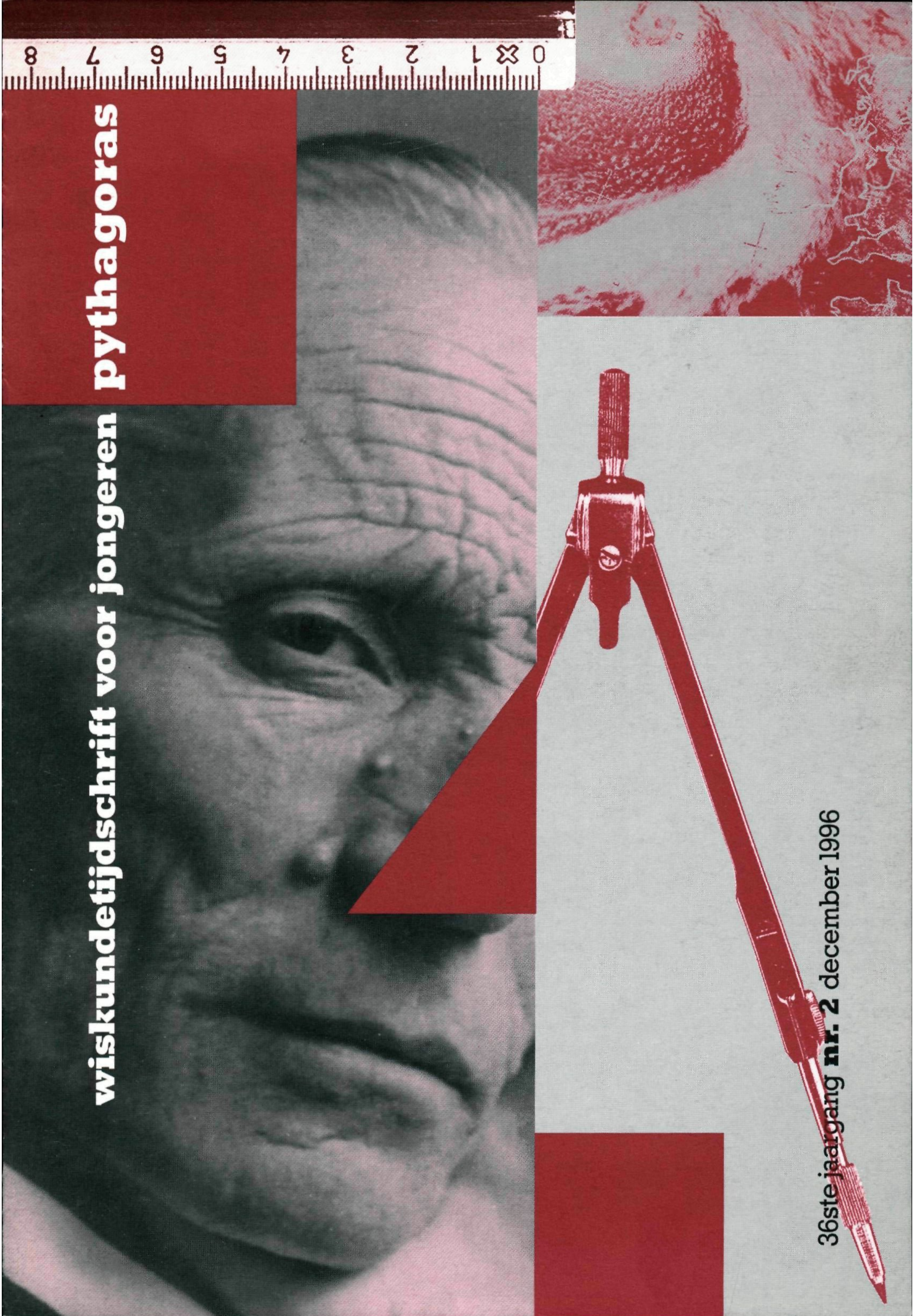


pythagoras

wiskundetijdschrift voor jongeren

36ste jaargang **nr. 2** december 1996

Inhoud

COLOFON

uitgave
Pythagoras is een uitgave van NIAM b.v.
en verschijnt zes keer per jaar.
Een jaargang loopt van september tot en met augustus.

redactieadres
Erjen Lefeber
Faculteit der toegepaste wiskunde
Universiteit Twente
Postbus 217
7500 AE Enschede
email: A.A.J.Lefeber@math.utwente.nl

WWW
De homepage van Pythagoras is te vinden op het volgende adres:
http://www.fwi.uva.nl/misc/pythagoras

redactie
Klaas Pieter Hart
Harald Haverkorn
Erjen Lefeber
Pier Sinia

eindredactie
Chris Zaal

grafisch ontwerp
Joke Mestdagh, Amsterdam

zetwerk
Taco Hoekwater, Bittext, Dordrecht

drukwerk
van Rossum, Houten

Redactioneel

Dit decembernummer bevat een paar wijzigingen. Inhoudelijk gezien zijn er veel uitwerkingen van vraagstukken: uitwerkingen van de Pythagoras Olympiade, uitwerkingen van de Internationale Wiskunde Olympiade en uitwerkingen van vraagstukken uit het vorige nummer. Lezers kunnen deze uitwerkingen vergelijken met hun eigen antwoorden. Maar lezers die de vraagstukken niet gemaakt hebben, hoeven de uitwerkingen niet over te slaan. Integendeel—de uitwerkingen zijn interessant genoeg om zó te lezen.

De veranderingen in de vormgeving willen we nader toelichten. De overschakeling op het wiskundige tekstverwerkingsprogramma TeX heeft voor Pythagoras het voordeel dat wiskundige formules, hoe moeilijk ook, geen problemen meer opleveren. Maar deze overschakeling brengt ook wijzigingen in de vormgeving mee.

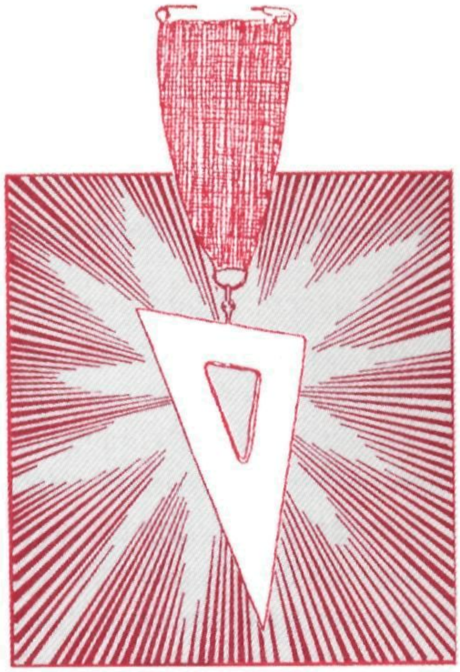
Vraagstukken staan niet meer verspreid, maar bij elkaar, zie pagina 26. Een vraagstukken-verzameling wordt aangegeven met de afbeelding van een gesloten noot (om te 'kraken'). Oplossingen van vraagstukken uit het vorige nummer gaan vergezeld van een afbeelding van een open, 'gekraakte' noot, zie pagina 27.

Om de leesbaarheid van artikelen te vergroten, worden deze afgesloten met een klein tekentje: voortaan tref je aan het eind van een artikel een driehoekje aan, waarvan de zijden zich verhouden als $3:4:5$ (een Pythagoras-driehoek).

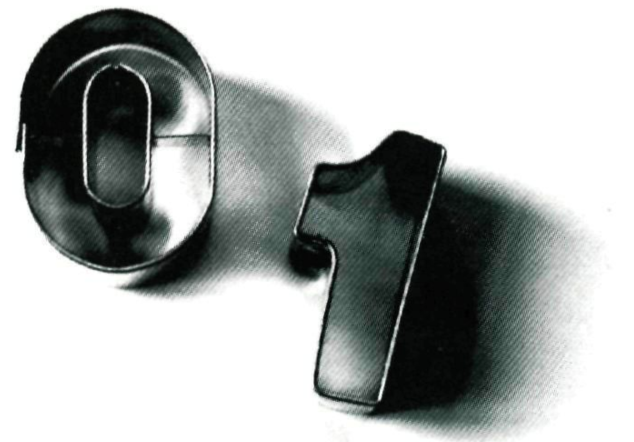
We herhalen de betekenis van de rondjes die voor de titels van artikelen staan. Deze geven de moeilijkheidsgraad van de artikelen aan. Eén rondje • betekent: voor iedereen vanaf de vierde klas te begrijpen. Twee rondjes ••: hiervoor heb je wiskunde uit de vijfde en zesde klas nodig. Drie rondjes •••: dit gaat net iets verder dan de middelbare school stof.

Tot slot, voor lezers die thuis zijn op Internet is de prijsvraag op pagina 12. Leer Java en lever zèlf een bijdrage aan de homepage van Pythagoras! ◢

De Pythagoras Olympiade is een vast onderdeel van Pythagoras, bestaande uit twee opgaven per aflevering. De lezer wordt uitgenodigd deze opgaven op te lossen. Per opgave wordt onder de inzenders van goede oplossingen een boekenbon van 25 gulden verloot. Tevens levert elke goede oplossing 1 punt op in een laddercompetitie.



Pythagoras Olympiade



Stuur je oplossingen naar:

Pythagoras Olympiade
TU Eindhoven
Faculteit Wiskunde en Informatica
Hoofdgebouw kamer 9.84
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
email: sander@win.tue.nl

Opgave 17

Hoeveel rijtjes van lengte 10 bestaande uit nullen en enen kun je maken, zodat er geen twee enen naast elkaar staan?

Opgave 18

Op een $m \times n$ bord liggen op elk veld fiches die aan een kant zwart zijn en aan de andere kant wit. Ze liggen allen met een willekeurige kant boven. Je mag nu een zet doen. Een zet doen betekent een rij of een kolom uitkiezen en daarin alle fiches omdraaien. Kun je er met een eindig aantal zetten altijd voor zorgen dat in elke rij en elke kolom het aantal fiches met zwart boven minstens zo groot is als het aantal fiches met wit boven?

Vermeld bij de oplossing *naam, adres, school* en *klas*. Stuur bij de antwoorden ook een *toelichting*, waarin uitgelegd wordt hoe je aan het antwoord gekomen bent (een berekening of een bewijs). Insturen is mogelijk tot en met 31 januari 1997. De oplossingen van opgaven 17 en 18 verschijnen te zijner tijd op de homepage en in één van de volgende nummers van Pythagoras. Hierna volgen de oplossingen van de opgaven 11 tot en met 14 uit het septembernummer.

Veel succes,
Ronald van Luyk,
Sander van Rijnswou en
Wim Oudshoorn.

Opgave 11

Van twee gehele positieve getallen reken ik de som uit, het verschil, het product en het quotient. Deze vier uitkomsten tel ik bij elkaar op. Het resultaat is 2^{10}. Geef alle mogelijke begingetallen.

Oplossing

Deze opgave is opgelost door Henriëtte Verburg (Driestar College, Gouda).

Noem het eerste getal a en het tweede getal b. Nu zoeken we alle mogelijke positieve gehele oplossingen van $(a+b)+(a-b)+(ab)+(a/b)=1024$. Omdat de eerste 3 termen geheel zijn en de som ook geheel is, moet a/b ook wel geheel zijn. Stel $a/b=n$ of wat hetzelfde is $a=nb$ met $b\neq 0$. De vergelijking wordt dan

$$(nb+b)+(nb-b)+(nb^2)+n= \\ =n(b+1)^2=2^{10}.$$

Hier zien we dat $b+1$ een tweemacht moet zijn. Omdat n ook geheel moet zijn zien we dat voor $b+1$ alleen de tweemachten van 2^0 tot en met 2^5 hoeven te bekijken.

$b+1$	n	a	b
2^0	2^{10}	0	0
2^1	2^8	256	1
2^2	2^6	192	3
2^3	2^4	112	7
2^4	2^2	60	15
2^5	2^0	31	31

Dit zijn dus alle oplossingen, behalve de eerste want daar zijn a en b niet positief.

Opgave 12

Een leraar geeft een van zijn vervelende leeringen het volgende strafwerk op. Hij moet 1 woord overschrijven van hoofdstuk 1, 2 woorden uit hoofdstuk 2, 3 woorden uit hoofdstuk 3 etc. Als hij de woorden uit de hoofdstukken 1 tot en met 14 heeft opgeschreven is hij precies op de helft. Hoeveel hoofdstukken heeft het boek?

Oplossing

Deze opgave is opgelost door Bart Vanderwoestijne (Zwevegem, Belgie) en Henriëtte Verburg.

Het aantal woorden dat de leerling heeft overgeschreven na hoofdstuk 14 is

$$1+2+\cdots+14=\big((1+14)+(2+13)+\cdots \\ +(14+1)\big)/2=\frac{1}{2}\cdot 14\cdot 15=105.$$

Als de leerling n hoofdstukken gedaan heeft dan heeft hij

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

woorden opgeschreven. Het aantal hoofdstukken in het boek is die n waarvoor $n(n+1)/2=210$. Dus $n(n+1)=420$ en n is dus 20.

