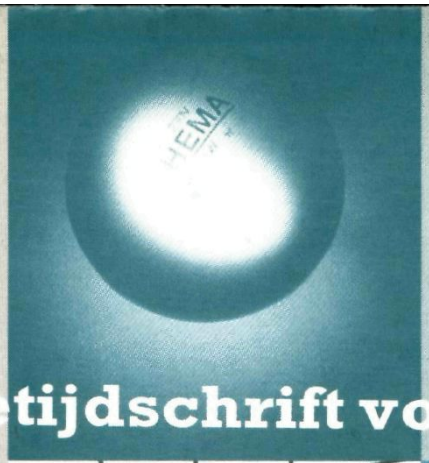
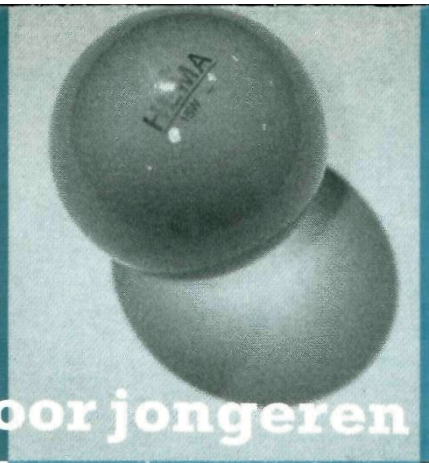
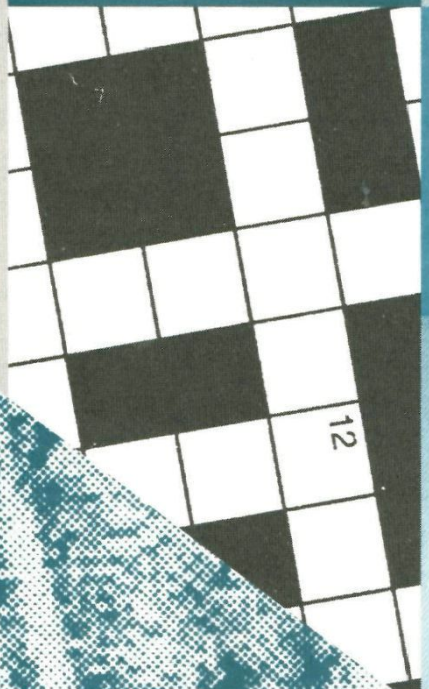
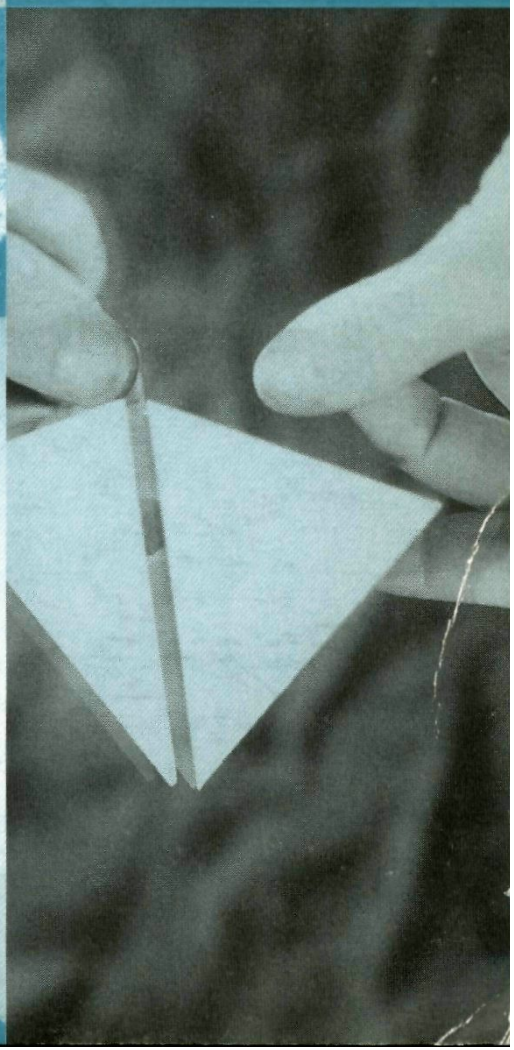




wiskundetijdschrift voor jongeren pythagoras





37ste jaargang **nr. 1** oktober 1997

COLOFON

uitgave
Pythagoras is een uitgave van het NIAM
en verschijnt zes keer per jaar.
Een jaargang loopt van september tot en
met augustus.
ISSN: 0033-4766

redactieadres
Erjen Lefeber
Faculteit der toegepaste wiskunde
Universiteit Twente
Postbus 217
7500 AE Enschede

email
pythagoras@wins.uva.nl

WWW
www.wins.uva.nl/misc/pythagoras

redactie
Klaas Pieter Hart
Erjen Lefeber
René Swarttouw
Chris Zaal

eindredactie
Chris Zaal

grafisch ontwerp
Joke Mestdagh, Amsterdam
Kitty Molenaar, Amsterdam

zet- en drukwerk
Koninklijke van de Garde, Zaltbommel

Inhoud

1 **Redactioneel**

2 - 3 **Kleine nootjes**

Varia Historica
4 **Hypatia**

Priemgetallen
5 t/m 8 **Priemfactorisatie**

Wiskundige notaties
9 **Het = teken**

10 - 11 **De Internationale Wiskunde Olympiade**

Wiskunde en Internet
12 t/m 14 **Data Encryption Standard gekraakt**

15 t/m 17 **Fraktegels**

18 - 19 **Het spiegelingsprincipe**

20 t/m 22 **Pythagoras Olympiade**

Priemgetallen met de computer
23 t/m 26 **De zeef van Eratosthenes**

27 **De post**

28 **Problemen**

29 **Oplossingen nr. 6**

30 **Agenda**

32 **Oplossingen en kleine nootjes**

Redactioneel

In het schooljaar 1997-1998 staat het thema Priemgetallen centraal. In vijf artikelen zal in Pythagoras aandacht geschonken worden aan priemgetallen en hun toepassingen. Bij dit thema hoort een poster (zie p. 24), die ook los te bestellen is. Met ingang van dit schooljaar worden de schoolabonnementen weer in ere hersteld. Mits besteld via de leraar, kost één jaar Pythagoras voor leerlingen in het voortgezet onderwijs maar f 25,-.
Voor nieuwe lezers is het volgende van belang: Pythagoras is een blad voor jongeren met belangstelling voor wiskunde. Dat betekent niet dat het alleen bestemd is voor leerlingen met een wiskundeknobbel. Door zoveel mogelijk variatie in de onderwerpen aan te brengen hoopt de redactie een zo breed mogelijk publiek te boeien. Maar niet alle artikelen zijn even gemakkelijk. Om het de lezers gemakkelijker te maken, staan bij artikelen in Pythagoras rondjes die de moeilijkheidsgraad aangeven. Bij een artikel staan nul, één, twee of drie rondjes:
Géén °'s betekent: geen enkele wiskundige voorkennis vereist, voor iedereen te begrijpen;
één rondje ° betekent: voor iedereen vanaf de derde klas te begrijpen;
twee rondjes °°: hiervoor heb je wiskunde uit de vijfde en zesde klas nodig;
drie rondjes °°°: dit gaat net iets verder dan de middelbare-schoolstof.

Lezersprijsvraag

Het nieuwe schooljaar beginnen we met een lezersprijsvraag. De deelname aan deze prijsvraag staat open voor iedereen, maar voor leerlingen in het voortgezet onderwijs zijn er prijzen: 100,- voor de beste individuele inzender, 100,- voor de beste klas en 100,- voor de beste school.

VIER VIEREN. Gevraagd wordt om met vier vieren zoveel mogelijk van de getallen 1, 2, 3, tot en met 100 te maken. Een paar voorbeelden:

$$1 = \frac{44}{44} \qquad 2 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4}$$

$$3 = \frac{4+4+4}{4} \qquad 4 = 4 + \frac{4-4}{4}$$

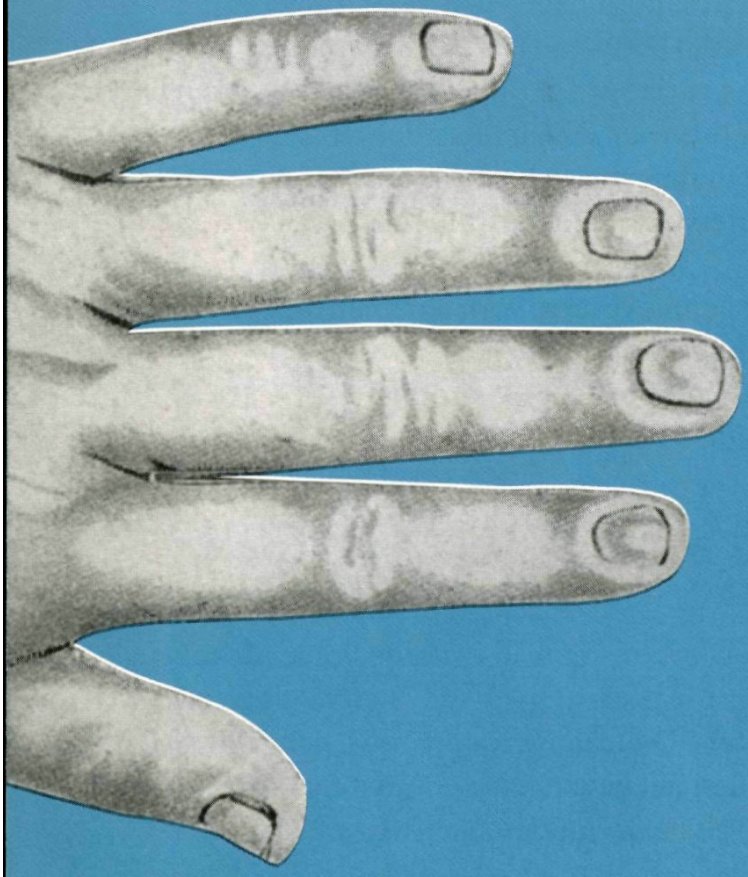
Alleen het gebruik van de volgende tekens is toegestaan: $+$, $-$, $\times$, $:$ en machtsverheffen. Daarnaast mogen ook gebruikt worden het wortelteken $\sqrt{}$, het faculteitsteken ! en de decimale schrijfwijze,4 voor $\frac{4}{10}$.

Inzenden is mogelijk tot 21 december 1997. Vermeld bij de oplossingen ook school en klas. Oplossingen kunnen naar onderstaand redactieadres gestuurd worden:

Erjen Lefeber
Faculteit der toegepaste wiskunde
Universiteit Twente
Postbus 217
7500 AE Enschede

Kleine nootjes zijn eenvoudige vraagstukken die door iedereen 'gekraakt' kunnen worden, zonder enige wiskundige voorkennis. De oplossingen staan op p. 32 van dit nummer.

Kleine nootjes



Persconferentie

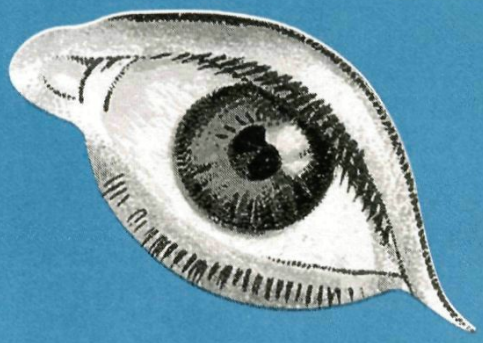
Alvorens in hun ruimtevaartschip te stappen, presenteert de vierkoppige bemanning van de Russisch-Amerikaanse Marsvlucht zich voor de verzamelde internationale pers. De astronauten hebben aan boord vier verschillende functie's: piloot, technicus, wetenschapper en radio-operator. Ze zijn goed gehumeurd en maken tegenover de journalisten de volgende opmerkingen:

Ken zegt: "Ik ben niet de piloot."
Yuri zegt: "Ik ben niet de technicus."
Ilja zegt: "Ik ben niet de wetenschapper."
John zegt: "Ik ben niet de radio-operator."
Ken zegt: "Ik ben niet de technicus."

Even later geven ze toe dat slechts één van deze opmerkingen waar was. Kun jij bedenken welke astronaut welke functie heeft?

Chocolade breken

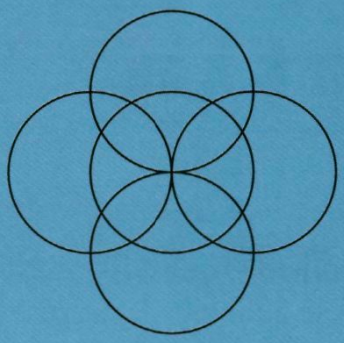
In een Tax Free Shop zijn chocoladerepen verpakt in doosjes van 7 of 12. Je kunt daarom bijvoorbeeld 26 repen chocolade kopen zonder een doos open te hoeven maken: koop één doos van 12 en twee van 7. Maar hoe je het ook probeert, je kunt geen 27 repen kopen zonder een verpakking te moeten verbreken. Wat is het grootste aantal repen dat niet gekocht kan worden zonder een verpakking open te moeten breken?

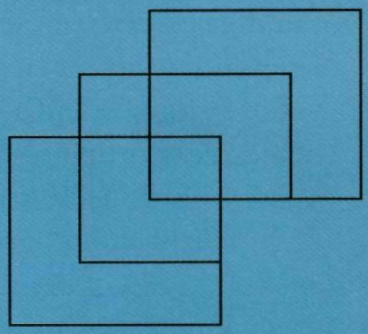


Middeleeuwen

Tijdens een zeer bloedige middeleeuwse veldslag verliest 85% van de strijders een oog, 80% verliest een arm, 75% verliest een oor en 70% verliest een been. Wat is ten minste het percentage vechters dat zowel een oog, een oor, een arm als een been verliest?

