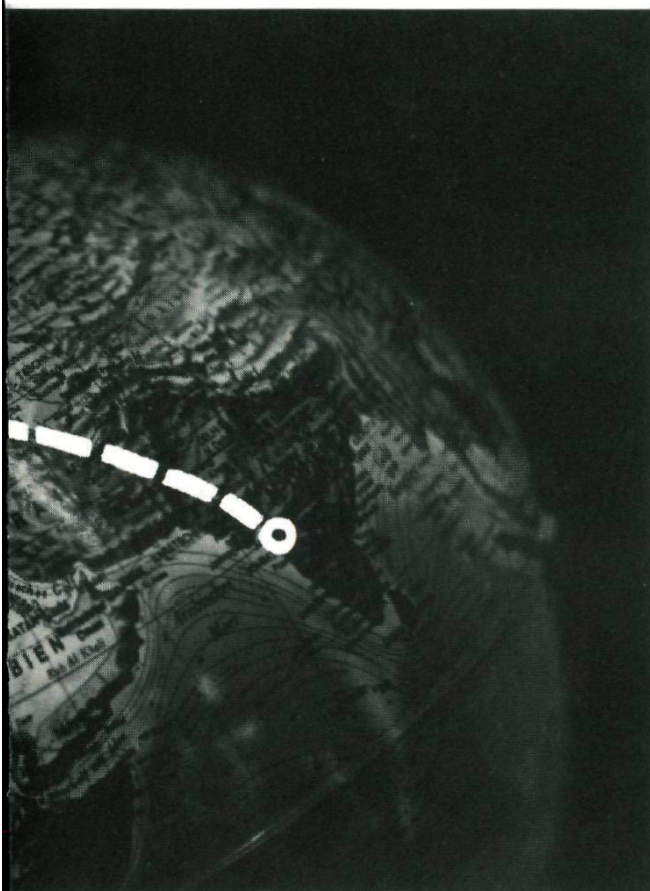
$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC.$$

D en E zijn de middelpunten van de ingeschreven cirkels van respectievelijk de driehoeken APB en APC . Bewijs dat AP , BD en CE elkaar in één punt snijden.

Opgave 3 $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ is de verzameling van de niet negatieve gehele getallen. Bepaal alle functies f die gedefinieerd zijn op S en waarvan de functiewaarden ook tot S behoren, zó dat

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

voor alle m, n in S .



Opgave 4 De gehele getallen a en b met $a > 0$ en $b > 0$, zijn zodanig dat de getallen $15a + 16b$ en $16a - 15b$ kwadraten zijn van positieve gehele getallen. Bepaal de kleinste waarde die kan worden aangenomen door het minimum van deze twee kwadraten.

Opgave 5 $ABCDEF$ is een convexe zeshoek in het vlak, zodanig dat AB evenwijdig is met ED , BC evenwijdig met FE en CD evenwijdig met AF . Laat R_A , R_C en R_E de stralen zijn van de omgeschreven cirkels van de driehoeken FAB , BCD en DEF respectievelijk en laat p de omtrek zijn van de zeshoek. Bewijs dat

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}.$$

Opgave 6 De gehele getallen n , p en q zijn allen groter dan nul en $n > p + q$. De getallen $x_0, x_1, \dots, x_n$ zijn geheel en voldoen aan de volgende voorwaarden:

- a. $x_0 = x_n = 0$;
- b. voor ieder geheel getal i , met $1 \leq i \leq n$ geldt

$$x_i - x_{i-1} = p \text{ of } x_i - x_{i-1} = -q.$$

Toon aan dat er een paar (i, j) van indices bestaat met $i < j$ en $(i, j) \neq (0, n)$ zodanig dat $x_i = x_j$.

probleem: **Ridders en schurken**

Op een eiland leven alleen Ridders en Schurken. Ridders spreken altijd de waarheid en schurken liegen altijd. Op het eiland is een ziekte uitgebroken met als gevolg dat een zieke ridder liegt en een zieke schurk de waarheid spreekt. Niet iedereen wordt ziek. Je komt iemand tegen, en uit wat die tegen je zegt kun je opmaken of hij Ridder of Schurk is. Wat wordt er gezegd?

Onder auspiciën van de NOCW (Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde) wordt in Nederland een scala van wiskundige activiteiten voor middelbare scholieren georganiseerd. Hieronder valt bv. het tijdschrift Pythagoras en de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Ook de NVvW (Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren) organiseert diverse activiteiten, voornamelijk bedoeld voor wiskundeleraren. Hieronder volgt een overzicht van activiteiten voor het komende jaar.