Opgave 13

Je hebt 32 lucifers verdeeld over drie stapels. Je mag lucifers van een stapel naar een andere stapel verplaatsen, maar alleen als je het aantal lucifers in de tweede stapel daarmee verdubbelt. Bijvoorbeeld, je hebt stapels met 10, 15 en 7 lucifers. Dan mag je dit veranderen in 20, 5, 7 of in 3, 15, 14 of in 10, 8, 14. Kan je altijd, hoe de lucifers in het begin ook verdeeld zijn, een stapel maken met daarin alle lucifers?

Oplossing

Het is inderdaad mogelijk. We zullen deze opgave iets algemener bewijzen, namelijk niet alleen als de som van de lucifers 2^5 is maar ook als de som van de lucifers een andere macht van 2 is.

Om te beginnen, neem aan dat de som van alle lucifers $2^0 = 1$ is. Dit geval is heel gemakkelijk. Er is dan maar één lucifer en er zijn twee lege stapels. Je hoeft in dit geval niet eens een zet te doen.

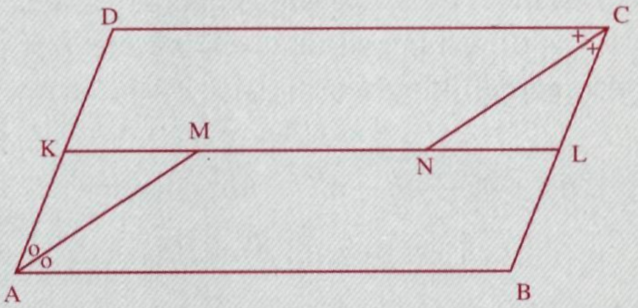
Neem aan dat de opgave opgelost is voor 2^n lucifers, dan gaan we de opgave bewijzen voor 2^{n+1} lucifers. We gaan eerst proberen in alle drie de stapels een even aantal lucifers te krijgen. Als niet alle drie de stapels al even zijn, dan zijn er precies twee stapels met een oneven aantal lucifers. Nu kun je van de grootste oneven stapel een oneven aantal lucifers verplaatsen naar de kleine oneven stapel. Daardoor worden ze beide even en hebben we drie even stapels gekregen.

Nu delen we het aantal lucifers in elke stapel door twee. De som van alle lucifers is daardoor 2^n geworden. We hadden aangenomen dat de opgave al opgelost was voor het geval de som van alle lucifers 2^n is. Door in zo'n oplossing alles weer met twee te vermenigvuldigen krijgen we een oplossing voor de oorspronkelijke, grote stapels en hebben we de opgave ook opgelost voor 2^{n+1} lucifers.

Omdat we weten dat de opgave waar is voor 2^0 lucifers, kunnen we daaruit op bovenstaande manier afleiden dat de opgave ook waar is voor 2^1 lucifers. En daaruit kunnen we weer afleiden dat het ook waar is voor 2^2 lucifers. Zo komen we steeds een stapje verder; de opgave is opgelost voor de som van de lucifers een macht van 2, in het bijzonder dus ook voor $32 = 2^5$.

Opgave 14

In de figuur staat een parallellogram $ABCD$. Het punt K is het midden van zijde AD en L het midden van zijde BC. De bissectrice vanuit hoek A snijdt KL in M, de bissectrice vanuit hoek C snijdt KL in punt N. Druk de lengte van lijnstuk MN uit in de lengte van de zijden AB en BC.



Oplossing

De opgave is opgelost door Bart Vanderwoestijne en Henriëtte Verburg. Deze oplossing is van Bart.

Driehoek AKM is gelijkbenig, dus $AK = KM = \frac{1}{2}AD$. Ook driehoek LNC is gelijkbenig dus $NL = LC = \frac{1}{2}AD$. Dus $KM + NL = AD$, hieruit volgt dat $MN = AB - AD$. ◢

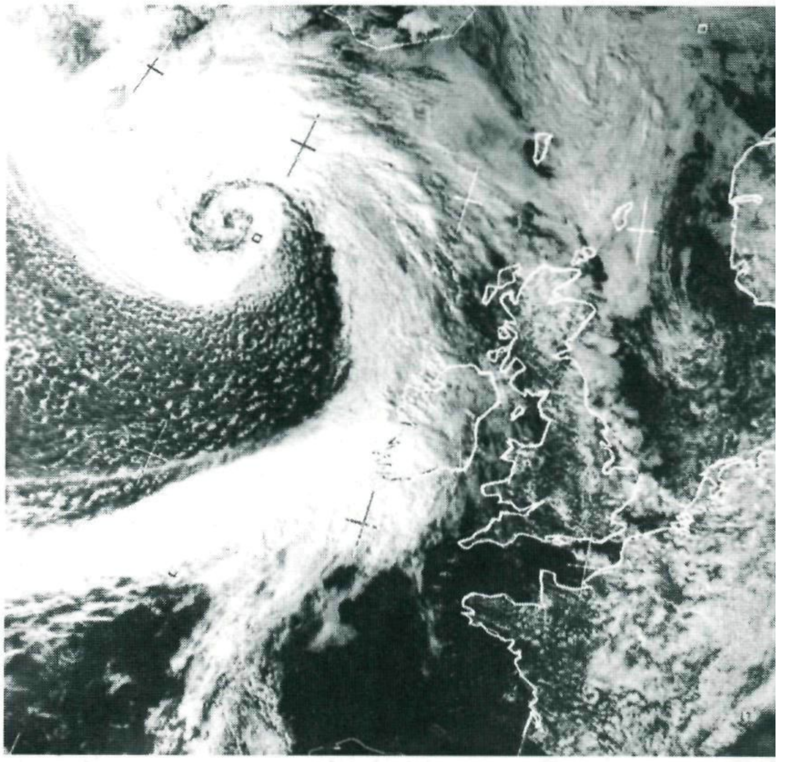
De vijfdaagse weersvoorspellingen van het KNMI zijn redelijk betrouwbaar, maar soms kloppen ze al na één dag niet meer. De oorzaak werd ontdekt door de weerkundige Lorenz: een kleine verstoring kan grote effecten hebben op de ontwikkeling van het weer. In een lezing illustreerde hij dit met de volgende vraag: "Kan de beweging van een vlindervleugel in Brazilië een tornado in Texas veroorzaken?"

Chaos in de weersvoorspelling

Floris Takens

In de jaren 60 probeerde de weerkundige Edward Lorenz een wiskundig model op te stellen voor het weer. In dit model ging hij uit van een sterk vereenvoudigde atmosfeer, waarvan de toestand door drie getallen beschreven kan worden. Zijn vereenvoudiging is nogal ingrijpend: om de echte atmosfeer te beschrijven moeten we temperatuur, druk, vochtigheid, windsnelheid etc. *op elke plaats* kennen. Hierdoor hebben we oneindig veel getallen nodig. Maar met oneindig veel getallen kunnen we niet rekenen, we moeten ons daarom behelpen met benaderingen. Bij weersvoorspellingen zoals die in de praktijk worden uitgevoerd, wordt de toestand van de hele aardse atmosfeer beschreven door ongeveer 5.000.000 getallen. De reductie tot slechts 3 getallen is een drastische vereenvoudiging; het vereenvoudigde systeem kan dan ook niet gebruikt worden om het weer te voorspellen. Wel kan het gebruikt worden om iets van de onvoorspelbaarheid te begrijpen.

In het vereenvoudigde model van de atmosfeer komt elke toestand overeen met een punt (x, y, z) in een drie-dimensionaal assenstelsel. Lorenz formuleerde regels die beschrijven hoe de toestand verandert als functie van de tijd (de precieze vorm van

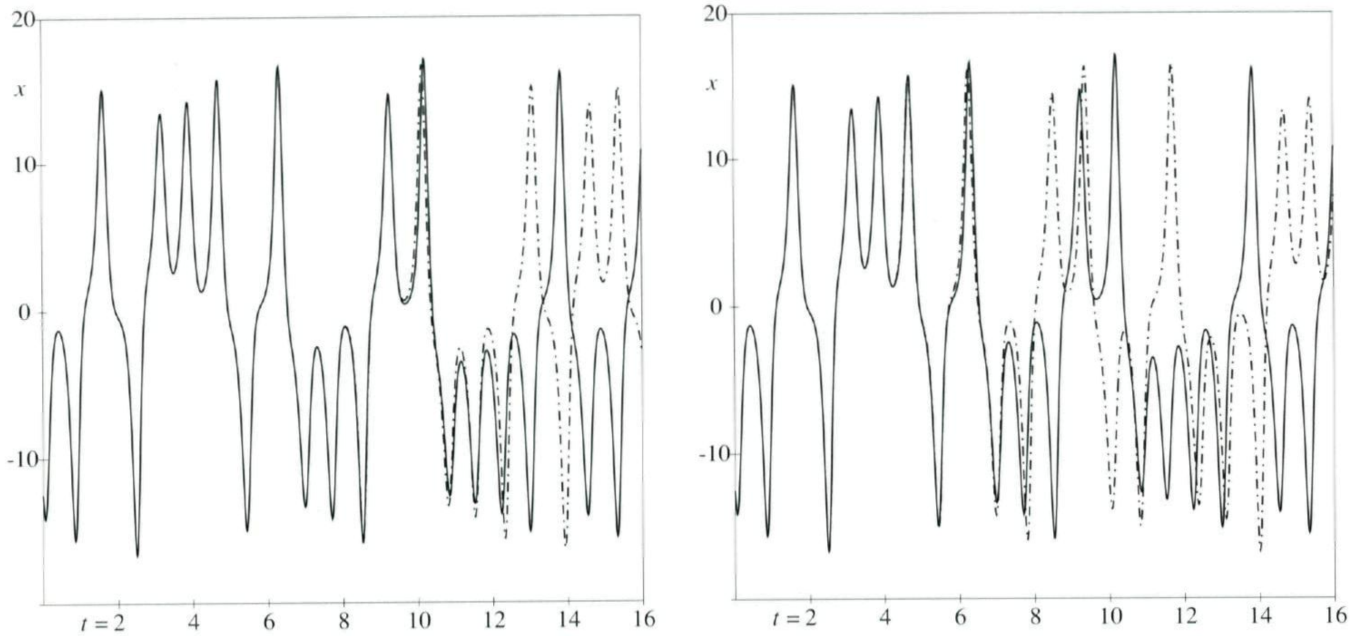


deze regels is te vinden in het artikel 'De vlinder van Lorenz', p. 16). Als de begintoestand van het systeem weergegeven wordt door een punt (x_0, y_0, z_0), dan kunnen we met behulp van deze regels de toestanden (x_t, y_t, z_t) op tijdstip t berekenen— dit noemen we de *evolutie* van de toestand. Deze toestanden vormen een kromme in de (x, y, z)-ruimte, geparametriseerd door de tijd t. Zo'n kromme heet een *evolutiekromme*. In het artikel 'De vlinder van Lorenz' wordt beschreven hoe je deze evolutiekrommen kunt berekenen.

Lorenz ontdekte iets bijzonders: begintoestanden die zeer dicht bij elkaar lagen, leverden evolutiekrommen op die totaal verschillend waren. We demonstreren dit verschijnsel met een tweetal berekeningen. Voor dicht bij elkaar liggende begintoestanden hebben we de evolutiekrommen berekend.

In figuur 1 wordt van twee paar evolutiekrommen de x-coördinaat getekend als functie van de tijd t. De evolutiekromme horend bij de doorgetrokken lijn is links en rechts dezelfde. De gestippelde grafiek hoort bij een evolutiekromme met een iets andere begintoestand: y- en z-coördinaten zijn gelijk, maar het verschil tussen de x-coördinaten is in de linker figuur gelijk aan 0,0001, in de rechter 0,0064. We zien dat in het begin de grafieken niet van elkaar te onderscheiden zijn. Maar kort nadat het verschil tussen de beide grafieken zichtbaar wordt, verdwijnt elke overeenkomst. Kleine verschillen in de beginpositie leiden dus na een tijdje tot compleet andere uitkomsten.