Lewis Carroll



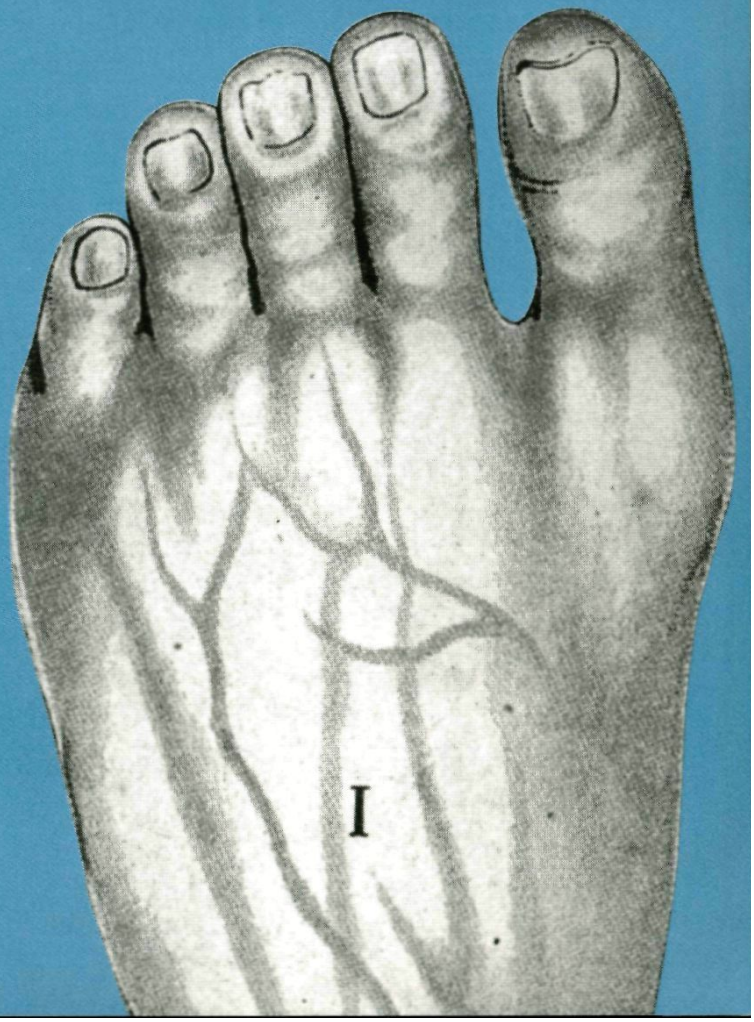


Overtrekken

Kun je bovenstaande figuren met een pen overtrekken zonder een lijn twee keer te tekenen? Je mag je pen niet van het papier optillen. Je hoeft niet persé te eindigen in het punt waar je begonnen bent.

Zagen

Het kost 36 seconden om een boomstam met een kettingzaag in vier stukken te zagen. Hoeveel tijd kost het om een identieke boomstam in vijf stukken te zagen?



Broers en zussen

Een meisje heeft evenveel zussen als broers. Elke broer heeft twee keer zoveel zussen als broers. Hoeveel broers en zusters zijn er in deze familie?

Hypatia

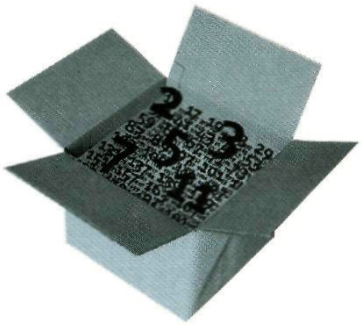
Jan Hogendijk

Hypatia is de bekendste vrouwelijke wiskundige uit de Griekse oudheid. Zij werd in het midden van de vierde eeuw na Christus geboren in Alexandrië, in het noorden van het tegenwoordige Egypte. Alexandrië was al in de derde eeuw voor Christus een centrum van wetenschap, toen de beroemde wiskundige Euclides er werkte. Het peil van de wiskunde was in de tijd van Hypatia wel gedaald, maar er waren nog wel goede bibliotheken.

Hoewel Hypatia aanbidders heeft gehad, is zij nooit getrouwd. Zij heeft de neergang van Alexandrië als centrum van wetenschap meegemaakt. In die tijd was ongeveer de helft van de bewoners van Alexandrië Christen en de rest van de bevolking had een ander geloof. In de rellen die hierdoor ontstonden brandde de laatste grote bibliotheek in 392 af. Hypatia was in Alexandrië een bekend vertegenwoordigster van de Platoonse (heidense) filosofie, en wegens deze 'misdaad' werd zij in 415 door een Christelijke menigte aangevallen, uitgekleed, in stukken gehakt en verbrand.

Hypatia's vader Theon was ook een wiskundige, en van hem kennen we een commentaar op de Almagest van Ptolemaeus, een groot sterrenkundig boekwerk uit circa 150 na Christus (sterrenkunde was onderdeel van de wiskunde). Van Hypatia zelf zijn geen geschriften bekend, maar wel weten we dat ze les gaf uit diverse leerboeken en die ook verbeterde. Die leerboeken waren onder anderen de Elementen van de al genoemde Euclides, over lijnen, cirkels, driehoeken, verhoudingen, en regelmatige veelvlakken; de werken van Archimedes (2e eeuw voor Christus) over oppervlakte en inhoud van de bol en cylinder; de Kegelsneden van Apollonius (2e eeuw voor Christus) over parabolen, hyperbolen en ellipsen; en de Arithmetica van Diophantus (3e eeuw na Christus) over vergelijkingen in rationale getallen.

Hypatia gaf beter les dan haar vader, niet alleen in wiskunde maar ook in de filosofie van Plato. Volgens die filosofie is de zichtbare wereld een onvolmaakte afspiegeling van een onstoffelijke wereld van eeuwige ideeën, en de filosoof of filosofe houdt zich daarmee bezig. Hij of zij kan als vooroefening wiskunde gebruiken, omdat die ook over onstoffelijke en eeuwige dingen gaat. De menselijke ziel is onsterfelijk, en verkeerde voor de geboorte in de wereld van de ideeën; daarom is wiskunde leren alleen het je herinneren van iets wat je eigenlijk al weet van voor je geboorte. De taak van de wiskundeleraar of -lerares is om dit herinneringsproces te begeleiden, en Hypatia had daarin blijkbaar veel succes. ◢



Dit is het eerste artikel in een serie van vijf over 'Priemgetallen'. Het laat zien dat de priemgetallen de 'elementaire deeltjes' van de getaltheorie zijn: ieder getal is te ontbinden in priemgetallen.

Priemfactorisatie°

Peter Stevenhagen

Iedereen die wel eens met gehele getallen gespeeld heeft weet dat je deze kunt *ontbinden in priemfactoren*. Neem bijvoorbeeld 180. Dit getal is deelbaar door 10, we hebben $180 = 10 \cdot 18$. De factoren 10 en 18 hebben zelf ook weer factoren: $10 = 2 \cdot 5$ en $18 = 2 \cdot 9$. De getallen 2 en 5 kunnen niet verder ontbonden worden: ze hebben alleen 1 en zichzelf als delers. De factor 9 kunnen we nog als $9 = 3 \cdot 3$ schrijven, en 3 is net als 2 en 5 niet verder ontbindbaar. We vinden dat 180 uit twee factoren 2, twee factoren 3 en één factor 5 bestaat. We noteren de verkregen *priemfactorisatie* als

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Niet verder ontbindbare getallen als 2, 3 en 5 heten *priemgetallen*. Met de boven aangegeven methode van het zoeken van delers kun je ieder getal groter dan 1 als product van priemgetallen schrijven:

$$10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7,$$
$$10001 = 73 \cdot 137,$$
$$4294967297 = 641 \cdot 6700417.$$

Het leuke van de gevonden factorisatie is dat hij *uniek* is, en dus niet afhangt van de gevolgde methode. Als we 180 ontbinden door eerst $180 = 12 \cdot 15$ te schrijven en vervolgens $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ en $15 = 3 \cdot 5$ schrijven, dan komen we op precies dezelfde ontbinding uit! Dit feit staat bekend als de *stelling van de eenduidige priemfactorontbinding*. De eenduidigheid van een ontbinding klinkt als iets wat nogal voor de hand ligt. Er zijn echter getalsystemen waarin ontbindingen *niet* uniek zijn (zie inzet op p. 6).

Om te bewijzen dat de 'gewone' priemfactorontbinding uniek is moet je eerst laten zien dat priemgetallen de volgende eigenschap hebben.

PRIEMEIGENSCHAP. Als een product van twee (of meer) getallen deelbaar is door een priemgetal p, dan is minstens één van die getallen deelbaar door p.

Voorbeeld: $51 \cdot 91 = 4641$ is deelbaar door de priemgetallen 13 en 17. Inderdaad is de factor 51 deelbaar door 17, en de factor 91 door 13. Daarentegen is het getal $4 \cdot 9 = 36$ deelbaar door 6, maar de factoren 4 en 9 zijn dat niet. De priemeigenschap geldt dus niet voor het getal 6.
Er is enig werk nodig om te *bewijzen* dat priemgetallen de priemeigenschap hebben, en we stellen dit uit tot ons tweede artikel. De lezer moet tot die tijd maar geloven dat, bijvoorbeeld, een groot getal als 3^{1000} niet stiekem deelbaar kan zijn door 7 of 13.

Oneindig veel priemgetallen

Wie een paar getallen factoriseert komt al snel een boel priemgetallen tegen. De vier kleinste zijn 2, 3, 5 en 7. Merk op dat we het getal 1, dat de bijzondere eigenschap heeft dat het *alle* getallen deelt, niet tot de priemgetallen rekenen. We kunnen immers niet praten over het 'aantal factoren 1' in een getal. Omdat we vandaag alleen naar *positieve* getallen kijken blijft het getal 0 ook buiten beschouwing.

OPGAVE. Wat zou je met het getal 0 kunnen doen? Welke getallen zijn deelbaar door 0? Wat zijn de delers van 0? Heeft 0 een priemfactorontbinding?

De *zeef van Eratosthenes* (p. 23) is een methode om alle priemgetallen tot een bepaalde grens te vinden. Van de getallen onder de honderd zijn er 25 priem:

	2	3	5	7
11		13		17	19
		23			29
31				37	
41		43		47	
		53			59
61				67	
71		73			79
		83			89
				97	

Een voor de hand liggende vraag is of er oneindig veel verschillende priemgetallen zijn. Het antwoord op die vraag is 'ja', en Euclides geeft er al in 300 voor Christus een slim argument voor. Hij laat zien hoe je, uitgaande van een willekeurig lijstje van priemgetallen, een priemgetal kunt maken dat nog niet in je lijstje staat. Een eindige verzameling van priemgetallen is daarom nooit compleet.

Een raar voorbeeld

Als we twee getallen nemen die op een 1 eindigen, dan eindigt hun product ook weer op een 1. Bijvoorbeeld: $11 \cdot 21 = 231$ en $51 \cdot 91 = 4641$. Omgekeerd kunnen we alle getallen die op een 1 eindigen proberen te ontbinden in factoren die ook weer op een 1 eindigen. Voor 231 krijgen we zo de ontbinding $231 = 11 \cdot 21$, en 11 en 21 zijn niet verder te ontbinden in factoren die op een 1 eindigen. De getallen 51, 91 en 221 zijn ook niet op zo'n manier te ontbinden. Het getal 4641 heeft daarom *twee* verschillende ontbindingen $51 \cdot 91$ en $21 \cdot 221$ in 'priemfactoren'. Ontbinding in getallen eindigend op 1 is dus *niet* uniek.

Het argument is heel eenvoudig. Stel dat we een eindig lijstje van priemgetallen hebben. Maak nu een groot getal N door al deze priemgetallen met elkaar te vermenigvuldigen en er vervolgens 1 bij op te tellen. Het getal N geeft rest 1 als we het delen door een priemgetal uit onze lijst, dus het is door geen enkel van deze priemgetallen deelbaar. Kijk nu naar de *kleinste* deler $p > 1$ van N. Omdat alle delers van p ook N delen heeft p zelf geen delers die tussen 1 en p inliggen. We concluderen dat p een priemdeler is van N, en dat geeft een priemgetal p buiten onze lijst.

EEN VOORBEELD. Wanneer we beginnen met een lijstje dat alleen het priemgetal 2 bevat, dan geeft Euclides' argument $2 + 1 = 3$, en dat is zelf een priemgetal. Passen we het argument nogmaals toe op de lijst die nu 2 en 3

bevat, dan krijgen we $2 \cdot 3 + 1 = 7$, weer een priemgetal. We kunnen zo doorgaan:

$2 \cdot 3 \cdot 7 + 1 = 43$ (priem)
$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 + 1 = 13 \cdot 139$
$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 \cdot 13 + 1 = 5 \cdot 248867$
$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 \cdot 13 \cdot 5 + 1 = 6221671$ (priem)
$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 6221671 + 1 =$
38709183810571 (priem).

Je ziet dat de getallen al snel erg groot worden, waardoor het moeilijk wordt priemgetallen te herkennen. De priemgetallen die we vinden zijn nu eens groot, dan weer klein. Het is niet bekend of we op deze manier uiteindelijk alle priemgetallen tegenkomen.

Meer vragen dan antwoorden

Met een computer is het makkelijk lijstjes van priemgetallen te maken die veel langer zijn dan ons kleine lijstje. Al heel lang hebben mensen gekeken naar allerlei echte of vermeende regelmatigheden in de lijst van priemgetallen. In veel opzichten zijn priemgetallen nog even mysterieus als in de tijd van Euler.