Agenda

Data voor deze agenda aanmelden bij het redactieadres.

email: A.A.J.Lefebber@math.utwente.nl

do 7 november '96

Wiskunde in Actie, TU Delft (015)2787221

za 16 november '96

Jaarvergadering NVvW (0411)673468

vr 29 november '96

Voorronde Wiskunde A-lympiade (030)2611611

vr/za 31 jan/1 feb.'96

Nationale Wiskunde Dagen NVvW (030)2611611

vr 14, 15 maart '97

Finale Wiskunde A-lympiade

vr 21 maart '97

Kangoeroe-wedstrijd (040)2472738

vr 11 april '97

Eerste ronde Wiskunde Olympiade (026)3521294

zomer '97

VIERKANT Wiskunde kampen (020)4447776

vr 19 september '97

Tweede ronde Wiskunde Olympiade

vr 10 oktober '97

Dag van de biofysica, UT Twente (071)5262463

Over de medewerkers

De Wiskunde A-lympiade is een landelijke wedstrijd voor leerlingen van 5 en 6 VWO en 5 HAVO met Wiskunde A in hun pakket. Sinds 1989 wordt deze jaarlijks georganiseerd door het Freudenthal Instituut. De voorrondes worden op 29 november gehouden op de scholen zelf. Gestreden wordt in teams van drie of vier personen. Iedere deelnemende school kan de beste twee of drie teams laten meedingen naar een finaleplaats. Uiteindelijk blijven er twaalf teams over die tijdens een tweedaags verblijf in Garderen een finaleopdracht gaan maken. De opgaven van de A-lympiade zijn open en toepassingsgericht en benadrukken de procesdoelen achter het Wiskunde A-programma.

Inlichtingen:

mw. drs. D. L. de Haan

Freudenthal Instituut

Tiberdreef 4

3561 GG Utrecht

tel: 030-2611611

email: alympiade@fi.ruu.nl

<http://www.fi.ruu.nl/Alympiade/nl/>

De Vereniging voor Biofysica organiseert een wedstrijd voor leerlingen van 4, 5 en 6 VWO. Voor het beste werkstuk op het gebied van de biofysica wordt fl. 1000,- gulden uitgelooft. Aanmelden voor 1 december 1996. Inleveren voor 1 mei 1997.

Inlichtingen:

bij je natuurkundeleraar,

of telefonisch: 070-5262463

of per email:

r.schoonhoven@ent.medfac.leidenuniv.nl

drs. F. AKVELD-VAN BUIJTENEN is

docent wiskunde aan de EUR

prof. dr. H. W. BROER is

hoogleraar dynamische systemen aan de RUG

prof. dr. J. VAN DE CRAATS is hoogleraar wiskunde aan de UvA en de Open Universiteit

dr. L. J. VAN GASTEL is werkzaam bij het Expertisecentrum Computer Algebra Nederland

dr. K. P. HART is

docent topologie aan de TU Delft

H. HAVERKORN is leraar wiskunde aan het Mozaïekcollege te Arnhem

drs. A. HECK is werkzaam bij het Expertisecentrum Computer Algebra Nederland

drs. R. IEMHOFF is AIO logica aan de UvA

B. DE JONGSTE is gepensioneerd leraar wiskunde te Den Haag

dr. ir. T. KOETSIER is docent geschiedenis van de wiskunde aan de VU

prof. dr. H. A. LAUWERIER is emeritus hoogleraar toegepaste wiskunde aan de UvA

ir. A. A. J. LEFEBER is AIO systeem- en besturingstheorie aan de UT Twente

R. VAN LUIJK is student wiskunde aan de RUU

W. R. OUDSHOORN is student wiskunde aan de UvA

ir. S. M. VAN RIJNSWOU is OIO computeralgebra aan de TUE

P. SINIA is leraar wiskunde aan het Neder-Veluwe College te Ede

dr. B. DE SMIT is post-doc algebraïsche getaltheorie aan de UvA

dr. P. STEVENHAGEN is docent algebraïsche getaltheorie aan de UvA

prof. dr. F. TAKENS is hoogleraar dynamische systemen aan de RUG

prof. dr. R. TIJDEMAN is hoogleraar analytische getaltheorie aan de RUL

H. VERBURG is leerlinge van het Driestar College te Goude

drs. C. G. ZAAL is OIO algebraïsche meetkunde aan de UvA

Pythagoras

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de NOCW, de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde en richt zich tot leerlingen van 4, 5 en 6 VWO en 4 en 5 Havo. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

Abonnementen

Nederlandse en Belgische abonnees kunnen zich aanmelden telefonisch bij (070)3143500 of schriftelijk (een postzegel is niet nodig) bij: NIAM b.v. Antwoordnummer 97007 2509 VH Den Haag

Tarieven '96-'97

Jaarabonnement Pythagoras fl. 37,50
Jaarabonnement Pythagoras België BF 950
Jaarabonnement Pythagoras buitenland fl. 52,50
Jaarabonnement Pythagoras/Archimedes fl. 67,50
Jaarabonnement Pythagoras/Archimedes België BF 1570
Jaarabonnement Pythagoras/Archimedes buitenland fl. 83,50
Losse nummers fl. 8,- of BF 160

Reductietarief

Een ieder die 5 of meer abonnees aanmeldt, ontvangt een *gratis* jaarabonnement op Pythagoras.

Betaling

Wacht met betalen tot u een acceptgirokaart krijgt thuisgestuurd. Bij tussentijdse abonnering ontvangt u alle nummers van de lopende jaargang. Abonnementen zijn doorlopend, tenzij vóór 1 juli schriftelijk bij de uitgever is opgezegd.

Uitgever

NIAM b.v.
Neuhuyskade 94
2596 XM Den Haag
Telefoon (070)3143500
Fax (070)3143588
Gironummer 33.84.52
Bankrekening België: ING Bank Brussel
reknr. 627-7064242-48 t.n.v. TMS