In figuur 2 zijn de projecties van de evolutiekrommen op het (x,z)-vlak weergegeven. Weergegeven zijn de evoluties die we voor het linker diagram van figuur 1 gebruikt hebben, maar we hebben een langer tijdsinterval geplot (50 eenheden). De figuur wordt de 'vlinder van Lorenz' genoemd. We zien twee 'vleugels' waar de evolutiekrommen in rond draaien. De vleugels bevinden zich in twee verschillende vlakken in de (x,y,z)-ruimte, die onder een kleine hoek ten opzichte van elkaar staan. Een evolutiekromme die zich in één van de twee vleugels bevindt, spiraliseert vanuit het 'oog' in het vlak van de vleugel naar buiten toe. Aan de buitenkant van zo'n vleugel lopen dunne 'draadjes' in de richting van het oog van de andere vleugel. De kromme blijft in de spiraalbeweging totdat hij zo'n draadje ontmoet. Als dit gebeurt, wordt de kromme uit het vlak van de ene

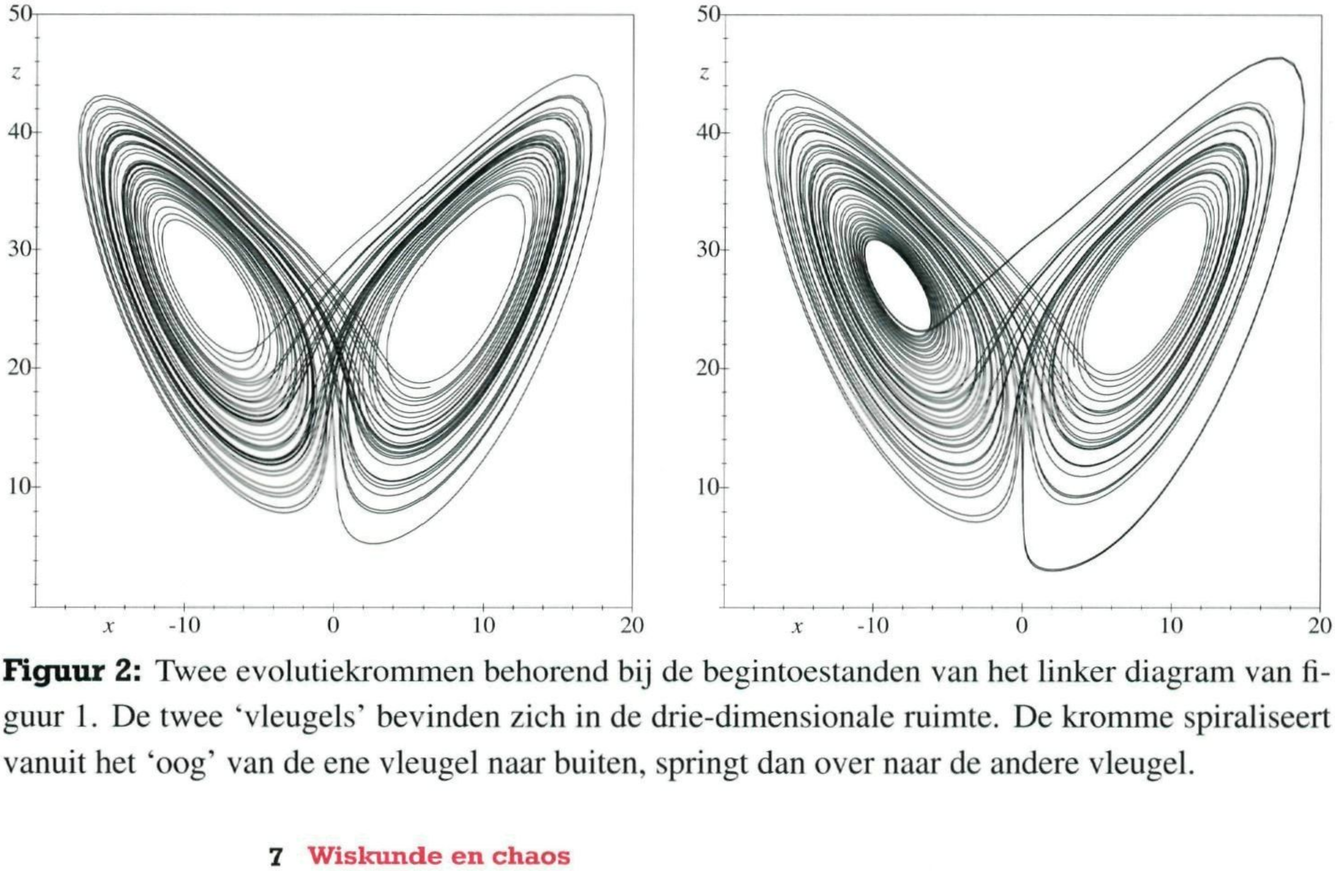


Figuur 1: Vergelijking van x_t voor evolutiekrommen van het Lorenz model waarvoor de begintoestanden dicht bij elkaar liggen. In het linker diagram is de onderlinge afstand 0,0001, in het rechter 0,0064.

vleugel gezogen en komt terecht in de andere vleugel. In de andere vleugel begint weer een spiraalbeweging, die in stand blijft totdat de kromme weer zo'n draadje ontmoet, enzovoort. Twee evolutiekrommen die uit bijna hetzelfde punt vertrekken, volgen in het begin praktisch dezelfde baan. Ze bewegen zich samen in één vleugel, hun onderlinge afstand wordt langzaam groter. Maar de 'draadjes' vormen een zeer fijne structuur, waardoor het kan gebeuren dat de ene kromme uit het vlak van de vleugel geslingerd wordt en in de andere vleugel terechtkomt, terwijl de andere kromme zijn weg vervolgt in de oorspronkelijke vleugel. Verschillen die aanvankelijk klein zijn, worden door dit effect uitvergroot en kunnen zo uitgroeien tot enorme verschillen.

Kennen we de begintoestand maar met beperkte nauwkeurigheid, dan kunnen we de ontwikkelingen maar voor beperkte tijd voorspellen. Maar bij de begintoestanden moeten we denken aan atmosferische gegevens, en deze zijn alleen met eindige nauwkeurigheid bekend. Daarom leidt dit verschijnsel tot een slechte voorspelbaarheid van het Lorenz model. De slechte voorspelbaarheid van het echte weer wordt veroorzaakt door hetzelfde effect: kleine oorzaken, grote gevolgen.

Vergelijken we beide evolutiekrommen als functies van de tijd t, dan zien we, behalve in het begin, sterke verschillen. De figuren die de krommen in de drie-dimensionale ruimte opleveren vertonen daarentegen een grote overeenkomst. Het echte weer gedraagt zich analoog: ook al is het weer onvoorspelbaar op de lange termijn, toch kunnen we bepaalde patronen ontdekken: denk aan de vorm van depressies op een weerkaart, denk aan de stabiele hogedrukgebieden die in ons land in de zomer mooi weer geven en in de winter strenge kou.



Figuur 2: Twee evolutiekrommen behorend bij de begintoestanden van het linker diagram van figuur 1. De twee 'vleugels' bevinden zich in de drie-dimensionale ruimte. De kromme spiraliseert vanuit het 'oog' van de ene vleugel naar buiten, springt dan over naar de andere vleugel.

•• Voorspelbaarheidshorizon

Het gevonden verschijnsel van 'kleine oorzaken, grote gevolgen' kunnen we iets concreter beschrijven met behulp van de termen *halveringstijd* en *voorspelbaarheidshorizon*. We zullen uitleggen wat we hiermee bedoelen. Veronderstel dat we een willekeurige begintoestand (x_0, y_0, z_0) kennen tot op een 'meetfout' a. Als we het toekomstig verloop van de toestanden (x_t, y_t, z_t) met een redelijke nauwkeurigheid kunnen voorspellen voor alle tijdstippen t tussen 0 en $H(a)$, dan heet het getal $H(a)$ de *voorspelbaarheidshorizon* van a. Op grond van de diagrammen in figuur 1 schatten we $H(0{,}0001)$ ongeveer 12,5 en $H(0{,}0064)$ ongeveer 8. Het is natuurlijk duidelijk dat voor kleiner wordende waarden van a de voorspelbaarheidshorizon $H(a)$ groter wordt. De mate waarin dit gebeurt, wordt bepaald door de limiet

$$\lim_{a \to 0} -\frac{H(a)}{{}^2\log(a)}.$$

Deze limietwaarde wordt de *halveringstijd* genoemd; het is de gemiddelde waarde waarmee de voorspelbaarheidshorizon toeneemt als we a halveren. Dit betekent dat voor kleine a de getallen $H(a)$ en $-{}^2\log(a)$ ongeveer recht evenredig zijn: maken we a twee keer zo klein, dan neemt $-{}^2\log(a)$ met 1 toe en wordt $H(a)$ vermeerderd met de limietwaarde.

De afwijkingen in de begintoestand van het linker- en rechterdiagram van figuur 1 schelen een factor $64 = 2^6$. Een schatting voor de halveringstijd is daarom $(12{,}5 - 8)/6 = 0{,}75$. Dit is natuurlijk maar een ruwe schatting. Kiezen we andere begintoestanden, dan krijgen we ongeveer dezelfde halveringtijden. Het gemiddelde van al deze waarden is een maat voor de complexiteit van het systeem. Onze ruwe schatting komt aardig overeen met de waarde 0,73 uit de wetenschappelijke literatuur.

Terug naar het echte weer

Voor goede voorspellingen is het nodig de begintoestand nauwkeurig te kennen. Maar het echte weer gedraagt zich veel gecompliceerder dan het Lorenz model. Niet alleen moeten temperatuur, druk, etc. nauwkeurig gemeten worden, maar ook is het van belang op welke onderlinge afstanden de meetstations staan. Grootschalige verschijnselen kan men op grond van metingen goed beoordelen, kleinschalige verschijnselen kunnen tussen de meetstations door glippen. Bij het huidige net van weerstations zijn depressies en fronten goed waar te nemen, maar afzonderlijke onweersbuien meestal niet. De nauwkeurigheid waarmee wij een begintoestand kennen wordt dus niet alleen bepaald door meetfouten, maar ook door de onderlinge afstand van de meetstations. Deze afstand heet de *lengteschaal* van het meetnet; in de huidige praktijk is deze ongeveer 100 kilometer.

Stel je nu een reeks van afnemende lengteschalen voor, gegeven door getallen ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4, ... Denk hierbij aan: ℓ_1 de orde van grootte van een depressie (ongeveer 1000 km), ℓ_2 de orde van grootte van een onweersbui (10 km), ℓ_3 de orde van grootte van een luchtwervel om een groot gebouw (100 m), ℓ_4 de orde van grootte van een flinke hoestbui (1 m). Door de 'kleine oorzaken, grote gevolgen' kunnen verstoringen van omvang ℓ_3 aangroeien tot verstoringen van omvang ℓ_2. Daarvoor is een zekere tijd nodig. Deze tijd noemen we de *relatieve voorspelbaarheidshorizon* t_2; dit is de voorspelbaarheidsgrens als we een meetnet van lengteschaal ℓ_2 gebruiken. Voor elke lengteschaal ℓ_i hebben we zo een relatieve voorspelbaarheidshorizon t_i. We kunnen dat als volgt schematisch weergeven:

$$\cdots \xrightarrow{t_4} \ell_4 \xrightarrow{t_3} \ell_3 \xrightarrow{t_2} \ell_2 \xrightarrow{t_1} \ell_1 .$$

De oneindig voortlopende som T van al deze tijdsintervallen t_i wordt de *absolute voorspelbaarheidshorizon* genoemd:

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \cdots$$

Dit is de tijd die een verstoring van de kleinst denkbare omvang nodig heeft om uit te groeien tot een verstoring van de grootst mogelijke omvang. Als we een meetnet zouden leggen over het Lorenzmodel, dan zijn de relatieve horizons allemaal gelijk. De absolute voorspelbaarheidshorizon is daarom oneindig. Dit betekent dat we de voorspelbaarheidsgrens willekeurig ver kunnen opschuiven.

Bij het echte weer is de situatie anders. Kleinschalige bewegingen hebben sneller last van 'kleine oorzaken, grote gevolgen': de halveringstijd is ongeveer evenredig met de grootte. Hierdoor nemen de tijdsintervallen $t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots$ zeer snel af. Zó snel zelfs, dat het getal T *eindig* is: het echte weer blijkt een absolute voorspelbaarheidshorizon van een dag of tien te hebben. Voorspellingen van het weer over een periode van ongeveer 10 dagen of meer zijn niet betrouwbaar, hoe nauwkeurig we ook meten en hoe dicht het meetnet ook is!

Praktische betekenis

We hebben gezien dat er absolute grenzen bestaan voor wat we op de langere termijn kunnen voorspellen. Daarom wordt verbetering van de weersvoorspelling tegenwoordig in een andere richting gezocht: voorspellingen zijn bij het ene weertype namelijk veel betrouwbaarder dan bij het andere. Dit betekent dat de voorspelbaarheidshorizon afhangt van de begintoestand. Er wordt nu gezocht naar methoden om zo goed mogelijk vast te stellen hoe de betrouwbaarheid van de weersvoorspelling afhangt van de weersomstandigheden die de begintoestand bepalen. ◢

foto pagina 5: KNMI.

Internet-pagina's worden met de dag levendiger. Eén van de oorzaken is Java, een computertaal die de laatste twee jaar een sterke groei meegemaakt heeft. Het geheim van Java-programma's is hun algemene bruikbaarheid: een browser kan een elders in de wereld geschreven Java-programma ophalen en op de eigen computer laten draaien zonder dat extra software nodig is.

• Java

André Heck

Java is een programmeertaal ontworpen voor microchips in huis-, tuin- en keukengereedschap. Pas met de introductie van het World Wide Web (twee jaar geleden) begon de stormachtige ontwikkeling—Java leent zich namelijk uitstekend voor gebruik op Internet. De belangrijkste toepassing is op dit moment de verlevendiging van Web-pagina's. Traditionele Web-pagina's bestaan alleen maar uit tekst, plaatjes, en invulformulieren. Met Java kunnen ze verfraaid worden met animaties, interactieve software en kant-en-klaar werkende programma's.

Als een browser op een Web-pagina een stukje Java tegenkomt, wordt automatisch de benodigde Javacode opgehaald. Daarna wordt de code op de eigen computer in een werkbaar programma omgezet en uitgevoerd. Voor deze programma's is het niet van belang welk type computer gebruikt wordt, een voor Java geschikte Web-browser is voldoende. Het idee van het maken van programma's die op elke computer werken en over het Internet naar de gebruiker getransporteerd kunnen worden sloeg in als een bom en verklaart de razendsnelle toename in populariteit onder Web-gebruikers en Web-makers. Bedrijven die informatie aanbieden op Internet kunnen samen met hun informatie een Java-programma meesturen dat de gegevens leesbaar maakt. Computergebruikers hebben geen grote geheugencapaciteit nodig om duizend-en-een programma's op te slaan, de software kan van het Internet gehaald worden wanneer dat nodig is. Vandaar de krantekoppen: "Met Java neemt Internet functie van PC over" en "Met Java zal Internet veranderen in één groot besturingssysteem".