Een vraag die al uit ons kleine lijstje naar voren komt betreft de eindcijfers van de priemgetallen. Het is direct duidelijk dat, met uitzondering van 2 en 5, alle priemgetallen eindigen op 1, 3, 7 of 9. Wie naar lijstjes van de priemgetallen tot aan een vaste grens kijkt, ziet dat deze 4 mogelijke eindcijfers bij benadering even vaak voorkomen. In het bijzonder zullen ze alle vier oneindig vaak voorkomen. Pas in 1837 bewees de Duitser Dirichlet dat dit daadwerkelijk het geval is. Zijn bewijs, dat verrassenderwijs van *complexe* getallen gebruik maakt, is in essentie nog steeds het enige bewijs van deze stelling. Met dezelfde methode kan men laten zien dat er oneindig veel priemgetallen zijn die bijvoorbeeld eindigen op 123456789.

"Wiskundigen hebben tot op de dag van vandaag vergeefs geprobeerd enige orde te ontdekken in de priemgetallen, en we hebben redenen te geloven dat de menselijke geest nooit in dit mysterie zal kunnen doordringen."
Leonard Euler (1707–1783)

De delers van een getal

Uit de ontbinding van een getal kunnen we niet alleen de priemdelers van dat getal aflezen, maar in feite *alle* delers. Het getal 180 heeft maar liefst 18 delers, namelijk

1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15,
18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180.

Je kunt deze delers vinden door de getallen $1, 2, 3, \ldots, 180$ allemaal te proberen. Het is veel handiger om de priemfactorisatie

Priemtweelingen

Er zijn priemgetallen p waarvoor $p + 2$ ook priem is. Ons korte lijstje bevat al acht voorbeelden van dergelijke *priemgetaltweelingen*, zoals (5, 7) en (71, 73). Een groter voorbeeld is (1997, 1999). Er zijn voorbeelden bekend met getallen van meer dan tienduizend cijfers, maar niemand heeft tot nu toe kunnen bewijzen dat er oneindig veel priemtweelingen bestaan.

Fermatgetallen

Fermat ontdekte in de zeventiende eeuw dat de volgende getallen priem zijn:

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3,$$
$$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5,$$
$$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17,$$
$$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257,$$
$$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537.$$

Hij beweerde vervolgens dat $F_n = 2^{2^n} + 1$ voor *alle* waarden van n priem is. Euler vond een eeuw later (zonder computer!) dat $F_5 = 4294967297$ deelbaar is door 641. Het is onbekend of er *Fermatpriemen* F_n met $n > 4$ bestaan. Voor $n = 5, 6, 7, \ldots, 23$ weet men nu dat F_n niet priem is. Van het getal F_{24}, dat 5050446 cijfers heeft, is niet bekend of het priem is.

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ te gebruiken. Een getal deelt namelijk $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ als het alleen factoren 2, 3 en 5 bevat, en er bovendien niet meer dan twee factoren 2, twee factoren 3 en één factor 5 in voorkomen. Ga maar na welke mogelijkheden dat geeft, en welke delers van 180 daar bij horen.

OPGAVE. Laat zien dat het getal $10! = 3628800$ precies 270 delers heeft.

De ggd

De afkorting 'ggd' staat voor 'grootste gemene deler', waarbij 'gemeen' in de nu verouderde betekenis van 'gemeenschappelijk' gebruikt is. De ggd van twee getallen is het grootste getal dat allebei de getallen deelt.

Om de ggd van 180 en 225 te bepalen kunnen we de lijst van delers van 225 vergelijken met die van 180. We zien dan dat 45 het grootste getal is dat zowel 180 als 225 deelt. Als we de priemfactorontbinding 225 gebruiken is het echter helemaal niet nodig om alle delers echt op te schrijven. We hebben $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ en $225 = 3^2 \cdot 5^2$, en dus hebben we

$$\text{ggd}(180, 225) = 3^2 \cdot 5 = 45.$$

Immers, het aantal keren dat een priemgetal in de factorisatie van de ggd optreedt is het *minimum* van het aantal keren dat dat priemgetal in de beide getallen optreedt. Begrijp je waarom?

OPGAVE. Wat is de ggd van 10! en 180? En wat is de ggd van 1000000 en 1000100?

Cryptografie

In principe kan ieder getal ontbonden worden. Maar dat betekent niet dat het in de praktijk altijd makkelijk is om dat te doen, zelfs niet als we een snelle computer hebben. In de twee laatste artikelen van de priemgetallen-serie zullen we het *RSA-cryptosysteem* behandelen, een geheimschrift-code. De veiligheid hiervan is erop gebaseerd dat het ontbinden van getallen van zo'n 200 cijfers in de praktijk vaak ondoenlijk is. ◢

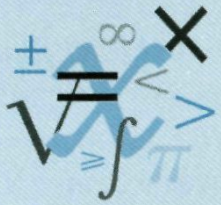
VOOR MEER INFORMATIE

1. Conway & Guy, The Book of Numbers
2. http://www.utm.edu/research/primes/

"Oorlog, dat is toch het mooiste woord dat er is ? Alleen, het rijmt nergens op. Een soort priemgetal."

Gerard Reve, Bezorgde ouders

Goede notaties helpen wiskunde eenvoudiger te maken.
Dit is het eerste stukje in een serie over wiskundige notaties die nu gemeengoed zijn, maar die vroeger helemaal niet zo vanzelfsprekend waren.



Het = teken

Klaas Pieter Hart

Vroeger was er geen apart teken voor gelijkheid. Als je wou opschrijven dat iets gelijk was aan iets anders, dan moest je dit helemaal in woorden uitschrijven. Pas na de Middeleeuwen probeerde men de drie woorden 'is gelijk aan' te vervangen door één begrijpelijk teken.

In een uitgave van de *Arithmetica* van Diophantus uit 1571 gebruikte Wilhelm Holzmann twee verticale streepjes. In plaats van $a^2 + b^2 = c^2$ schreef hij $aa + bb \parallel cc$. Historici denken dat deze twee streepjes een overblijfsel zijn van twee iota's $\iota\iota$, de eerste en laatste letters van het Griekse *ίσοι*, dat gelijk betekent. De Fransman Hérigone had een andere oplossing: hij gebruikte 2|3 voor 'kleiner dan', 3|2 voor 'groter dan' en 2|2 voor 'is gelijk'. De vergelijking $a^2 + b^2 = c^2$ kwam er bij hem zo uit te zien: $a2 + b2\ 2|2\ c2$.
Descartes gebruikte in zijn *Géométrie* voor gelijkheid het teken $\propto$. Het =-teken bestond toen ook al, zelfs Descartes gebruikte het in sommige van zijn brieven. Descartes heeft een tijd in Nederland gewoond en dankzij Van Schooten's vertaling van de *Géométrie* werd $\propto$ in Nederland veel gebruikt. Bijvoorbeeld door Christiaan Huygens.

De bedenker van het =-teken als teken voor 'is gelijk aan' is Robert Recorde (zie afbeelding). In zijn boek *The Whetstone of Witte* uit 1557 worden voor het eerst de bekende twee horizontale streepjes gebruikt om gelijkheid aan te geven:

"And to avoid the tediouse repetition of these woordes : is equal to : I will sette as I doe often in woorke use, a paire of parall-leles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: ═══, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle."

Het =-teken is dus het perfecte symbool voor gelijkheid omdat "geen twee dingen meer aan elkaar gelijk kunnen zijn dan twee even lange parallelle lijnstukjes". Rond 1700 gingen steeds meer wiskundigen het =-teken gebruiken, waarschijnlijk omdat het toch gemakkelijker was. De 'overwinning' was volledig toen ook Leibniz en Newton = gingen gebruiken. ◢

In Mar del Plata, Argentinië werd van 18 juli tot en met 31 juli 1997 de 38e Internationale Wiskunde Olympiade georganiseerd. Dit jaar namen 460 scholieren uit 82 landen aan de Olympiade deel. Nederland en België waren beiden vertegenwoordigd met een team van 6 deelnemers.

de Internationale Wiskunde Olympiade°°°

Op twee opvolgende dagen kregen de deelnemers telkens $4\frac{1}{2}$ uur de tijd om drie opgaven op te lossen. Voor elke opgave waren maximaal 7 punten te verdienen. Deelnemers met een puntenaantal van 36–42 kregen een gouden medaille, 25–35 punten leverde zilver op, en 16–24 punten brons. Er waren vier deelnemers die de volle score van 42 punten wisten te behalen!

De Nederlandse ploeg bestond uit Niels Besseling, Johan Bosman, Fokko van de Bult, Jerk Doekes, Sander van Noorten Lian Ien Oei. De ploeg werd begeleid door Jan Donkers en Sander van Rijnswou van de TU Eindhoven. Het verblijf in Argentinië was zeer prettig. Hoewel het daar winter was, waren er toch zomerse temperaturen en de deelnemende teams hebben veel kunnen zien van Buenos Aires, Mar del Plata en omgeving. De Nederlandse ploeg viel ook in de prijzen: Johan en Fokko behaalden een zilveren medaille, Lian Ien en Sander kregen beide een eervolle vermelding. Dit is voor Nederland een heel goed resultaat. De Belgische ploeg bestond uit Michel Baes, Ivo De Decker (brons), Harald Devos, Stijn Symens, Eric Vandenbussche (brons) en Laurent Waxweiler (brons).

Het landenklassement werd aangevoerd door China met een puntentotaal van 223 (het maximum was $6 \times 42 = 252$). Nederland eindigde op de 38ste plaats met 94 punten. België behaalde er 88. Meer informatie over de Olympiade kun je vinden op www.win.tue.nl/ioi/imo/.

Hieronder volgen de opgaven. Nederland kreeg voor opgave 4 maar liefst 28 punten, maar gemiddeld over alle landen werd opgave 2 het best gemaakt. Opgave 6 is verreweg de moeilijkste. De oplossingen kun je vinden op de homepage van Pythagoras; ze worden niet zoals vorig jaar in volgende nummers afgedrukt. Heb je geen Internet, stuur dan even een briefje naar de redactie, dan krijg je de antwoorden thuisgestuurd.

1 In het vlak zijn de punten met gehele coördinaten de hoekpunten van eenheidsvierkanten. De vierkanten zijn afwisselend zwart en wit gekleurd (zoals op een schaakbord). Voor ieder paar van positieve gehele getallen m en n beschouwen we een rechthoekige driehoek, waarvan de hoekpunten gehele coördinaten hebben en waarvan de rechthoekszijden, met lengten m en n, gelegen zijn langs de zijden van de vierkanten.

Laat S_1 de totale oppervlakte zijn van het zwarte deel van de driehoek en S_2 de totale oppervlakte van het witte deel. Stel

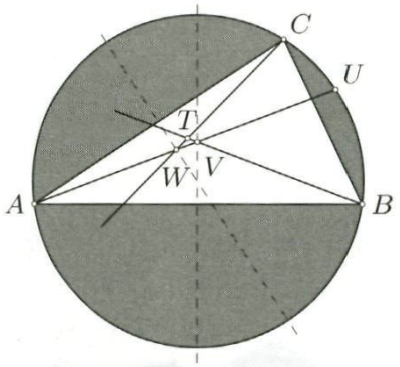
$$f(m,n) = |S_1 - S_2|.$$

a Bepaal $f(m,n)$ voor alle paren positieve gehele getallen m en n die beide ofwel even ofwel oneven zijn.

b Bewijs dat $f(m,n) \leq \frac{1}{2}\max\{m,n\}$ voor alle m en n.

c Toon aan dat er geen constante C bestaat zodanig dat $f(m,n) < C$ voor alle m en n.

2 In driehoek ABC is hoek A de kleinste hoek. De punten B en C verdelen de omgeschreven cirkel van de driehoek in twee bogen. Laat U een punt zijn op het inwendige van de boog tussen B en C die het punt A niet bevat.



De middelloodlijnen van AB en AC snijden de lijn AU in respectievelijk de punten V en W. De lijnen BV en CW snijden elkaar in T.
Toon aan dat $AU = TB + TC$.

3 Stel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zijn reële getallen die aan de volgende twee voorwaarden voldoen:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1;$$

$$|x_i| \leq \frac{n+1}{2} \quad \text{voor} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Toon aan dat er een permutatie (herschikking) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ van $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bestaat zodanig dat

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}.$$

4 Een $n \times n$ matrix is een rangschikking van getallen in n rijen en n kolommen. Een $n \times n$ matrix heet een *zilver* matrix als de getallen behoren tot de verzameling $S = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ en voor elke $i = 1, \ldots, n$ alle elementen van S samen voorkomen in de i-de rij en de i-de kolom. Toon aan dat:

a voor $n = 1997$ er geen zilver matrix bestaat;

b er voor oneindig veel waarden van n zilver matrices bestaan.

5 Bepaal alle paren van gehele getallen (a,b) met $a \geq 1$, $b \geq 1$, waarvoor de volgende vergelijking geldt:

$$a^{(b^2)} = b^a.$$

6 Voor ieder positief geheel getal n is $f(n)$ het aantal manieren waarop het getal n kan worden voorgesteld als de som van machten van 2 met niet negatieve gehele exponenten. Twee van deze manieren die alleen in de volgorde verschillen worden als gelijk beschouwd. Zo is bijvoorbeeld $f(4) = 4$ omdat het getal 4 op de volgende vier verschillende manieren kan worden voorgesteld als som van machten van 2: 4; $2+2$; $2+1+1$ en $1+1+1+1$. Bewijs dat voor ieder geheel getal $n \geq 3$ geldt:

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}.$$

Tienduizenden computers in de USA en Canada hebben via Internet samengewerkt in een poging een boodschap te ontcijferen die gecodeerd was in de door de overheid ondersteunde Data Encryption Standard (DES).