JAVA

De naam werd bedacht tijdens een brainstorm-sessie en moest associaties met technologische ontwikkelingen oproepen: levendigheid, beweging, snelheid en interactie. Java is in Amerika synoniem met de hete, aromatische drank die door programmeurs veel gedronken wordt: koffie.

Bestaande applets

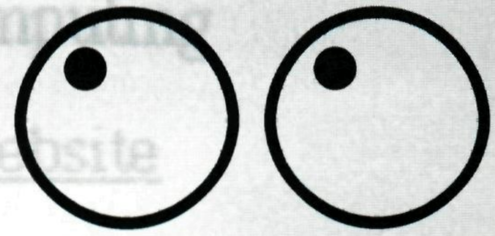
Een Java-programma wordt een applet genoemd. Om applets te kunnen bekijken heb je een browser nodig die 'Java-enabled' is, bijvoorbeeld een recente versie van Netscape of Microsoft Explorer. Het Internet is natuurlijk de plaats om op zoek te gaan naar Java spullen. JavaSoft (http://www.javasoft.com) is een geschikt vertrekpunt. Op deze lokatie vind je de software die je nodig hebt om zelf Java-applets te maken. Daarnaast kun je er terecht voor documentatie, antwoorden op veelgestelde vragen en adressen van andere Java-sites. Een uitgebreide verzameling van Java-applets is te vinden bij Gamelan (http://www.gamelan.com).
Er zijn veel wiskundige applets. De vlinder van Lorenz uit dit nummer van Pythagoras komt voor als Java-applets (zie [1]), evenals dubbele slinger en de zeef van Sierpiński uit het vorige nummer (zie [2,3]). Om je te helpen zoeken hebben we een top-tien van wiskundige applets samengesteld (zie [4]). Een internationale rangschikking van applets van allerlei aard is te vinden op de Java Applet Rating Service (http://www.jars.com).

Zelf een applet maken

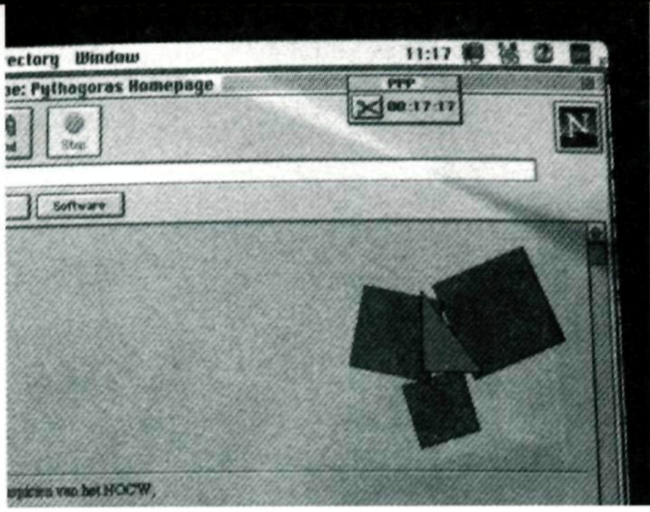
Wij gaan zelf een applet schrijven. Om dit applet te laten werken heb je nodig: een browser die met Java overweg kan, een Java-compiler en de Java-bibliotheek van hulpfuncties. Een startpakket voor het maken van Java programma's kun je ophalen bij Javasoft (in de subdirectory products/JDK). Je leert het snelst door bestaande applets te wijzigen, na te maken, uit te breiden, enzovoort. Op het Internet kun je ook literatuur over Java vinden. Aardig is bijvoorbeeld de 'Java Tutorial', te vinden bij Javasoft.

Ons applet tekent twee oogjes waarvan de pupillen voortdurend de muispointer op het computerscherm volgen. Eerst maken we het bestand `eyes.java` met de volgende Java-code:

```
import java.awt.*;

public class eyes
 extends java.applet.Applet{

double lx=150, ly=150;
double rx=260, ry=150;

public void paint(Graphics g) {
 g.setColor(Color.white);
 g.fillOval(100,100,100,100);
 g.fillOval(210,100,100,100);
 g.setColor(Color.black);
 g.fillOval((int)(lx-8),
  (int)(ly-8),16,16);
 g.fillOval((int)(rx-8),
  (int)(ry-8),16,16);
}

public boolean
 mouseMove(Event evt,int x,int y){
 double X=x, Y=y;
 double k = scaling(X-150,Y-150);
 lx = k*(X-150)+150;
 ly = k*(Y-150)+150;
 k  = scaling(X-260,Y-150);
 rx = k*(X-260)+260;
 ry = k*(Y-150)+150;
 repaint();
 return true;
}
```



```
public double
 scaling(double x,double y){
 return 42/Math.sqrt(x*x+y*y+1764);
}

}
```



Deze Java-code werkt als volgt: in de eerste regel zeggen we dat we de Java bibliotheek van functies willen gebruiken. Hierna introduceren we een nieuwe klasse `eyes`, dit wordt ons applet. Dan volgen drie functies `paint`, `mouseMove` en `scaling`.

De functie `paint` tekent de ogen en pupillen op de juiste plaats. De functie `mouseMove` berekent uit de coördinaten van de muis de coördinaten van de pupillen. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de functie `scaling`, die ervoor zorgt dat de pupillen niet uit oogkassen vallen. Met een Java-compiler moet je deze code vertalen tot een programma, de bestandsnaam wordt `eyes.class`. Dit is de uitvoerbare code. Maak een HTML-pagina met daarin de volgende regel:

```
<applet code=eyes.class
 width=500 height=500></applet>
```

Met een voor Java geschikte Web-browser kun je deze HTML-pagina bekijken, met daarin de actieve oogjes. De Java-code kun je naar believen uitbreiden door nieuwe functies toe te voegen.

Prijsvraag

Schrijf een Java-applet dat de driehoek en de drie vierkanten van het logo van de homepage op het scherm laat 'dansen', volgens een of ander zèlf te bedenken patroon. De voorwaarden zijn:

1. Het Java-applet moet de rechthoekige driehoek (met zijden 3 : 4 : 5) en de drie vierkanten uit het logo zelf tekenen (dus geen plaatjes inlezen).
2. De afmetingen van het applet zijn width = 300 en heigth = 200.
3. Het dansje is chaotisch van aard, duurt niet langer dan 15 seconden en een klik van de muis start het dansje weer op.

Stuur de Java-code van je applet naar het redactieadres, het liefst per email. Als je het applet zelf al op het Web geplaatst hebt, dan het adres meesturen. De redactie behoudt zich het recht voor om ingezonden applets te gebruiken op de homepage van Pythagoras. Insturen is mogelijk tot en met 21 maart 1997. De redactie beoordeelt de programma's en beloont het mooiste met een boekenbon van fl. 100,-.

Gebruikte Internetadressen

[1] http://www.geom.umn.edu/java/Lorenz/
[2] http://cccsrv.trevano.ch/~sreffert/SIERPINSKI/APPLET.html
[3] http://okabe.rcast.u-tokyo.ac.jp/~ichinose/java/pendulum/dpendulum.html
[4] http://www.can.nl/~gastel/Pythagoras.html

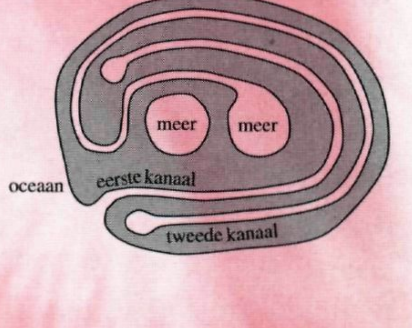
• L. E. J. Brouwer

Teun Koetsier

Wie was de grootste wiskundige die Nederland heeft voortgebracht? Eén van de kandidaten is, naast het 17e eeuwse genie Christiaan Huygens, Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966). De jonge Bertus Brouwer vond op de universiteit wiskunde maar saai, totdat hij onder invloed van de wiskundige Gerrit Mannoury doorkreeg dat wiskunde mooi en speels kan zijn.

Voor de eerste wereldoorlog schreef Brouwer een aantal wiskundige artikelen die hem in één klap beroemd maakten. Daarmee werd hij een van de grondleggers van de *topologie*, een onderdeel van de moderne wiskunde. We geven een voorbeeld. In de vorige eeuw deden wiskundigen niet moeilijk over het begrip 'rand van een gebied'. Bijvoorbeeld, als je een acht tekent op een vel papier, dan verdeelt die acht het papier in drie gebieden. Het kruispunt van de acht is randpunt van elk der drie gebieden. Het kruispunt is een uitzonderingspunt: alle andere punten grenzen maar aan twee gebieden. In 1910 verrastte Brouwer de wiskunde-wereld met een kromme die het vlak in drie gebieden verdeelt en waarvan èlk punt uitzonderingspunt is!

De wiskundige Hans Freudenthal heeft de constructie van die kromme als volgt duidelijk gemaakt. Een eiland ligt in de oceaan, op het eiland liggen twee meren. Op een zekere dag beginnen we om elf uur een kanaal te graven. Door middel van dit kanaal bereikt het oceaanwater elk punt van het eiland tot op een afstand van 1 km. Daarvoor moet het kanaal wel een aantal kronkels hebben (zie de tekening). Om half twaalf graven we een kanaal vanuit het ene meer, zodanig dat het water daarvan elk punt van het eiland tot op 100 meter afstand benadert. Om kwart voor twaalf graven vanuit het andere meer een derde kanaal dat het water van het meer tot op 10 meter afstand brengt van elk punt van het eiland. Het eiland wordt zo steeds kleiner; het staat land af aan de oceaan en de twee meren, die alle drie groter worden. De drie soorten water blijven steeds gescheiden. Om $7\frac{1}{2}$ minuut voor twaalf beginnen we opnieuw. We graven vanuit de oceaan een kanaal dat het oceaanwater tot op 1 meter van elk punt van het eiland brengt. Enzovoort. Telkens breiden we de zee en de meren op zo'n manier uit dat het water steeds dichter bij alle punten van het eiland komt. Om twaalf uur zijn we klaar. We hebben dan drie oneindig lange kanalen gegraven die elk punt van het eiland willekeurig dicht benaderen. Van het eiland blijft alleen een kromme over en alle punten van die kromme zijn uitzonderingspunten. ◢



De decimale ontwikkeling van $12/65$ bestaat uit een zich herhalende rij cijfers. De lengte van het kortste patroon heet de periode. In het vorige nummer van Pythagoras bewees Rob Tijdeman dat de periode van m/n ten hoogste $n-1$ is. De periode van $12/65$ is dus hoogstens 64, maar de echte periode is 6. In dit artikel laten we zien hoe je, zonder *de decimale ontwikkeling op te schrijven, heel snel de periode van m/n kunt bepalen.*

• De periode van een breuk

Hans Roskam

Door een breuk met tien te vermenigvuldigen, schuift de decimale ontwikkeling één plaats op naar rechts:

$$\begin{aligned} 10 \times \tfrac{1}{3} &= 10 \times 0{,}333\ldots \\ &= 3{,}333\ldots \end{aligned}$$

De periode verandert dus niet. Door maar vaak genoeg met 10 te vermenigvuldigen en te vereenvoudigen, kunnen we er voor zorgen dat er geen factoren 2 en 5 in de noemer voorkomen. Doen we dit met $12/65$, dan krijgen we

$$120/65 = 1\tfrac{55}{65} = 1\tfrac{11}{13}$$

De noemer 13 is niet deelbaar door 2 of 5, en de periode van de decimale ontwikkeling is ondertussen niet veranderd. Dus is de periode van $12/65$ hetzelfde als de periode van $11/13$.

Met behulp van de hiernaast afgedrukte staartdeling bepalen we eerst de periode van $1/13$. Kijk goed naar de (vetgedrukte) resten, dit zijn achtereenvolgens 9, 12, 3, 4, 1, 10, 9, enz. Vanaf het moment dat we voor de tweede keer rest 9 krijgen, herhaalt de staartdeling zich. In feite begint deze rij als 1, 10, 9, 12, 3, 4, 1, enzovoort. Want eerst proberen we 1 door 13 te delen (rest=1), dan 10 (rest=10), dan 100 (rest=9). De herhaling begint dan al bij rest 1. De periode is dus 6. Breken we de staartdeling na één stap af, dan zien we dat 100 rest 9 geeft bij deling door 13. Breken we af na de tweede stap, dan zien we dat 1000 rest 12 geeft. Evenzo geeft 10^4 rest 3, 10^5 rest 4 en 10^6 rest 1. Deze 6 is precies de periode. Anders geformuleerd: de periode van $1/13$ is de exponent in de kleinste macht van 10 die bij deling door 13 rest 1 geeft.

$$\begin{array}{l}
13/\mathbf{1{,}0}00000000\ldots\backslash 0{,}07692307\ldots \\
\;\;\underline{91} \\
\;\;\;\;\mathbf{9}0 \\
\;\;\;\;\underline{78} \\
\;\;\;\;\mathbf{12}0 \\
\;\;\;\;\underline{117} \\
\;\;\;\;\;\;\;\mathbf{3}0 \\
\;\;\;\;\;\;\;\underline{26} \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\mathbf{4}0 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{39} \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\mathbf{1}0 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{0} \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\mathbf{10}0 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{91} \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\mathbf{9}0
\end{array}$$

We gaan terug naar $1/13$. De periode hiervan kunnen we berekenen met een staartdeling. Maar het kan ook handiger. In de zesde stap van deze staartdeling wordt namelijk de rest van 11.000.000 berekend bij deling door 13. We weten dat 1.000.000 rest 1 heeft:

$$1.000.000 = 13 \times 76923 + 1.$$

Wanneer je nu de linker- en rechterkant met 11 vermenigvuldigt, dan zie je dat 11.000.000 rest 11 heeft:

$$11.000.000 = 13 \times 11 \times 76923 + 11.$$

In de staartdeling van $11/13$ krijgen we daarom na zes stappen rest 11 en begint de deling zich te herhalen. De breuk $11/13$ heeft daarom periode 6 of minder. Wanneer we de staartdeling uitvoeren (zie hiernaast), dan zien we dat de periode echt 6 is. Dit is geen toeval. Als de periode kleiner zou zijn, dan zou 11 al eerder moeten optreden als rest. Stel bijvoorbeeld dat ook 11.000 rest 11 zou hebben. Dit betekent dat $11.000 = 13 \times k + 11$. Dit kunnen we herschrijven als

$$13 \times k = 11 \times (1000 - 1).$$

Omdat 13 en 11 geen delers gemeenschappelijk hebben, moet 13 wel een deler zijn van $1000 - 1$. Maar dan heeft 1000 rest 1 heeft bij deling door 13. We hebben echter al geconstateerd dat 10^{ℓ} pas rest 1 heeft voor $\ell = 6$. De staartdeling voor $11/13$ hadden we dus helemaal niet hoeven opschrijven. Zonder te rekenen kunnen we *beredeneren* dat $1/13$ en $11/13$ dezelfde periode hebben.

13/**11**,00000000...\0,84615384...
104
60
52
80
78
20
13
70
65
50
39
110
104
60

Samenvattend: de periode van m/n kun je uitrekenen door uit n eerst alle factoren 2 en 5 weg te delen en vervolgens de resten op te schrijven van 10, 100, 1000,... bij deling door n. De exponent in de kleinste macht van 10 die rest 1 geeft, is de periode van $1/n$. Als m/n niet vereenvoudigd kan worden, dan volgt net als in ons voorbeeld dat m/n dezelfde periode heeft als $1/n$. Voor een aantal kleine waarden van n hebben we deze periodes in een tabel gezet. Wat valt je op als n een priemgetal is? ◢

n	3	7	9	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39
periode $1/n$	1	6	1	2	6	16	18	6	22	3	28	15	2	3	6

wiskunde met de computer

Neem twee grote parallelle metalen platen, met lucht daartussen. Verwarm de onderste plaat. Wat gebeurt er? Bij kleine temperatuursverschillen zal de lucht in het midden opstijgen om boven af te te koelen en langs de randen terug te stromen. Bij grotere temperatuursverschillen ontstaat er onregelmatige stromingspatronen. De weerkundige Lorenz heeft hiervan een wiskundig model gemaakt dat je met een computer kunt bestuderen.

• De vlinder van Lorenz

Hans Lauwerier

Het verschijnsel dat warme lucht opstijgt heet *convectie*. In het begin van de jaren zestig maakte Edward Lorenz hiervoor een wiskundig model. Zijn oorspronkelijke model telde twaalf variabelen. Later bracht hij een aantal vereenvoudigingen aan, zodat hij nog maar drie variabelen overhield: x, y, z, die alle drie functies zijn van de tijd t. Deze variabelen geven *niet* de plaats of snelheid van de bewegende luchtdeeltjes weer, maar corresponderen met bepaalde grootheden uit het convectie-model. Meer details kunnen we helaas niet geven, deze zijn te technisch. Maar je kunt x, y en z wel degelijk opvatten als coördinaten van een punt in de ruimte. Niet de gewone ruimte, maar de 'toestandsruimte' van het model. De vergelijkingen die Lorenz vond, beschrijven hoe de coördinaten x, y en z veranderen als functie van t:

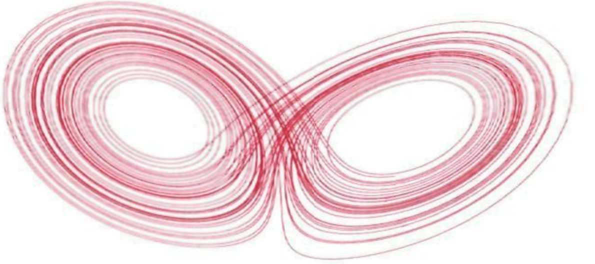
$$x' = 10(y-x),$$
$$y' = 28x - xz - y,$$
$$z' = xy - \tfrac{8}{3}z.$$

Hier is x' de afgeleide van x naar t, y' de afgeleide van y naar t, z' de afgeleide van z naar t. Een punt met coördinaten (x,y,z) beweegt in de 'toestandsruimte'. Kennen we van zo'n punt de coördinaten (x_t, y_t, z_t) op tijdstip t, dan zeggen deze vergelijkingen hoe de coördinaten van het punt veranderen. Als we de begincoördinaten (x_0, y_0, z_0) weten, dan leggen de vergelijkingen de coördinaten (x_t, y_t, z_t) op elk tijdstip $t > 0$ vast. De baan van het punt vormt zo een kromme in de (x,y,z)-ruimte, geparametriseerd door de tijd t.

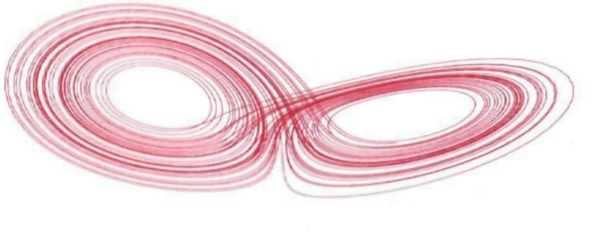
Deze kromme kunnen we berekenen met de computer, met een methode die 'numerieke integratie' heet. Stel dat we al een stukje van de baan hebben en dat (x_t, y_t, z_t) de laatste bekende of berekende positie van het punt is, t de bijbehorende tijd. We doen nu net of de snelheid even constant is, zodat het punt eenparig rechtlijnig beweegt. Met 'even' bedoelen we gedurende een tijdsintervalletje $[t, t+h]$. Op het tijdstip $t+h$ is het deeltje aangekomen in de positie $(x_{t+h}, y_{t+h}, z_{t+h})$ met coördinaten:

$$x_{t+h} \approx x_t + h \cdot x'_t$$
$$y_{t+h} \approx y_t + h \cdot y'_t$$
$$z_{t+h} \approx z_t + h \cdot z'_t$$

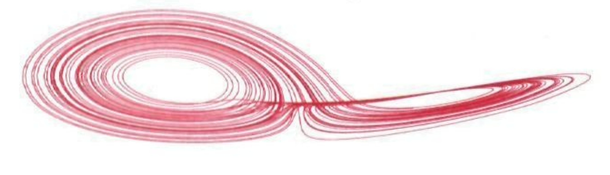
Wanneer h erg klein is, maken we maar een kleine fout. We moeten dan wel veel van die kleine stapjes maken, maar dat is voor een computer geen bezwaar. In het volgende Basic-programma wordt de bovenstaande methode toegepast. Voor x', y' en z' zijn de vergelijkingen van Lorenz gebruikt.



```
DEFDBL H,X-Z
SCREEN 12: CLS
WINDOW (-60,0)-(60,50)
X=-12.5: Y=-17.4: Z=26
PSET (X+Y,Z)
H=.001 'tijdstap
FOR M&=1 TO 32000
 IF INKEY$<>"" THEN END
 X1=X+H*10*(Y-X)
 Y1=Y+H*(28*X-X*Z-Y)
 Z1=Z+H*(X*Y-8/3*Z)
 X=X1: Y=Y1: Z=Z1
 LINE -(X+Y,Z)
NEXT M&
END
```



Op ons scherm krijgen we een kronkellijn met veel windingen te zien. Deze lijn wordt berekend in de (x, y, z)-ruimte. Om deze te tekenen, projecteren we op een plat vlak. In het programma gebeurt dit door in plaats van x en y alleen maar $x + y$ uit te zetten, terwijl z een verticale coördinaat blijft. Je kunt ook andere combinaties van x, y en z uitzetten. Het effect is dan dat je de evolutiekromme vanuit een steeds andere hoek bekijkt.



Wat is de kans dat in een klas van 30 leerlingen twee leerlingen op dezelfde dag jarig zijn? Zoiets lijkt een toevallige samenloop van omstandigheden; leerlingen durven daarom wel met hun leraar te wedden dat in hun klas geen twee verjaardagen op één dag vallen. De kans hierop is echter eenvoudig te berekenen: 70%. De leraar heeft verrassend genoeg een grote kans om te winnen!

• Het verjaardagsprobleem

Henk Tijms

Veronderstel dat je een groep van n personen hebt, waarvan de samenstelling op een willekeurige wijze tot stand gekomen is. Wat is de kans dat binnen deze groep twee of meer personen op dezelfde dag jarig zijn? Voor het gemak zullen wij aannemen dat het jaar uit 365 dagen bestaat en dat elke dag even waarschijnlijk is als geboortedag.

Om de gevraagde kans te berekenen, is het eenvoudiger de complementaire kans te berekenen dat alle n personen op een *verschillende* dag jarig zijn. Deze gaan we berekenen. Denk voor het gemak in dat de n personen genummerd zijn als 1, 2, ..., n. Er zijn 365^n mogelijkheden voor de verjaardagen van de groep van n personen: 365 voor de eerste, 365 voor de tweede, enz. Het aantal mogelijkheden met allemaal verschillende verjaardagen is gelijk aan $365 \times 364 \times \cdots \times (365-n+1)$: 365 voor de eerste, 364 voor de tweede, enz. Aangezien alle mogelijke combinaties even waarschijnlijk zijn, is de kans op n verschillende verjaardagen gelijk aan het aantal gunstige combinaties gedeeld door het totale aantal combinaties. De gevraagde kans dat tenminste twee personen in een groep van n personen op eenzelfde dag jarig zijn, wordt dus gegeven door

$$p_n = 1 - \frac{365 \times 364 \times \cdot \times (365-n+1)}{(365)^n}.$$

In de tabel wordt de kans p_n gegeven voor een aantal waarden van n. Je ziet hoe verrassend snel de kans toeneemt als n groter wordt. Een groep van 23 personen volstaat om een 'fifty-fifty' kans te hebben dat twee of meer personen op eenzelfde dag jarig zijn, terwijl deze kans bij een groep van 47 personen al meer dan 95 % is.

Varianten

Het verjaardagsprobleem kent vele varianten. Bijvoorbeeld: een groep van 7 personen die elkaar niet kennen, wacht in de lobby van een hotel op de lift om naar hun kamers te gaan. Wat is de kans dat twee of meer personen op dezelfde etage uitstappen, wanneer het hotel 25 verdiepingen heeft met elk hetzelfde aantal kamers?
Een andere variant is: je sluit met je vriend de weddenschap af dat van de eerstvolgende n auto's die langsrijden tenminste twee auto's nummerborden hebben met twee gelijke eindcijfers. Hoe groot moet n

zijn zodat de kans ongeveer 'fifty-fifty' is dat je wint?

Op al deze voorbeelden is het volgende kansmodel van toepassing. Je plaatst op willekeurige wijze n ballen in c cellen met $n < c$, waarbij de ballen onafhankelijk van elkaar geplaatst worden. Wat is de kans dat twee of meer ballen in eenzelfde cel vallen? Op precies dezelfde wijze als hiervoor kun je beredeneren dat de gevraagde kans gegeven wordt door

$$p_n = 1 - \frac{c \times (c-1) \times \ldots \times (c-n+1)}{c^n}.$$

Voor het voorbeeld van de nummerborden is het model met $c = 100$ van toepassing. Uit de bovenstaande formule volgt na enig rekenen dat bij 12 auto's je een kans van ongeveer 50 % hebt om de weddenschap te winnen.