Data Encryption Standard gekraakt

Dinsdag 17 juni 1997 was een mijlpaal in de cryptografie. Die dag werd de RSA DES Challenge gekraakt. Kort voor middernacht bevestigde een computer van RSA Data Security Inc. dat Rocke Verser uit Loveland, Colorado de winnende DES-sleutel gevonden had. Rocke is een free lance computerprogrammeur die in zijn vrije tijd de gespecialiseerde software ontwikkeld heeft. Hij claimde hiermee de prijs van $10.000 waarvoor verschillende teams wereldwijd gestreden hebben. Rocke kreeg met deze prestatie behalve $10.000 ook wereldwijde bekendheid. Maar voor DES, het vertrouwde en wereldwijd gebruikte cryptografie-systeem betekent dit wellicht het begin van het einde.

DES is de Data Encryption Standard, een cryptografie-systeem uitgegeven door de Amerikaanse overheid en officiële standaard sinds 1977. DES is een van de bekendste en meest gebruikte cryptografie-systemen met een geheime sleutel.

De RSA Secret-Key Challenge

De RSA Secret-Key Challenge is een prijsvraag die uitgeloofd werd op de RSA Data Security Conferentie in januari 1997. Er waren prijzen van $1000, $5000 en $10.000 voor het breken van diverse cryptografie-systemen en een prijs van $10.000 voor het breken van DES, dat een 56-bits sleutel gebruikt. RSA lanceerde deze Secret-Key Challenge om de kracht te onderzoeken van via het Internet verbonden computers en om de sterkte van DES te testen.

Het breken van DES

Als antwoord op deze uitdaging besloot Rocke Verser om DES te kraken met de hulp van teamleiders Matt Curtin en Justin Dolske. Tot nu toe is de meest effectieve manier om DES te kraken een aanpak die

Wat is cryptografie?

Het verhaal begint met Julius Caesar die boodschappen naar zijn vertrouwelingen stuurde maar zijn boodschappers niet vertrouwde. Dus verving hij elke *A* door een *D*, elke *B* door een *E*, enzovoort. Alleen iemand die de 'drie opschuiven'-regel kende kon zijn boodschappen ontcijferen.
Cryptografie is het bewerken van data tot een vorm die onbegrijpelijk is voor iedereen die de geheime sleutel niet kent. Het doel is om over een onveilig kanaal op een veilige manier berichten te versturen. Iemand die meeleest en voor wie de informatie niet bedoeld is mag het bericht niet begrijpen.

Wat is DES?

DES is de Data Encryption Standard, een cryptografiesysteem dat in 1977 door de Amerikaanse overheid als officiële standaard ingesteld is. Het werd oorspronkelijk ontwikkeld door IBM. DES is een symmetrisch 'secret-key' cryptografiesysteem: om te communiceren moeten zowel de zender als de ontvanger van een bericht de geheime sleutel kennen. Voor vercijferen en ontcijferen wordt dus één en dezelfde sleutel gebruikt. Een veilige verspreiding van die sleutel kan een probleem opleveren.

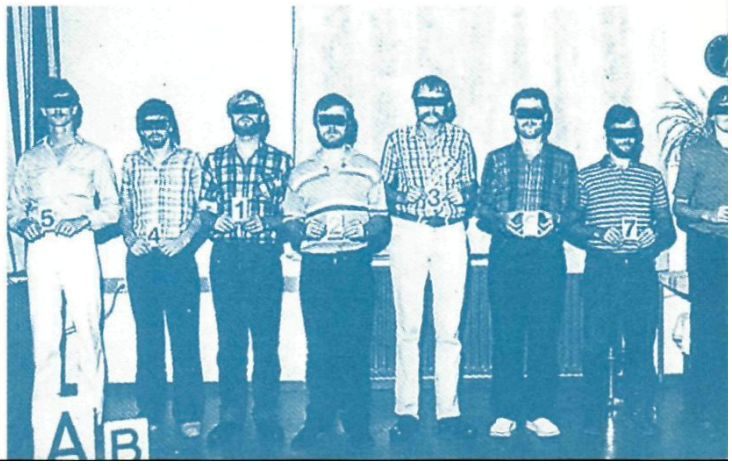
DES vercijfert informatie steeds in 8 blokken van 8 bytes. Met behulp van een aantal wiskundige bewerkingen en de 56-bits sleutel worden deze omgezet in 8 andere blokken van 8 bytes. Deze stap wordt dan 10 keer herhaald, waarna DES begint aan het volgende blok. DES is openbaar, iedereen kan opzoeken hoe DES precies

bekend staat als de 'brute kracht' methode. Met deze aanpak worden alle mogelijke sleutels op de gecodeerde boodschap uitgetest, totdat de sleutel gevonden wordt die het bericht kan ontcijferen. Een sleutel heeft 56 bits, zodat er in totaal 2^{56} sleutels mogelijk zijn. Dit zijn er zo'n 72 biljard (2^{56} = 72.057.594.037.927.936). Rocke schreef een kraakprogramma dat steeds nieuwe sleutels uittestte. Hij ontwierp het programma zo dat het gemakkelijk over het Internet verspreid en gedownload kon worden. Dit project, met de codenaam DESCHALL, bracht honderden en uiteindelijk tienduizenden computers tezamen. Elke nieuwe vrijwilliger die zich aanmeldde ontving het testprogramma plus een flink aantal sleutels om te testen. Elke deelnemer onderzocht op deze manier een klein deel van de 72 biljard mogelijke sleutels.

De kracht van Internet

Het DESCHALL-team bracht de rekenkracht tezamen van thuiscomputers, industrie, universiteiten en overheid. Het testen van 72 biljard sleutels vereiste een ongelofelijke hoeveelheid rekenkracht. En gerekend werd er, op sommige momenten werden er wel 7 miljard sleutels per seconde door het DESCHALL-team getest. Door kraakprogramma's te schrijven voor Unix, Windows, Macintosh en OS/2 kon het DESCHALL-team profiteren van de rekenkracht van zowel de grootste werkstations als van bescheiden thuiscomputers.

Ironisch genoeg kon het DESCHALL-team het kraakprogramma niet buiten Canada en de USA verspreiden, vanwege de beperkende exportregels voor software van het Amerikaanse ministerie van Handel. Hiervan profiteerde SolNet, een vergelijkbaar initiatief uit Zweden. SolNet startte veel later dan het DESCHALL-team, maar omdat zij hun programma wereldwijd konden verspreiden hadden zij, op het moment dat het DESCHALL-team de winnende sleutel vond, al bijna 10 biljard sleutels getest.



De Secret-Key Challenge

Hieronder zie je een testbericht en de met DES vercijferde boodschap.

Sleutel	5e	d9	20	4f	ec	e0	b9	67
IV	a2	18	5a	bf	45	96	60	bf

Tekst "The unknown message is:
The DES-test contest's plaintext"

Tekst in hexadecimalen

54 68 65 20 75 6e 6b 6e 6f 77 6e 20 6d 65 73 73
61 67 65 20 69 73 3a 20 54 68 65 20 44 45 53 2d
74 65 73 74 20 63 6f 6e 74 65 73 74 27 73 20 70
6c 61 69 6e 74 65 78 74 08 08 08 08 08 08 08 08

Versleutelde tekst

3e a7 86 f9 1d 76 bb d3 66 c6 3f 54 eb 3f e3 3f
39 88 81 4c 8b a1 97 f7 be 1d dd 7e fb 39 96 31
3c 3d 3b 65 c8 b8 3e 31 89 f9 04 14 fb cd c3 70
c1 11 a5 2f 3a ef 80 f4 cf f5 43 a4 b1 65 5b ae

De deelnemers aan de RSA Secret Key Challenge kregen alleen een versleutelde tekst en de IV (een beginwaarde nodig voor de gebruikte 'Cipher Block Chaining'). De goede sleutel kon door een computer herkend worden aan de openingsfrase "The unknown message is:" Bij RSA Data Security Inc. kende men wel de geheime boodschap die hierna kwam, maar niet de geheime sleutel. Die sleutel was door een computer van RSA aangemaakt met een random generator. Dezelfde computer controleerde ook de door het DESCHALL-team gevonden sleutel.

Geluk

Het DESCHALL-project startte op 13 maart 1997. Nog geen 96 dagen later werd de DES Challenge opgelost, na het onderzoeken van slechts 24,6% van alle sleutels. De winnende sleutel werd gevonden door Michael Sanders, op een Pentium 90 MHz desktop PC met 16 megs RAM. Rocke Verser had beloofd de prijs van $10.000 op te splitsen in 60% voor hemzelf en 40% voor de winnende computer. Michael Sanders ontvangt dus $4000 voor zijn bijdrage aan dit project. Michael wist dat hij de goede sleutel gevonden had toen zijn machine de geheime boodschap ontcijferde: "The unknown message is: Strong cryptography makes the world a safer place".

URL'S

www.frii.com/~rcv/deschall.htm
www.rsa.com/des/

Bron: RSA Data Security Inc.

In het Nederlands Architectuur Instituut te Rotterdam wordt van 6 september tot en met 23 november een tentoonstelling gehouden over het werk van Daniel Libeskind. De ontwerpen van deze architekt verraden zijn belangstelling voor muziek, schilderkunst en wiskunde.

Fraktegels

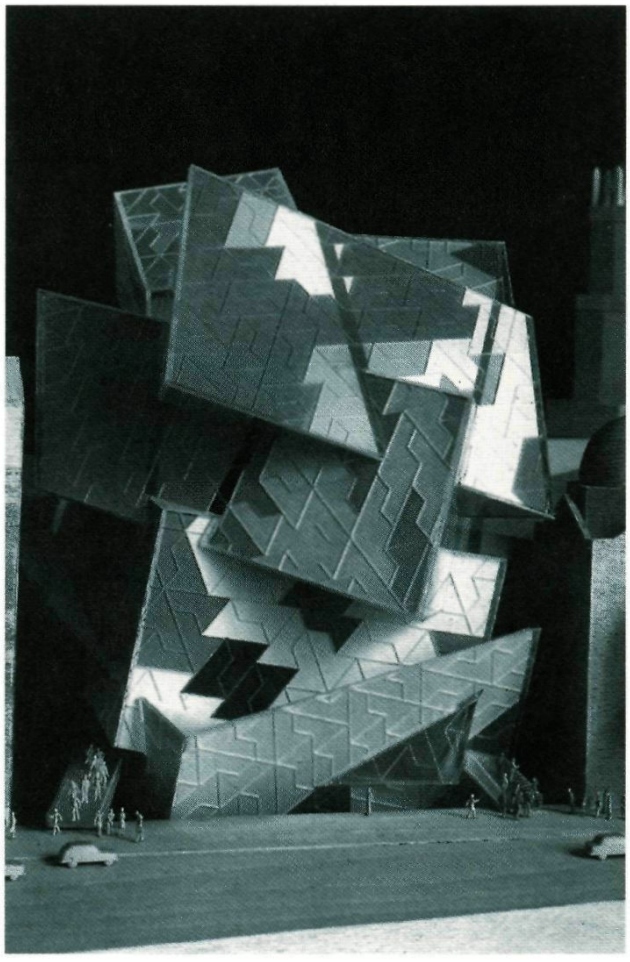
Chris Zaal

De in Polen geboren architekt Daniel Libeskind behoort al meer dan tien jaar tot de internationale voorhoede van de architectuur. Hij is ontwerper, theoreticus en docent. Zijn architectonische en stedebouwkundige ontwerpen zijn uitermate complex, niet alleen qua vorm, maar ook wat betreft de achterliggende ideeën. Na jaren als docent en theoreticus actief te zijn geweest is hij nu ook bouwend architekt. In Berlijn nadert het Joods museum het punt van voltooiing en in Londen werkt hij aan de uitbreiding van het Victoria en Albert Museum.