•• Een benaderingsformule

De exacte formule voor p_n is weliswaar simpel uit te rekenen, maar geeft niet veel inzicht. Om een benaderingsformule voor p_n te vinden, herschrijven we de bovenstaande formule als

$$p_n = 1 - (1 - \frac{1}{c})(1 - \frac{2}{c}) \cdots (1 - \frac{n-1}{c}).$$

Veronderstel nu dat c groot is ten opzichte van n. Dan zijn de termen $1/c$, $2/c$, ..., $(n-1)/c$ klein. Pas nu de bekende benadering $e^{-x} \approx 1 - x$ toe. Deze geldt voor x dicht bij 0 en volgt uit de formule $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \cdots$ (zie p. 24 van de vorige Pythagoras). Dit geeft

$$p_n \approx 1 - e^{-1/c} e^{-2/c} \cdots e^{-(n-1)/c}.$$

Gebruik nu dat $1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$. Je vindt dan

$$p_n \approx 1 - e^{-\frac{1}{2}n(n-1)/c}.$$

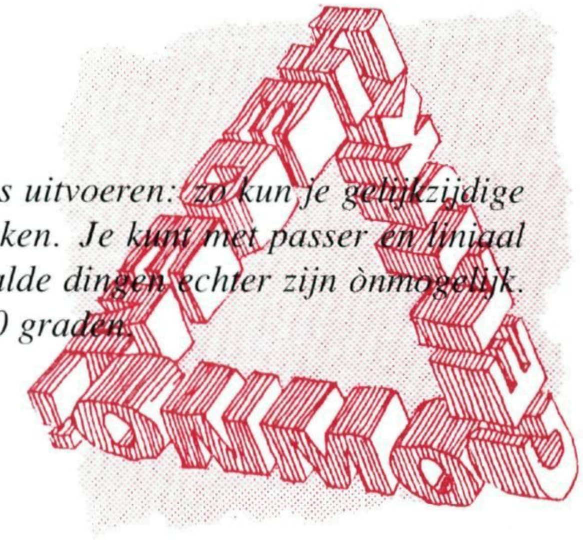
Door uit deze formule n op te lossen kun je een benaderingsformule vinden voor de waarde van n bij gegeven p_n en c. Wij nemen $p_n = 1/2$. Dan volgt uit de bovenstaande formule dat $1/2 = e^{-\frac{1}{2}n(n-1)/c}$. Neem van beide kanten de natuurlijke logaritme en vermenigvuldig met $-2c$. Met de *abc*-formule volgt dat

$$\begin{aligned} n &\approx \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + 8c\ln 2} \\ &\approx \tfrac{1}{2}\sqrt{8c\ln 2} = 1{,}18\sqrt{c} \end{aligned}$$

We vinden dus de benaderingsformule $n \approx 1{,}18\sqrt{c}$. Voor het verjaardagsprobleem ($c = 365$) geeft dit $n \approx 22{,}5$, hetgeen zeer goed klopt met de eerder gevonden waarde $n = 23$. Voor het nummerbordprobleem ($c = 100$) is de benaderingswaarde $n \approx 11{,}8$ in overeenstemming met de werkelijke waarde $n = 12$. ◢

n	p_n
10	0.1169
15	0.2529
20	0.4114
23	0.5073
25	0.5687
30	0.7063
40	0.8912
47	0.9548
50	0.9704
75	0.9997

Met passer en liniaal kun je meetkundige constructies uitvoeren: zo kun je gelijkzijdige driehoeken, vierkanten en regelmatige zeshoeken maken. Je kunt met passer en liniaal ook een hoek in twee gelijke hoeken verdelen. Bepaalde dingen echter zijn ònmogelijk. Bijvoorbeeld: het in drieën delen van een hoek van 60 graden.



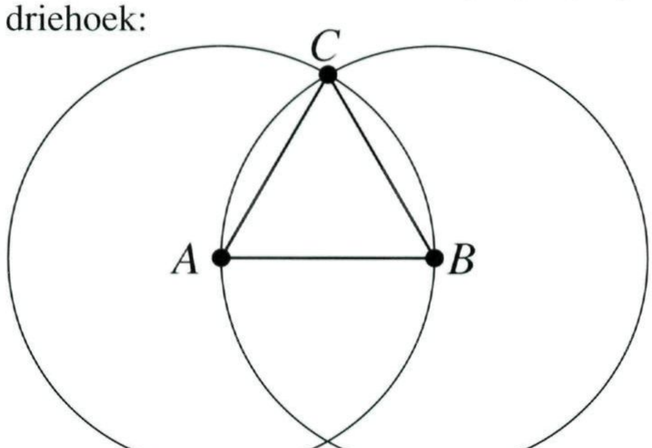
Passer en liniaal

Klaas Pieter Hart

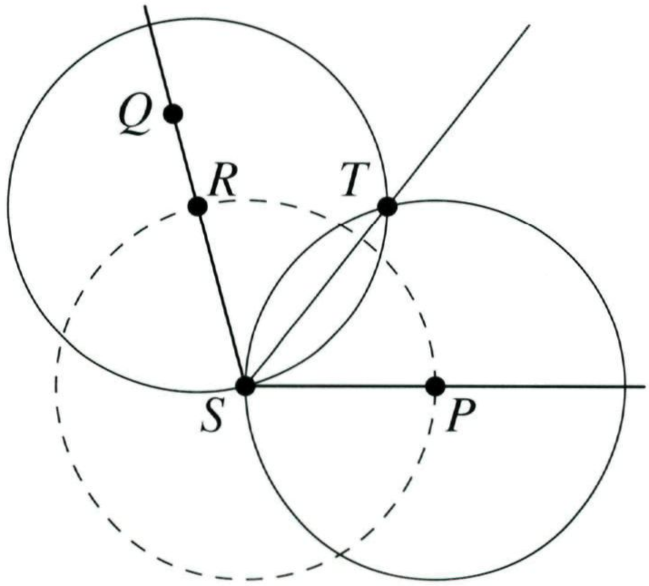
De Griekse meetkunde werd bedreven volgens strikte spelregels. Deze regels zeggen hoe uit gegeven punten nieuwe punten geconstrueerd kunnen worden. De nieuwe punten zijn snijpunten van lijnen en cirkels, waarbij alleen de lijnen en cirkels toegestaan zijn die we kunnen maken met behulp van de volgende twee regels:

1. door elk tweetal gegeven punten mag een lijn getrokken worden,
2. om elk gegeven punt mag een cirkel getrokken worden met de afstand tussen twee gegeven punten als straal.

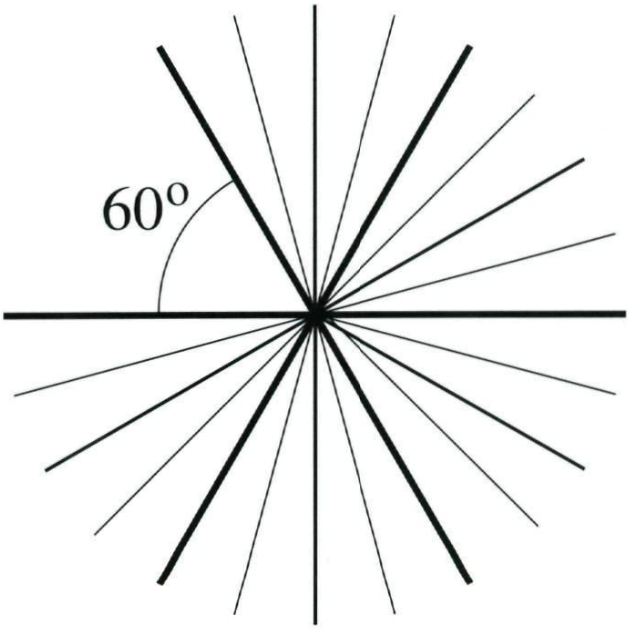
We mogen dus alleen passer en liniaal gebruiken; de liniaal om een lijn door twee bekende punten te tekenen, de passer om een cirkel te trekken met een bekend punt als middelpunt en de afstand tussen twee bekende punten als straal. Met deze regels kunnen wij meetkundige constructies uitvoeren. Om iets zinvols te maken, hebben we natuurlijk ten minste twee startpunten nodig, want met één punt komen we niet ver.
Een voorbeeld: de constructie van een gelijkzijdige driehoek. Dit betekent dat we uit twee punten A en B een punt C moeten construeren zodat ΔABC gelijkzijdig is. Dit is eenvoudig: teken twee cirkels met de punten A en B als middelpunten en het lijnstuk AB als straal. Als C een snijpunt is van deze cirkels, dan is ΔABC een gelijkzijdige driehoek:



Een ander voorbeeld: de constructie van een lijn die een gegeven hoek in twee gelijke hoeken deelt. De hoek $\angle PSQ$ wordt gegeven door drie punten P, S en Q. De constructie gaat als volgt:



Trek eerst een cirkel met middelpunt S en straal SP. Deze cirkel snijdt de lijn door S en Q in R. Teken vervolgens twee cirkels met middelpunten P en R en straal SP. Deze cirkels snijden in S en in een ander punt T. Dan deelt de lijn ST de gegeven hoek in twee gelijke hoeken.
De voorafgaande twee constructies kunnen we combineren. De hoeken van een gelijkzijdige driehoek zijn $60°$. Door deze hoek in tweeën te delen krijgen we twee hoeken van $30°$. De verkregen hoeken kunnen we weer in tweeën delen. Zo krijgen we hoeken van $15°$, $7\frac{1}{2}°$, enzovoort. Op deze manier zijn heel veel hoeken construeerbaar:



Figuur 1

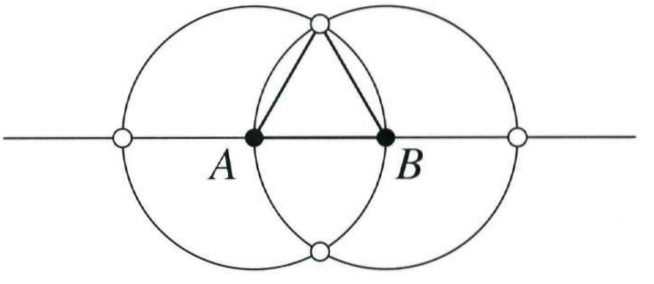
VRAGEN. Kun je de volgende constructieproblemen oplossen?

1. Gegeven is een lijn PQ en een punt S niet op PQ. Construeer de loodlijn van S op PQ, dat wil zeggen, construeer op de lijn PQ een punt T zodat PQ en ST elkaar loodrecht snijden).

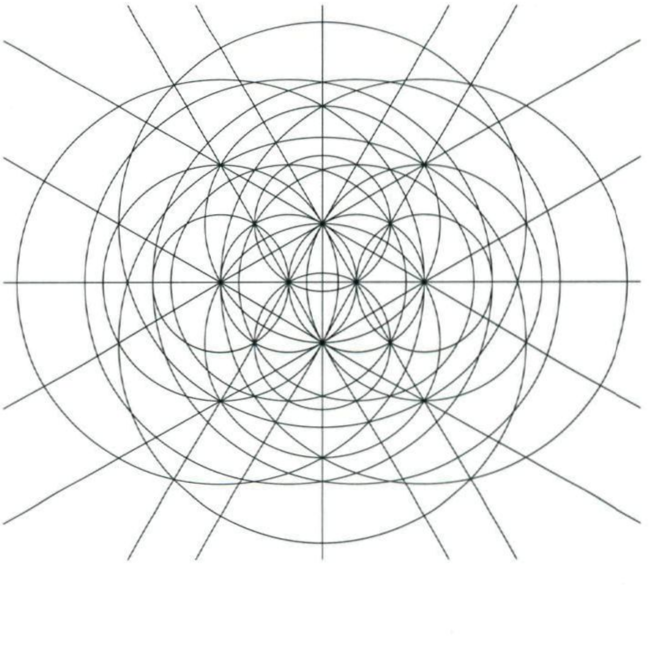
2. Gegeven zijn drie punten P, Q en R die niet op één lijn liggen. Kun je het middelpunt van de cirkel door deze drie punten construeren?

Construeerbare punten

We kunnen constructies afzonderlijk bekijken, maar we kunnen ook systematisch nagaan welke punten we krijgen als we beginnen met twee punten A en B. In eerste instantie kunnen we de lijn door A en B trekken en de cirkels om A en B met straal AB:

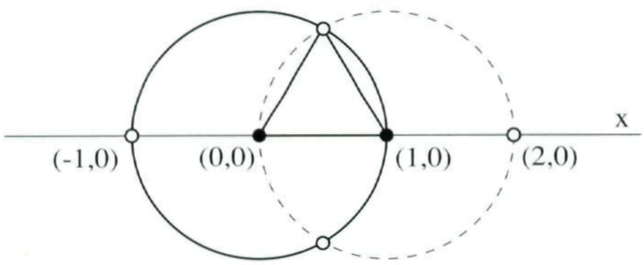


Hiermee hebben we vier nieuwe punten geconstrueerd: de onderlinge snijpunten van de cirkels en de nieuwe snijpunten van de cirkels met de lijn. We herhalen dit procédé met de nieuwe verzameling punten. Door de zes punten kunnen we tien verschillende lijnen trekken. Verder kunnen we vierentwintig cirkels tekenen: om elk van de zes punten vier cirkels met als stralen de lijnstukken AB, $2AB$, $3AB$ en $\sqrt{3}AB$:



Zo hebben we een heleboel nieuwe punten geconstrueerd. We kunnen ons nu afvragen: wat gebeurt er als we deze stappen blijven herhalen? Kunnen we bijvoorbeeld, uitgaande van twee punten A en B, in een eindig aantal stappen èlk willekeurig punt construeren? Het antwoord op deze vraag is niet zo eenvoudig. Passer en liniaal helpen niet veel. Als je de bovenstaande stappen daadwerkelijk uitvoert, dan loopt je papier helemaal dicht met lijnen. Maar het is onduidelijk of je alle punten geconstrueerd hebt.

We doen het daarom anders. We gooien onze passer en liniaal weg en voeren *coördinaten* in. We vatten het punt A op als oorsprong. De lijn door A en B wordt de x-as, op zo'n manier dat B samenvalt met het punt $(1,0)$. Dus $A=(0,0)$ en $B=(1,0)$. De cirkel met middelpunt A en straal AB is nu de eenheidscirkel geworden.



Trekken we ook de cirkel met middelpunt $(1,0)$ en straal 1, dan krijgen we naast $(0,0)$ en $(1,0)$ vier nieuwe punten. De coördinaten daarvan kunnen we uitrekenen. De punten op de x-as zijn gemakkelijk, dat zijn $(-1,0)$ en $(2,0)$. Het berekenen van de snijpunten van de cirkels is iets lastiger. De cirkels hebben vergelijkingen:

$$x^2+y^2=1,$$
$$(x-1)^2+y^2=1.$$

Trekken we de vergelijkingen van elkaar af, dan houden we $2x-1=0$ over. Dit is de vergelijking van de lijn door de snijpunten van de cirkels. Dus $x=1/2$. Vullen we dit in de vergelijking voor de eerste cirkel in, dan vinden we $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$. De cirkels snijden dus in de punten $(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{3})$ en $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{3})$.

De lijnen en cirkels die we met deze zes punten kunnen construeren, leveren een heleboel snijpunten op. Hoe zien de coördinaten daarvan uit? Gaan we lijnen met elkaar snijden, dan krijgen coördinaten met daarin gewone breuken en $\sqrt{3}$'s. Snijden we een lijn met een cirkel of twee cirkels, dan moeten we, zoals we gezien hebben, een wortel trekken. Bijvoorbeeld: een snijpunt van de cirkel door $(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{3})$ met straal 2 en de cirkel door $(2,0)$ met straal 3 is het punt:

$$\left(\tfrac{1}{6}\sqrt{33},\ \tfrac{2}{3}\sqrt{3}+\tfrac{1}{2}\sqrt{11}\right).$$

In de coördinaten verschijnen dus breuken en meer wortels. In de volgende stap krijgen we wortels van wortels. Dit gaat zo door. Bij elke constructiestap krijgen we één wortelteken meer. Een voorbeeld: de snijpunten van de hoeken uit figuur 1 met de eenheidscirkel zijn construeerbare punten. De x-coördinaten van die snijpunten zijn gelijk aan $\cos 30°$, $\cos 15°$, $\cos 7\frac{1}{2}°$, enzovoort. De cosinusformule voor de verdubbeling van een hoek is gelijk aan $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$. Hieruit volgt dat $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha}$. Toegepast op $\alpha = 30°$ geeft dit:

$$\cos 30^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\sqrt{3}},$$

$$\cos 7\tfrac{1}{2}^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\sqrt{3}}}.$$

Dus: wortels, wortels van wortels, enzovoort. Dit is in het algemeen waar: coördinaten van met passer en liniaal construeerbare punten zijn opgebouwd uit breuken, uit wortels, wortels van wortels, enzovoort.

Niet-construeerbare punten

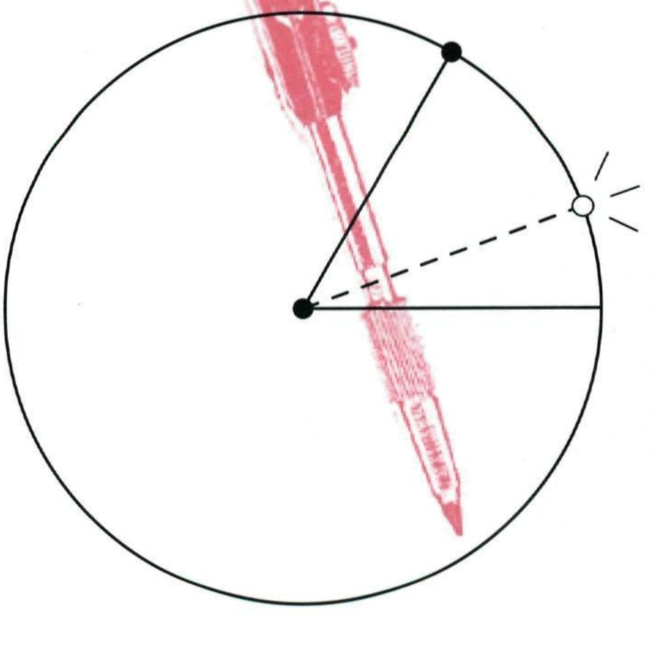
Niet èlk punt in het (x,y)-vlak is construeerbaar met passer en liniaal. Waarom? Omdat je met alleen maar breuken en (vierkants)wortels lang niet alle getallen krijgt. Wij geven één voorbeeld: de cosinus van 20 graden. De somregel voor de cosinus luidt $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$. Met deze regel kun je een formule voor $\cos 3\alpha$ vinden:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Nemen we $\alpha = 20^\circ$, dan is $\cos 3\alpha = \frac{1}{2}$. Dus: $\frac{1}{2} = 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ$. Wanneer we dit vermenigvuldigen met 2 en $\cos 20^\circ$ vervangen door x, dan vinden we $8x^3 - 6x - 1 = 0$. De cosinus van 20 graden is dus een oplossing van deze vergelijking. Je begrijpt misschien wel dat je deze vergelijking niet kan oplossen met alleen vierkantwortels. Om $x^3 = 2$ op te lossen heb je derdemachtswortels nodig: $x = \sqrt[3]{2}$. Voor $8x^3 - 6x - 1 = 0$ geldt hetzelfde, hiervoor bestaat ook een soort *abc*-formule (de formule van Cardano) en daarin verschijnen derdemachtswortels. Dit suggereert dat een punt met $\cos 20^\circ$ als x- of y-coördinaat niet construeerbaar is, en dit is inderdaad het geval. Voor een compleet bewijs hebben we echter geen ruimte. Het heeft trouwens tot in de negentiende eeuw geduurd, voordat een echt bewijs gegeven werd!

De driedeling van een hoek

Een hoek van 60 graden kunnen we construeren. De lijn door $(0,0)$ die een hoek van 20° met de x-as maakt, snijdt de eenheidscirkel in het punt $(\cos 20^\circ, \sin 20^\circ)$. We hebben geprobeerd uit te leggen waarom je met passer en liniaal dit punt *niet* kan construeren. Maar dit betekent dat de hoek van 60° niet met passer en liniaal in drie gelijke hoeken verdeeld kan worden. Immers, zou je de hoek van 60° met passer en liniaal in drieën kunnen delen, dan zou je met passer en liniaal het punt $(\cos 20^\circ, \sin 20^\circ)$ geconstrueerd hebben!



In Bombay vond de afgelopen zomer de Internationale Wiskunde Olympiade plaats. De opgaven daarvan zijn gepubliceerd in het oktobernummer. Dit decembernummer bevat de uitwerkingen van de opgaven 1 en 4, de uitwerkingen van de andere opgaven verschijnen in volgende nummers van Pythagoras.

••• Internationale Wiskunde Olympiade

Jan Donkers & Sander van Rijnswou

Opgave 1

Een rechthoekig bord $ABCD$ met $AB = 20$ en $BC = 12$ is verdeeld in 20×12 eenheidsvierkanten. Op dit bord zijn alleen de volgende zetten toegestaan: men mag van een eenheidsvierkant naar een ander indien de afstand tussen de twee middelpunten van deze vierkanten gelijk is aan $\sqrt{r}$, waarin r een gegeven geheel getal is groter dan nul. Men probeert nu een serie zetten te vinden die, achtereenvolgens uitgevoerd, leidt van het eenheidsvierkant met hoekpunt A naar het eenheidsvierkant met hoekpunt B.

a. Laat zien dat zo'n serie zetten niet bestaat als r deelbaar is door 2 of door 3.

b. Bewijs dat zo'n serie zetten wel bestaat als $r = 73$.

c. Bestaat er zo'n serie zetten als $r = 97$?

Oplossing

We werken op het volgende rooster $A = \{(i,j) \in Z^2 \mid 0 \leq i \leq 19, 0 \leq j \leq 11\}$. De opgave vraagt ons om van het punt $(0,0)$ naar het punt $(19,0)$ te komen via de punten in A zodanig dat elke zet de lengte $\sqrt{r}$ heeft. Dat wil zeggen, voor een zet van de vorm $(x,y) \mapsto (x+a, y+b)$ moet gelden dat $a^2 + b^2 = r$.

a. Als r even is dan geldt voor elke oplossing van $a^2 + b^2 = r$ dat ook $a + b$ even is. Dus voor elk roosterpunt (x,y) dat vanuit $(0,0)$ bereikt kan worden geldt dat $x + y$ even is. Hieruit volgt dat $(19,0)$ niet bereikt kan worden vanuit $(0,0)$.

Als r een veelvoud van 3 is, dan geldt voor elke oplossing van $a^2 + b^2 = r$ dat zowel a als b een veelvoud van r moet zijn. Dit kan je bijvoorbeeld controleren door de verschillende resten die a en b bij deling door 3 kunnen hebben te proberen. Hierdoor moet voor elk roosterpunt (x,y) dat bereikt kan worden vanuit $(0,0)$ gelden dat x en y beide door 3 deelbaar zijn. Omdat 19 niet deelbaar is door 3, is het punt $(19,0)$ niet bereikbaar vanuit $(0,0)$.

b. De volgende route werkt:

$$(0,0) \mapsto (3,8) \mapsto (11,5) \mapsto (19,2) \mapsto (16,10) \mapsto (8,7) \mapsto (0,4) \mapsto (8,1) \mapsto (11,9) \mapsto (3,6) \mapsto (11,3) \mapsto (19,0)$$

c. Als $r = 97$ dan, omdat de enige manier om 97 te schrijven als de som van twee kwadraten $97 = 9^2 + 4^2$ is, moet elke zet een van de vectoren $(\pm 9, \pm 4)$ of $(\pm 4, \pm 9)$ zijn. Verdeel de punten van A op de volgende manier in twee verzamelingen: $B = \{(i,j) \in Z^2 \mid 0 \leq i \leq 19, 4 \leq j \leq 7\}$, $C = A \setminus B$. Je kan nagaan dat elke zet van het type $(\pm 9, \pm 4)$ je altijd van een punt in B naar een punt in C brengt, en andersom. Een zet van het type $(\pm 4, \pm 9)$ gaat altijd

van een punt in C naar een punt in C.
Een zet van het type $(\pm 9, \pm 4)$ verandert een even x-coordinaat naar oneven en andersom. Omdat we van $(0,0)$ naar $(19,0)$ moeten hebben we een oneven aantal van zulk soort zetten nodig. Omdat die zetten ons steeds van B naar C brengen, of juist terug en omdat het start punt in C ligt zullen we eindigen in B. Maar het punt $(19,0)$ ligt in C, niet in B. Hieruit volgt dat de gevraagde reeks zetten niet bestaat.

Opgave 4

De gehele getallen a en b met $a > 0$ en $b > 0$, zijn zodanig dat de getallen $15a + 16b$ en $16a - 15b$ kwadraten zijn van positieve gehele getallen. Bepaal de kleinste waarde die kan worden aangenomen door het minimum van deze twee kwadraten.

Oplossing

Stel $15a + 16b = r^2$ en $16a - 15b = s^2$, waarin r en s positieve gehele getallen zijn. We vinden dan:

$$\begin{aligned} r^4 + s^4 &= (15^2 + 16^2)(a^2 + b^2) \\ &= 481(a^2 + b^2). \end{aligned} \tag{1}$$

Merk op dat $481 = 13 \times 37$. We gaan nu rekenen modulo 13 en modulo 37. Voor degenen die niet weten wat dat betekent, lees eerst het stukje 'Rekenen modulo n'.
Uit (1) volgt dat $r^4 + s^4 \equiv 0 \pmod{13}$. Er geldt nu dat of $r \equiv s \equiv 0 \pmod{13}$ of dat $r \not\equiv 0 \pmod{13}$ èn $s \not\equiv 0 \pmod{13}$. De laatste mogelijkheid kan zich echter niet voordoen omdat -1 niet een vierde macht is modulo 13 (zie 'Rekenen modulo n').
Er geldt dus $r \equiv s \equiv 0 \pmod{13}$ en evenzo $r \equiv s \equiv 0 \pmod{37}$. Dat wil zeggen dat zowel r als s een veelvoud is van 481, dus $r \geq 481$ en $s \geq 481$.
Nu is gemakkelijk na te gaan dat er waarden van a en b te vinden zijn waarvoor $r = s = 481$, namelijk $a = 481 \cdot 31$ en $b = 481$. Het gevraagde antwoord is dus 481^2. ◢

Rekenen modulo n

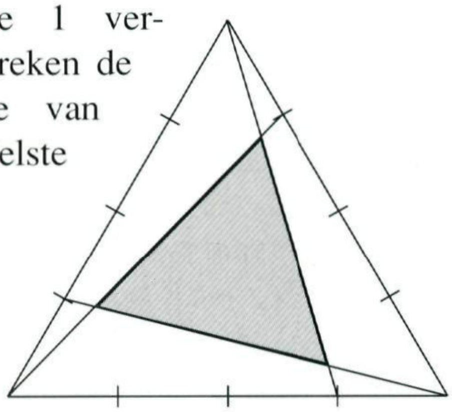
Als twee getallen m en n dezelfde rest hebben bij deling door 13, dan noemen we m en n *congruent modulo* 13. We schrijven: $m \equiv n \pmod{13}$ en zeggen: "n is congruent m modulo 13". Zo is $13 \equiv 0$ en $20 \equiv 7 \pmod{13}$. Een andere manier om te controleren dat m equivalent n modulo 13 is, is dat $m - n$ deelbaar is door 13. Zo is $40 \equiv 27$ en $12 \equiv -1 \pmod{13}$. We kunnen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen modulo 13. Zo is bijvoorbeeld $6 + 9 \equiv 2$, $6 \cdot 9 \equiv 2$ en $5^2 \equiv -1 \pmod{13}$.
Voor opgave 14 hebben we nodig dat $r^4 + s^4 \not\equiv 0$ als $r, s \not\equiv 0 \pmod{13}$. Dit gaan we aantonen door modulo 13 te rekenen. Eerst laten we zien dat er geen getal n bestaat zo dat $n^4 \equiv -1 \pmod{13}$. Hiervoor gebruiken we de zogenaamde 'kleine stelling van Fermat': als p een priemgetal is en $n \not\equiv 0 \pmod{p}$, dan geldt $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Stel er is wèl een getal n waarvoor $n^4 \equiv -1 \pmod{13}$. Dan volgt $n^{12} = (n^4)^3 \equiv (-1)^3 \equiv -1$. Maar dit is in tegenspraak met de kleine stelling van Fermat.
Neem nu aan dat $r^4 + s^4 \equiv 0$ en dat r en s beide $\not\equiv 0 \pmod{13}$. Met de kleine stelling van Fermat kunnen we een getal t vinden zó, dat $s \cdot t \equiv 1 \pmod{13}$ (namelijk $t = s^{11}$). Vermenigvuldigen we nu de laatste vergelijking met t^4, dan krijgen we $(r \cdot t)^4 + (s \cdot t)^4 \equiv 0 \pmod{13}$. Dus $(r \cdot t)^4 \equiv -1$. Maar dat kan niet, zoals we hierboven hebben gezien. Dezelfde redenering kunnen we houden modulo 37.