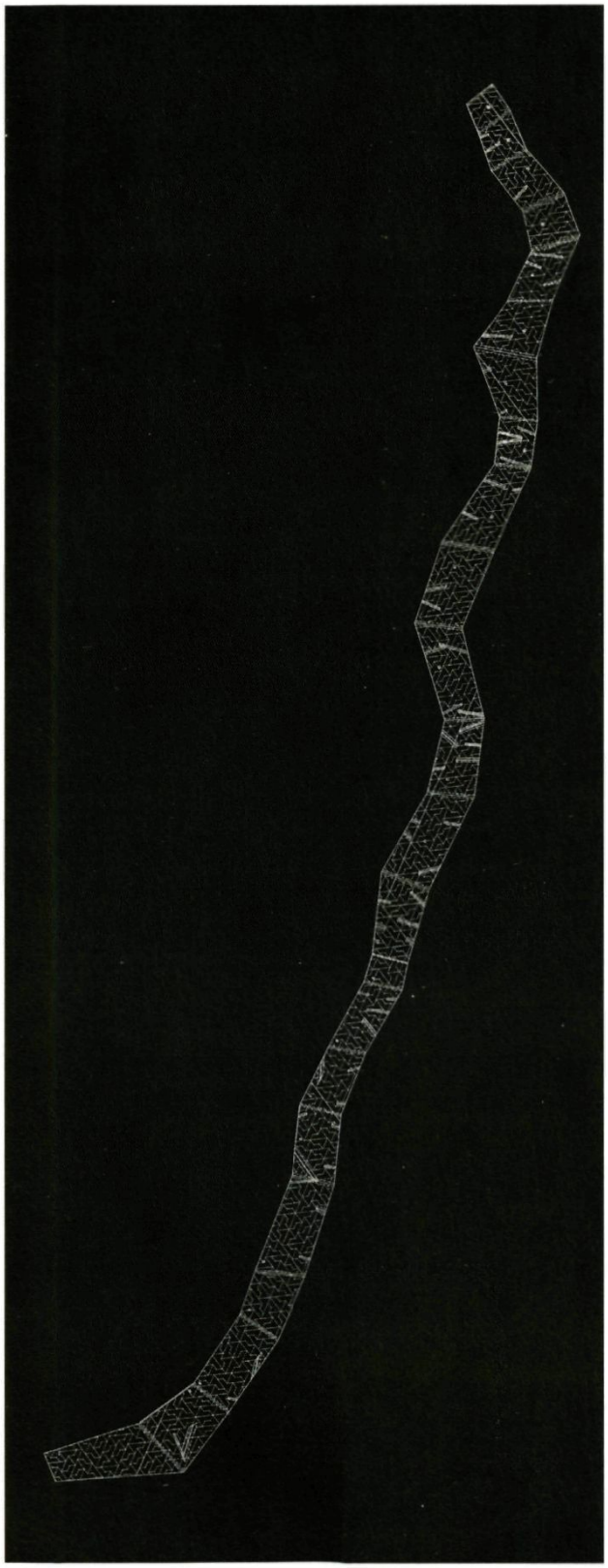
Het Victoria en Albert Museum

Het Victoria en Albert Museum in Londen is het grootste museum voor decoratieve kunst ter wereld. Het herbergt een grote collectie beeldhouwwerk, meubels, mode en textiel, schilderijen, glas, keramiek, juwelen, boeken en foto's. Het museum kampt met een tekort aan ruimte. Om dit ruimtegebrek op te heffen, heeft het museum een prijsvraag uitgeschreven voor een nieuwe uitbreiding. De winnaar was Daniel Libeskind.

Bij dit project ontmoette Libeskind de constructeur en bouwkundige Cecil Balmond van Ove Arup & Partners. Balmond werkt niet op de traditionele manier; hij probeert in zijn ontwerpen ideeën te herleiden tot mathematische principes, zoals de gulden snede, fractals, spiraalvormen, etcetera. Libeskind en Balmond werkten zeer nauw samen aan het ontwerp voor het Victoria en Albert Museum.



Een maquette van het ontwerp



De gevel afgerold tot één strook. Hiermee heb je een bouwplaat van het ontwerp.

Fraktegels

De nieuwe uitbreiding wordt de entree van het museum en verbindingscentrum van de oude Victoriaanse gebouwen. Het ontwerp lijkt op een opgerolde lange dunne streep die tussen de andere gebouwen omhoog spiraliseert. Deze streep vormt een ééndelig bouwpakket. Als je de muurvlakken in de strook op de juiste manier op en in elkaar zou schuiven, dan krijg je een maquette van de nieuwbouw. De buitenkant van de nieuwbouw wordt bekleed met zogenaamde 'fraktegels'. Het woord fraktegel (fractile in het engels) is een samentrekking van fraktals en tegels. Deze fraktegels zijn eenvoudige meetkundige figuren die zich op vele manieren laten aaneenschakelen. Met fraktegels kun je het platte vlak betegelen en dat is precies wat de ontwerpers doen: zij gebruiken deze tegels als decoratief bekledingsmateriaal.
Regelmatige betegelingen bestaan al van oudsher. De eenvoudigste voorbeelden vind je op straat of in de badkamer. Ingewikkelder patronen vind je in de elegante mozaïeken van Granada en Isfahan. Al deze patronen zijn regelmatig: je kunt door verschuiven het patroon precies over zichzelf heen leggen. Met de fraktegels van Libeskind kun je patronen maken waarbij dat niet kan, niet-regelmatige patronen dus. Probeer maar eens structuur te ontdekken in de gevelbekleding van het ontwerp.

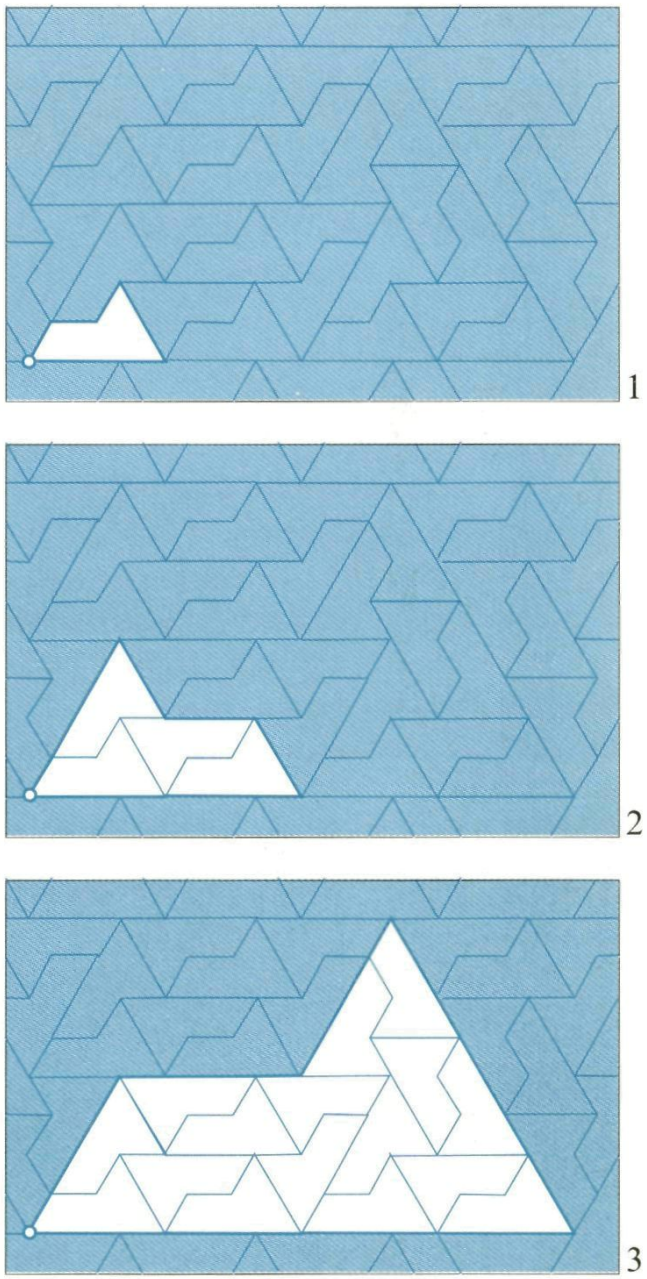
Tegelen

Hoe ontstaan deze niet-regelmatige tegelpatronen? Hiervoor bestaat een leuke methode. Bekijk in figuur 1 de door Libeskind gebruikte tegel. Hij staat wegens

de vorm bekend als de sfinx. Je kun hem onderverdelen in vier kleinere sfinxen.
Bekijk nu figuur 2. Het tegelpatroon wordt opgebouwd vanuit de witte tegel linksonder. Verdeel de tegel in vieren zoals in figuur 1. Vergroot dit patroon twee keer en spiegel het. Het resultaat is stap 2. Als je de zo verkregen vier witte sfinxen elk in vieren verdeelt en het resultaat twee keer vergroot en spiegelt, dan krijg je stap 3. Als je deze stappen blijft herhalen, dan krijg je een tegelpatroon waarmee je elk willekeurig groot vlak kunt bedekken.
Het tegelpatroon dat je zo krijgt is niet regelmatig; je kunt het door verschuiven niet passend over zichzelf heen leggen. Maar als je vanuit het hoekpunt linksonder in figuur 2 het hele patroon met een factor vier vergroot, dan past dit patroon op het oorspronkelijke patroon. Deze eigenschap wordt *zelf-gelijkvormigheid* genoemd.

OPDRACHT. Het bovenstaande figuurtje is ook een fraktegel. Kun je dit figuur net zoals de sfinx onderverdelen in vier gelijkvormige figuurtjes? Met deze onderverdeling kun je dan net zoals boven een onregelmatige vlakverdeling maken.

Figuur 1. De sfinx en de onderverdeling in vier kleinere sfinxen



Figuur 2. Drie stappen in de opbouw van de betegeling

VERANTWOORDING ILLUSTRATIES
p. 15 onderaan: Studio Libeskind
p. 15 boven en p. 16: Ove Arup & Partners

Welke driehoek heeft van alle driehoeken met een gegeven omtrek de grootste oppervlakte? Dat is natuurlijk een gelijkzijdige driehoek. Maar kun je dat ook bewijzen?

Het spiegelingsprincipe°

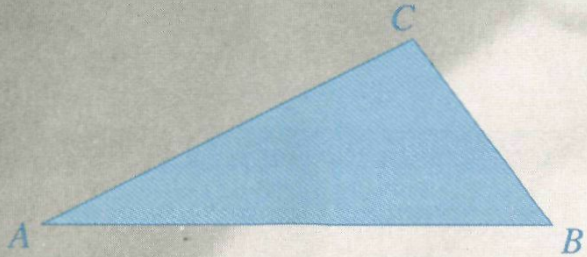
Fransje Akveld

Een zeer oud wiskundig probleem, dat bekend staat als het klassieke isoperimetrische probleem is: Welke figuur heeft bij een gegeven omtrek de grootste oppervlakte? Deze vraag wordt voor het eerst gesteld in de Aeneas van Vergilius, in een verhaal over prinses Dido en de stichting van de stad Carthago. Ook het antwoord op deze vraag is in de oudheid al gegeven: de cirkel. Dit probleem heeft de mensheid eeuwenlang beziggehouden. Het bewijs van de stelling dat van alle figuren met een gegeven omtrek de cirkel de grootste oppervlakte heeft, werd in principe al geleverd door de oude Grieken. Zenodorus deed het belangrijkste werk. Zijn bewijs verloopt in een aantal stappen. De eerste stap in het bewijs is aantonen dat onder de driehoeken met een gegeven omtrek de gelijkzijdige de grootste oppervlakte heeft. Dit zullen we gaan bewijzen door gebruik te maken van het spiegelingsprincipe.

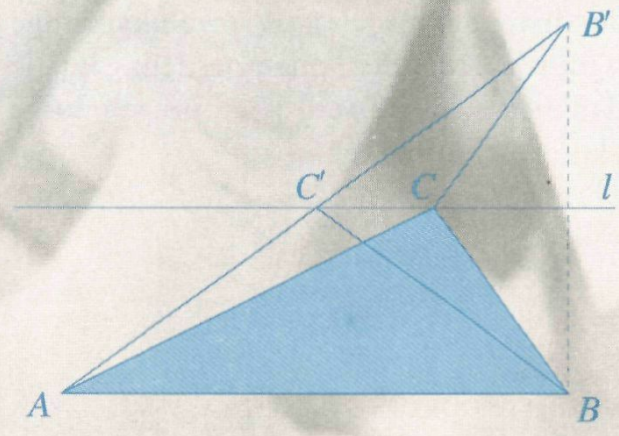
Stelling *Bij een gegeven omtrek is de gelijkzijdige driehoek de driehoek met de maximale oppervlakte.*

BEWIJS. Veronderstel dat twee zijden van ΔABC niet gelijk zijn. Bijvoorbeeld dat $AC \neq BC$ (zie figuur 1). Trek een lijn l door C evenwijdig aan AB. Spiegel het punt B in de lijn l, noem dit punt B'.

Trek de verbindingslijn AB' en CB' (zie figuur 2). Noem het snijpunt van AB' en l nu C'. De driehoeken ABC en ABC' hebben gelijke oppervlakte (dezelfde basis en dezelfde hoogte). De omtrek van ΔABC is ge-



Figuur 1



Figuur 2

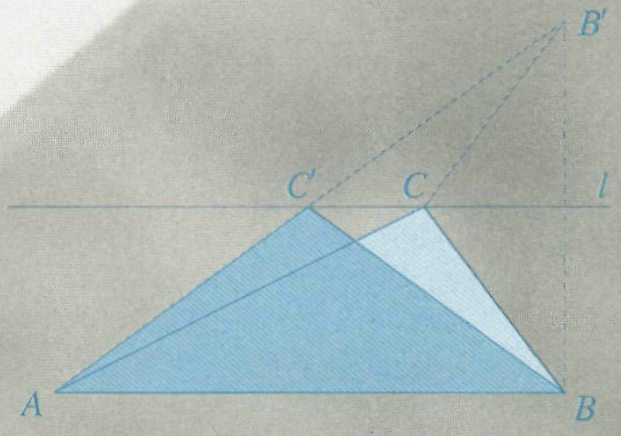
lijk aan $AB + AC + CB'$ en de omtrek van $\Delta ABC'$ is gelijk aan $AB + AB'$. Omdat $AC + CB'$ groter is dan AB', heeft ΔABC een grotere omtrek dan $\Delta ABC'$. De driehoek $AC'B$ heeft een kleinere omtrek dan de driehoek ACB en dezelfde oppervlakte (zie figuur 3). We maken nu een gelijkbenige driehoek $AC''B$ zodanig, dat de lengte van $AC'' + C''B$ gelijk is aan $AC + BC$. Het punt C'' ligt dus boven C' en AC'' is groter dan AC'. De oppervlakte van $\Delta AC''B$ is groter dan die van ΔABC en de omtrek is gelijk (zie figuur 4). Dus de veronderstelling dat van een maximale driehoek twee zijden ongelijk zouden zijn is tegengesproken. Het bewijs van de stelling is geleverd.

We hebben hierboven de eerste stap bewezen in het bewijs van Zenodorus dat van alle figuren met een gegeven omtrek de cirkel de grootste oppervlakte heeft. De tweede stap is dat onder de n-hoeken met gelijke omtrek de regelmatige n-hoek de grootste oppervlakte heeft. Daarna moet je laten zien dat bij gelijke omtrek de regelmatige $(n+1)$-hoek een grotere oppervlakte heeft dan de regelmatige n-hoek.

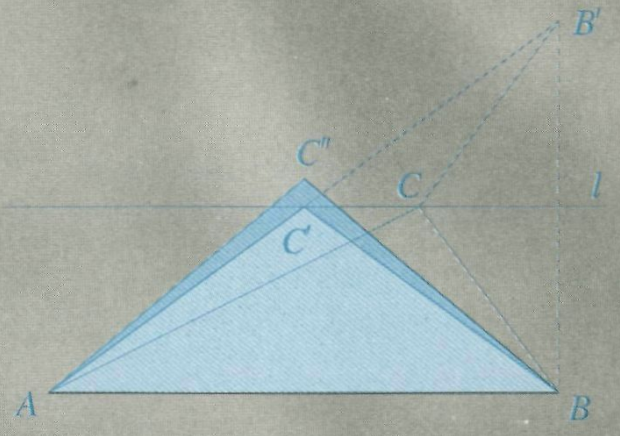
De laatste stap is dat de rij regelmatige n-hoeken ($n = 3, 4, 5, \ldots$) met gelijke omtrek voor n naar oneindig convergeert naar de cirkel. Het bewijs van het isoperimetrisch probleem is in later tijden door beroemde wiskundigen als Weierstrass en Jordan geperfectioneerd. Met de intrede van moderne wiskunde is dit probleem en nog vele andere optimalisatieproblemen veel sneller op te lossen. Voor meer beroemde en interessante optimaliseringsproblemen kan ik het boek van Tikhomirov aanbevelen. Het grootste deel van het boek is goed te begrijpen voor leerlingen van de hoogste klassen van HAVO en VWO. ◢

LITERATUUR

V.M. Tikhomirov, Stories about Maxima and Minima, The Mathematical Association of America, 1990.



Figuur 3



Figuur 4

De Pythagoras Olympiade is een wedstrijd voor slimmeriken die al enige jaren draait. Elk nummer van Pythagoras bevat steeds twee opgaven. Om ze op te lossen heb je geen wiskundige voorkennis nodig, wel een flinke dosis gezond verstand!

Pythagoras Olympiade

Iedere opgave van de Pythagoras Olympiade is een wedstrijd op zichzelf. Je hoeft niet aan alles mee te doen, je kunt van elke som afzonderlijk een oplossing inzenden. Per opgave wordt onder de goede inzenders een boekenbon van *f* 25,- verloot. Verder vormen de twaalf opgaven van elke jaargang een ladderwedstrijd. Iedere goede oplossing geeft één punt. Voor de winnaar van de ladderwedstrijd is er een prijs van *f* 100,- beschikbaar.

Bovendien ontvangen de beste deelnemers, dit ter beoordeling van de samenstellers, een uitnodiging voor de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, zelfs al hebben ze niet aan de eerste ronde meegedaan of daarbij niet genoeg punten behaald. Je moet alleen op moment van de tweede ronde nog wel op school zitten.

Ladderwedstrijd 1996/1997

Aan de Pythagoras Olympiade uit de vori-

Score	Naam	School
8	Bart Vandewoestijne	Zwevegem, België
7	Gertjan Kok	Sint-Maartens college, Voorburg
6	Jeanine Daems	Bouwens van der Boijecollege, Panningen
4	Peter Deleu	Hulste, België
4	Hans Verdonk	Den Haag
3	Jun Hoo	Jacbos College, Hoogezand
3	Stefaan Lippens	Don Bosco college, Zwijnaarde, België
3	Mischa Rademakers	Vellesan College, IJmuiden
2	Remon Huijts	St. Ignatiusgymnasium, Amsterdam
2	Chang-Kwon Kang	St. Ignatiusgymnasium, Amsterdam
2	Marianne van Putten	Lorentz Casimir Lyceum, Eindhoven
1	Ton Heyligers	College Asten-Someren, Asten
1	Jim Kasteel	Arnhem
1	Franky Stevens	Glorieux-Instituut, Oostakker, België
1	Sven Tummers	Juvenaart H. Hart Gymnasium, Bergen op Zoom

ge jaargang namen in totaal 15 mensen één of meerdere keren deel. De moeilijkheidsgraad van de opgaven liep heel erg uiteen: er waren gemakkelijke opgaven bij, maar ook een paar waar vrijwel niemand uitkwam. De stand van de ladderwedstrijd wordt bijgehouden op de homepage van Pythagoras. Na 10 opgaven is de tussenstand als op p. 20 onderaan.

Oplossingen

De uitwerkingen verschijnen twee nummers later in Pythagoras. Bij elke opgave wordt een oplossing van één van de deelnemers gepubliceerd. De oplossingen van opgaven 23 en 24 uit het juninummer staan op p. 22. Maar je kunt de uitslag en de oplossingen al na twee maanden lezen op de homepage van Pythagoras.

Hiernaast vind je de opgaven 27 en 28 van de Pythagoras Olympiade. Insturen is mogelijk tot en met 15 november 1997. Stuur je oplossing naar:

Pythagoras Olympiade
TU Eindhoven
Faculteit Wiskunde
Hoofdgebouw kamer 9.50
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
email: sander@win.tue.nl

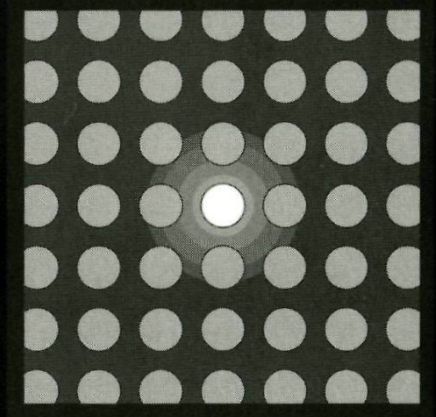
Vermeld op elk vel: *naam, adres, geboortedatum, school, schooltype* en *klas*. Verder moet elke oplossing op een nieuw vel beginnen. Stuur bij de antwoorden ook een *toelichting*, waarin je uitlegt hoe je aan het antwoord gekomen bent (een berekening of een bewijs).

Veel succes!

Wim Oudshoorn, Sander van Rijswou en Ronald van Luyk

Opgave 27

Op een oneindig groot bord zijn in een ruitjes patroon lampjes bevestigd. Na elke seconde kijkt elk lampje even naar zijn vier buurlampjes. Als er een oneven aantal buurlampjes aan is dan gaat het lampje zelf ook aan. Als er een even aantal buurlampjes aan is dan gaat het uit. In het begin is er één lampje aan. Hoeveel lampjes zijn er aan na 100 seconden?



Opgave 28

Vind alle oplossingen van de vergelijking

$$k! + n! = m!$$

waarbij k, n en m postieve gehele getallen zijn.

Opgave 23

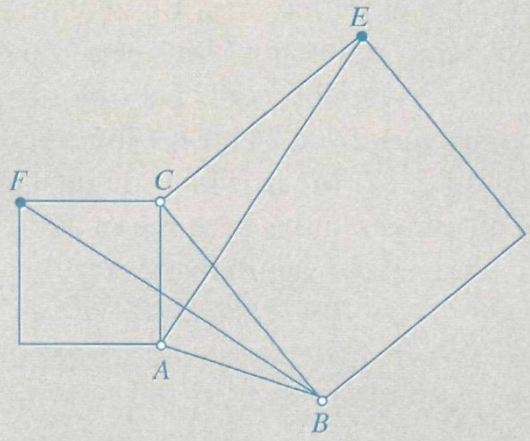
Neem de functie $f(x) = 2x^2 + x + 1$ en schrijf een flink aantal getallen van de rij $f(1), f(2), f(3), \ldots$ op. Schrijf onder deze rij de verschillen tussen de opeenvolgende termen. Je krijgt zo een nieuwe rij. Opnieuw schrijf je daaronder de verschillen tussen de opeenvolgende termen van die tweede rij. Bewijs dat deze laatste rij alleen het getal 4 bevat.

OPLOSSING. In de tweede rij staan de getallen $f(2) - f(1), f(3) - f(2), f(4) - f(3)$, enzovoorts. De n-de term is gelijk aan $f(n+1) - f(n)$. Als we dat uitwerken, dan krijgen we $(2\{(n+1)-2\}+(n+1)+1)-(2n-2+n+1)=4n+1$. Nu kunnen we uitrekenen wat de verschillen in de tweede rij zullen zijn: $(4(n+1)+1) - (4n+1) = 4$. De getallen in de laatste rij zijn dus allemaal gelijk aan 4.

Deze opgave werd opgelost door:
Gertjan Kok van het **Sint-Maartens College te Rijswijk**,
Chang-Kwon Kang van het **St. Igantiusgymnasium te Amsterdam**,
Sven Tummers van het **Juvenaart H. Hart Gymnasium te Bergen op Zoom**,
Ton Heyligers van het **College Asten-Someren te Asten**,
Jun Hoo van het **Jacbos College te Hoogezand**,
Marianne van Putten van het **Lorentz Casimir Lyceum te Eindhoven**,
Franky Stevens van het **Glorieux-Instituut te Oostakker, België**,
Jaenine Daems van het **Bouwens van de Boijecollege te Panningen**,
Mischa Rademakers van het **Vellesan College te IJmuiden** en bovendien door Peter Deleu, Hulste (België), Bart Vandewoestijne, Zwevegem (België), en Hans Verdonk, Den Haag.
De boekenbon gaat naar Jun Hoo.

Opgave 24

Op de zijde AC en de zijde BC van de driehoek ABC tekenen we een vierkant. De punten E en F zijn hoekpunten zoals in de tekening is aangegeven. Bewijs dat FB en AE elkaar loodrecht snijden.



OPLOSSING. Als je rond het punt C roteert met 90° (tegen de klok in), dan gaat het punt F naar het punt A en het punt B naar het punt E. Het lijnstuk FB gaat door die rotatie dus naar het lijnstuk AE, dus snijden ze elkaar onder een hoek van 90°. Je ziet ook dat de twee lijnstukjes even lang moeten zijn.
Deze opgave werd opgelost door:
Bart Vandewoestijne, Gertjan Kok, Chang-Kwon Kang, Peter Deleu, Jun Hoo, Marianne van Putten, Jaenine Daems, Mischa Rademakers en Hans Verdonk.
De boekenbon gaat naar Marianne van Putten. ◢

priemgetallen met de computer

Dit stukje is het eerste in een reeks over rekenen aan priemgetallen op de computer. Deze keer gaat het over delen, factoriseren en zeven.

De zeef van Eratosthenes

Wieb Bosma

Met heel weinig rekenwerk kun je al leuke dingen over priemgetallen te weten komen. Maar al snel zul je toch van een computer gebruik willen maken. In deze stukjes worden geen programma's gegeven maar algoritmen — zeg maar 'rekenrecepten'. Ze worden beschreven in een zogenaamde pseudo-programmeertaal. Het voordeel van de gebruikte (Nederlandse) pseudo-taal is dat deze eenvoudig te lezen en te begrijpen is, en zich gemakkelijk in een echte programmeertaal laat vertalen.

Testdeling

Hoe vind je de delers van een getal n groter dan 1? Je kunt elk getal d kleiner dan n testen om te zien of het n deelt. Misschien wil je, bijvoorbeeld, de delers van $n = 833$ bepalen. Je kunt dan de volgende eenvoudige algoritme toepassen:

```
voor d van 1 tot n
  indien d deelt n
    print d;
```

Als resultaat krijg je dan:

```
1  7  17  49  119  833
```

Dus 833 heeft 7, 17, 49 en 119 als echte delers. Natuurlijk vinden we altijd de delers 1 en n zelf. Als dat de enige zijn is n priem. Daarmee hebben we een *priemtest* voorhanden: een algoritme waarmee je kunt bepalen of een getal priem is of niet.

Een priemtest

Voor een priemtest kun je eenvoudig wat verbeteringen aanbrengen in bovenstaande algoritme. Zo hoef je niet alle delers te testen, want als n niet priem is moet er een deler kleiner of gelijk aan $\sqrt{n}$ zijn. Ga maar na: als $n = d \cdot e$, dan kunnen d en e niet beide groter dan $\sqrt{n}$ zijn. Bovendien weet je al dat n niet priem is zodra je één echte deler tegenkomt. De verbeterde algoritme ziet er als volgt uit:

```
voor d van 2 tot ⌊√n⌋
  indien d deelt n
    print "niet priem"; stop;
  print "priem";        indien niet eerder gestopt
```

Hier is $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ het getal dat je krijgt door $\sqrt{n}$ naar beneden af te ronden. Eigenlijk wordt er nog te veel werk gedaan: als n al niet deelbaar was door 2, wordt later toch nog geprobeerd of n misschien deelbaar is door 4, 6, 8, ... Je zou eigenlijk alleen maar deelbaarheid door de *priemgetallen* tot $\sqrt{n}$ hoeven te testen! Maar om dat te kunnen, moet je eerst al die priemgetallen kunnen bepalen.

© 1997

email: pythagoras@wins.uva.nl • Internet: www.wins.uva.nl/misc/pythagoras

de zeef van Eratosthenes (3e eeuw v. Chr.)