Problemen

redactie: Dion Gijswijt

1 Wat is de grootste en wat is de kleinste gelijkzijdige driehoek die je in een vierkant kunt construeren? De drie hoekpunten van de driekhoek moeten op ten minste drie zijden van het vierkant liggen.
Bob de Jongste

2 Van een gelijkzijdige driehoek zijn de zijden in vier stukken van lengte 1 verdeeld. Bereken de oppervlakte van de middelste gearceerde driehoek.

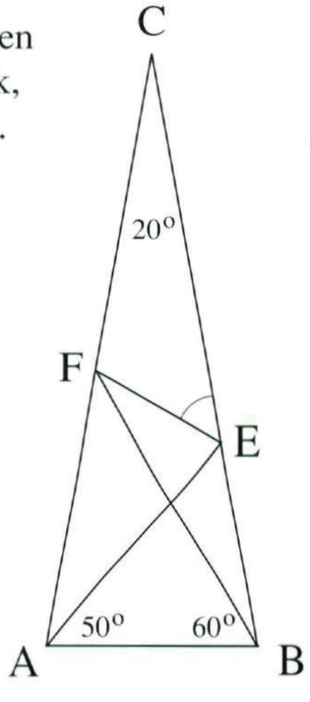


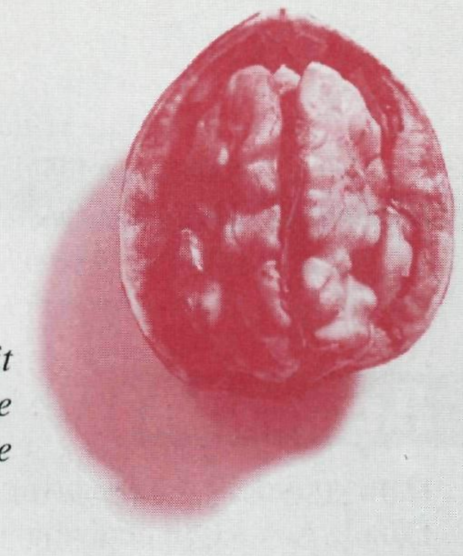
3 De appeltaart Linda heeft samen met haar broertje Bas een appeltaart gebakken. Op aandringen van Bas hebben ze een vreemde taartvorm gebruikt, zodat ze nu een grote ronde taart hebben, met een rond gat precies in het midden. "Wauw," zegt Bas, "het is echt een enorme taart geworden. Ik vraag me af hoe groot hij precies is." Zonder te antwoorden snijdt Linda, precies langs de rand van het gat, een stuk van de taart af en meet de lengte van de snede: "20 centimeter." "En hij is 6 centimeter hoog," zegt Bas triomfantelijk. Bereken hoe groot de taart is in kubieke centimeters.

4 Teken een vierkant en verdeel het in acht kleinere vierkanten.
Pythagoras jaargang 5, nummer 2

5 De spaarpot van Piet Piet spaart voor een tweedehands brommer en hij legt daarvoor iedere gulden die hij verdient opzij. Op een goede dag heeft hij zijn hele bezit op tafel uitgestald en zijn guldens vormen een perfect vierkant. Zijn vader glimlacht en verschuift de guldens. "Kijk," zei hij tegen zijn zoon; "Nu liggen de guldens in een regelmatige zeshoek en er is geen gulden over!" Kun je berekenen hoeveel guldens Piet bezit? En kun je ook berekenen hoe rijk Piet zou zijn als hij een nog groter vierkant=zeshoek kon construeren?
Bob de Jongste

6 De driehoek ABC is een gelijkbenige driehoek, met de tophoek $20°$. Punt F ligt op zijde AC en punt E op zijde BC. De hoek ABF is $60°$ en hoek BAE is $50°$. Bereken hoek CEF.





Oplossingen nr. 1

Dion Gijswijt

Op deze pagina worden de oplossingen van problemen uit het vorige nummer van Pythagoras besproken. Een volledige bespreking van alle vragen en problemen is te vinden op de homepage.

p 7, De oplichter

Het verdiende geld is afkomstig van de waardestijging van de 10 sets juwelen.

p 13, Dertig jaar geleden

In plaats van 13^1, 13^2, $13^3, \ldots$ helemaal te berekenen, berekenen we alleen de laatste twee cijfers: $13, 69, 76, \ldots$ Dan blijkt 13^{20} op 01 te eindigen, 13^{21} op 13 en 13^{40} weer op 01, enz. Dus eindigt 13^{1960} ook op 01 en eindigt 13^{1966} op dezelfde twee cijfers als 13^6, namelijk op 09.

p 17, Leg uit

Noem het aantal eieren dat een zwarte kip in één dag legt z, het aantal dat een witte kip legt w. Gegeven is dat $5(4z+3w)=4(3z+5w)$ of $20z+15w=12z+20w$, dus $8z=5w$. Hieruit volgt $z<w$. De witte kip legt per dag dus meer eieren.

p 17, Het waterreservoir

Er stroomt ℓ liter water per uur het reservoir in en u liter water per uur uit één pijp. De gegevens zeggen dat $2{,}5(10u-\ell)=M$ en $5{,}5(6u-\ell)=M$. Uit deze twee vergelijkingen volgt: $(25-33)u+3\ell=0$ of $\ell=8/3u$. Invullen geeft $M=55/3u$.

Stel dat het t uur duurt voordat het reservoir leeg is als slechts 3 pijpen worden opengezet. Dan geldt $t(3u-\ell)=M$ en dus $1/3ut=55/3u$, met als oplossing $t=55$.

p 25, De som van een aantal opeenvolgende getallen is 1000

Stel dat $n+(n+1)+\cdots+(n+k)=1000$. De som aan de linkerkant is gelijk aan $\frac{1}{2}(2n+k)(k+1)$. We moeten dus oplossen $(2n+k)(k+1)=2000=2^4\cdot5^3$.

Als k even is, dan is $(2n+k)$ even en $(k+1)$ oneven. Er zijn drie mogelijkheden: (a) $k+1=5^3$ en $2n+k=2^4$, dit geeft $n=-54$; (b) $k+1=5^2$ en $2n+k=5\cdot2^4$, dit geeft $n=28$; (c) $k+1=5$ en $2n+k=25\cdot2^4$, dit geeft $n=198$. Dit geeft twee oplossingen met k even: $28+29+\cdots+52=1000$ en $198+199+200+201+202=1000$. Als k oneven is, vinden we op dezelfde manier de derde oplossing: $55+56+\cdots+70=1000$.

p 27, Ridders en schurken

De vraag die je stelt is: "Ben je ziek?" Een zieke Schurk spreekt de waarheid en antwoordt "Ja". Een gezonde Schurk zal liegen en antwoordt eveneens "Ja'. Zowel een zieke als een gezonde Ridder antwoordt: "Nee". Als het antwoord bevestigend luidt, heb je daarom te maken met een Schurk, anders met een Ridder.

In Nederland wordt een scala van wiskundige activiteiten georganiseerd voor middelbare scholieren onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde. Hieronder valt bijvoorbeeld het tijdschrift Pythagoras en de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Ook de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren organiseert diverse activiteiten. Hieronder volgt een overzicht.

Agenda

Data voor deze agenda aanmelden bij het redactieadres.
Email: A.A.J.Lefeber@math.utwente.nl

za 4 januari '97
Wintersymposium Wiskundig Genootschap (076)5273267
Johan van Oldenbarnevelt Gymnasium (076)5419757
Amersfoort

ma 21 - za 25 januari
Nationale Onderwijs Tentoonstelling '97
Jaarbeurs Utrecht

vr/za 31 jan/1 feb. '97
Nationale Wiskunde Dagen NVvW (030)2611611

ma 3 maart '97
Lezingenserie Hogeschool van Utrecht (030)2547230
Prof. dr. F. Verhulst: Denken en rekenen over oceanen en atmosferen

vr 14, 15 maart '97
Finale Wiskunde A-lympiade

vr 21 maart '97
Kangoeroe-wedstrijd (040)2472738

vr 11 april '97
Eerste ronde Wiskunde Olympiade (026)3521294

zomer '97
VIERKANT Wiskunde kampen (020)4447776

vr 19 september '97
Tweede ronde Wiskunde Olympiade

Over de medewerkers

prof. dr. H. W. Broer is hoogleraar dynamische systemen aan de RUG

prof. dr. J. van de Craats is hoogleraar wiskunde aan de UvA en de Open Universiteit

drs J. G. M. Donkers is docent didactiek van de wiskunde aan de TUE

dr. L. J. van Gastel is werkzaam bij het Expertisecentrum Computer Algebra Nederland

D. C. Gijswijt is student wiskunde aan de UvA

dr. K. P. Hart is docent topologie aan de TU Delft

H. Haverkorn is leraar wiskunde aan het Mozaïekcollege te Arnhem

drs. A. Heck is werkzaam bij het Expertisecentrum Computer Algebra Nederland

B. de Jongste is recreatief wiskundige te Den Haag

dr. ir. T. Koetsier is docent geschiedenis van de wiskunde aan de VU

prof. dr. H. A. Lauwerier is emeritus hoogleraar toegepaste wiskunde aan de UvA

ir. A. A. J. Lefeber is AIO systeem- en besturingstheorie aan de TU Twente

R. van Luijk is student wiskunde aan de UU

W. R. Oudshoorn is student wiskunde aan de UvA

ir. S. M. van Rijnswou is OIO computeralgebra aan de TUE

drs. J. Roskam is OIO algebraische getaltheorie aan de UvA

ir. P. G. Sinia is leraar wiskunde aan het Neder-Veluwe College te Ede

prof. dr. F. Takens is hoogleraar dynamische systemen aan de RUG

prof. dr. ir. H. Tennekes is hoogleraar meteorologie aan de VU

prof. dr. H. C. Tijms is hoogleraar Operationele Research aan de VU

drs. C. G. Zaal is OIO algebraïsche meetkunde aan de UvA

Pythagoras

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde en richt zich tot leerlingen van de bovenbouw van VWO en HAVO. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

Abonnementen

Abonnees kunnen zich aanmelden op één van de volgende manieren.
Telefonisch: (070) 314 35 00, per fax: (070) 314 35 88
of schriftelijk (een postzegel is niet nodig):
NIAM b.v.
Antwoordnummer 97007
2509 VH Den Haag

Tarieven '96-'97

Een jaarabonnement op Pythagoras kost fl. 37,50
Losse nummers fl. 8,– of BF 160
Overige prijzen (per jaar):
Pythagoras Belgie BF 950
Pythagoras buitenland fl. 52,50
Pythagoras/Archimedes fl. 67,50
Pythagoras/Archimedes Belgie BF 1570
Pythagoras/Archimedes buitenland fl. 83,50

Reductietarief

Een ieder die meerdere abonnees aanmeldt op 1 adres, ontvangt per 5 abonnementen een gratis jaarabonnement op Pythagoras.

Betaling

Wacht met betalen tot u een acceptgirokaart krijgt thuisgestuurd. Bij tussentijdse abonnering ontvangt u alle nummers van de lopende jaargang. Abonnementen zijn doorlopend, tenzij vóór 1 juli schriftelijk bij de uitgever is opgezegd.

Uitgever

NIAM b.v.
Neuhuyskade 94
2596 XM Den Haag
Telefoon (070) 314 35 00
Fax (070) 314 35 88
Gironummer 5513796
Bankrekening Belgie: ING Bank Brussel
reknr. 627-7064242-48 t.n.v. TMS