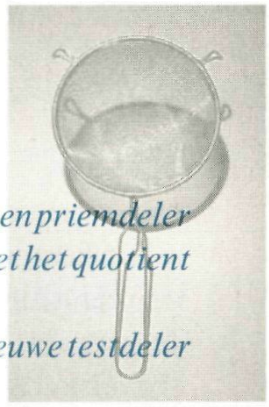
pythagoras

Wiskundetijdschrift voor jongeren

De priemgetallenposter
f 7,50 voor abonnees, f 12,50 voor niet-abonnees (excl. verzendkosten, in koker)
Te bestellen bij de uitgever (070-314 35 00) of via de homepage:
www.wins.uva.nl/misc/pythagoras

is een methode om een lijst van de **priemgetallen** te maken

Pythagoras is een uitgave van het NIAM, Neuhuyskade 94, 2596 XM Den Haag telefoon: (070) 314 35 00 fax: (070) 314 35 88



Priemfactorisatie

In plaats van het bepalen van alle delers van een getal is het meestal zinvoller de priemfactorontbinding te bepalen. Als je de ontbinding van een getal hebt gevonden, is het heel eenvoudig om alle delers op te schrijven. Probeer dat maar eens voor 833, als je weet dat 833 gelijk is aan $7 \cdot 7 \cdot 17$ (zie het eerste voorbeeld).

Een methode om getallen te ontbinden heet een factorisatie-algoritme. De eenvoudigste is weer gebaseerd op testdeling. Het belangrijkste verschil is dat we nu n door d delen zodra we weten dat die deling opgaat en dan met het quotiënt verder rekenen. Op $N = 16093$ kunnen we het volgende factorisatie-algoritme toepassen:

```
d := 2; n := N;
zolang n ≠ 1 en d ≤ √n
  indien d deelt n;          een priemdeler
    n := n/d;                ga door met het quotient
  anders
    d := d + 1;              nieuwe testdeler
indien n > 1 dan
  print n;                   wat overbleef was priem
```

We krijgen dan de priemdelers:

```
7  11  11  19
```

De zeef van Eratosthenes

Als je een lijstje van priemgetallen tot een zekere grens wilt maken, kun je simpelweg alle veelvouden van priemgetallen weggooien: je 'zeeft' als het ware de priemgetallen uit de lijst. Deze procedure is al meer dan 20 eeuwen bekend en wordt de *zeef van Eratosthenes* genoemd, naar een Griek die leefde van ca. 276 tot ca. 195 voor Christus. De zeef van Eratosthenes wordt fraai geïllustreerd op de priemgetallen-poster (zie p. 24).

STAP 1. In het begin is 2 de eerste priem die je tegenkomt. Alle veelvouden van 2 worden geschrapt.

STAP 2. Het getal 3 is het eerste niet weggestreepte getal na 2, dit getal is priem. Alle veelvouden van 3 worden geschrapt.

STAP 3. Het volgende niet geschrapte getal is 5, dit is priem. Maar omdat $5 > \lfloor\sqrt{20}\rfloor$ zijn we klaar. Alle overige niet geschrapte getallen zijn ook priem.

Figuur 1. DE ZEEF VAN ERATOSTHENES.
Stap voor stap worden de getallen tot 20 die niet priem zijn van de lijst geschrapt.

Hoe werkt de zeef? Stel je wilt een lijst van alle priemgetallen tot het getal G. Schrijf dan eerst alle getallen van 1 tot en met G op. Je schrapt eerst de 1 (niet-priem bij afspraak). Daarna herhaal je de volgende stap: selecteer het eerstvolgende niet geschrapte getal p (dat is de volgende priem) en schrap diens veelvouden. Herhaal deze stap totdat p groter is dan $\sqrt{G}$.

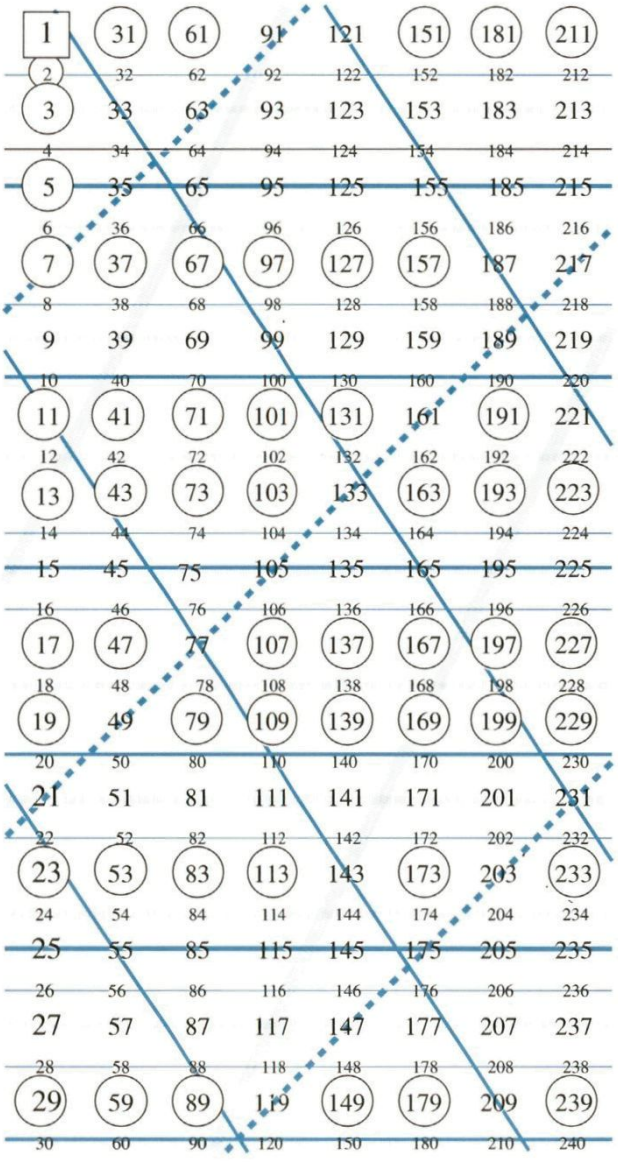
Een voorbeeld. Wil je de priemgetallen tot 100 bepalen, dan schrappen we eerst 1, selecteren 2 (priem) en schrappen de overige even getallen. Dan selecteren we 3 en schrappen de drievouden. Daarna selecteren we 5 (want 4 is geschrapt) en schrappen de vijfvouden, selecteren 7 en schrappen diens veelvouden. Omdat 11 groter is dan $\sqrt{100}$ zijn we klaar: de niet-geschrapte getallen zijn precies de priemgetallen. Zie ook figuur 1.

Voor een gegeven grens G ziet de zeef van Eratosthenes in algoritme-taal er als volgt uit:

```
L := [1 : van 1 tot G];   een lijst van G enen
L[1] := 0;                1 is niet priem
p := 2;
zolang p ≤ √G
  voor k van 2 tot ⌊G/p⌋
    L[k * p] := 0;   schrap veelvouden van p
  p := kleinste j met j > p
    en L[j] = 1;   selecteer nieuwe p
```

Het resultaat is een lijst van enen en nullen, waar op de k-de positie een 1 staat als k priem is, en anders een 0.

Deze zeefmethode werkt erg snel omdat het schrappen van getallen maar heel weinig tijd kost. Bovendien kun je op de computer heel snel 'sprongetjes' van vaste lengte maken (zie de illustratie). Als je de getallen in een rechthoek weergeeft in plaats van op een lijn (figuur 2), zie je dat je steeds een hele (schuine) rij tegelijk schrapt. Op een PC kun je zo in een minuut gemakkelijk de 78498 priemgetallen tot een miljoen bepalen! ◢



Figuur 2. De zeef tweedimensionaal

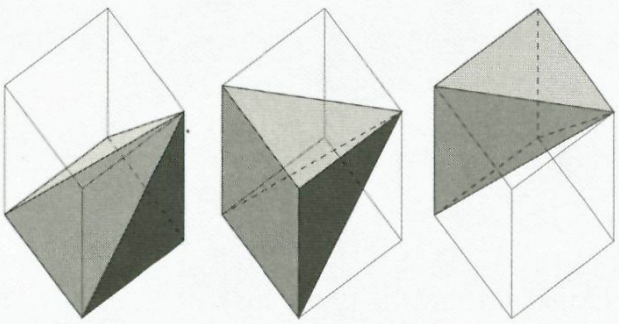
Lezers reageren op de inhoud van Pythagoras met een aanzienlijke hoeveelheid brieven: met opmerkingen over gepubliceerde artikelen, met interessante puzzels, problemen en wiskundige eigenaardigheden.

De post

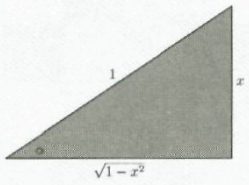
Erjen Lefeber

Rolf Doets uit Edam vroeg zich het volgende af. Zoals je waarschijnlijk wel weet is de inhoud van een piramide gelijk aan $\frac{1}{3} \cdot O \cdot h$ waar O de oppervlakte van het grondvlak is en h de hoogte van de piramide. Een piramide met als grondvlak een vierkant met zijde a en hoogte a heeft dus inhoud $\frac{1}{3}a^3$, terwijl een kubus met zijde a inhoud a^3 heeft. Blijkbaar passen er dus drie van deze piramides in één kubus. Rolf liet ons weten dat hij er in geslaagd was om drie identieke piramides te vinden die samen precies een kubus vormen, zie de figuur hieronder.

Als je het niet gelooft, maak dan zelf maar eens drie van zulke piramides uit karton. Je zult zien dat ze inderdaad samen een kubus vormen. Dit geeft een inzichtelijk bewijs dat de formule voor de inhoud van zulke piramides inderdaad klopt!



L. Penseur uit Haarlem schreef dat in programmeertalen zoals BASIC en PASCAL meestal alleen de inverse van de tangens beschikbaar is (ATN), maar niet de inverse van de sinus of cosinus. Wil je toch $\arcsin(x)$ of $\arccos(x)$ bepalen, dan kan dat door gebruik te maken van de functie $\arctan(x)$. In onderstaande driehoek is $\alpha = \arcsin(x)$.



Uit de figuur lezen we af dat $\tan(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, oftewel $\alpha = \arctan(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})$. We concluderen dat

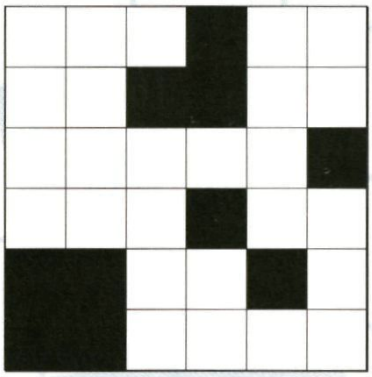
$$\arcsin(x) = \arctan(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}).$$

Verder is natuurlijk $\arcsin(-1) = -\pi/2$ en $\arcsin(1) = \pi/2$. De formule van de arccos kun je nu eenvoudig uit de arcsin berekenen met behulp van de formule $\arccos x = \pi/2 - \arcsin x$.

Problemen

Kruiswoordraadsel

Elk getal en elk cijfer dat ingevuld moet worden in het volgende kruiswoordraadsel is een priemgetal. Het grootste priemgetal dat gebruikt wordt is 23753. Maak het kruiswoordraadsel af als je kunt!



De tovercursus

Veertien tovenaarsleerlingen beginnen aan een veertiendaagse cursus. De meester-tovenaar onderwerpt zijn leerlingen onder andere aan een logische test. Voor het begin van de cursus roept hij ze één voor één bij zich, waarbij hij hun de regels van het spel uitlegt en sommigen ongezien een rode strik om hun zwarte puntmuts bindt. De regels zijn:

1 Er is minstens één leerling met een rode strik;

2 De cursusdagen worden genummerd $1, 2, 3, \ldots, 14$. Aan het begin van elke dag zet de tovenaar de leerlingen in een kring. Op precies één dag moeten alle leerlingen met een rode strik naar voren komen, namelijk op de dag waarop het aantal rode strikken gelijk is aan het rangnummer van die dag.

3 De leerlingen mogen alléén door strikt logisch redeneren te weten komen of ze een strik om hebben. Ze mogen bijvoorbeeld niet hun muts afzetten of even voelen.

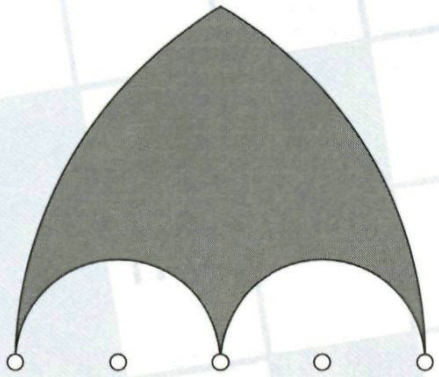
Kun je voor de tovenaarsleerlingen een strategie bedenken die altijd succesvol is?

Verdeel en heers

Kun je een manier bedenken om de positieve gehele getallen zo in twee groepen te verdelen dat twee getallen uit dezelfde groep nooit een priemgetal als som hebben? Op hoeveel manieren kan dit?

Gotiek

De bouwmeesters van de gotiek gebruikten cirkelbogen voor de vormgeving van hun vensters, zoals in de volgende afbeelding.



De straal van de grote cirkelbogen is vier keer zo groot als de straal van de kleine. Bepaal het middelpunt van de cirkel die alle vier cirkelbogen raakt.

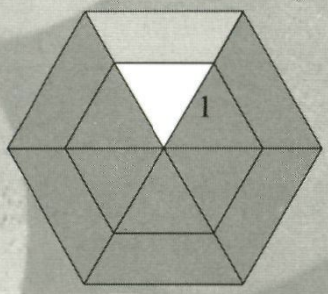
Op deze pagina worden de oplossingen van problemen uit het vorige nummer van Pythagoras besproken. Een volledige bespreking van alle vragen en problemen is te vinden op de homepage.

Oplossingen nr. 6

Dion Gijswijt

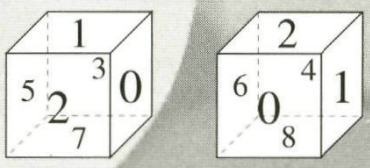
Dooiers
Van de eieren die niet 1 dooier hebben, heeft de ene helft twee dooiers en de andere helft geen. Gemiddeld heeft een ei dus precies 1 dooier. De 5000 eieren hebben samen ook 5000 dooiers.

Zeshoek De zijde van het kleine driehoekje is 1. De grotere driehoek heeft een tweemaal zo grote oppervlakte als de kleine en heeft dus zijden van lengte $\sqrt{2}$. De lengte van een spaak is daarom $\sqrt{2}-1$.

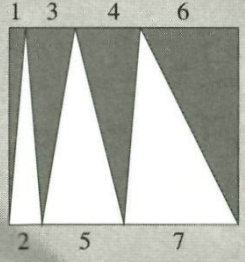


Mengen
Het koude water in de kan heeft een temperatuur van t_k. In de kom met heet water zit aanvankelijk v liter water met temperatuur t_w. Na toevoegen van een liter koud water heeft het warme water een temperatuur van $\frac{vt_w+t_k}{v+1} = t_w - 24$. Na nog een liter koud water te hebben toegevoegd is de temperatuur gedaald tot $\frac{vt_w+2t_k}{v+2} = t_w - 24 - 15$. Door de breuken weg te werken vinden we twee vergelijkingen. Lossen we deze op, dan vinden we $v = \frac{10}{3}$. Er zit op het eind dus $5\frac{1}{3}$ liter in de kom.

Datum
Om de getallen 11, 22 en 01 tot en met 09 te kunnen maken, moeten de cijfers 0, 1 en 2 op beide kubussen staan. De overige 7 cijfers kunnen willekeurig over de twee kubussen worden verdeeld. Omdat er nog maar 6 zijvlakken onbeschreven zijn, lijken we een zijvlak te kort te komen. Door de kubus met de 6 echter een halve slag te draaien, kan de 6 ook als 9 dienen.



Land verdelen
De jongste zoon krijgt $\frac{1}{28}$-deel van het land. De tweede zoon krijgt $\frac{2}{28}$-deel, en zo verder tot en met de zevende zoon die $\frac{7}{28}$-deel krijgt. Het verdelen van het land kan op meerdere manieren. Nemen we aan dat het land 14 eenheden lang is, dan kan de grond worden verdeeld als in de onderstaande figuur.



Hieronder volgt een overzicht van de verschillende wiskundige activiteiten die in de komende periode voor middelbare scholieren georganiseerd worden. Ook bepaalde activiteiten voor wiskundedocenten worden genoemd.

Agenda

Data voor deze agenda aanmelden bij pythagoras@wins.uva.nl

zo 5 oktober '97 (Nationale Wetenschapsdag)
Open dag Wetenschappelijk Centrum Watergraafsmeer, Amsterdam — (020) 525 74 91, www.wins.uva.nl/wcw-opendag

do 16, vrij 17 oktober '97
Symmetrie en patronen — (020) 525 50 74
UvA masterclass voor leerlingen 5/6 VWO

di 4 november '97
Wiskunde in Actie, TU Delft — (015) 278 72 21

vr 14 november '97
Logica, bewijs, berekeningen en betekenis — (020) 525 50 74
UvA mastercourse voor VWO-docenten wiskunde

za 15 november '97
Jaarvergadering NVvW, Bilthoven — (030) 228 30 60

di 18 november '97
Informatica in Actie, TU Delft — (015) 278 38 32

vr 21 november '97
Open dag op locatie, UvA — (020) 525 50 74

vr 28 november '97
Wiskunde A-lympiade — (030) 261 16 11

za 3 januari '98
De wiskunde van de sociale keuze — (076) 527 32 67
Wintersymposium WG, Amersfoort — (076) 541 97 57

TI-83: veelzijdig en krachtig

De TI-83 is een veelzijdige grafische rekenmachine voor de tweede fase van het voortgezet onderwijs. Terecht is deze machine door het Freudenthal instituut gekozen als 'standaard' in het experiment voor de nieuwe bovenbouwprogramma's wiskunde (PROFI).

Ervaringen met de bekende TI-82 zijn in de TI-83 verwerkt; een eigentijdse machine dus! Zo is de **interface** sterk verbeterd en kan er volop worden gewerkt met **matrices.**
Ook de **grafische presentaties** en de mogelijkheden om **vergelijkingen** op te lossen zijn uitgebreid. Daarnaast kunnen uw leerlingen **gegevens uitwisselen** via de I/O-poort terwijl met TI-graph-link-software **aansluiting op een PC** mogelijk is.

Met name de veelzijdigheid van de TI-83 maakt, dat deze machine naast **wiskunde**, ook voor diverse andere vakken zeer geschikt is. Doordat de machine gekoppeld kan worden aan de CBL en CBR is hij uitermate geschikt voor **natuurkunde**.
Door de financiële functies is de machine een uitkomst bij **financiële** en **economische vakken**, maar ook bij vakken als **aardrijkskunde**, **biologie** en **informatica** kan de TI-83 zeer behulpzaam zijn.

Wilt u meer weten over dit rekenwonder, bel of schrijf naar Texas Instruments.
Tel.: 020 - 5469825,
fax: 020 - 6463136

Wiskunde dichterbij

TI-83: dé machine voor de tweede fase!

Texas Instruments Nederland, Postbus 74781, 1070 BT Amsterdam

TEXAS INSTRUMENTS

Oplossingen p. 2 en 3

Chocolade breken
65 repen chocolade

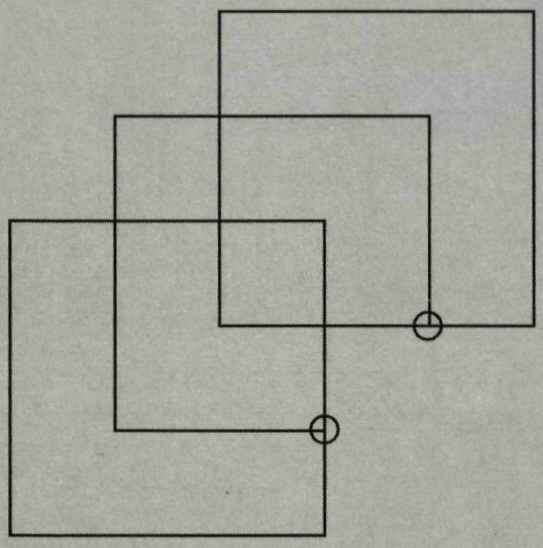
Persconferentie
Eén van de twee uitspraken van Ken moet waar zijn. Dus is Yuri technicus, Ilja wetenschapper, John radio-operator en is Ken piloot.

Middeleeuwen
10%

Zagen
48 seconden

Broers en zussen
3 broers, 4 zussen

Overtrekken
Bij de eerste figuur kun je in elk hoekpunt beginnen. Bij de tweede figuur lukt het alleen maar wanneer je in één van de aangegeven hoekpunten begint.



Over de medewerkers

drs F. Akveld-van Buijtenen
is docent wiskunde aan de EUR

dr W. Bosma
is docent computer-algebra aan de KUN

prof.dr J. van de Craats
is hoogleraar wiskunde aan de UvA en de Open Universiteit

dr L.J. van Gastel
is werkzaam bij het Expertisecentrum Computer Algebra Nederland

D.C. Gijswijt
is student wiskunde aan de UvA

dr K.P. Hart
is docent topologie aan de TU Delft

drs A. Heck
is werkzaam bij het Expertisecentrum Computer Algebra Nederland

dr J. Hogendijk
is docent wiskunde aan de RUU

B. de Jongste
is recreatief wiskundige te Den Haag

dr ir T. Koetsier
is docent geschiedenis van de wiskunde aan de VU

ir A.A.J. Lefeber
is AIO systeem- en besturingstheorie aan de UT

R. van Luijk
is student wiskunde aan de UU

drs W.R. Oudshoorn
is AIO algebra en meetkunde aan de RUG

ir S.M. van Rijnswou
is OIO computeralgebra aan de TUE

dr P. Stevenhagen
is docent algebraïsche getaltheorie aan de UvA

dr R.F. Swarttouw
is docent wiskunde aan de VU

drs C.G. Zaal
is OIO algebraïsche meetkunde aan de UvA

1998 Wolters-Noordhoff is er klaar voor

Een nieuwe reeks Wiskunde en ICT:

Zojuist verschenen:

De TI-83, kennismaken en toepassen

Auteurs: Paul Drijvers en Michiel Doorman

ISBN 90 01 83290 3

gen 52 p met hulpkaart *f* 7,50

De CASIO-9850, kennismaken en toepassen

Auteurs: Paul Drijvers, Michiel Doorman en Willem Hoekstra

ISBN 90 01 83291 1

gen 48 p met hulpkaart *f* 7,50

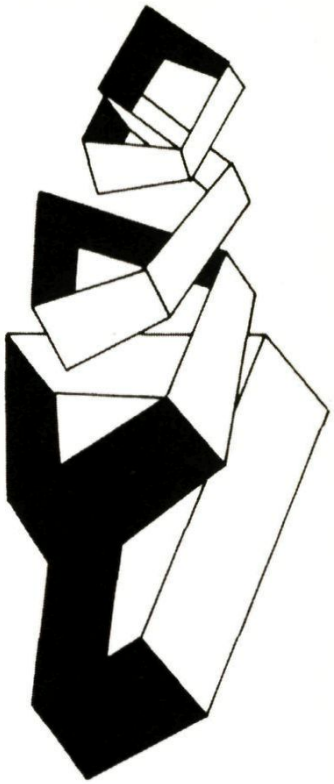
Beide boekjes, bedoeld voor havo- en vwo-leerlingen, zijn eerder in experimentele vorm op Profi-scholen uitgeprobeerd. In samenwerking met auteurs van *Netwerk* en *Moderne wiskunde* zijn door auteurs van het Freudenthal Instituut uit deze experimenten nieuwe boekjes geschreven die passen bij het nieuwe examenprogramma havo-vwo en daarmee ook bij de **nieuwe edities** van *Netwerk* en *Moderne wiskunde*.
De boekjes bestaan uit twee onderdelen, geschreven in practicum-vorm. Het eerste onderdeel is een kennismaking met de machine. Het tweede deel bestaat uit toepassingen. De boekjes zijn voorzien van handige hulpkaarten en zijn ook geschikt als naslagwerk.

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen
Telefoon (050) 522 63 11

Ook verkrijgbaar via de boekhandel

Wolters Noordhoff

419/7351



Pythagoras

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van HAVO en VWO.
Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

Abonnementen

Abonnees kunnen zich op één van de volgende manieren aanmelden .
Telefonisch: (070) 314 35 00, per fax: (070) 314 35 88,
via Internet: www.wins.uva.nl/misc/pythagoras/abonnee.html
of schriftelijk (een postzegel is niet nodig):
NIAM, Antwoordnummer 97007, 2509 VH Den Haag

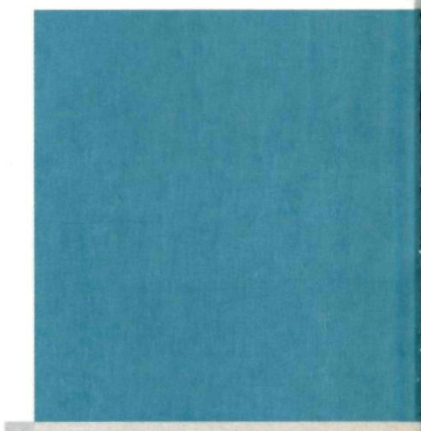
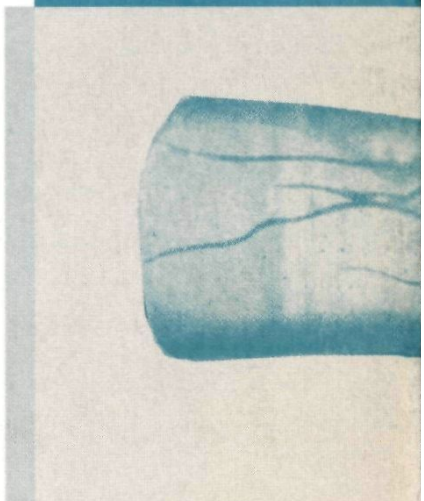
Tarieven '97-'98

Een jaarabonnement op Pythagoras kost *f* 37,50
Losse nummers *f* 8,-- of BF 160
Overige prijzen (per jaar):
Pythagoras België BF 950
Pythagoras buitenland *f* 52,50
Pythagoras/Archimedes *f* 67,50
Pythagoras/Archimedes België BF 1570
Pythagoras/Archimedes buitenland *f* 83,50

Schoolabonnementen

Voor leerlingen in het voortgezet onderwijs en studenten aan lerarenopleidingen zijn er speciale schoolabonnementen.
Voor *f* 25,00 per jaar ontvangen zij één heel jaar lang Pythagoras, op voorwaarde dat de docent wiskunde zorgt voor de aanmelding en verspreiding. Abonnees krijgen een acceptgiro thuisgestuurd.
Bij aanmelding van 5 of meer abonnees, 1 jaarabonnement gratis.

Uitgever/advertenties

NIAM, Neuhuyskade 94, 2596 XM Den Haag
Telefoon (070) 314 35 00, Fax (070) 314 35 88, Giro 5513796
Bankrekening België: ING Bank Brussel
reknr. 627-7064242-48 t.n.v. TMS

Pythagoras wordt gesponsord
door de Universiteit van Amsterdam